ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД
ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ЧАСТЬ 2. СЕМИНАРЫ

МОГИЛЕВСКИЙ
ИЛЬЯ ЕФИМОВИЧ
ЮШКОВ
ЕГОР ВЛАДИСЛАВОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ГОНОЧЕНКО БОГДАНА

Содержание

Семинар 1

Понятие функции многих переменных. Предел функции многих переменных.

На лекциях уже было введено понятие евклидова пространства $\mathbb{E}^m$, расстояния между точками этого пространства. Здесь мы особенно детально повторяться не будем, но, тем не менее, некоторые вещи повторим, особенно это нужно для того, чтобы научиться решать задачи.

Пусть $\{M\} \subset \mathbb{E}^m$. На лекциях уже было введено понятие *открытого множества*, *замкнутого множества*, *окрестности* некоторой точки. Повторим основные определения точек в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^m$ относительно множества $\{M\}$.

Определение 1. Точка m_1 называется **внутренней точкой** множества $\{M\}$, если существует такая окрестность точки m_1, целиком принадлежащая множеству $\{M\}$.

Из этого следует, что внутренняя точка обязательно принадлежит данному множеству.

Определение 2. Точка m_2 называется **граничной точкой** множества $\{M\}$, если в любой окрестности точки m_2 имеются как точки принадлежащие множеству $\{M\}$, так и не принадлежащие ему.

При этом сама точка m_2 может как принадлежать множеству, так и не принадлежать.

Определение 3. Точка m_3 называется **изолированной точкой** множества $\{M\}$, если она принадлежит множеству $\{M\}$ и существует такая окрестность точки m_3, что в этой окрестности нет других точек множества $\{M\}$.

Из определения изолированной точки следует, что изолированная точка обязательно является граничной точкой. Потому что в любой её окрестности содержатся точки, как принадлежащие множеству $\{M\}$ (она сама), так и точки не принадлежащие множеству $\{M\}$ (все остальные точки).

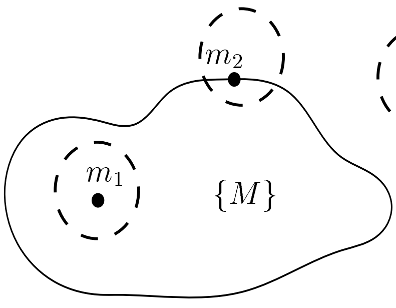

Рис. 1. Разные виды точек.

Определение 4. Замкнутым множеством называется множество, которое содержит все свои граничные точки.

Определение 5. Точка m называется **предельной точкой** множества $\{M\}$, если в любой её окрестности имеются точки принадлежащие множеству $\{M\}$, отличные от нашей исходной точки m.

Задача 1. Доказать утверждение: для того, чтобы множество $\{M\}$ было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы оно содержало все свои предельные точки.

Достаточность. Согласно нашему утверждению нам дано, что множество $\{M\}$ содержит все свои предельные точки. Нам надо доказать, что множество $\{M\}$ замкнутое, то есть содержит все свои граничные точки.

Для этого давайте рассмотрим произвольную граничную точку. Из определения непосредственно следует, что граничная точка является либо предельной точкой, как точка m_2 на рисунке, либо изолированной точкой, как точка m_3 на рисунке (См. рис. 1). Предельная точка принадлежит множеству по условию, а изолированная точка принадлежит множеству по определению. Таким образом, мы получили, что достаточность доказана: любая граничная точка принадлежит множеству, следовательно множество замкнутое.

Необходимость. Пусть наше множество является замкнутым, докажем, что оно содержит все свои предельные точки. Согласно определению любая предельная точка является либо внутренней точкой, как точка m_1 на рисунке, либо граничной точкой, как m_2 на рисунке (См. рис. 1). Внутренняя точка принадлежит множеству по определению, а граничная точка принадлежит множеству в силу замкнутости. Таким образом, необходимость полностью доказана.

Определение 6. Говорят, что в $\mathbb{E}^m$ задана последовательность точек $\{M_n\}$, если каждому натуральному числу n поставлена в соответствии некоторая точка M_n евклидова пространства $\mathbb{E}^m$.

Определение 7. Последовательность называется **сходящийся** к точке M, если

$$\lim_{n\to\infty} \rho(M_n, M) = 0$$

Где $\rho(M_n, M)$ – расстояние между точкой M_n и M.

Замечание. Если $M = M(x_1, \ldots, x_n)$ и $M_n = M_n(x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)})$, то

$$M_n \to M \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(n)} \to x_1 \\ x_2^{(n)} \to x_2 \\ \ldots \\ x_n^{(n)} \to x_n \end{cases}$$

Для последовательностей справедливы те утверждения, естественным образом перенесённые на случай многих переменных, которые были ранее для случая одной переменной. В частности, можно сформулировать понятие *фундаментальной* *последовательности*, *критерий Коши* сходимости последовательности, также остаётся справедливой *теорема Больцано-Вейерштрасса.*

Определение 8. Пусть $\{M\} \subset \mathbb{E}^m$. Говорят, что на $\{M\}$ определена функция $u = f(M)$, если каждой точке $M \in \{M\}$ поставлено в соответствии единственным образом действительное число u.

Примером функции многих переменных может служить неравномерно распределённая плотность объёмного тела. Каждой точке тела ставится в соответствии число $\rho(M)$, называемое плотностью тела в данной точке.

Введём теперь определение предела функции многих переменных. Пусть функция $u = f(M)$ определена на $\{M\} \subset \mathbb{E}^m$. Пусть точка M_0 – предельная точка множества $\{M\}$. Также как и для случая одного переменного введём два определения предела функции: **по Коши** и **по Гейне**.

Определение по Коши. Число b называется пределом функции $u = f(M)$ в точке M_0, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой точки $M \in \{M\}$, удовлетворяющей условию $0 < \rho(M, M_0) < \delta$, выполнено следующее неравенство $|f(M) - b| < \varepsilon$.

В самой точке M_0 функция может быть, как определена, так и не определена. Для определения весьма существенно, чтобы в любой окрестности точки M_0 имелись точки множества $\{M\}$, на которых функция определена, если это не будет выполнено, то тогда может такое получится, что ни одной точки $M \in \{M\}$ не будет среди точек, удовлетворяющих условию $0 < \rho(M, M_0) < \delta$.

Определение по Гейне. Число b называется пределом функции $u = f(M)$ в точке M_0 $(M \to M_0)$, если $\forall \{M_n\} \in \{M\}$: $M_n \to M$, удовлетворяющих $\rho(M_n, M_0) \neq 0$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(M_n)\} \to b$.

Для того, чтобы мы могли выбрать последовательность точек $\{M_n\}$, на которых функция определена, сходящуюся к точке M_0, нам нужно, чтобы точка M_0 была обязательно предельной точкой множества $\{M\}$. Если же точка M_0 не является предельной точкой множества $\{M\}$, то может быть реализована ситуация, когда в некоторой окрестности точки M_0 нет точек из области определения функции, и тогда определение предела по Гейне также теряет смысл. Следует отметить, что для функции многих переменных справедливы те основные теоремы о пределах, которые были сформулированы для случая функции одного переменного. В частности определения по Коши и по Гейне эквивалентны, кроме того, справедлива теорема об арифметических операциях над пределами.

Задача 2. Докажите, что $f(x, y) = \sin(x + y) \ln(x^2 + y^2)$ является бесконечно малой в начале координат.

В случае функции многих переменных понятие бесконечно малой функции такое же, как и в случае одного переменного. Функция называется *бесконечно малой* в точке M_0, если её предел в этой точке равен нулю.

Давайте воспользуемся определением предела по Коши, согласно этому определению мы должны $\forall\varepsilon > 0$ указать такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для любой точки M из области определения функции, удовлетворяющей условию $0 < \rho(M, M_0) < \delta$, выполнено неравенство $|f(M) - b| < \varepsilon$.

Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Наша функция определена во всех точках, кроме начала координат, то есть кроме точки $O\,(0,0)$. Таким образом, начало координат является предельной точкой области определения функции.

Пока будем считать δ достаточно малым, однако не будем указывать его конкретное значение. Конкретное значение δ определим немного попозже.

Рассмотрим $|f(x,y)|$ и покажем, что если потребовать условие, чтобы точка $M(x,y)$ была в δ-окрестности точки $O\,(0,0)$, значение функции $f(x,y)$ в этой точке не превосходит ε.

$$|f(x,y)| = \left|\sin(x+y)\ln\left(x^2+y^2\right)\right| = \left|\frac{\sin(x+y)}{x+y}\cdot(x+y)\ln\left(x^2+y^2\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{\sin(x+y)}{x+y}\right|\cdot\left|(x+y)\ln\left(x^2+y^2\right)\right|$$

Известно, что $|\sin t| \le |t|$.

$$\Rightarrow \left|\frac{\sin(x+y)}{x+y}\right| \le 1$$

$$\Rightarrow |f(x,y)| \le |x+y|\cdot\left|\ln\left(x^2+y^2\right)\right|$$

Для проведения дальнейших оценок, давайте перейдём к полярным координатам. Пусть $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$. Тогда

$$|f(x,y)| \le |\cos\phi + \sin\phi|\cdot\left|\rho\ln\rho^2\right| \le \left(\underbrace{|\cos\phi|}_{\le 1} + \underbrace{|\sin\phi|}_{\le 1}\right)\cdot|2\rho\ln\rho| \le 4\,|\rho\ln\rho|$$

Известно, что $\ln\rho$ неограниченно растёт по модулю при $\rho\to 0$, но растёт медленнее любой степени ρ. Поэтому

$$\lim_{\rho\to 0}\rho\ln\rho = 0$$

Так как данная функция $\rho\ln\rho$ является бесконечно малой при $\rho\to 0$, из этого следует, что делая ρ достаточно малым, то есть меньше некоторого δ, мы делаем нашу функцию $|\rho\ln\rho| < \frac{\varepsilon}{4}$. Таким образом, $\exists\delta > 0$, что $|\rho\ln\rho| < \frac{\varepsilon}{4}$. Таким образом, имеем следующую оценку

$$|f(x,y)| < 4\cdot\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

Следовательно, мы доказали, что данная функция является бесконечно малой в начале координат.

Задача 3. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{\sin xy}{x}$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{\sin xy}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{\sin xy}{xy}\cdot y$$

Под синусом и в знаменателе стоят одинаковые бесконечно малые функции. Тогда в силу первого замечательного предела получаем:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{\sin xy}{xy}=1$$

Также очевидно, что $\lim\limits_{y\to a} y=a$. Тогда по *теореме об арифметических операциях над пределами* получаем:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{\sin xy}{x}=a$$

Задача 4. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}(1+xy^2)^{\frac{y}{x^7y+xy^2}}$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\left(1+xy^2\right)^{\frac{y}{x^7y+xy^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\exp\left(\frac{1}{x^7+xy}\ln\left(1+xy^2\right)\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\exp\left(\frac{1}{x^7+xy}\left(xy^2+o(x)\right)\right)=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\exp\left(\frac{1}{x^6+y}\left(y^2+o(1)\right)\right)=e^3$$

Задача 5. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

Перейдём к полярным координатам $x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=\lim_{r\to\infty}\frac{r^2}{r^4(\cos^4\phi+\sin^4\phi)}=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r^2(\cos^4\phi+\sin^4\phi)}$$

Отдельно покажем, что $\cos^4\phi+\sin^4\phi\geq\frac{1}{2}\ \forall\phi$. Тогда мы будем иметь произведение бесконечно малой функции на ограниченную. Такое произведение будет бесконечно малой функцией и мы докажем, что предел равен нулю.

$$\cos^4\phi+\sin^4\phi=\cos^4\phi+2\sin^2\phi\cos^2\phi+\sin^4\phi-2\sin^2\phi\cos^2\phi=$$

$$=(\cos^2\phi+\sin^2\phi)^2-\frac{1}{2}\cdot\sin^2 2\phi=1-\frac{1}{2}\cdot\sin^2 2\phi\geq\frac{1}{2}$$

Так как $0\leq\sin^2 2\phi\leq 1$. Таким образом, мы доказали, что исходный предел равен нулю.

Иногда бывает так, что предела не существует. Приведём пример.

Задача 6. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$.

Из определения предела по Коши и по Гейне следует, что каким бы образом не стремились к нулю x и y выражение под пределом должно быть сколь угодно близко к некоторому фиксированному числу. Иными словами, стремясь к нулю разными способами мы обязательно должны получать одно и тоже число в пределе. То есть предел не должен зависеть от того, каким способом мы стремимся, в данном случае, к началу координат. Для того, чтобы доказать отсутствие предела удобно устремиться к началу координат разными способами. Например, по разным прямым. Если мы при этом получим разные предельные значения, то это будет означать отсутствие предела в силу определений предела по Коши и по Гейне. Однако, как покажут дальнейшие примеры, если мы стремимся по любой прямой к какой-то точке и получаем одно и тоже значение предела, то отсюда не следует, что предел равен этому значению.

Чтобы доказать отсутствие предела, устремимся по некоторой прямой. Возьмём прямую $y = kx$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+kx^2+k^2x^2}{x^2-kx^2+k^2x^2}=\frac{1+k+k^2}{1-k+k^2}$$

Нетрудно видеть, что если мы выберем разные значения k, то есть выберем разные прямые стремления к нулю, мы получим разные предельные значения. Таким образом, мы показали, что данный предел не существует.

Обратим внимание, что таким способом мы можем доказывать только отсутствие предела при стремлении к какой-либо точке, устремляясь по разным прямым нельзя доказать наличие предела, а только его отсутствие.

Задача 7. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Для того, чтобы доказать отсутствие предела, давайте рассмотрим определение предела по Гейне. Согласно этому определению, для любой последовательности точек $\{M_n\}$, сходящейся к точке M_0, должно быть выполнено, что соответствующая последовательность значений функции сходится к b. Поэтому, если мы укажем, например, две последовательности точек, сходящиеся в данном примере к началу координат, на которых последовательности значений функции сходятся к разным числам, будет доказано отсутствие предела в точке ноль для данной функции.

В качестве этих последовательностей давайте сначала выберем последовательность точек $A_n\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$. Нетрудно видеть, что на всех точках этой последовательности данная функция будет определена, она определена везде кроме начала координат и принимает значение равное нулю.

$$f(A_n)=\frac{\sin|\frac{1}{n}-\frac{1}{n}|}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}}=0$$

Следовательно, последовательность соответствующих значений функции сходится к нулю. Далее рассмотрим последовательность точек $B_n\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)$.

$$f(B_n) = \frac{\sin\left|\frac{2}{n} - \frac{1}{n}\right|}{\sqrt{\frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{5}\cdot\frac{1}{n}}$$

В силу первого замечательного предела получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

Таким образом получаем:

$$\lim_{n\to\infty} f(B_n) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Тем самым мы получили явное противоречие с определением предела по Гейне, мы предложили пример двух последовательностей, которые обе являлись бесконечно малыми, в том смысле что и A_n и B_n сходились к началу координат, а соответствующие последовательности значений функции у нас сходились к разным точкам.

Задача 8. Докажите, что функция $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ обладает следующими свойствами:

а)При стремлении точки M к началу координат по любой прямой, проходящей через начало координат, предел функции равен нулю,

б)Предел функции в точке $O(0,0)$ не существует.

То есть этот номер иллюстрируют, что, даже стремясь по любой прямой и получая одинаковое значение предела функции, все равно мы не доказываем существование предела функции в этой точке.

а)У нас x стремится к нулю, y стремится к нулю, причем стремление осуществляется по некоторой прямой, рассмотрим случай, когда прямая описывается уравнением $y = kx$, в том числе, когда $k = 0$. Из нашего рассмотрения тем самым будет исключено стремление к началу координат вдоль оси y, однако непосредственной подстановкой мы видим, что, если мы будем стремиться к началу координат вдоль оси y, когда x равно нулю, предел точно равен нулю, поэтому давайте рассмотрим остальные прямые, которые могут быть описаны уравнением $y = kx$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2kx}{x^4+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{x^2+k^2} = 0$$

Нетрудно видеть, что, если k отлично от нуля, то знаменатель не равен нулю, а числитель является бесконечно малой функцией при $x \to 0$. Таким образом, при k отличной от нуля, предел будет равен нулю, однако же при k равном нулю предел тоже будет равен нулю, если в исходном выражении подставить $y = 0$ при $x \neq 0$, мы непосредственно получаем, что дробь равна нулю, потому что в знаменателе x отличен от нуля, числитель равен нулю, таким образом мы показали, что при стремлении к началу координат по любой прямой, соответствующий предел существует и равен нулю, однако из этого не следует, что существует предел функции в точке $O(0,0)$ в общем случае, потому что в определении предела мы можем стремиться, как угодно. Давайте, например, следующий раз устремимся по некоторой параболе и покажем, что стремясь к началу координат по некоторой параболе, мы получим разные предельные значения, выбирая разные параболы для соответствующего стремления.

б) $y = kx^2$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 k x^2}{x^4+k^2x^4} = \frac{k}{1+k^2}$$

Из полученного значения непосредственно видно, что при разных значениях k мы получим разные значения предела, то есть, устремляясь к началу координат по разным параболам, мы получаем разные предельные значения, но отсюда непосредственно, в силу определений, следует, что предела данной функции в начале координат не существует.

Непрерывность функции многих переменных.

Пусть функция $u = f(M)$ определена на некотором множестве $\{M\} \subset \mathbb{E}^m$, точка M_0 принадлежит множеству $\{M\}$, кроме того, M_0 является предельной точкой множества $\{M\}$.

Определение 9. Функция $u = f(M)$ называется непрерывной в точке M_0, если $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$

Разумеется для того, чтобы сформулировать определение непрерывной функции нам обязательно требуется, чтобы M_0 принадлежала области определения, поскольку мы рассматриваем значение функции в этой точке, кроме того, поскольку мы рассматриваем предел при M стремящемся к M_0. M_0 обязательно должна быть предельной точкой области определения функции, потому что, если точка M_0 является изолированной точкой, то может не быть такой окрестности точки M_0, в которой имеются другие точки из области определения, и тем самым определение предела потеряет смысл и потеряет тогда смысл определение непрерывности функции, то есть для нас обязательно важно, чтобы M_0 была предельной точкой области определения, так же, как и в случае функций одного переменного, мы можем в определении непрерывной функции в точке M_0 встроить имеющиеся определения предела, например, по Коши, при этом все останется похожим образом, только можно будет не требовать $0 < \rho(M, M_0) < \delta$, оно должно быть определено, когда мы просто вводили определение предела, для нас было важно, что M стремилась к точке M_0, но не совпадало с ней, когда речь идёт об определении непрерывности функции совершенно необязательно, чтобы соответствующую окрестность была проколотой, вполне допустимо чтобы точки M и M_0 в этой окрестности совпадали.

Далее, помимо такой формы условия непрерывности, можно сформулировать еще и разностную форму условия непрерывности. Рассмотрим приращение функции в точке M_0, то есть $\Delta u = f(M) - f(M_0)$. Нетрудно видеть из введенных определений, что приращение Δu будет стремиться к нулю, если M стремится к точке M_0 и обратно, если любое приращение Δu такого вида стремится к нулю при M стремящемся к M_0, то функция будет непрерывной в точке M_0, то есть мы можем записать разностную форму условия непрерывности

$$\lim_{M\to M_0} \Delta u = \lim_{M\to M_0} f(M) - f(M_0) = 0$$

Это разностная форма условия непрерывности функции. Далее, если говорить о задании приращений, то мы можем сделать следующее. Пусть $M_0(a_1, a_2, \dots, a_m)$ и $M(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \dots, a_m + \Delta x_m)$. Условие непрерывности в разностной форме мы можем записать вот таким образом:

$$\lim_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \dots\\ \Delta x_m\to 0}} \{f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \dots, a_m + \Delta x_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m)\} = 0$$

Теперь давайте рассмотрим случай, когда некоторое приращение дается не каждой переменной любым образом, а только одной из всех наших переменных, например, переменной x_k, то есть мы зафиксируем все переменные кроме переменной x_k.

$$\Delta_{x_k} u = f(a_1, \dots, a_k + \Delta x_k, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_m)$$

Определение 10. Если выполняется

$$\lim_{\Delta_{x_k}\to 0} \Delta_{x_k} u = 0,$$

то данная функция u называется **непрерывной по переменной** x_k.

Таким образом, мы ввели просто понятие непрерывности функции многих переменных и непрерывность функции по переменной x_k, и для того, чтобы лучше различать эти понятия, исходное определение непрерывности функции часто называют **непрерывностью по совокупности переменных**, а введенное здесь понятие называют **непрерывностью по отдельным переменным**. Давайте поговорим о связи непрерывности функции по совокупности переменных и непрерывности функции по отдельным переменным.

Теорема 1. Пусть функция $u = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки M_0 и непрерывна в точке M_0 по совокупности переменных. Тогда функция $u = f(M)$ непрерывна в точке M_0 по каждой переменной.

Обратное, вообще говоря, неверно. То есть из непрерывности функции в точке M_0 по каждой переменной отнюдь не следует непрерывность функции в точке M_0 по совокупности переменных, кроме того, весьма существенным условием является то, что функция определена в некоторой окрестности точки M_0, потому что для нас существенно то, что в точке M_0 мы можем дать приращение каждой из переменных, когда речь идет о непрерывности по каждой переменной, но а в общем случае можно привести такой пример, когда M_0 является предельной точкой области определения функции, а в этой точке функция определена, однако не определена на прямых параллельных осям координат и проходящих через точку M_0.

Таким образом, получается, что в этом случае можно говорить о непрерывности по совокупности переменных, однако нельзя говорить о непрерывности по отдельным переменным, потому что мы не можем дать по отдельным переменным приращение.

В качестве примера рассмотрим функцию:

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\cos\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right),\ x\neq 0, y\neq 0\\ 0,\ x=y=0.\end{cases}$$

Нетрудно видеть, что данная функция определена на всей плоскости кроме осей координат, на осях координат она определена только в точке $O(0,0)$. Мы рассмотрим данную функцию на плоскости (x,y), рассмотрим некоторую окрестность начала координат, в начале координат функция определена, начало координат является предельной точкой области определения, потому что в любой окрестности начала координат есть другие точки, на которых данная функция определена, однако данная функция не определена на осях координат, поэтому, зафиксировав переменные x и y равными нулю, ни одной из них мы не можем дать приращение, таким образом чтобы функция была определена, тем самым теорема здесь не работает и нет смысла говорить о непрерывности данной функции по отдельным переменным, поэтому в теореме является весьма существенным условием непрерывность, то, что функция определена в некоторой окрестности точки M_0 и непрерывна в точке M_0 по совокупности переменных. То, что обратное неверно мы увидим в дальнейшем, рассматривая ряд примеров.

Также тут естественным образом переносится ряд теорем для функций одного переменного, в частности для непрерывных функций справедлива *теорема об арифметических операциях над непрерывными функциями*, *теорема непрерывности сложной функции*, первая и вторая *теоремы Вейерштрасса*, причем вместо сегмента, в случае многих переменных, мы должны будем рассматривать замкнутое ограниченное множество, также остается справедливой и *теорема Кантора* для равномерной непрерывности, но об этом речь пойдет впереди, сейчас давайте рассмотрим несколько примеров на непрерывность функции.

Задача 9. Требуется провести исследование функции u в точке $O(0,0)$ и в точке $A(1,2)$ на непрерывность по совокупности переменных и по отдельным переменным.

$$u=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4},\ x^4+y^4\neq 0\\ 0,\ x^4+y^4=0.\end{cases}$$

Давайте начнем соответствующее исследование с начала координат $O(0,0)$, отметим, что данная функция определена на всей плоскости, поэтому, если она будет непрерывной по совокупности переменных, то в силу теоремы 1 она будет непрерывной в точке $O(0,0)$ и по отдельным переменным, то есть дополнительное исследование не потребуется, поэтому давайте начнем исследование с непрерывности по совокупности переменных, если же мы увидим, что функция разрывна по совокупности переменных, тогда потребуется исследование на непрерывность функции по отдельным переменным.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}=\lim_{r\to 0}\frac{r^4\cos^2\phi\sin^2\phi}{r^4\left(\cos^4\phi+\sin^4\phi\right)}=\frac{\cos^2\phi\sin^2\phi}{\left(\cos^4\phi+\sin^4\phi\right)}$$

Нетрудно видеть, что после сокращения мы получаем, что полученная величина предела при $r\to 0$ зависит от ϕ, то есть, устремляясь к нулю при разном ϕ, мы получаем разные предельные значения, таким образом видно, что предел нашей функции в начале координат не существует, следовательно функция не является непрерывной по совокупности переменных в начале координат, тем самым мы не можем воспользоваться теоремой и должны провести исследование на непрерывность данной функции по отдельным переменным. Давайте рассмотрим непрерывность по переменной x, в силу того, что переменная x и y входят в выражение для функции симметрично, нам будет достаточно ограничиться исследованием на непрерывность лишь по переменной x. Для этого зафиксируем переменную y равной нулю и рассмотрим функцию $u(x,0)$.

$$u(x,0)=\begin{cases}0,\ x\neq 0\\ 0,\ x=0.\end{cases}\Rightarrow u(x,0)\equiv 0.$$

Следовательно, функция тождественно равная нулю является непрерывной функцией в начале координат, как функция переменной x, отсюда следует, что по переменной x наша функция непрерывна. В силу того, что x и y входят симметрично, совершенно аналогично мы видим, что по переменной y функция также непрерывна, следовательно, функция непрерывна по каждой переменной в точке $O(0,0)$. Данный пример наглядно иллюстрируют, что из непрерывности по каждой переменной в отдельности не следует непрерывность по совокупности переменных, мы фактически привели пример функции, которая непрерывна по каждой переменной, но при этом не является непрерывной по совокупности переменных.

Исследование на непрерывность в точке $A(1,2)$ не представляет каких-либо особых трудностей. Мы рассмотрим частное значение функции в точке $A(1,2)$, поскольку нет никакой неопределенности нам достаточно лишь просто вместо x и y подставить числа 1 и 2 и получить частное значение функции в точке $A(1,2)$, далее мы видим, что в окрестностях точки $A(1,2)$ и в самой точке $A(1,2)$ функция будет непрерывна по теореме об арифметических операциях над непрерывными функциями: все функции, входящие в числитель и знаменатель, являются непрерывными и знаменатель в окрестности точки $A(1,2)$ отделён от 0, потому что мы имеем сумму четвертых степеней. Таким образом, в точке $A(1,2)$ функция непрерывна по совокупности переменных, следовательно, в силу приведенной теоремы непрерывна в точке $A(1,2)$ и по каждой переменной в отдельности.

Задача 10. Требуется провести исследование функции u в точке $O(0,0)$ на непрерывность по совокупности переменных и по отдельным переменным.

$$u = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4},\ x^4+y^4 \neq 0 \\ 0,\ x^4+y^4=0. \end{cases}$$

Мы начнем с исследования в точке $O(0,0)$ и начнем с исследования на непрерывность по совокупности переменных.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3y^2}{x^4+y^4} = \lim_{r\to 0} \frac{r^5\cos^3\phi\sin^2\phi}{r^4\left(\cos^4\phi+\sin^4\phi\right)} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos^3\phi\sin^2\phi}{\left(\cos^4\phi+\sin^4\phi\right)} = 0$$

$$\cos^3\phi\sin^2\phi \le 1,\ \cos^4\phi+\sin^4\phi \ge \frac{1}{2}$$

Таким образом, мы имеем произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию, раз знаменатель отделён от нуля, и поэтому данная функция под пределом является бесконечно малой, то есть предел будет ровен нулю, что, как мы видим, совпадает со значением функции в точке $O(0,0)$, следовательно, по определению наша функция является непрерывной в точке $O(0;0)$ по совокупности переменных, используя введенную ранние теорему, а также используя тот факт, что наша функция определена на всей плоскости, мы можем заключить, что наша функция в точке $O(0;0)$ также будет непрерывной по каждой переменной в отдельности. Значит функция u непрерывна в точке $O(0;0)$ по совокупности переменных и по каждой переменной в отдельности.

Задача 11.Требуется провести исследование функции u в точке $O(0,0)$ и в точке $A(1;-1)$ на непрерывность по совокупности переменных и по отдельным переменным.

$$u = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x+y},\ x+y \neq 0 \\ 0,\ x+y=0. \end{cases}$$

Здесь ситуация несколько сложнее, потому что проблема у нашей функции оказывается на прямой $x+y=0$, причем на самой то прямой проблем нет, потому что отдельным выражением она определена на этой прямой нулем, однако, если мы посмотрим на выражение для функции в окрестности этой прямой: знаменатель может стремиться к нулю за счет чего в принципе вся функция может не ограничено расти. Давайте предположим, что предела в этой точке у функций нет и чтобы доказать это, постараемся устремиться к началу координат по некоторым кривым, если при стремлении по разным кривым мы получим разные предельные значения, то тогда мы увидим, что предела у функции в начале координат нет, но в данном случае стремиться по прямым у нас оказывается достаточно тяжело, следует обратить внимание, что при приближении к началу координат у нас числитель будет малой величиной второго порядка, а знаменатель будет малой величиной первого порядка, чтобы наиболее ярко проявилось то, что предела нет нам нужно, чтобы знаменатель оказался тоже малой величиной второго порядка, тогда стремясь по разным кривым, мы получим разные предельные значения, следовательно, нам будет удобно устремиться по некоторой параболе.

Пусть $y = -x + kx^2$, тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+(kx^2-x)^2}{kx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+(kx-1)^2}{k} = \frac{2}{k}$$

При разных k мы получаем разные предельные значения, откуда следует, что предел данной функции в точке $O(0,0)$ не существует, но и тем самым оказывается, что функция не является непрерывной в точке $O(0,0)$ по совокупности переменных. Дальше давайте рассмотрим вопрос о непрерывности в точке $O(0,0)$ по отдельным переменным. Рассмотрим функции $u(x,0)$, нам достаточно рассмотреть непрерывность только по переменной x, ввиду того, что переменные входят симметрично.

$$u(x,0) = \begin{cases} x, \ x \neq 0 \\ 0, \ x = 0. \end{cases} \Rightarrow u(x,0) \equiv x$$

Данная функция одной переменной является непрерывной функцией, следовательно мы можем сделать вывод, что наша функция непрерывна в начале координат по переменной x и, виду симметрии, мы получаем, что также наша функция является непрерывной в начале координат по переменной y.

Что касается непрерывности в точке $A(1,-1)$, то мы видим, что здесь непрерывность по совокупности переменных отсутствует, потому что, если мы возьмем значения близкие к значениям в точке $A(1,-1)$ знаменатель у нашей функции будет сколь угодно малым, но а числитель представляет величину сколь угодно близкой к 2. Таким образом, мы видим, что функция является бесконечно большой в точке $A(1,-1)$, что не соответствуют значению 0 в точке $A(1,-1)$, которое дано нам по определению. Таким образом, поскольку предела функции в точке $A(1,-1)$ не существует, нельзя говорить о непрерывности по совокупности переменных. Функция является разрывной по совокупности переменных в точке $A(1,-1)$.

Что же касается непрерывности по отдельным переменным? Для этого давайте рассмотрим, например, непрерывность по переменной x.

$$u(x,-1) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1}, \ x-1 \neq 0 \\ 0, \ x-1 = 0. \end{cases}$$

Мы видим, что данная функция является бесконечно большой при $x = 1$, поэтому поводу является разрывной по переменной x. Совершенно аналогично показывается, что данная функция разрывна и по переменной y.

Семинар 2

Частные производные.

Пусть точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ – внутренняя точка области определения функции $u = f(M)$. Зададим в точке M некоторое приращение функции $u = f(M)$, соответствующее приращению переменной x_k. То есть приращение такого вида:

$$\Delta_{x_k} u = f\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m\right) - f\left(x_1, \ldots, x_m\right)$$

Используя это приращение, составим разностное отношение $\frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}$ и сформулируем определение частной производной.

Определение 1. Такой предел $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}$, если он существует, называется **частной производной** функции $u = f(M)$ по переменной x_k в точке M.

Из самого определения частной производной функции u непосредственно видно, что частная производная – это производная функции u одной переменной x_k при фиксированных значениях всех остальных переменных кроме x_k, поэтому, так как определение выглядит точно таким же образом, как и определение производной функции одной переменной, вычисляются частные производные ровно по тем же правилам по каким вычислялись производные функции одного переменного, просто следует положить константами значения всех остальных переменных и вычислять производную функции u только по переменной x_k. Физический смысл производной по переменной x_k – это скорость изменения функции вдоль оси, соответствующей переменной x_k, то есть такой же как и у обычной производной функции одной переменной. Следует заметить, что если точка M является граничной точкой нашей области определения функции, то тогда введенное определение может не работать. Например, если область определения функция имеет вот такой вид:

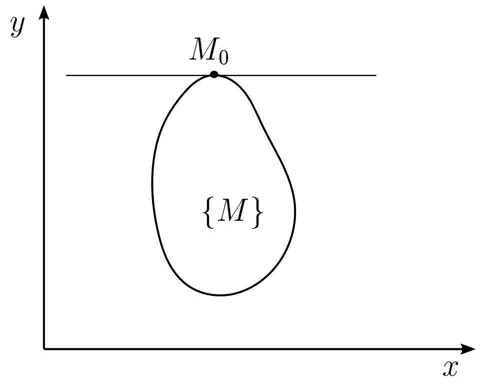

Рис. 2. Пример, когда точка M_0 – граничная точка области определения функции.

Нетрудно видеть, что в точке M_0 невозможно дать приращение переменной x, потому что как только переменной x мы даем некоторое приращение мы сразу же выходим за границы области определения функции, там она становится не определена, поэтому определение, в том виде как мы его сформулировали для внутренней точки, в данном случае перестает работать. Для того, чтобы определить значение производной в точке M_0, например, по переменной x, рассматривают производные по переменной x во внутренних точках, близких к точке M_0, а затем переходят к пределу при $M \to M_0$.

В частности, для того, чтобы определить производную функции u по переменной x в точке M_0, рассматривают предел, если он существует, $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = \lim\limits_{M \to M_0} \frac{\partial u}{\partial x}(M)$ в точках M, которые являются внутренними точками области. Если этот предел существует, то его значение берут за значение производной функции u в точке M_0.

Задача 1. Требуется найти частные производные следующей функции $u = x^{y^z}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{y^z - 1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^z} \ln x \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(y^z\right) = x^{y^z} \ln x \cdot z y^{z-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^z} \ln x \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(y^z\right) = x^{y^z} \ln x \cdot y^z \ln y$$

Проиллюстрируем введенное выше определение производной для граничной точки области.

Задача 2. Существует ли частная производная функции $\frac{\partial u}{\partial x}$, где $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ в точке $M_0(0, 1)$?

Область определения функции u представляет собой круг, расположенный в начале координат, единичного радиуса.

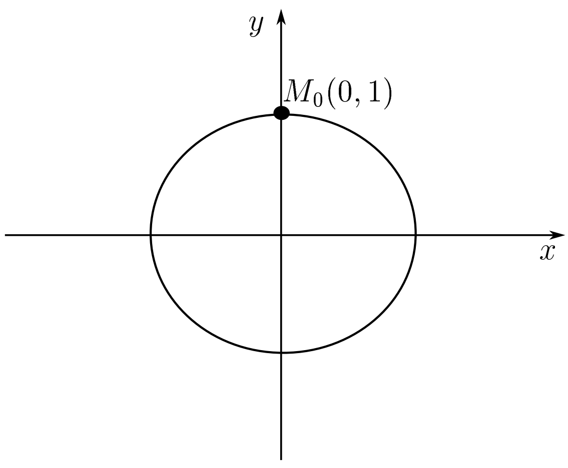

Рис. 3. Область определения функции $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Нетрудно видеть по рисунку, что в данной точке M_0 невозможно задать приращение переменной x, мы тут же выходим из области определения данной функции, поэтому для того, чтобы выяснить вопрос о существовании производной в точке M_0 рассмотрим производную данной функции во внутренних точках области определения, которые находятся в некоторой окрестности точки M_0.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

Где M – внутренняя точка области определения функции. Далее нам следует рассмотреть предел этого выражения при $x \to 0$ и $y \to 1$. Давайте покажем, что этот предел не существует, значит для определенности давайте рассмотрим предел при $x \to +0$, то есть устремим x к нулю справа, ну а стремление y к единице выберем следующим образом: устремимся по некоторой параболе такого вида $y = 1 - kx^2$, если значение коэффициента k выбрать достаточно большим по модулю и положительным, то тогда, при таком стремление, вся парабола будет находиться внутри области определения и к такому пределу переходить будет вполне корректно. Таким образом, мы получим:

$$\lim_{\substack{y\to 1\\ x\to +0}} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \lim_{x\to +0} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-(1-kx^2)^2}} = \lim_{x\to +0} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-1+2kx^2-k^2x^4}} =$$

$$= \lim_{x\to +0} \frac{-1}{\sqrt{2k-1-k^2x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2k-1}}$$

Нетрудно видеть, что, если k выбрать достаточно большое, в частности значительно больше, чем $\frac{1}{2}$, парабола будет находиться целиком здесь, соответствующее выражение, которые мы получили будет существовать, однако нетрудно видеть, что при разных k значения нашего предела будут разными, из чего следует, что предел не существует у данной функции, поэтому не существует и производная $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)$, которую мы пытались найти.

Дифференцируемость функций многих переменных.

Пусть снова точка $M(x_1, \ldots, x_m)$ – внутренняя точка области определения функции $u = f(M)$. Рассмотрим приращение функции u в точке M, в данном случае мы уже рассмотрим полное приращение, то есть вот такую разность:

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, \ldots, x_m)$$

Определение 2. Функция $u = f(M)$ называется **дифференцируемой** в точке M, если её полное приращение в точке M представимо в следующем виде:

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m$$

Где $A_1, \ldots, A_m$ – числа, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ – бесконечно малые функции аргументов Δx_1, $\ldots, \Delta x_m$ при $\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0$.

Определение дифференцируемости фактически говорит нам о том, что полное приращение функции представимо в виде суммы главной линейной части приращения и какой-то добавки более высокого порядка малости. Действительно, если $\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0$, то в этом равенстве левая и все слагаемые в правой части будут стремиться к нулю, однако стремиться к нулю они будут с разной скоростью.

Для функции одной переменной дифференцируемость была эквивалентна существованию производной функции в этой точке, здесь для функции многих переменных ситуация несколько сложнее, если функция дифференцируема в некоторой точке, то тогда в этой точке у функции обязательно существуют все частные производные и конечно все эти частные производные будут равны:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(M) = A_1, \ \ldots \ , \frac{\partial u}{\partial x_m}(M) = A_m$$

Однако, из существования всех частных производных в точке M еще не следует дифференцируемость функции в точке M.

Также следует заметить, что, если функция дифференцируема в точке M, то она обязательно и непрерывна в этой точке. Для того, чтобы доказать это утверждение достаточно посмотреть на определение дифференцируемости и разностную форму условие непрерывности функции в точке, тогда из определения дифференцируемости непосредственно следует определение непрерывности в точке, поэтому любая функция дифференцируемая в точке обязательно будет и непрерывна в этой точке. И в завершении краткого теоретического введения добавим достаточное условие дифференцируемости. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Достаточное условие дифференцируемости. Если функция $u = f(M)$ имеет все частные производные в некоторой окрестности точки M и они непрерывны в точке M, то функция $u = f(M)$ дифференцируема в точке M.

Хочу отметить, что это условие лишь **достаточное** и обратное неверно, то есть вполне может быть ситуация, что функция дифференцируема в некоторой точке M, однако частные производные этой функции не являются непрерывными в точке M.

Теперь давайте перейдем к примерам. Во-первых, покажем, что из существования частных производных в некоторой точке не следует дифференцируемость функции в этой точке. Для этого рассмотрим следующую функцию:

$$u(M) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, \ x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, \ x = y = 0. \end{cases}$$

У этой функции в начале координат существуют все частные производные. Действительно, если рассмотреть функцию $u(x, 0)$, то в силу определение при $x \neq 0$ получаем, что $u(x, 0) = 0$. При $x = 0$ тоже получаем, что $u(x, 0) = 0$. Тем самым функция тождественно равна нулю, то есть $u(x, 0) \equiv 0$. У этой функции существует производная в начале координат равная нулю, то есть $u_x(0, 0) = 0$.

Совершенно аналогично существует и производная $u_y(0,0) = 0$ в начале координат. Можно провести совершенно аналогичные рассуждения, можно заметить, что x и y входят в выражение для функции симметрично. Итак, мы видим, что обе частные производные в начале координат существуют и равны нулю, однако, если посмотреть на саму функцию, то видно, что данная функция не является даже непрерывной в начале координат, следовательно, она не будет дифференцируема, поэтому из существования частных производных в точке не следует дифференцируемость функции в этой точке. Отсутствие непрерывности нетрудно показать, если рассмотреть предел:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\phi\sin\phi}{r^2} = \cos\phi\sin\phi$$

То есть, устремляясь по разным прямым к началу координат, мы получим, вообще говоря, разные предельные значения, отсюда следует, что предел функции в начале координат не существует, значит функция не является непрерывной в начале координат.

Далее перейдём уже к примеру, который касается исследований на дифференцируемость. Для этого введем еще один более удобный критерий дифференцируемости, а именно определение дифференцируемости можно записать еще немного в другой форме.

Определение 3. Функция $u = f(M)$ является **дифференцируемой** во внутренней точке M, если ее приращение представимо виде:

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + \ldots + A_m\Delta x_m + \alpha(\rho)$$

Где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_m^2}$, $\alpha = o(\rho)$.

В следующих нескольких примерах мы будем исследовать на дифференцируемость функции двух переменных, поэтому давайте запишем практический критерий для того, чтобы ответить на вопрос о дифференцируемости функции именно двух переменных. Если нам нужно исследовать на дифференцируемость функцию в точке M_0, для определенности двух переменных, нам нужно проверить представимость приращения функции в следующем виде:

$$\Delta u = u_x(M_0)\Delta x + u_y(M_0)\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$

$$\Delta u - u_x(M_0)\Delta x - u_y(M_0)\Delta y = o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$

То есть нам нужно проверить:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta u - u_x(M_0)\Delta x - u_y(M_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0$$

Если этот предел существует и равен нулю, то тогда функция дифференцируема. Если этот предел не существует или существует, но равен чему угодно кроме нуля, то тогда функция не является дифференцируемой в точке M_0.

Кроме того, конечно, мы можем использовать **достаточное условие дифференцируемости**, но, если нам не удастся установить непрерывность производных функции в точке, то тогда мы не сможем дать ответа об отсутствие дифференцируемости, потому что рассмотренное условие было лишь достаточным. Нам тогда все равно придется проводить дополнительное исследование по определению.

Задача 3. Нам требуется выяснить, имеет ли функция частные производные в начале координат и дифференцируема ли она в этой точке.

а) $u = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$u(x, 0) = |x|$. У этой функции производная при $x = 0$ не существует, раз производная не существует, хотя бы одна, то сразу однозначный ответ. Функция не дифференцируема в начале координат.

б) $u = \sqrt{x^4 + y^4}$.

$u(x, 0) = x^2$. У этой функции производная при $x = 0$ существует: $u_x(0, 0) = 0$. Аналогично $u_y(0, 0) = 0$.

Таким образом, для того, чтобы выяснить вопрос о дифференцируемости функции в начале координат, мы можем использовать два способа: первый способ – это воспользоваться определением дифференцируемости функции и вычислить предел, что даст нам однозначный ответ, другой подход – это проверить найденные нами частные производные на их непрерывность в нуле, если производные в начале координат будут непрерывны, то тогда мы дадим ответ – да, функция дифференцируема, если производные в начале координат будут разрывные, мы не сможем дать никакого ответа и должны будем проводить дополнительное исследование по определению. На всякий случай, из методических соображений, давайте сделаем эту задачу двумя способами.

Первый способ.

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u - u_x(M_0)\Delta x - u_y(M_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\sqrt{\Delta x^4 + \Delta y^4}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{r \to 0} r\sqrt{\cos^4\phi + \sin^4\phi} = 0$$

Ответ: Функция дифференцируема в начале координат.

Второй способ.

Рассмотрим предел частных производных функции u в окрестности начала координат и убедимся, что они непрерывны в начале координат. Ограничимся производной $\frac{\partial u}{\partial x}(M)$ в окрестности начала координат, потому что переменные x и y входят в выражение для функции u симметрично.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+y^4}}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+y^4}} = \lim_{r\to +0} \frac{2r\cos^3\phi}{\sqrt{\cos^4\phi+\sin^4\phi}} = 0$$

Таким образом, мы показали, что этот предел равен нулю и равен конкретному значению частной производной функции по x в начале координат. Таким образом доказано, что частная производная по x в начале координат является непрерывной функцией, следовательно, выполнено и достаточное условие дифференцируемости функции, то есть в данном случае можно было исследовать с помощью достаточного условия и совсем не обязательно действовать по определению.

в)$u = \sqrt[3]{xy}$.

$$u(x,0) \equiv 0 \Rightarrow u_x(0,0) = 0$$

$$u(0,y) \equiv 0 \Rightarrow u_y(0,0) = 0$$

Давайте проведем соответствующее исследование на дифференцируемость по определению, то есть рассмотрим предел

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta u - u_x(M_0)\Delta x - u_y(M_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\sqrt[3]{\Delta x\Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\cos\phi\sin\phi}}{r}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta u - u_x(M_0)\Delta x - u_y(M_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cos\phi\sin\phi}}{r^{\frac{1}{3}}}$$

Нетрудно видеть, что знаменатель стремится к нулю и вполне возможно подобрать угол ϕ таким образом, что числитель отличен от нуля, таким образом стоящая у нас под знаком предела функция будет бесконечно большой и предела от нее не существует, а раз данный предел не существует, то, согласно рассмотренному выше критерию, функция не дифференцируема в начале координат. Таким образом, ответ: функция не дифференцируемая в начале координат.

Опять мы столкнулись с примером, где в начале координат существуют обе частные производные, равные нулю, однако функция не является дифференцируемой в начале координат. Однако в данном случае функция u будет непрерывной в начале координат, но не будет при этом дифференцируемой.

г) $u = \sqrt[3]{x^2y^2}$.

$$u(x,0) \equiv 0 \Rightarrow u_x(0,0) = 0$$

$$u(0,y) \equiv 0 \Rightarrow u_y(0,0) = 0$$

Далее рассмотрим соответствующий предел для того, чтобы провести исследование данной функции на дифференцируемость. По определению мы должны рассмотреть опять предел:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u - u_x(M_0)\Delta x - u_y(M_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\sqrt[3]{\Delta x^2 \Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{r \to 0} r^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{\cos^2 \phi \sin^2 \phi} = 0$$

Мы вновь имеем произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию. Такое произведение есть функция бесконечно малая, ее предел равен нулю, поэтому здесь мы даем ответ, что функция также является дифференцируемой в начале координат согласно определению.

Замечание. Следует отметить дополнительно, что геометрическим смыслом дифференцируемости является существование касательной плоскости к графику функции. В случае двух переменных уравнение касательной плоскости может быть достаточно легко выписано.

Следует отметить, что справедлива теорема о дифференцируемости сложной функции, которая во многом совершенно аналогична соответствующей теореме для функции одного переменного.

Задача 4. Найти частные производные следующих функций:

а)$u = f(x+y, x^2+y^2)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1'\left(x+y, x^2+y^2\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x+y) + f_2'\left(x+y, x^2+y^2\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right) =$$

$$= f_1'\left(x+y, x^2+y^2\right) + 2x \cdot f_2'\left(x+y, x^2+y^2\right)$$

Где индексы $1, 2$ обозначают порядковый номер аргумента функции. Что касается частной производной по переменной y, то здесь мы не будем ее вычислять, потому что переменная x и y входят в нашу функцию совершенно симметрично и в соответствующем случае частная производная по переменной y может быть вычислена совершенно аналогично.

б)$u = [f(x-y)]^{g(xy)}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g(xy)\left[f(x-y)\right]^{g(xy)-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x} f(x-y) + \left[f(x-y)\right]^{g(xy)} \ln\left[f(x-y)\right] \cdot \frac{\partial}{\partial x} g(xy) =$$

$$= g(xy)\left[f(x-y)\right]^{g(xy)-1} \cdot f'(x-y) + \left[f(x-y)\right]^{g(xy)} \ln\left[f(x-y)\right] \cdot g'(xy) \cdot y$$

Что касается производной по переменной y, то она вычисляется в данной задаче совершенно аналогично, однако полной симметрии здесь нет, если в функцию g переменные x и y входят симметрично, то в функцию f они входят с разными знаками, поэтому, когда мы будем вычислять соответствующую производную по переменной y, там, где бралась производная функции f, у нас выскочит дополнительный знак минус. Поэтому здесь тоже ограничимся производной по переменной x.

в)$u = f\left(\sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{y^2+z^2}, \sqrt{z^2+x^2}\right)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1'\left(\sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{y^2+z^2}, \sqrt{z^2+x^2}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} +$$
$$+ f_3'\left(\sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{y^2+z^2}, \sqrt{z^2+x^2}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{z^2+x^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1' \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + f_3' \cdot \frac{x}{\sqrt{z^2+x^2}}$$

Совершенно аналогично считаются производные по аргументу y, только нам придется учитывать зависимость функции от аргумента y через первый и второй аргумент, а для того, чтобы вычислить производную по z нам надо будет учесть зависимость через второй и третий аргумент.

Далее давайте кратко обсудим понятие **дифференциала функции**.

Определение 4. Дифференциалом функции называется главное линейная часть соответствующего приращения, в частности, если рассматривается функция нескольких переменных, то дифференциалом функции u называется вот такая величина:

$$du\Big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)dx_m$$

Если точка M_0 – фиксированная, то дифференциал представляет собой функцию только переменных $dx_1, \ldots, dx_m$.

Задача 5. Найти решение $u(x, y)$ следующего уравнения:

а) $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x + xy$, $u(0, y) = y^2$.

Давайте обе части проинтегрируем по переменной x, рассматривая в данном случае неопределенный интеграл, как операцию обратную к вычислению частной производной. То есть все остальные переменные кроме x, а именно переменную y, будем считать постоянными величинами, тогда

$$u(x,y)=\int(\cos x+xy)\,dx=\sin x+\frac{1}{2}x^2y+C(y)$$

Для того, чтобы установить конкретный вид функции $C(y)$ мы можем воспользоваться дополнительным условием:

$$u(0,y)=0+0+C(y)=y^2$$

Тогда окончательно получаем, что решением уравнения будет следующая функция:

$$u(x,y)=\sin x+\frac{1}{2}x^2y+y^2.$$

б) $\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+y^2$, $u(x,x)=0$.

Давайте также, как и в прошлой задаче, данное соотношение проинтегрируем по переменной y, тогда мы получим:

$$u(x,y)=\int\left(x^2+y^2\right)dy=x^2y+\frac{y^3}{3}+C(x)$$

$$u(x,x)=x^3+\frac{x^3}{3}+C(x)=0$$

$$\frac{4}{3}x^3+C(x)=0\ \Rightarrow\ C(x)=-\frac{4}{3}x^3$$

Тогда окончательно получаем, что решением уравнения будет следующая функция:

$$u(x,y)=x^2y+\frac{y^3}{3}-\frac{4}{3}x^3.$$

Задача 6. Вычислить дифференциал функции:

а) $u=x^2y^3$ в точке $M(x,y)$, $M_0(2,1)$.

Давайте вычислим сначала дифференциал в произвольной точке M, а потом подставим значения координат точки M_0.

$$du\Big|_M=2xy^3dx+3x^2y^2dy$$

$$du\Big|_{M_0} = 4dx + 12dy$$

Данный вид еще раз подчеркивает, что при фиксированной точке M_0 дифференциал является лишь функцией приращения независимых переменных dx и dy.

б) $u = \frac{yz}{x}$ в точке $M(x, y, z)$, $N(1, 2, 3)$.

$$du\Big|_{M} = -\frac{yz}{x^2}dx + \frac{z}{x}dy + \frac{y}{x}dz$$

$$du\Big|_{N} = -6dx + 3dy + 2dz$$

Задача 7. Найти дифференциал функции $u = f(x - y, x + y)$ в точках $M(x, y)$ и $M_0(1; -1)$.

$$du = f_1'(x - y, x + y)d(x - y) + f_2'(x - y, x + y)d(x + y)$$

$$du = (f_1' + f_2')\, dx + (f_2' - f_1')\, dy$$

Тогда для точки M_0:

$$du\Big|_{M_0} = [f_1'(2, 0) + f_2'(2, 0)]\, dx + [f_2'(2, 0) - f_1'(2, 0)]\, dy$$

Семинар 3

Частные производные.

Так же, как и в случае одного переменного, в случае многих переменных частные производные вводятся по индукции, то есть частная производная n–го порядка есть частная производная от производной $(n-1)$–порядка и так далее. В частности, частная производная второго порядка есть частная производная от частной производной.

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} = u_{x_i x_k}$$

В общем случае порядок вычисления производной важен, поэтому сначала вычисляется производная по тому аргументу, который в обозначении стоит ближе к функции u, здесь это x_i.

Замечание. Если в частной производной присутствуют производные по разным переменным, частную производную принято называть **смешанной**, но и аналогично вводятся производные высших порядков, как производная от производной $(n-1)$–го порядка.

Определение 1. Функция называется n **раз дифференцируемой**, если все её частные производные $(n-1)$–го порядка являются дифференцируемыми функциями.

Теорема 1. Если функция $u = f(M)$ n раз дифференцируема, то её смешанная производная до n–го порядка не зависит от порядка дифференцирования.

В частности, если у нас функция u представляют собой дважды дифференцируемую функцию двух переменных x и y, то

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

во всех точках, где функции u дважды дифференцируема, но следует отметить, что данное условие является лишь **достаточным**, но не необходимым условием независимости производных от порядка дифференцирования.

Также с прошлого семинара хорошо известно, что *достаточным условием дифференцируемости* является существование производных в некоторой окрестности точки M_0 и их непрерывность в самой точке M_0, из этого непосредственно следует, что достаточным условием независимости смешанных производных от порядка дифференцируемости является существование частных производных второго порядка в некоторой окрестности точки M_0 и их непрерывность в самой точке M_0. Следует отметить, что это лишь достаточное, но не необходимое условие.

Задача 1. Найти частные производные второго порядка функции $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{zx^{z-1}}{y^z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -z\frac{x^z}{y^{z+1}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \cdot \ln\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{z(z-1)x^{z-2}}{y^z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{z^2 x^{z-1}}{y^{z+1}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = z(z+1)\frac{x^z}{y^{z+2}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{z^2 x^{z-1}}{y^{z+1}}$$

Сравнивая вот эти выражения для смешанных частных производных, мы видим, что в данном случае вычисленная производная второго порядка не зависит от последовательности дифференцирования. Разумеется, что мы рассматриваем функцию там, где она определена и дифференцируема. Аналогично можно вычислить частные производные:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \cdot \ln^2\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{zx^{z-1}}{y^z}\ln\frac{x}{y} + \frac{x^{z-1}}{y^z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{x^{z-1}}{y^z} + \frac{zx^{z-1}}{y^z}\ln x - z\frac{x^{z-1}}{y^z}\ln y = \frac{x^{z-1}}{y^z} + \frac{zx^{z-1}}{y^z}\ln\frac{x}{y}$$

Разумеется, здесь мы предполагали, что все переменные x, y и z являются строго положительными, во всех наших формулах. Оставшиеся производные второго порядка могут быть вычислены совершенно аналогично.

Задача 2. Найти частную производную $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, $u = \frac{x+y}{x-y}$.

Нетрудно видеть, что эта функция будет дифференцируема нужное количество раз, бесконечное число раз, во всех точках, где $x \neq y$. Разумеется, предполагается, что знаменатель не обращается в ноль, поэтому производные не будут зависеть от порядка дифференцирования, но все же мы произведем вычисление в том порядке, в каком написано в условии. Приведем сначала функцию u к виду более удобному для вычисления производной по y.

$$u = \frac{x+y}{x-y} = \frac{y-x+2x}{x-y} = -1 + \frac{2x}{x-y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2x}{(x-y)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x \cdot 2}{(x-y)^3}, \quad \dots \quad , \quad \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{2x \cdot n!}{(x-y)^{n+1}}$$

Далее, от полученной функции, нам нужно вычислить производную m–го порядка по x, для этого сделаем небольшие преобразования и приведем нашу функцию к удобному виду для вычисления производной по x, то есть постараемся сделать так, чтобы от x зависел только знаменатель этой дроби и не зависел числитель.

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{2x \cdot n!}{(x-y)^{n+1}} = 2n!\frac{x-y+y}{(x-y)^{n+1}} = 2n! \cdot \left(\frac{1}{(x-y)^n} + \frac{y}{(x-y)^{n+1}}\right)$$

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x \partial y^n} = 2n! \cdot \left(\frac{(-1)n}{(x-y)^{n+1}} + \frac{y(-1)(n+1)}{(x-y)^{n+2}}\right)$$

$$\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} = 2n! \cdot \left(\frac{(-1)^m(m+n-1)!}{(n-1)!(x-y)^{m+n}} + \frac{y(-1)^m(m+n)!}{n!(x-y)^{m+n+1}}\right)$$

Задача 3. Докажем, что функция u имеет в начале координат частные производные любого порядка, которые не зависят от порядка дифференцирования. При этом функция даже не является непрерывной в начале координат.

$$u = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{y^2}{x^2}\right), \ xy \neq 0 \\ 0, \ xy = 0. \end{cases}$$

Давайте ограничимся частными производными второго порядка, то есть покажем, что функция u имеет в начале координат смешанные частные производные второго порядка, которые не зависят от порядка дифференцирования, но сама функция u при этом разрывна в начале координат.

$$u_x(0,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(\Delta x, y) - u(0,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\exp\left(-\frac{\Delta x^2}{y^2} - \frac{y^2}{\Delta x^2}\right)}{\Delta x} = 0$$

При вычислении соответствующего предела, мы получим, что экспонента, которая стоит в числителе стремится к нулю при $\Delta x \to 0$ гораздо быстрее, чем стремится к нулю знаменатель. Это можно легко доказать, например, по правилу Лопиталя.

Так как переменные x и y входят в исходную функцию симметрично, то аналогично можно получить, что $u_y(x,0) = 0$.

$$\Rightarrow u_{xy}(0,y) = 0, \ \ u_{xy}(0,0) = 0, \ \ u_{yx}(0,0) = 0$$

Таким образом, мы видим, что смешанные частные производные второго порядка существуют и равны нулю в начале координат. Перейдем теперь ко второй части задачи и покажем, что функция u является разрывной функцией в начале координат, то есть ее предел не равен частному значению функции в начале координат.

Поскольку мы доказываем отсутствие непрерывности, нам будет удобно устремиться к началу координат по некоторой произвольной прямой, поэтому давайте будем считать, что $y = kx$, где k – некоторое произвольное число. Тогда получим:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{-\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{x^2}{k^2x^2} - \frac{k^2x^2}{x^2}} = e^{-\frac{1}{k^2} - k^2}$$

Отсюда видно, что, если мы устремимся к началу координат по разным прямым, при разных значениях k, то получим разные предельные значения для нашей функции. Отсюда непосредственно следует, что предела функции в начале координат не существует. Следовательно, наша функция разрывна в начале координат.

Таким образом, мы видим, что дифференцируемость является лишь достаточным условием для того, чтобы частные смешанные производные не зависели от порядка дифференцирование, но не необходимым. Вполне может так получится, что существуют частные производные, которые не зависят от порядка дифференцирования, а, как мы видели в этом примере, сама функция даже не является непрерывной в этой точке.

Задача 4. Функция $u = f(x + y, x^2 + y^2)$ считается дважды дифференцируемой функцией своих аргументов. Требуется найти частные производные второго порядка.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1' \left(x + y, x^2 + y^2\right) + f_2' \left(x + y, x^2 + y^2\right) \cdot 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_1' \left(x + y, x^2 + y^2\right) + f_2' \left(x + y, x^2 + y^2\right) \cdot 2y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{11}'' + f_{12}'' \cdot 2x + f_{21}'' \cdot 2x + f_{22}'' \cdot 4x^2 + 2f_2'$$

Так как функция f дважды дифференцируемая, то

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{11}'' + f_{12}'' \cdot 4x + f_{22}'' \cdot 4x^2 + 2f_2'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = f_{11}'' + f_{12}'' \cdot 2(x + y) + f_{22}'' \cdot 4xy$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f_{11}'' + f_{12}'' \cdot 2(x + y) + f_{22}'' \cdot 4xy$$

Нетрудно видеть, что смешанные частные производные, в данном случае, не зависят от порядка дифференцирования. Мы имеем здесь сложную функцию и, поскольку и внутренние функции $x + y$, $x^2 + y^2$ и внешняя функция f являются дважды дифференцируемыми, то, как следствие, ее производные второго порядка не зависят от порядка дифференцирования. Оставшиеся производные вычисляется совершенно аналогично, поэтому здесь мы на этом останавливаться не будем.

Дифференциалы высших порядков.

Перейдем к понятию дифференциала высших порядков. Итак, рассмотрим дифференциалы высших порядков, как и в случае одного переменного, они вводятся по индукции.

Пусть функция $u = f(M)$ n раз дифференцируема в точке M_0 и $(n-1)$ раз дифференцируема в окрестности точки M_0. **Дифференциалы высших порядков** водится, как уже говорилось, по индукции, то есть $d^n u = d(d^{n-1}u)$

Также, как и в случае функций одного переменного, требуется, **чтобы дифференциалы второго и последующих порядков вычислялись по следующим правилам**:

1)При вычислении второго и последующих дифференциалов приращение независимых переменных $dx_1, \ldots, dx_m$ берутся такими же, как и при вычислении первого дифференциала.

2)Первые и последующие дифференциалы рассматриваются, как функции переменных $x_1, \ldots, x_m$, а их приращения $dx_1, \ldots, dx_m$ берутся, как постоянные множители.

Чтобы проиллюстрировать это на примере, давайте рассмотрим второй дифференциал от функцию $u(x, y)$ и вычислим, используя, сформулированные выше правила.

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$d^2u = d(du) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)dy$$

$$\Rightarrow d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

В таком виде получаем дифференциал второго порядка в том случае, если x и y – независимые переменные. Следует помнить, что, если x и y являются в свою очередь функциями каких-то других переменных, то также, как и в случае одного переменного, форма второго дифференциала и последующих, в общем случае, не является инвариантной. Форма первого дифференциала остается инвариантной.

Далее мы видим, что вид второго дифференциала напоминает соответствующую формулу для квадрата суммы, более того, это сохранится и при вычислении последующих дифференциалов. Более удобно вычислять их, если ввести специальный оператор дифференцирования. Можно ввести **оператор вычисления производной** и **оператор дифференциала**.

Определение 2. Оператором называется правило, по которому одному элементу какого-либо пространства ставится в соответствие какой-то другой элемент того же или какого-либо другого пространства.

Замечание. Если это правило обладает свойствами линейности, то оператор называется **линейным**.

Таким образом, можно ввести **оператор производной**:

$$\frac{\partial}{\partial x} : u \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}$$

Который каждой функции u ставит в соответствие ее производную по переменной x. Данный оператор будет линейным в силу линейности производной, то есть

$$\frac{\partial}{\partial x}(u+v) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\alpha u) = \alpha \frac{\partial u}{\partial x}$$

То есть данный оператор обладает свойствами линейности. Аналогично можно ввести оператор дифференцирования по переменной y и далее ввести **оператор дифференциала**:

$$d : u \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$d = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)$$

Который каждой функции ставит в соответствие дифференциал.

Нетрудно видеть, что, если мы хотим найти второй дифференциал, то нам нужно оператором d подействовать на нашу функцию u дважды.

$$d^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2$$

Аналогично для третьего дифференциала:

$$d^3 u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} dx dy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} dy^3$$

Замечание. Коротко отметим, что форма второго дифференциала в общем случае не инвариантна, поэтому, если x и y, в свою очередь, являются функциями каких-либо других переменных, то тогда, при вычислении второго дифференциала, появятся дополнительные слагаемые:

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial f}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y$$

Связано это с тем, что переменные x и y теперь уже, в свою очередь, являются некоторыми функциями, поэтому мы их уже не можем рассматривать, как постоянные множители. За счет этого появляются дополнительные слагаемые, однако, если функции x и y являются линейными функциями каких-то уже других переменных, то тогда инвариантность формы второго дифференциала сохраняется, поскольку второй дифференциал от линейной функции обращается в ноль.

Задача 5. Найти дифференциал второго порядка функции $u = e^{xy}$ в точках $M(x,y)$, $O(0,0)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy}, \ \ \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2e^{xy}, \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = e^{xy} + xye^{xy}, \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2e^{xy}$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, так как функция u сколь угодно раз дифференцируема.

$$d^2u\Big|_M = y^2e^{xy}dx^2 + 2\left(e^{xy} + xye^{xy}\right)dxdy + x^2e^{xy}dy^2$$

$$\Rightarrow d^2u\Big|_{O(0,0)} = 2dxdy$$

Задача 6. Найти дифференциал второго порядка функции $u = f(x+y, z^2)$ в точках $M(x,y,z)$, $M_0(1,-1,0)$.

Воспользуемся уже другим подходом. Будем считать сначала первый дифференциал, а потом, используя введенные выше правила, посчитаем второй дифференциал.

$$du = f_1'\left(x+y, z^2\right)(dx+dy) + f_2'\left(x+y, z^2\right)2zdz$$

$$d^2u = f_{11}''(dx+dy)^2 + f_{12}''\cdot 2zdz\,(dx+dy) + f_{21}''(dx+dy)\cdot 2zdz + f_{22}''\cdot 4z^2dz^2 + f_2'\cdot 2dz^2$$

$$d^2u = f_{11}''dx^2 + 2f_{11}''dxdy + f_{11}''dy^2 + 4f_{12}''zdxdz + 4f_{12}''zdydz + \left(f_{22}''\cdot 4z^2 + 2f_2'\right)dz^2$$

Таким образом, мы видим, что, поскольку среди аргументов функции есть нелинейная зависимость, именно по переменной z, появились те слагаемые, наличие которых мы обсуждали, когда говорили о том, что форма второго дифференциала в общем случае не инвариант.

$$d^2u\Big|_{M_0} = f_{11}''(0,0)dx^2 + 2f_{11}''(0,0)dxdy + f_{11}''(0,0)dy^2 + 2f_2'(0,0)dz^2$$

Формула Тейлора.

Формулу Тейлора функции одной переменной можно записать в следующем виде:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x_0)\left(\Delta x\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\left(\Delta x^n\right) + o\left((\Delta x)^n\right)$$

Где $\Delta x = x - x_0$. Через дифференциалы:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}df\bigg|_{x_0} + \frac{1}{2}d^2 f\bigg|_{x_0} + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f\bigg|_{x_0} + o\left((\Delta x)^n\right)$$

Для случая функций многих переменных также удобно записывать в представлении через дифференциалы:

$$f(M) = f(M_0) + \frac{1}{1!}df\bigg|_{M_0} + \frac{1}{2}d^2 f\bigg|_{M_0} + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f\bigg|_{M_0} + R_{n+1}$$

Где $R_{n+1} = o\left(\left(\sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_m^2}\right)^n\right) = o\left(\rho^n\right)$. Обратим внимание, что, как в случае одного независимого переменного, так и в случае многих независимых переменных, формула Тейлора фактически заменяет какую-либо сложную функцию f более простым многочленом, который с определенной точностью эту функцию приближает. Оценка остаточного члена также в той или иной форме делается, то есть, когда мы раскладываем функцию по формуле Тейлора, мы заменяем функцию её многочленом и выписываем некоторый остаточный член. Таким образом, заменяем сложную функцию гораздо более простой, обычно для вычисления ряда пределов или приближенных каких-то вычислений это бывает весьма полезным. То же самое происходит и в случае многих переменных, например, в случае произвольного количества переменных у нас получается, что мы получаем многочлен зависящий от m независимых переменных $x_1, \ldots, x_m$. В случае двух переменных мы получаем многочлен зависящий от двух переменных.

Так же, как и в случае одного переменного, для формулы Тейлора многих переменных требуется, чтобы функция была n раз дифференцируема в некоторой окрестности точки M_0 и для разных видов остаточного члена, возможно, потребуется $(n+1)$ раз дифференцируемая функция. В нашем случае мы используем **остаточный член в форме Пеано**.

Задача 7. Требуется разложить функцию $u = (x-1)^2 + (x+y)^2$ по формуле Тейлора с центром разложения в точке $M_0(0,0)$.

Следует обратить внимание, что тут не сказано до какого порядка мы должны раскладывать нашу функцию по формуле Тейлора, но мы можем обратить внимание, что сама функция представляет собой многочлен второго порядка от переменных x и y, если мы начнем раскладывать нашу функцию по формуле Тейлора, то следует обратить внимание, что все дифференциалы выше второго порядка обратятся в ноль, поскольку все производные от нашей функции выше второго порядка будут равны нулю. Как мы уже говорили, при разложении функции по формуле

Тейлора мы ее заменяем некоторым многочленом, но функция уже представляет собой многочлен второго порядка, поэтому, если форма ответа для нас неважна мы можем не раскладывать её по формуле Тейлора, если же нас интересует форма ответа, то тогда мы должны разложить нашу функцию так, чтобы представить многочлен по степеням x и y, то есть можно не вычислять производные, а просто записать многочлен в соответствующей форме:

$$u = 1 - 2x + 2x^2 + 2xy + y^2 \Rightarrow u(M_0) = 1$$

То же самое мы получили бы, если бы действовали по общей формуле Тейлора через соответствующие производные.

Задача 8. Разложить до члена второго порядка функцию $u = x^{\frac{y}{z}}$ в точке $M_0(1, 2, 1)$.

$$u_x(M_0) = \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}\Big|_{M_0} = 2, \quad u_y(M_0) = x^{\frac{y}{z}} \cdot \ln x \cdot \frac{1}{z}\Big|_{M_0} = 0, \quad u_z(M_0) = x^{\frac{y}{z}} \ln x \cdot \left(-\frac{y}{z^2}\right)\Big|_{M_0} = 0$$

$$u_{xx}(M_0) = \frac{y}{z}\left(\frac{y}{z} - 1\right)x^{\frac{y}{z}-2}\Big|_{M_0} = 2, \quad u_{xy}(M_0) = \frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}-1} + \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}\ln x \cdot \frac{1}{z}\Big|_{M_0} = 1$$

$$u_{xz}(M_0) = -\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}-1} + \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}\ln x\left(-\frac{y}{z^2}\right)\Big|_{M_0} = -2, \quad u_{yy}(M_0) = 0, \quad u_{yz}(M_0) = 0, \quad u_{zz}(M_0) = 0$$

$$d^2u = u_{xx}dx^2 + u_{yy}dy^2 + u_{zz}dz^2 + 2u_{xy}dxdy + 2u_{xz}dxdz + 2u_{yz}dydz$$

$$\Rightarrow u(M) = 1 + 2(x-1) + \frac{1}{2}\left(2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) - 4(x-1)(z-1)\right) +$$

$$+o\left((x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2\right)$$

Семинар 4

Двойные интегралы.

Предположим, что у вас есть некоторая плоская фигура, некоторая плоская пластинка, и для этой плоской фигуры у вас есть плотность. Плотность пластинки определена в каждой точке этой пластины $\rho(x, y)$ и вы хотите посчитать массу этой пластины. Как разумнее всего посчитать массу? Проще всего разбить всю вашу пластину на некоторые маленькие пластины и для каждого маленького кусочка посчитать массу, считая плотность этого маленького кусочка постоянной. Соответственно, просуммировав массу всех кусочков, вы получите массу всей пластины. Из этой задачи стартует понятие **двойного интеграла**. Давайте попробуем это понятие вести более конкретно.

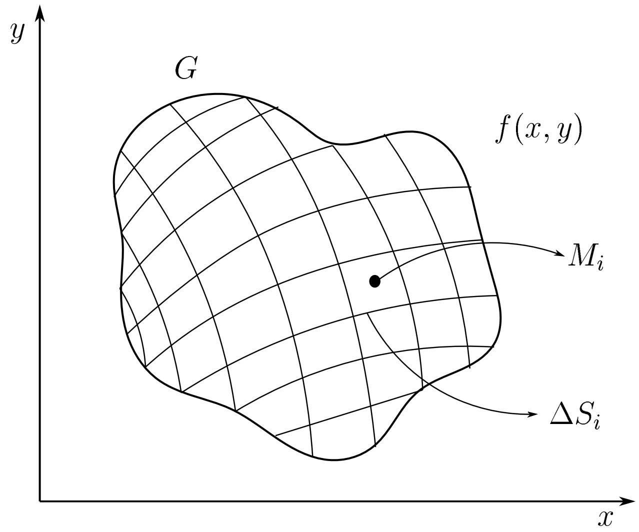

Рис. 4. Наша "пластинка".

Введём понятие **интегральной суммы**. Разделим всю нашу область на некоторые подобласти, рассмотрим i–ю подобласть. Значит у этой подобласти есть некоторая площадь, давайте обозначим её как ΔS_i и выберем в этой подобласти некоторую точку M_i. Всё равно как вы будете выбирать эту точку, главное, чтобы она принадлежала этой подобласти.

$$f(M_i)\Delta S_i$$

Если f – это плотность, мы получим массу этого кусочка. Считаем, что плотность на всём кусочке постоянна. Дальше мы просто проведем суммирование по всем кусочкам нашей разбивки, такую сумму назовём **интегральной суммой**.

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$$

Рассмотрим такую интегральную сумму и **двойным интегралом** назовем предел этой интегральной суммы при стремлении к нулю диаметра разбиения δ. Диаметр разбиения это размер максимального кусочка нашей подобласти.

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i = \iint\limits_G f(x,y)dxdy$$

Мы будем предполагать, что такой интеграл существует вне зависимости от того, как мы выбрали разбивку, какие мы выбрали точки. Если предел соответствующий меняется, то есть интеграла не существует, предела не существует, тогда мы будем говорить, что двойных интегралов не существует. Однако для всех ограниченных областей с гладкими границами и всех непрерывных функций f можно доказать, что для всех таких областей и для всех непрерывных функций такой интеграл существует. Дальше речь пойдет о таких областях и таких двойных интегралах.

Дальше возникает вопрос, как вычислять такой двойной интеграл? Есть два метода: первый – это **сведение двойного интеграла к повторному** и второй – это **метод замены переменных**.

Сведение двойного интеграла к повторному.

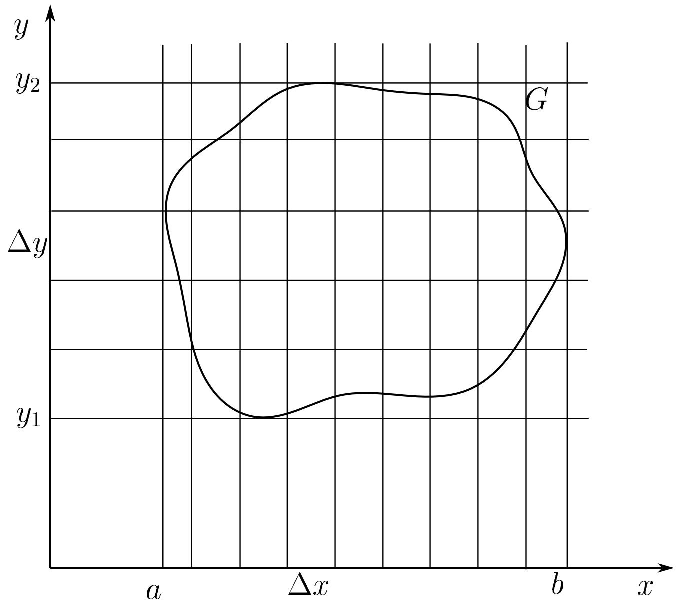

Рис. 5. Разбиение исходной области на прямые, параллельные осям координат.

В данном случае разбивка нашей области G происходит не произвольными кривыми, а конкретными, параллельными осям x и y. В области G определена функция $f(x,y)$. Мы сказали, что двойной интеграл должен существовать вне зависимости от разбивки, от выбора точек. В данном случае, если вы устремите $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, то двойной интеграл должен существовать и в этом случае. Тогда мы можем вот эту двойную сумму $\sum\limits_i f(M_i)\Delta x_i \Delta y_i$, которая лежит в основании определения двойного интеграла, разбить следующим образом: сначала просуммировать по y при каком-то фиксированном столбце Δx. Если Δx достаточно мало, функция $f(x,y)$ в этом столбце зависит только от переменной y, переменная x там практически не меняется и соответственно, переходя к пределу $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, перейдем к определению определенного интеграла, то есть суммирование по столбцу вам даст определенный интеграл $\int\limits_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy$, теперь это функция, которая зависит только от переменной x. Потом просуммируем все столбцы Δx при $\Delta x \to 0$. Это будет определенный интеграл $\int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy\right) dx$. Таким образом, мы свели двойную сумму к двум определенным интегралам.

Теорема 1. Пусть у вас есть функция $f(x,y)$. Эта функция определена в некоторой квадрируемой области G и соответственно существует двойной интеграл $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$. Если $\forall x \in [a,b]$ существует интеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$, то тогда двойной интеграл можно свести к повторному интегралу:

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy\right) dx$$

Замечание. Ничего не мешает сначала интегрировать по x, а потом по y. Таким образом двойной интеграл можно свести к повторному двумя способами: сначала проинтегрировать по y, а потом по x или сначала по x, а потом по y.

Метод замены переменных.

Метод замены переменных заключается в следующем: предположим, что вы пытаетесь свести ваш двойной интеграл к повторному в переменных x и y, это сделать у вас не получается. Можно ли как-то сделать замену переменных, переходя от переменных x и y к переменным u и v? Предположим, что вы хотите сделать вот такую замену:

$$\begin{cases} x = \phi(u,v) \\ y = \psi(u,v). \end{cases}$$

Как у вас тогда поменяется двойной интеграл? То есть вот такой предел:

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_i f(M_i)\Delta x_i \Delta y_i$$

Чтобы понять, как он поменяется, надо понять как поменяется площадь $\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$ при переходи от старых переменных к новым?

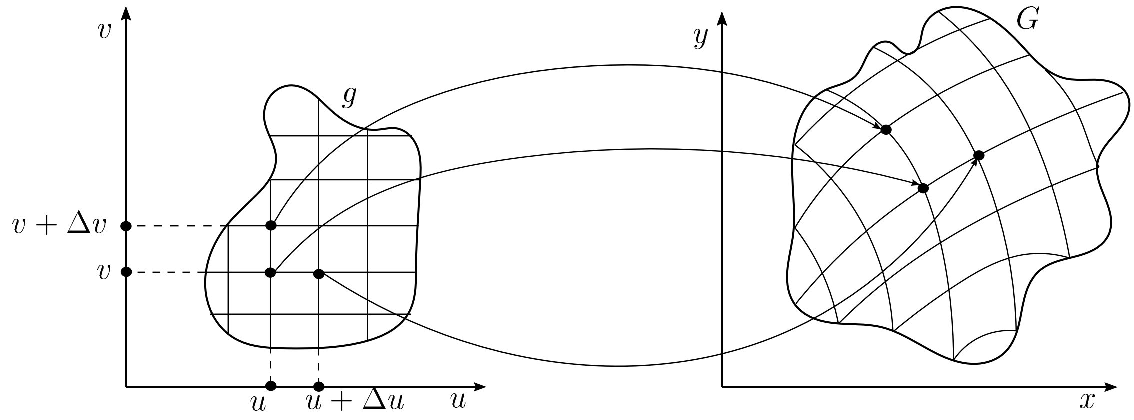

Рис. 6. Пояснение к методу замены переменных.

Предположим, что у вас есть некоторая область G, по которой вы хотите провести интегрирование. Предположим, что вы хотите сделать замену переменных, перейти от переменных x и y к переменным u и v. Понятно, что, так как мы осуществляем некое взаимно однозначное отображение, то область G отобразится в некоторую другую область g. Предположим, что вы разбиваете эту область переменных u и v некоторыми Δu и Δv. Нам интересно узнать, как можно выразить площадку ΔS_i в переменных x и y через переменные u и v?

Точкам (u, v), $(u+\Delta u, v)$, $(u, v+\Delta v)$ области g соответствуют точки $(\phi(u, v), \psi(u, v))$, $(\phi(u + \Delta u, v), \psi(u + \Delta u, v))$, $(\phi(u, v + \Delta v), \psi(u, v + \Delta v))$ области G.

Элементарную площадь ΔS_i области G можно приближенно построить на двух векторах, составленных из точек $(\phi(u, v), \psi(u, v))$, $(\phi(u+\Delta u, v), \psi(u+\Delta u, v))$, $(\phi(u, v+\Delta v), \psi(u, v + \Delta v))$ области G. Если Δu и Δv – достаточно малы, то элементарную площадь ΔS_i можно построить на векторах $(\phi_v \cdot \Delta v, \psi_v \cdot \Delta v)$, $(\phi_u \cdot \Delta u, \psi_u \cdot \Delta u)$. Соответственно, чтобы узнать площадь ΔS_i нужно векторно перемножить эти вектора и взять модуль.

$$\Delta S_i = \left| \begin{vmatrix} \phi_v & \psi_v \\ \phi_u & \psi_u \end{vmatrix} \Delta u \Delta v \right|$$

$$\Delta S_i = \left| \begin{vmatrix} \phi_v & \psi_v \\ \phi_u & \psi_u \end{vmatrix} \right| \Delta u \Delta v$$

Такой получившийся определитель J в формуле для ΔS_i называется **якобианом перехода**.

Если у вас есть взаимно однозначное отображение одних переменных в другие, если функции ϕ и ψ являются дифференцируемыми по u и v, если якобиан перехода не равен нулю, то тогда для двойных интегралов справедлива следующая формула замены переменных:

$$\iint\limits_G f(x, y) dx dy = \iint\limits_g f(\psi(u, v), \psi(u, v)) \left| J \right| du dv$$

Задача 1. Свести двойной интеграл $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$ к повторному двумя способами. Где область G – это треугольник с вершинами $(1,1),(4,1),(4,4)$.

Давайте сначала сведем двойной интеграл к повторному для общей функции, то есть вы увидите, что для того, чтобы свести двойной интеграл к повторному вам функцию f знать не нужно, но, чтобы посчитать интеграл, функцию f знать нужно, поэтому сначала сведем двойной интеграл к повторному, потом выберем какую-нибудь функцию f и этот интеграл посчитаем.

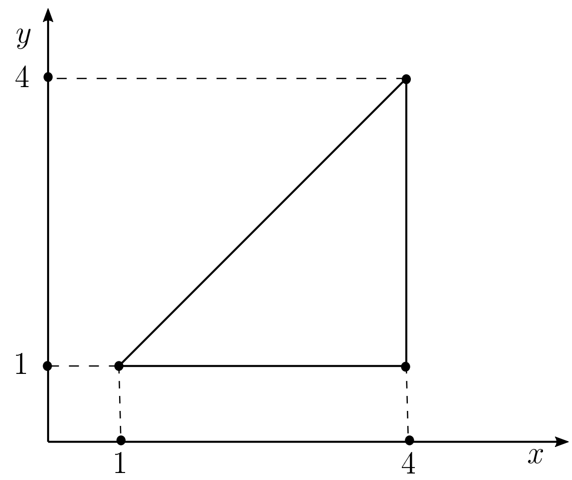

Рис. 7. К задаче 1.

Для каждого икса должен существовать интеграл от нижнего значение $y=1$ до верхнего значения $y=x$, тогда двойной интеграл будет сводиться по теореме к следующему интегралу:

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_1^4 dx \int\limits_1^x f(x,y)dy$$

$$\int\limits_1^4 dx \int\limits_1^x f(x,y)dy = \{f \equiv 1\} = \int\limits_1^4 dx \int\limits_1^x dy = \int\limits_1^4 (x-1)dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_1^4 = \frac{9}{2}$$

Давайте теперь с вами немножко подумаем. Чем у нас был этот двойной интеграл? Этот двойной интеграл был пределом интегральной суммы при стремлении диаметра разбиения к нулю:

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta S_i$$

Если функция $f \equiv 1$,то $\lim\limits_{\delta\to 0}\sum\limits_{i=1}^n f(M_i)\Delta S_i = \lim\limits_{\delta\to 0}\sum\limits_{i=1}^n \Delta S_i = S$. Где S – площадь нашей области G. Таким образом, при $f \equiv 1$ мы должны получить площадь нашего исходного треугольника. Действительно, $S_\triangle = \frac{9}{2}$.

Как мы уже говорили до этого, мы можем свести двойной интеграл к повторному, таким образом, что внутренний интеграл будет по переменной x, а внешний интеграл будет по переменной y. Давайте сведем двойной интеграл к повторному в другом порядке.

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_1^4 dy \int\limits_y^4 f(x,y)dx$$

Задача 2. Изменить порядок интегрирования повторного интеграла $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{y^{\frac{1}{3}}} f(x,y)dx$.

Давайте попробуем подумать, здесь порядок интегрирования такой: сначала мы интегрируем по переменной x – это внутренний интеграл, а потом интегрируем по y – это внешний интеграл. Мы должны записать такой порядок интегрирования, чтобы сначала проинтегрировать по y, а потом по x, но так как это у нас повторный интеграл, а повторный интеграл сводится к двойному, а двойной интеграл по некоторой области, то первое, что мы должны сделать это представить себе эту область, по которой производится интегрирование. Давайте, смотря на этот интеграл, попробуем себе представить, как эта область выглядит, $y \in [0,1]$, для каждого фиксированного y переменная x меняется от $\sqrt{y}$ до $y^{\frac{1}{3}}$, то есть для каждого y минимальное значение $x_{min} = \sqrt{y}$, то есть минимальное значение x лежит на кривой $y = x^2$, а максимальное значение $x_{max} = y^{\frac{1}{3}}$, то есть максимальное значение x лежит на кривой $y = x^3$.

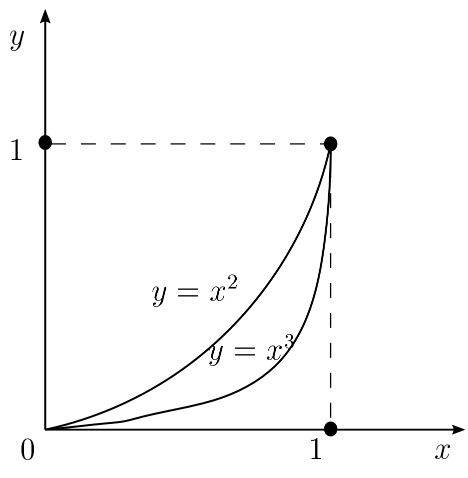

Рис. 8. К задаче 2.

Давайте попробуем двойной интеграл по такой области свести к повторному, но поменяв порядок x и y соответственно. Тогда внешний интеграл у нас получится по переменной x, а внутренний интеграл у нас будет по y от функции $f(x,y)$. Переменные x и $y \in [0,1]$, для каждого фиксированного x переменная y меняется от минимального значения, которое лежит на кривой $y = x^3$, до максимального значения, которое лежит на кривой $y = x^2$ соответственно, то есть для каждого фиксированного x переменная y меняется от x^3 до x^2. Таким образом, получаем:

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,y)dxdy$$

Таким образом, мы повторный интеграл свели к двойному по этой области, а потом двойной интеграл по нашей области свели к повторному, поменяв порядок интегрирования.

Задача 3. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G xdxdy$. Где область G ограничена следующими кривыми:

$$\begin{cases} y = 3x^2, \\ y = 6 - 3x. \end{cases}$$

Найдём точки пересечения наших кривых, чтобы выяснить вид области интегрирования G.

$$3x^2 = 6 - 3x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1, -2.$$

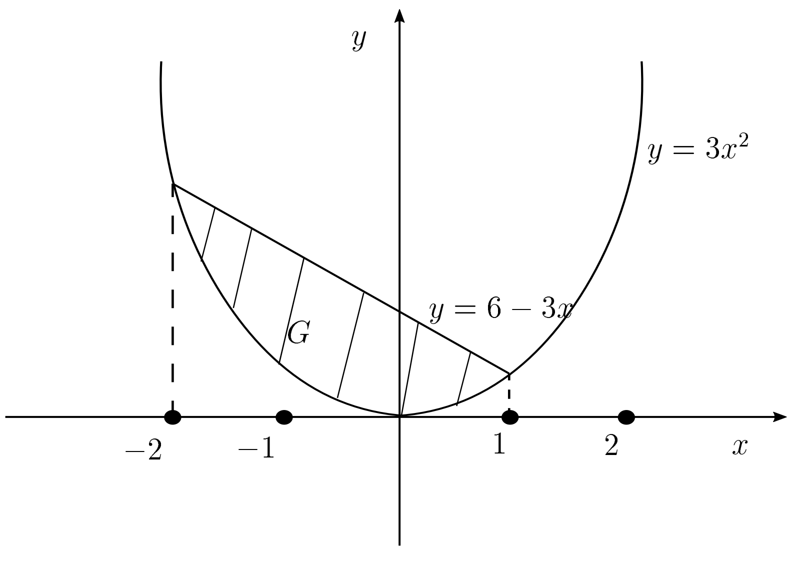

Рис. 9. К задаче 3.

$$\iint\limits_G xdxdy = \int\limits_{-2}^1 xdx \int\limits_{3x^2}^{6-3x} dy = \int\limits_{-2}^1 \left(6x - 3x^2 - 3x^3\right) dx = \left(3x^2 - x^3 - \frac{3x^4}{4}\right)\Bigg|_{-2}^1 = -\frac{27}{4}$$

Есть еще один нюанс. Когда мы разбирались с двойным интегралом, мы брали наш двойной интеграл по нашей области и сводили этот двойной интеграл к повторному, при этом мы сделали внутренний интеграл по y, а внешний интеграл по x. Могли ли мы сделать внутренний интеграл по x, а внешний интеграл сделать по y? Конечно могли! Но задача усложнилась бы, нам бы пришлось разбивать на два интеграла. В академических целях посчитаем исходный интеграл по этому сценарию.

$$\iint\limits_G x dx dy = \int\limits_0^{12} dy \int\limits_{x_{min(y)}}^{x_{max(y)}} x dx$$

Минимальное значение переменной x всегда будет на параболе $y = 3x^2$, то есть $x_{min} = -\sqrt{\frac{y}{3}}$. При этом максимальное значение переменной x зависит от того, каким значением мы фиксируем переменную y. Так, при $y \in [0, 3]$ максимальным значением переменной x будет $x_{max} = \sqrt{\frac{y}{3}}$, при $y \in [3, 12]$ максимальным значением переменной x будет $x_{max} = 2 - \frac{y}{3}$. Тогда получаем:

$$\iint\limits_G x dx dy = \int\limits_0^3 dy \int\limits_{-\sqrt{\frac{y}{3}}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} x dx + \int\limits_3^{12} dy \int\limits_{-\sqrt{\frac{y}{3}}}^{\frac{6-y}{3}} x dx = -\frac{27}{4}$$

Задача 4. Перейдите к полярным координатам в двойном интеграле $\iint\limits_G f(x, y) dx dy$. Где область G: $x^2 + y^2 = 4$.

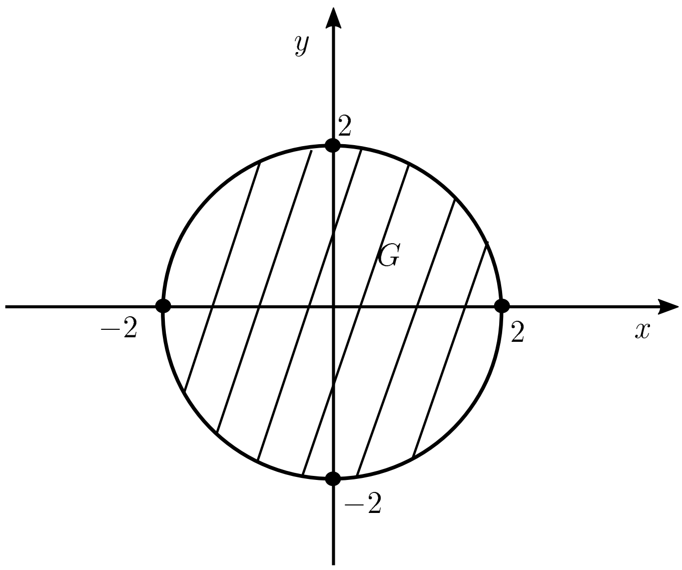

Рис. 10. Область интегрирования G.

Перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi, \\ y = \rho\sin\phi. \end{cases}$$

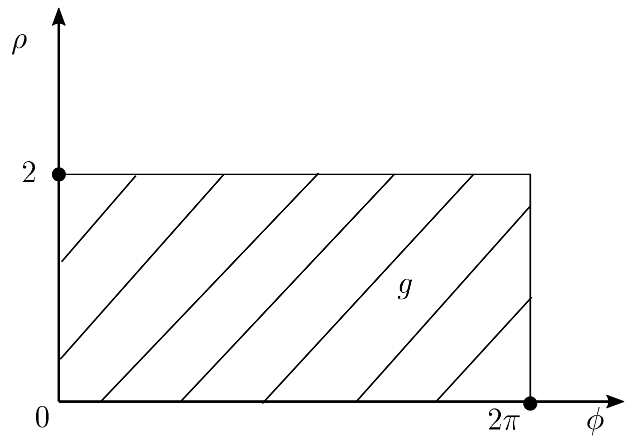

Рис. 11. Область интегрирования g.

У замены переменных есть две цели: первая цель – это упростить функцию, вторая цель – это упросить область, то есть в данном случае областью у нас был круг, а в переменных ρ и ϕ наша область – это прямоугольник. В зависимости от того, что нам нужно, мы можем делать ту или иную замену переменных.

Вспомним результат, полученный ранее:

$$\begin{cases} x = \phi(u,v), \\ y = \psi(u,v). \end{cases}$$

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_g f(\psi(u,v),\psi(u,v))\,|J|\,dudv$$

$$J = \begin{vmatrix} \phi_v & \psi_v \\ \phi_u & \psi_u \end{vmatrix}$$

Вычислим якобиан перехода к полярным координатам:

$$J = \begin{vmatrix} x_\rho & y_\rho \\ x_\phi & y_\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\rho\sin\phi & \rho\cos\phi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\phi + \rho\sin^2\phi = \rho$$

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_g f(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi)\rho d\rho d\phi$$

Для простоты возьмем функцию тождественно равной единице $f \equiv 1$, как мы выяснили, если $f \equiv 1$, то по смыслу двойного интеграла, мы просто будем получать площадь исходной области интегрирования. Таким образом, мы сейчас посчитаем площадь круга, ответ нам заранее известен $S = \pi\rho^2 = 4\pi$.

$$\iint\limits_G dxdy = \iint\limits_g \rho d\rho d\phi = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^2 \rho d\rho = 2\pi \cdot \frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^2 = 4\pi$$

Задача 5. Перейти к полярным координатам и посчитать интеграл $\iint\limits_G \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}}dxdy$. Где G: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$.

Сделаем следующую замену:

$$\begin{cases} x = 2\rho\cos\phi, \\ y = 2\rho\sin\phi. \end{cases}$$

Посчитаем якобиан перехода к новым переменным:

$$J = \begin{vmatrix} x_\rho & y_\rho \\ x_\phi & y_\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos\phi & 2\sin\phi \\ -2\rho\sin\phi & 2\rho\cos\phi \end{vmatrix} = 4\rho\cos^2\phi + 4\rho\sin^2\phi = 4\rho$$

Запишем подынтегральную функцию в терминах новых переменных:

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}} = \sqrt{1-\rho^2}$$

Тогда получаем:

$$\iint\limits_G \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}}dxdy = \iint\limits_g \sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho d\phi = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}d\rho =$$

$$= 2\pi\left((1-\rho^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right)\bigg|_0^1 = \frac{2\pi}{3}$$

Задача 6. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G \left(\sqrt{\frac{x-1}{3}}+\sqrt{\frac{y+1}{7}}\right)^3 dxdy$, найдя подходящую замену переменных. Где G: $\begin{cases} x=1, y=-1, \\ \sqrt{\dfrac{x-1}{3}}+\sqrt{\dfrac{y+1}{7}}=1. \end{cases}$

Введём следующую замену переменных:

$$\begin{cases} x = 1 + 3\rho^2\cos^4\phi, \\ y = -1 + 7\rho^2\sin^4\phi. \end{cases}$$

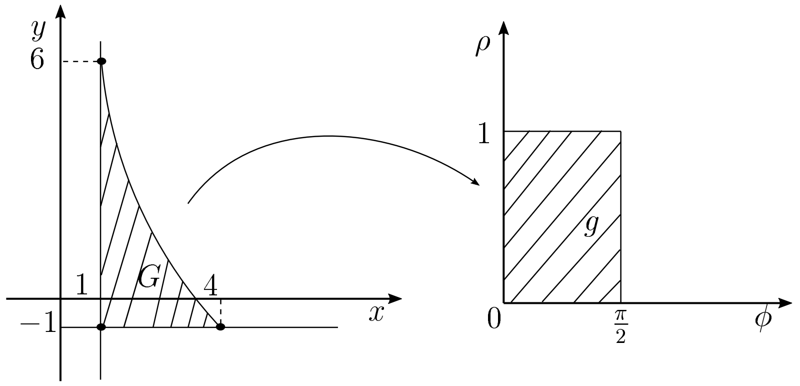

Рис. 12. Изменение исходной области интегрирования G.

Вычислим якобиан перехода:

$$J = \begin{vmatrix} x_\rho & y_\rho \\ x_\phi & y_\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6\rho\cos^4\phi & 14\rho\sin^4\phi \\ -3\rho^2 4\cos^3\phi\sin\phi & 7\rho^2 4\sin^3\phi\cos\phi \end{vmatrix} = 7{\cdot}6{\cdot}4\rho^3\cos^5\phi\sin^3\phi + 7{\cdot}6{\cdot}4\rho^3\cos^3\phi\sin^5\phi$$

$$J = 7\cdot 6\cdot 4\rho^3\cos^3\phi\sin^3\phi$$

Тогда получаем:

$$\iint\limits_G \left(\sqrt{\frac{x-1}{3}} + \sqrt{\frac{y+1}{7}}\right)^3 dxdy = \iint\limits_g \rho^3 7\cdot 6\cdot 4\rho^3\cos^3\phi\sin^3\phi d\rho d\phi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_0^1 d\rho\rho^3 7{\cdot}6{\cdot}4\rho^3\cos^3\phi\sin^3\phi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi 7{\cdot}6{\cdot}4\cos^3\phi\sin^3\phi \int\limits_0^1 d\rho\rho^6 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi 6{\cdot}4\cos^3\phi\sin^3\phi =$$

$$= 3\cdot 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi\cos^3\phi\sin^3\phi = 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\phi d\phi$$

Сделаем следующую замену:

$$\cos 2\phi = t \Rightarrow -\sin 2\phi 2d\phi = dt$$

$$\Rightarrow 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\phi d\phi = 3\int\limits_1^{-1} \left(\frac{-dt}{2}\right)\left(1-t^2\right) = \frac{3}{2}\cdot\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\cdot\left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9}$$

Семинар 5

Применение двойных интегралов.

В прошлом семинаре мы разобрали двойные интегралы, мы разобрали общее понятие двойных интегралов. Как двойной приводить к повторному интегралу, как сделать замену переменных в двойном интеграле. Сегодня мы посвятим семинар приложению двойных интегралов, которое позволяет находить площади, координаты центра тяжести.

Задача 1. Найти площадь фигуры S, ограниченной кривыми: $\begin{cases} xy = 4, \\ x + y = 5. \end{cases}$

Найдём точки пересечения этих кривых:

$$x(5-x) - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-1) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1, 4$$

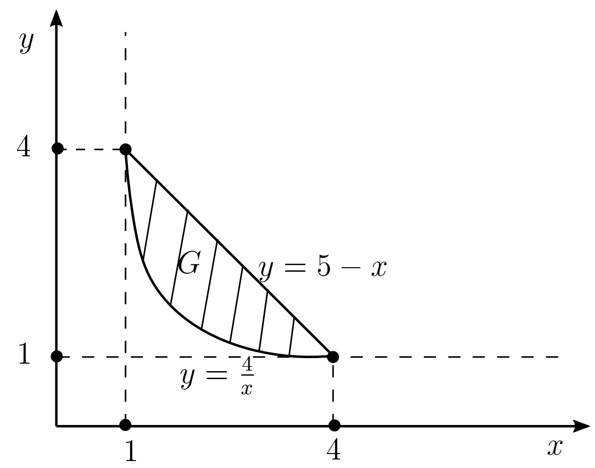

Рис. 13. Область интегрирования G.

$$S = \iint\limits_G dxdy = \int\limits_1^4 dx \int\limits_{\frac{4}{x}}^{5-x} dy = \int\limits_1^4 dx \left(5 - x - \frac{4}{x}\right) = \left(5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln|x|\right)\Bigg|_1^4 = 7,5 - 4\ln 4$$

Задача 2. Введя полярные координаты, найти площадь фигуры S, ограниченной кривыми: $\left(x^2+y^2\right)^2 = -2\left(x^2 - y^2\right)$.

Представить себе, как выглядит эта фигура сложно, поэтому давайте воспользуемся некоторой подсказкой, которая была дана в этом номере, а подсказка была простая – вести полярные координаты, то есть:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi, \\ y = \rho\sin\phi. \end{cases}$$

В полярных координатах кривая будет выглядеть следующим образом:

$$\rho^4 = -2\rho^2\left(\cos^2\phi - \sin^2\phi\right)$$

$$\Rightarrow \rho^2 = -2\cos 2\phi$$

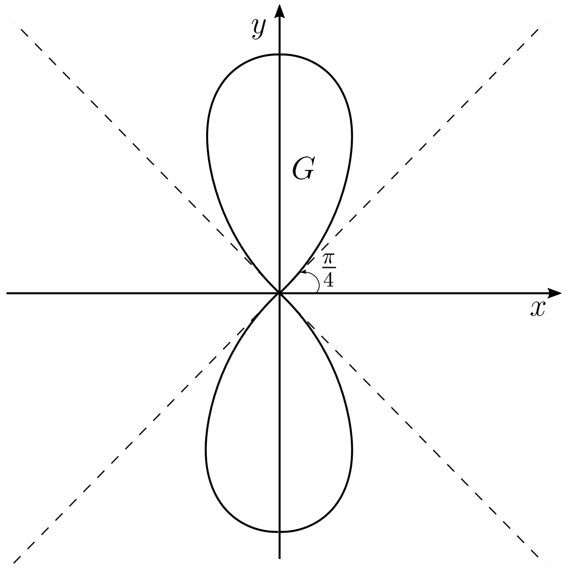

Рис. 14. Область интегрирования G.

Нам нужно посчитать площадь такой фигуры, так как фигура симметричная, то можно посчитать по верхней области и получившейся результат удвоить.

$$\iint\limits_G dxdy = 2\iint\limits_{\frac{G}{2}} dxdy = 2\iint\limits_g |J|\,d\rho d\phi$$

Давайте вспомним, как вычислять якобиан перехода к полярным координатам:

$$J = \begin{vmatrix} x_\rho & y_\rho \\ x_\phi & y_\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\rho\sin\phi & \rho\cos\phi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\phi + \rho\sin^2\phi = \rho$$

Тогда получаем:

$$\iint\limits_G dxdy = 2\iint\limits_g \rho d\rho d\phi$$

Давайте сообразим, как выглядит верхняя часть области G в полярных координатах. Угол $\phi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$, а $\rho = \sqrt{-2\cos 2\phi}$ и $\rho \in [0, \sqrt{2}]$. Тогда эта область в полярных координатах будет иметь вид:

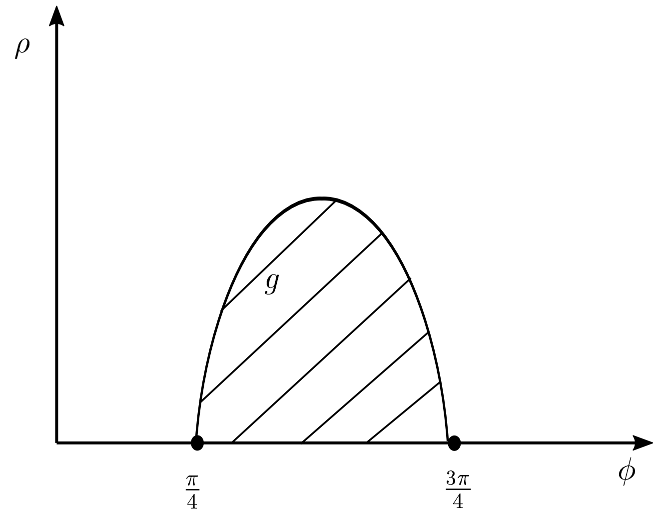

Рис. 15. Область интегрирования g.

Тогда получаем:

$$S = 2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\phi \int\limits_{0}^{\sqrt{-2\cos 2\phi}} \rho d\rho = -\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 2\cos 2\phi d\phi = -\sin 2\phi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = 2$$

Задача 3. Введя обобщенные полярные координаты, найти площадь фигуры S, ограниченной кривой $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = xy$.

Попробуем сначала представить себе область интегрирования. Глядя на этот закон весьма непросто это сделать, поэтому давайте подумаем какую сделать замену координат, чтобы эта кривая упростилась. Ответ достаточно простой:

$$\begin{cases} x = 2\rho\cos\phi, \\ y = 3\rho\sin\phi. \end{cases}$$

Тогда исходная кривая примет вид:

$$\rho^4 = 6\rho^2\cos\phi\sin\phi$$

$$\Rightarrow \rho^2 = 3\sin 2\phi$$

Теперь будет легче понять, как выглядит исходная кривая.

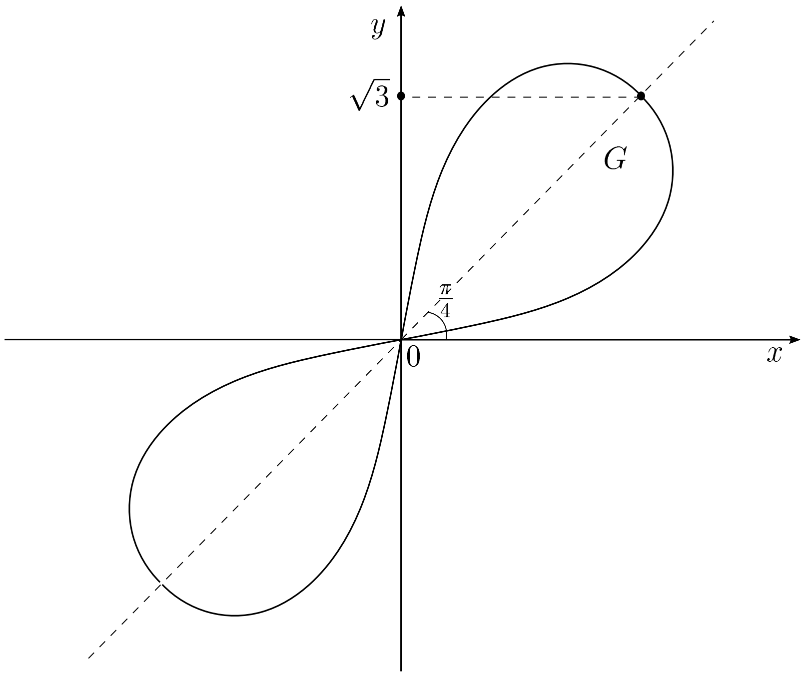

Рис. 16. Область интегрирования G.

$$S = \iint\limits_{G} dxdy = 2\iint\limits_{\frac{G}{2}} dxdy = 2\iint\limits_{g} |J|\, d\rho d\phi$$

Верхняя часть область G, то есть область g, в полярных координатах будет иметь следующий вид:

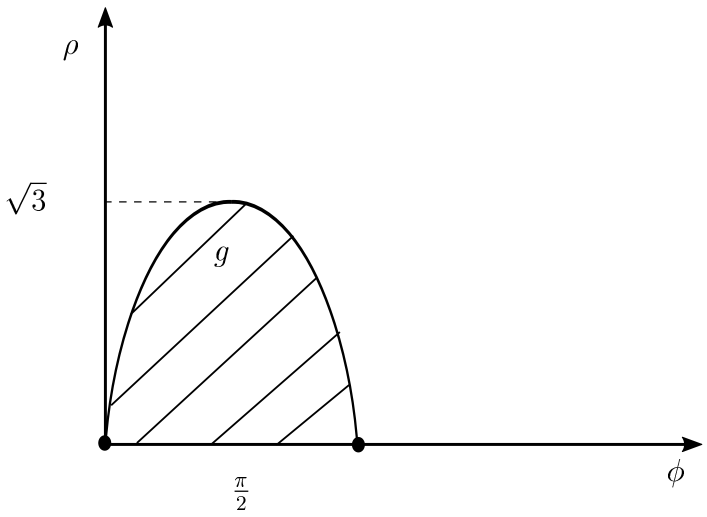

Рис. 17. Область интегрирования g.

Давайте вычислим якобиан перехода к обобщённым полярным координатам:

$$|J| = \left|\begin{vmatrix} x_\rho & x_\phi \\ y_\rho & y_\phi \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} 2\cos\phi & -2\rho\sin\phi \\ 3\sin\phi & 3\rho\cos\phi \end{vmatrix}\right| = 6\rho$$

Тогда получаем, что площадь исходной фигуры G равна:

$$S = 2\iint\limits_{g} 6\rho d\rho d\phi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_0^{\sqrt{3\sin 2\phi}} 6\rho d\rho = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 9\sin 2\phi d\phi = -9\cdot\cos 2\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 18$$

Задача 4. Найти координаты центра тяжести однородной пластины, ограниченной кривыми $\begin{cases} x + y = 4, \\ y = \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$

Найдём точки пересечения этих кривых:

$$4 - x = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -4, 2$$

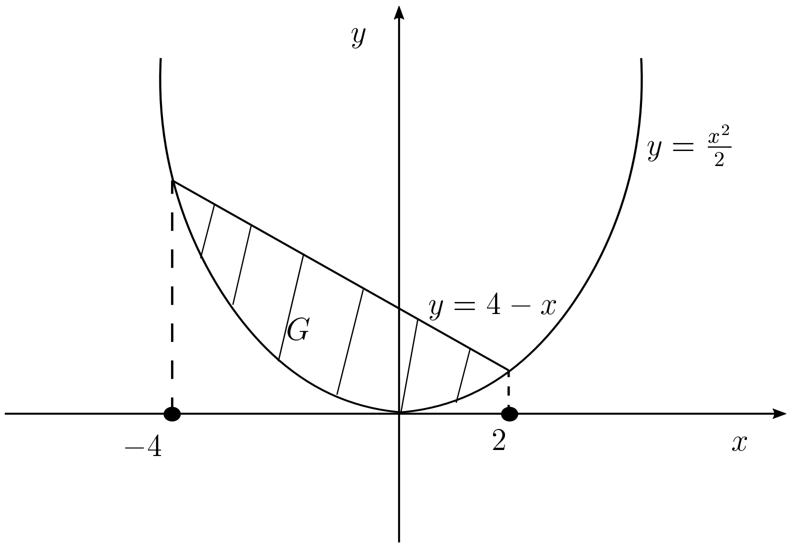

Рис. 18. Однородная пластина.

Давайте подумаем, как посчитать координаты центра тяжести (x_c, y_c), если мы знаем вид области, знаем плотность $\rho_0 = const$. Если бы мы считали координаты центра тяжести некоторой системы материальных точек, то чтобы мы сделали?

$$x_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\cdot m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\cdot\rho_0\Delta S_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\rho_0\Delta S_i} = \frac{\iint\limits_G x dx dy}{\iint\limits_G dx dy}$$

$$\iint\limits_G xdxdy = \int\limits_{-4}^{2} xdx \int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} dy = \int\limits_{-4}^{2} x\left(4 - x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8}\right)\Bigg|_{-4}^{2} = -18$$

$$\iint\limits_G dxdy = \int\limits_{-4}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} dy = \int\limits_{-4}^{2} \left(4 - x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left(4x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{-4}^{2} = 18$$

Таким образом, получаем, что $x_c = -1$. Теперь посчитаем y_c.

$$y_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \cdot m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \cdot \rho_0 \Delta S_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho_0 \Delta S_i} = \frac{\iint\limits_G ydxdy}{\iint\limits_G dxdy}$$

$$\iint\limits_G ydxdy = \int\limits_{-4}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} ydy = \int\limits_{-4}^{2} \left(\frac{(4-x)^2}{2} - \frac{x^4}{8}\right) dx = \left(-\frac{(4-x)^3}{6} - \frac{x^5}{40}\right)\Bigg|_{-4}^{2} = \frac{288}{5}$$

Таким образом, получаем, что $y_c = \frac{288}{18 \cdot 5} = \frac{16}{5} = 3,2$. Тогда окончательно получаем, что центр тяжести в точке $(-1; 3,2)$.

Семинар 6

Применение двойных и тройных интегралов.

Мы уже считали площади, координаты центра тяжести. Давайте посчитаем объемы разных фигур.

Замечание. В этом семинаре нам понадобится понятие **тройного интеграла**. Все методы, которые мы рассмотрели для двойного интеграла, справедливы для тройного интеграла также и естественным образом обобщаются на данный случай.

Определение 1. Тройным интегралом назовем предел интегральной суммы при стремлении к нулю диаметра разбиения δ объёмной фигуры G.

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i = \iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$$

Где ΔV_i – элементарный объём разбиения исходной объёмной фигуры G.

Задача 1. Посчитать объем тела V, которое ограничено следующими поверхностями:

$$\begin{cases} z = \ln\left(1+x^2+y^2\right), \\ z = 0, \\ x^2+y^2 = 2. \end{cases}$$

Давайте схематично изобразим исходное тело. Это будет всего лишь схема, которая нам нужна, чтобы понять, как выглядит фигура, и использовать это для дальнейшего решения.

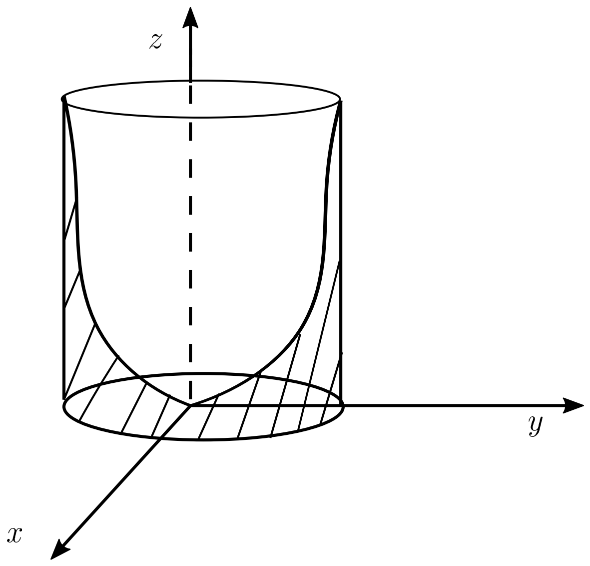

Рис. 19. Исходная фигура.

Как будем вычислять объём V? Если можно было бы эту область разделить на некоторые вертикальные столбики, то этот объем приближённо можно было посчитать, как сумму по всем объёмам вертикальных столбиков. Объём вертикальных столбиков есть высота этого столбика, то есть значение переменной z, умноженная на элементарную площадь ΔS_i основания G. Таким образом, получаем:

$$V = \sum_{i=1}^{n} z_i \Delta S_i = \iint\limits_G \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) dxdy$$

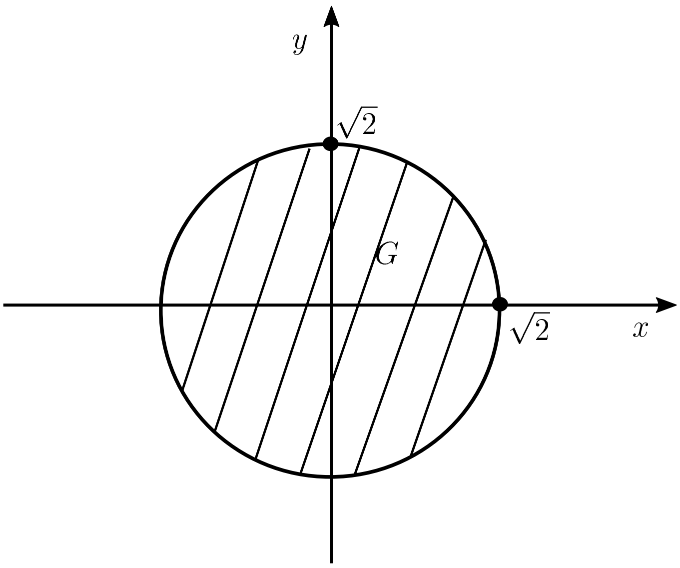

Рис. 20. Основание G.

Перейдём к полярным координатам $\begin{cases} x = \rho\cos\phi, \\ y = \rho\sin\phi. \end{cases}$

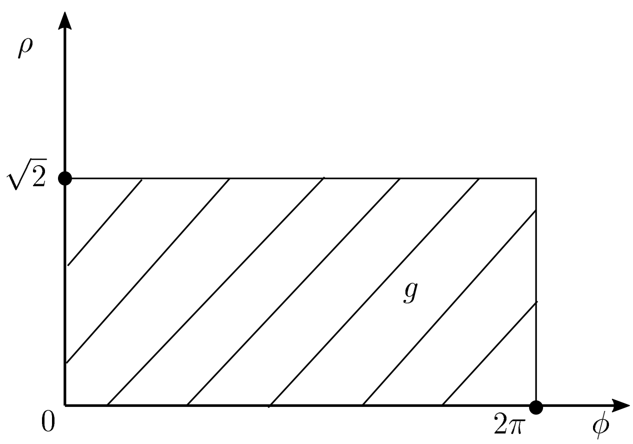

Рис. 21. Область g.

Тогда получаем:

$$V = \iint\limits_G \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) dxdy = \iint\limits_g \ln\left(1 + \rho^2\right) \rho d\rho d\phi$$

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \ln\left(1 + \rho^2\right) \rho d\rho = \left\{1 + \rho^2 = u \Rightarrow 2\rho d\rho = du\right\} = 2\pi \int\limits_1^3 \ln u \frac{du}{2}$$

$$V = \pi \int\limits_1^3 \ln u du = \pi \left(\ln u \cdot u \Big|_1^3 - \int\limits_1^3 du \right) = \pi \left(3 \cdot \ln 3 - 2\right)$$

$$V = \pi \left(3 \cdot \ln 3 - 2\right)$$

Задача 2. Найти моменты инерции относительно осей x и y однородной пластинки, ограниченной кривыми: $\begin{cases} y = 0, y = x, \\ y = 2 - x. \end{cases}$

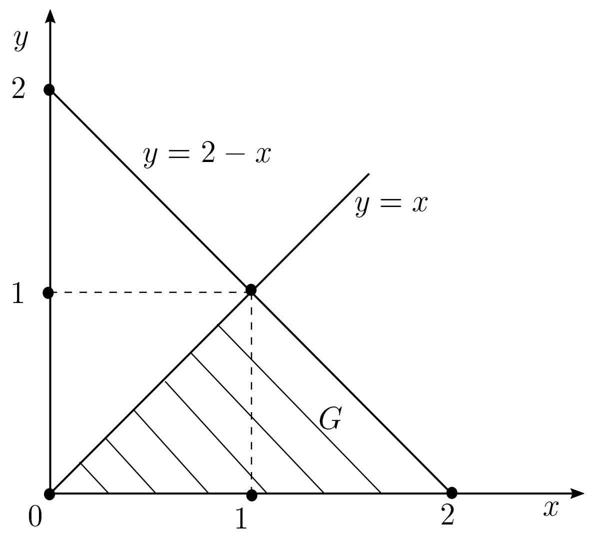

Рис. 22. Область G.

Если бы это было множество некоторых материальных точек, то как бы мы считали момент инерции относительно оси x? Считали бы следующим образом:

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \rho_0 \Delta S_i = \iint\limits_G y^2 \rho_0 dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} dx \rho_0 y^2$$

Где $\rho_0 = const$ – плотность исходной пластинки.

$$I_x = \int\limits_0^1 dy\,(2-2y)\,\rho_0 y^2 = \rho_0 \left(\frac{2y^3}{3} - \frac{2y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \rho_0\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right) = \frac{\rho_0}{6}$$

Аналогичным образом вычислим момент инерции относительно оси y.

$$I_y = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \rho_0 \Delta S_i = \iint\limits_G x^2\rho_0 dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} dx \rho_0 x^2$$

$$I_y = \int\limits_0^1 dy\left(\frac{(2-y)^3}{3} - \frac{y^3}{3}\right)\rho_0 = \rho_0\left(-\frac{(2-y)^4}{12} - \frac{y^4}{12}\right)\Bigg|_0^1 = \rho_0\left(-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}+\frac{2^4}{12}\right) = \rho_0\cdot\frac{7}{6}$$

Тогда окончательно получаем, что $I_x = \frac{\rho_0}{6}$, $I_y = \rho_0\cdot\frac{7}{6}$.

Задача 3. Найти момент инерции пластинки с плотностью $\rho_0 = xy$ относительно осей x и y, ограниченной кривыми $\begin{cases} x=0, y=0, \\ x=2, y=1. \end{cases}$

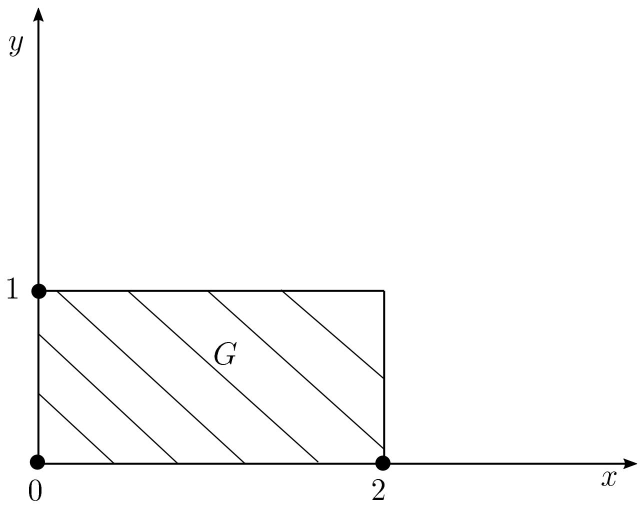

Рис. 23. Область G.

$$I_x = \iint\limits_G y^2\rho_0 dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^1 dyxy^3 = \left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2\right)\cdot\left(\frac{y^4}{4}\Bigg|_0^1\right) = \frac{1}{2}$$

$$I_y = \iint\limits_G x^2\rho_0 dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^1 dyx^3y = \left(\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^2\right)\cdot\left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1\right) = 2$$

Задача 4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{2}} + \dfrac{\sqrt{y}}{3} + \sqrt{\dfrac{z}{5}} = 1, \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$

Давайте схематично изобразим исходное тело. Это будет всего лишь схема, которая нам нужна, чтобы понять, как выглядит фигура, и использовать это для дальнейшего решения. Таким образом, получается, что это некоторая пирамида.

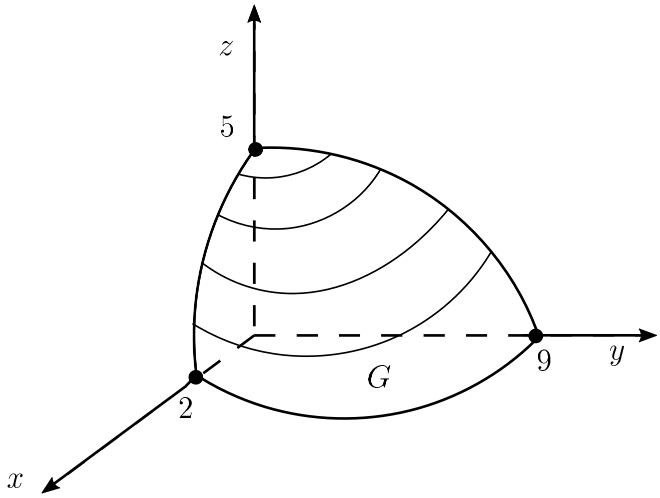

Рис. 24. Область G.

Давайте решим это здание через тройной интеграл.

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \iiint\limits_G dxdydz$$

При каждом фиксированном x и y переменная $z \in [0, \hat{z}]$, где $\hat{z} = 5 \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{\frac{y}{9}}\right)^2$. Тогда получаем:

$$V = \iiint\limits_G dxdydz = \iint\limits_{G_{pr}} dxdy \int\limits_0^{\hat{z}} dz$$

Где G_{pr} – проекция фигуры G на плоскость (x, y).

$$V = \iint\limits_{G_{pr}} 5 \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{\frac{y}{9}}\right)^2 dxdy$$

Чтобы вычислить такой интеграл давайте введём обобщённые полярные координаты:

$$\begin{cases} x = 2\rho^2 \cos^4 \phi, \\ y = 9\rho^2 \sin^4 \phi. \end{cases}$$

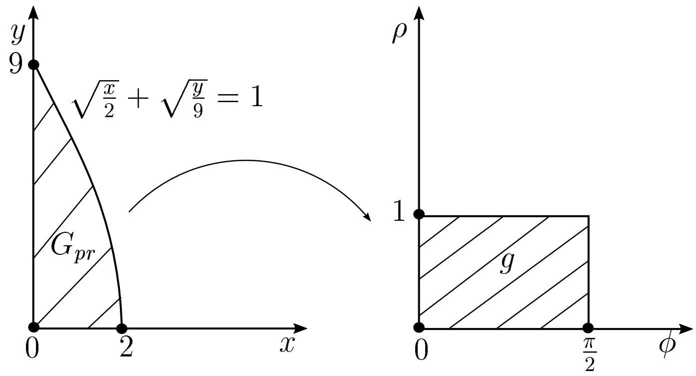

Рис. 25. Изменение области G_{pr} при переходе к обобщённым полярным координатам.

Вычислим якобиан перехода к новым координатам:

$$|J| = \left|\begin{vmatrix} x_\rho & x_\phi \\ y_\rho & y_\phi \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} 4\rho\cos^4\phi & -2\rho^2 4\cos^3\phi\sin\phi \\ 18\rho\sin^4\phi & 9\rho^2 4\sin^3\phi\cos\phi \end{vmatrix}\right| = 9\cdot 4^2\cdot\rho^3\cdot\sin^3\phi\cos^3\phi$$

Тогда получаем:

$$V = \iint\limits_{G_{pr}} 5\cdot\left(1-\sqrt{\frac{x}{2}}-\sqrt{\frac{y}{9}}\right)^2 dxdy = \iint\limits_{g} 5\cdot(1-\rho)^2 9\cdot 4^2\cdot\rho^3\cdot\sin^3\phi\cos^3\phi d\rho d\phi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\phi d\phi \int\limits_0^1 90(1-\rho)^2\rho^3 d\rho$$

Вычислим эти два интеграла по отдельности:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\phi d\phi = \{\cos 2\phi = u \Rightarrow -2\sin 2\phi d\phi = du\} = -\frac{1}{2}\int\limits_1^{-1}\left(1-u^2\right)du =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left(1-u^2\right)du = \frac{1}{2}\left(u-\frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\int\limits_0^1 90(1-\rho)^2\rho^3 d\rho = 90\cdot\int\limits_0^1\left(1-2\rho+\rho^2\right)\rho^3 d\rho = 90\cdot\int\limits_0^1\left(\rho^3-2\rho^4+\rho^5\right)d\rho =$$

$$= 90\cdot\left(\frac{\rho^4}{4}-\frac{2\cdot\rho^5}{5}+\frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 = 90\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right) = \frac{3}{2}$$

Тогда окончательно получаем, что $V = 1$.

Задача 5. Найдите координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $\begin{cases} x^2+z^2=4, \\ y=1, y=3, z=0, \\ z\geq 0. \end{cases}$

Мы понимаем, что у тела, которое ограничено поверхностями, есть три координаты (x, y, z). Все три координаты считать долго и однообразно, поэтому давайте мы посчитаем какую-то одну координату. Другие координаты будут вычисляться аналогично и остаются в качестве самостоятельной работы.

Давайте схематично изобразим исходное тело. Это будет всего лишь схема, которая нам нужна, чтобы понять, как выглядит фигура, и использовать это для дальнейшего решения.

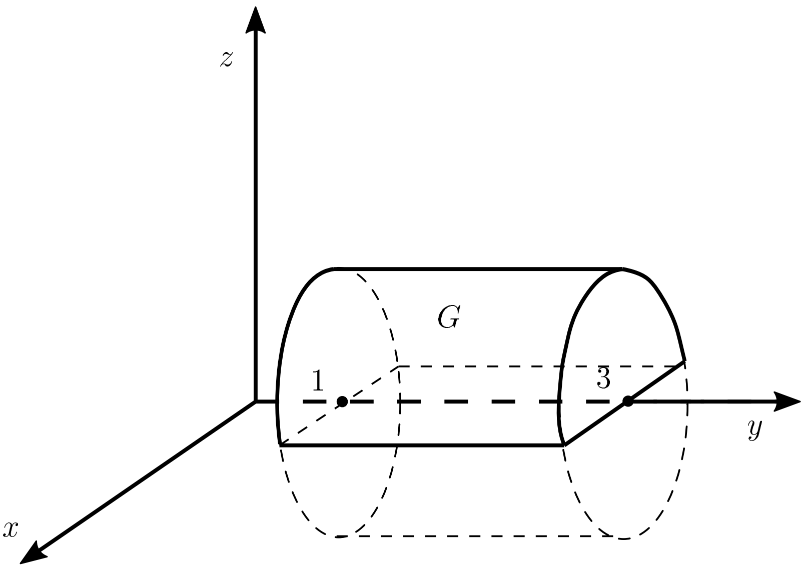

Рис. 26. Область G.

Из рисунка нашей фигуры видно, что координаты центра тяжести по переменным x и y есть $x_c = 0, y_c = 2$. Поэтому давайте найдём z–координату центра тяжести.

$$z_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i \rho_0 \Delta V_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho_0 \Delta V_i} = \frac{\iiint\limits_G z dxdydz}{\iiint\limits_G dxdydz}$$

$$\iiint\limits_G z dxdydz = \iint\limits_{G_{pr}} dxdy \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} z dz$$

Где G_{pr} – проекция области G на плоскость (x, y).

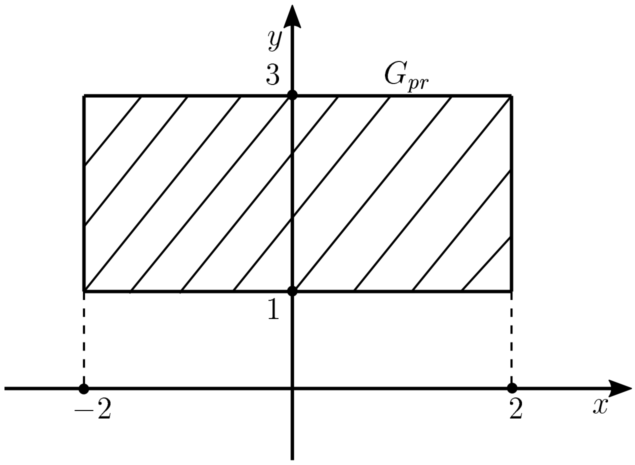

Рис. 27. Область G_{pr}.

$$\iint\limits_{G_{pr}} dxdy \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} zdz = \iint\limits_{G_{pr}} dxdy \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(4-x^2\right) = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_1^3 dy \left(4-x^2\right) = \left(\left(2x - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{-2}^{2}\right) \cdot \left(y\Bigg|_1^3\right)$$

$$\iint\limits_{G_{pr}} dxdy \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} zdz = \frac{16}{3} \cdot 2 = \frac{32}{3}$$

$$\Rightarrow \iiint\limits_{G} zdxdydz = \frac{32}{3}$$

Теперь посчитаем оставшийся интеграл:

$$\iiint\limits_{G} dxdydz = \iint\limits_{G_{pr}} dxdy \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} dz = \iint\limits_{G_{pr}} dxdy\sqrt{4-x^2} = \int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}dx \int\limits_1^3 dy$$

$$\iiint\limits_{G} dxdydz = 2 \cdot \int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}dx = 4 \cdot \int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$$

Сделаем замену $x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos tdt$. Тогда получаем:

$$4 \cdot \int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = 4 \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\left|\cos t\right| \cdot 2\cos tdt$$

При $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\cos t \geq 0$. Тогда получаем:

$$4 \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,|\cos t| \cdot 2\cos t dt = 16 \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 16 \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = (8t + 4\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi$$

$$\Rightarrow \iiint\limits_G dxdydz = 4\pi$$

Тогда окончательно получаем:

$$z_c = \frac{\iiint\limits_G zdxdydz}{\iiint\limits_G dxdydz} = \frac{32}{3 \cdot 4\pi} = \frac{8}{3\pi}$$

Задача 6. Найти момент инерции относительно осей координат и начала координат однородного тела с плотностью $\rho_0 = const$, ограниченного поверхностями

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Давайте схематично изобразим исходное тело. Это будет всего лишь схема, которая нам нужна, чтобы понять, как выглядит фигура, и использовать это для дальнейшего решения.

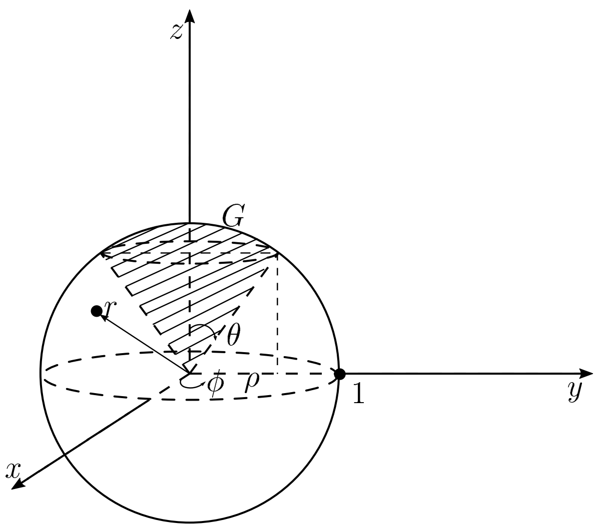

Рис. 28. Область G.

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} \left(y^2 + z^2\right) \rho_0 \Delta V_i = \iiint\limits_G \left(y^2 + z^2\right) \rho_0 dxdydz$$

Давайте перейдём в сферическую систему координат.

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi, \\ y = r\sin\theta\sin\phi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Давайте посмотрим, как изменится область G при переходе к новым координатам. Из рисунка видно, что $\phi \in [0, 2\pi]$ и $r \in [0,1]$. С углом θ сложнее. Изменение угла θ можно определить с помощью $\sin\theta = \frac{\rho}{r}\Big|_{r=1} = \rho$. Где ρ – расстояние от оси z до точки пересечения конуса и сферы единичного радиуса. Найдём это расстояние.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1, \\ z = \sqrt{x^2+y^2}. \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+x^2+y^2 = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Отсюда следует, что $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Далее вычислим якобиан перехода к сферическим координатам.

$$|J| = \left\| \begin{matrix} x_r & y_r & z_r \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_\phi & y_\phi & z_\phi \end{matrix} \right\| = r^2\sin\theta$$

Тогда получаем:

$$I_x = \iiint\limits_G \left(y^2+z^2\right)\rho_0 dxdydz = \iiint\limits_g r^2\left(\sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta\right)\rho_0 r^2\sin\theta drd\phi d\theta =$$

$$= \rho_0 \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int\limits_0^1 drr^4\left(\cos^2\theta + \left(1-\cos^2\theta\right)\cdot\sin^2\phi\right)\cdot\sin\theta =$$

$$= \frac{\rho_0}{5}\int\limits_0^{2\pi} d\phi\cdot(-1)\left(\frac{\cos^3\theta}{3} + \sin^2\phi\left(\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -\frac{\rho_0}{5}\int\limits_0^{2\pi} d\phi\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} + \sin^2\phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\right)\right)$$

Пусть

$$c_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}$$

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}$$

Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int\limits_0^{2\pi} d\phi c_2 \sin^2\phi = c_2 \int\limits_0^{2\pi} d\phi \frac{1-\cos 2\phi}{2} = \frac{c_2}{2}\cdot 2\pi$$

Так как $\int\limits_0^{2\pi} d\phi \cos 2\phi = 0$. Поэтому получаем:

$$I_x = -\frac{\rho_0}{5}\cdot\left(c_1 + \frac{c_2}{2}\right)\cdot 2\pi$$

$$I_x = -\frac{\rho_0}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\right)\right)\cdot 2\pi$$

$$I_x = -\frac{\rho_0}{5}\cdot\left(\frac{7}{12\sqrt{2}} - \frac{2}{3}\right)\cdot 2\pi$$

Посчитаем момент инерции относительно оси z.

$$I_z = \iiint\limits_G \left(x^2+y^2\right)\rho_0 dxdydz = \iiint\limits_g \left(r^2\sin^2\theta\cos^2\phi + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi\right)\cdot\rho_0\cdot r^2\sin\theta dr d\phi d\theta =$$

$$= \rho_0\cdot\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int\limits_0^1 dr\cdot r^4\sin^3\theta = \frac{\rho_0}{5}\cdot 2\pi\cdot(-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\cos^2\theta\right)d\cos\theta =$$

$$= \frac{\rho_0}{5}\cdot 2\pi\cdot(-1)\cdot\left(\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\rho_0}{5}\cdot 2\pi\cdot(-1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\right)$$

Далее вычислим момент инерции относительно начала координат.

$$I_0 = \iiint\limits_G \left(x^2+y^2+z^2\right)\rho_0 dxdydz = \iiint\limits_g r^2\rho_0 r^2\sin\theta dr d\theta d\phi = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int\limits_0^1 dr r^4\rho_0\sin\theta =$$

$$= 2\pi\cdot\frac{\rho_0}{5}\left(-\cos\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\pi\rho_0}{5}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Задача 7. Определить момент инерции относительно начала координат тела плотностью $\rho_0 = 2\cdot(x^2+y^2+z^2)$, ограниченного поверхностями $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = x^2+y^2$.

Давайте сначала представим, как выглядит это тело, но представить себе, как это выглядит в декартовой системе координат очень сложно, зато тут есть конструкция вида $x^2 + y^2 + z^2$, поэтому автоматически напрашивается переход к сферической системе координат.

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi, \\ y = r\sin\theta\sin\phi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Тогда как изменится исходная поверхность? Изменится следующим образом:

$$r^2 = \sin^2\theta$$

Как выглядит тело, которое ограничено такой поверхностью? Во-первых, у этой поверхности нет зависимости от ϕ, соответственно для любого угла ϕ она одинаковая, то есть это фигура симметрична относительно вращения вокруг оси z. Во-вторых, при $\theta = 0$ переменная $r = 0$, при $\theta = \frac{\pi}{2}$ переменная $r = 1$, при $\theta = \pi$ переменная $r = 0$. Таким образом, схематично получаем:

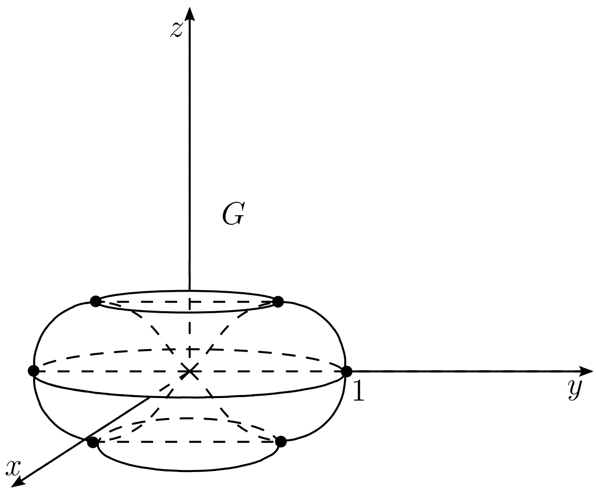

Рис. 29. Область G.

Очевидно, что $0 \le \phi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le r \le \sin\theta$. Тогда получаем:

$$I_0 = \iiint\limits_G \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot \rho_0 dxdydz = \iiint\limits_G \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_g r^2 \cdot 2r^2 \cdot r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{\sin\theta} 2 \cdot r^6 \sin\theta dr = 2\pi \cdot \int\limits_0^{\pi} d\theta \cdot \left(2 \cdot \frac{\sin^8\theta}{7}\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{7} \cdot \int\limits_0^{\pi} d\theta \cdot \sin^8\theta = \frac{4\pi}{7} \cdot \int\limits_0^{\pi} d\theta \cdot \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right)^4 =$$

$$= \frac{4\pi}{7} \cdot \int\limits_0^\pi d\theta \cdot \left(\frac{1 - 4\cos 2\theta + 6\cos^2 2\theta - 4\cos^3 2\theta + \cos^4 2\theta}{16} \right)$$

$$\int\limits_0^\pi \cos 2\theta d\theta = 0$$

$$\Rightarrow I_0 = \frac{4\pi}{7} \cdot \left(\frac{\pi}{16} + \int\limits_0^\pi \frac{d\theta}{16} \cdot \left(6 \cdot \left(\frac{1+\cos 4\theta}{2} \right) + \left(\frac{1+\cos 4\theta}{2} \right)^2 - 4\cos^3 2\theta \right) \right) =$$

$$= \frac{4\pi}{7} \cdot \frac{1}{16} \left(\pi + 3\pi + \int\limits_0^\pi d\theta \cdot \left(\frac{1+\cos 4\theta}{2} \right)^2 - 4 \cdot \int\limits_0^\pi d\theta \cos^3 2\theta \right)$$

$$4 \cdot \int\limits_0^\pi d\theta \cos^3 2\theta = 4 \cdot \int\limits_0^\pi \left(1 - \sin^2 2\theta\right) \frac{d \sin 2\theta}{2} = 2 \cdot \left(\sin 2\theta - \frac{\sin^3 2\theta}{3} \right) \Bigg|_0^\pi = 0$$

$$\Rightarrow I_0 = \frac{4\pi}{7} \cdot \frac{1}{16} \left(\pi + 3\pi + \int\limits_0^\pi d\theta \cdot \left(\frac{1+\cos 4\theta}{2} \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{4\pi}{7} \cdot \frac{1}{16} \left(4\pi + \int\limits_0^\pi \left(\frac{1 + 2\cos 4\theta + \cos^2 4\theta}{4} \right) d\theta \right) = \frac{4\pi}{7} \cdot \frac{1}{16} \left(4\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \right)$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$I_0 = \frac{4\pi}{7} \cdot \frac{1}{16} \left(4\pi + \frac{3\pi}{8} \right)$$

Семинар 7

Криволинейные интегралы I рода.

Давайте рассмотрим некоторую задачу, чтобы можно было представить в чем смысл **криволинейных интегралов** и для чего они нужны. Задача такая: предположим, что у нас есть некоторая неоднородная проволока, то есть в разных точках этой проволоки разная плотность, мы хотим посчитать массу проволоки. Как мы будем считать? Идея достаточно простая: мы, считая массу, разделим проволоку на много маленьких кусочков, на каждом кусочке плотность будем считать примерно постоянной, соответственно посчитаем массу каждого кусочка, умножив плотность кусочка на его длину, далее просуммируем каждый такой кусочек. То есть физической величине мы ставим в соответствие некоторую интегральную сумму. Понятно, что, переходя к пределу при стремлении к нулю размеров этих кусочков, мы получим некоторое понятия интеграла, на этом понятии строится понятие *криволинейных интегралов*.

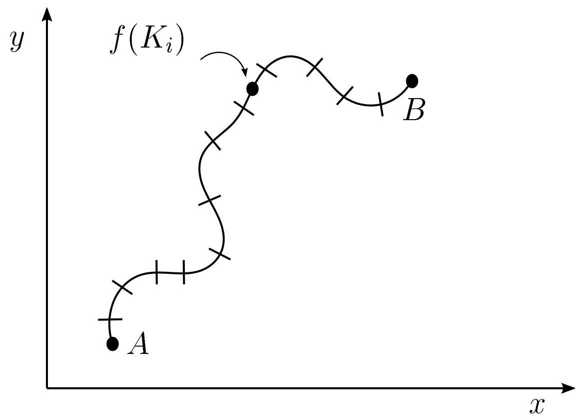

Рис. 30. Кривая L.

Предположим, что у нас на плоскости задана некоторая кривая $y = y(x)$, как задана кривая это не принципиально, главное, что кривая задана некоторым образом. Теперь предположим, что в каждой точке этой кривой определена функция, некоторая функция $f(M)$, где M – это точка на кривой. Предположим, что у нас кривая изменяется от некоторой начальной точки A до конечной точки B. Поступим следующим образом, разобьём эту кривую на части, на каждой части возьмем некоторую точку K_i и в этой точке возьмем значение функции. Составим сумму по всем кусочкам:

$$\sum_{i=1}^{n} f(K_i)\Delta l_i$$

Где Δl_i – длина i–го кусочка проволоки. Эта величина всегда положительна!

Определение 1. Если существует предел $\lim\limits_{max(\Delta l_i)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(K_i)\Delta l_i$ и не зависит от выбора точек K_i $\forall i$, то такой предел называется **криволинейным интегралом I рода**.

$$\lim_{max(\Delta l_i)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(K_i)\Delta l_i = \int\limits_{AB} f(x,y)dl$$

Замечание 1. Если задать кривую на плоскости параметрически $\begin{cases} y=\psi(t), \\ x=\phi(t). \end{cases}$ при $t\in[\alpha,\beta]$, тогда криволинейный интеграл I рода можно свести к определённому:

$$\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2} = \sqrt{(\phi_i-\phi_{i-1})^2+(\psi_i-\psi_{i-1})^2} = \sqrt{\phi'^2+\psi'^2}\Delta t_i$$

$$\Rightarrow \int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t),\psi(t))\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

Замечание 2. Если функция задана явно $y=y(x)$, то есть $\begin{cases} x=t, \\ y=y(t). \end{cases}$, причём $x\in[\alpha,\beta]$, тогда

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx$$

Задача 1. Вычислить криволинейный интеграл I рода $\int\limits_L (x+y)dl$, где кривая L – это граница треугольника с вершинами в точках $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(0,0)$.

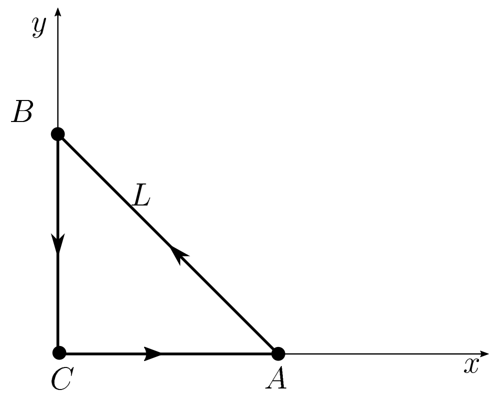

Рис. 31. Кривая L.

Почему интеграл задан не от какой-то начальной точки до конечной точки? Почему не уточняется направление интегрирования? Потому что, как было сказано выше, величина Δl_i – положительная, поэтому мы можем интегрировать в любом удобном нам направлении, интеграл не поменяется (это характерно для криволинейных интегралов I рода).

$$\int\limits_{L}(x+y)dl = \int\limits_{AB}(x+y)dl + \int\limits_{BC}(x+y)dl + \int\limits_{CA}(x+y)dl$$

Все криволинейные интегралы считаются одинаково. Мы параметризуем нашу кривую.

1) Вычислим $\int\limits_{AB}(x+y)dl$. Сделаем следующую параметризацию $\begin{cases} x = t, \\ y = 1-t. \end{cases}$ при $t \in [0,1]$.

$$\int\limits_{AB}(x+y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t),\psi(t))\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt = \int\limits_{0}^{1}(t+1-t)\sqrt{1^2+(-1)^2}dt = \sqrt{2}$$

2) Вычислим $\int\limits_{BC}(x+y)dl$. Сделаем следующую параметризацию $\begin{cases} x = 0, \\ y = t. \end{cases}$ при $t \in [0,1]$.

$$\int\limits_{BC}(x+y)dl = \int\limits_{0}^{1} t\sqrt{0^2+1^2}dt = \frac{1}{2}$$

3) Вычислим $\int\limits_{CA}(x+y)dl$. Сделаем следующую параметризацию $\begin{cases} x = t, \\ y = 0. \end{cases}$ при $t \in [0,1]$.

$$\int\limits_{CA}(x+y)dl = \int\limits_{0}^{1} t\sqrt{1^2+0^2}dt = \frac{1}{2}$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$\int\limits_{L}(x+y)dl = 1+\sqrt{2}$$

Задача 2. Вычислить криволинейный интеграл I рода $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$. Где L : $x^2+y^2=2x$.

Как мы выяснили ранее, для криволинейного интеграла I рода неважно, какая точка является начальной, а какая конечной, то есть в какую сторону мы интегрируем, поэтому для этого случая также не сказано, какая точка начальная, а какая конечная. Мы самостоятельно выберем эти точки. Кривая у нас задается следующим уравнением:

$$x^2+y^2=2x \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$$

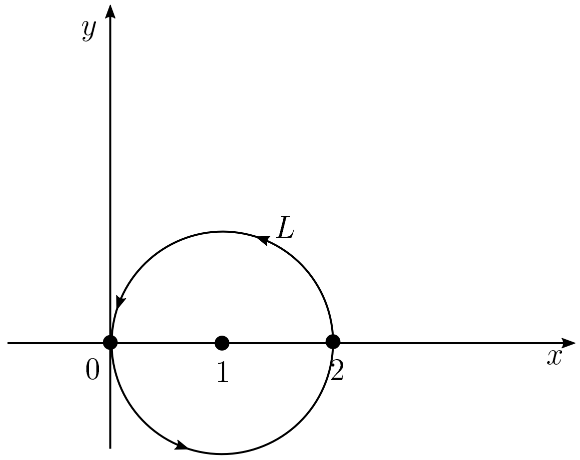

Рис. 32. Кривая L.

Как проще всего параметризовать эту кривую? Разумно параметризовать следующим образом:

$$\begin{cases} x = 1+\cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

Причём $t \in [0, 2\pi]$. Тогда получаем:

$$\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos t)^2+\sin^2 t}\cdot\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t}dt = \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2+2\cos t}dt =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos t}dt = \left\{\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2}-1\right\} = 2\int\limits_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt$$

Так как $\cos\frac{t}{2}$ – симметричная функция, то

$$\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl = 4\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}dt = 8\cdot\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} = 8$$

Задача 3. Найти массу M материальной кривой с постоянной линейной плотностью $\rho_0 = const$. Кривая задаётся следующим образом

$$\begin{cases} x = e^{-t}\cos t, \\ y = e^{-t}\sin t, \\ z = e^{-t}. \end{cases}$$

Причём $0 \le t \le \ln 3$.

$$M = \int\limits_L \rho_0 dl = \int\limits_0^{\ln 3} \rho_0 \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt =$$

$$= \int\limits_0^{\ln 3} \rho_0 \cdot \sqrt{\left(-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t\right)^2 + \left(-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t\right)^2 + e^{-2t}}dt =$$

$$= \int\limits_0^{\ln 3} \rho_0 \cdot \sqrt{3}e^{-t}dt = \rho_0 \cdot \sqrt{3} \cdot (-1) \cdot e^{-t}\Big|_0^{\ln 3} = \rho_0 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \rho_0 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Итак, чтобы посчитать массу, мы разбили кривую на n частей, длину каждой части умножили на плотность и просуммировали, переходя к пределу при стремлении к нулю размера каждого кусочка. Мы получили криволинейный интеграл I рода.

Кривая у нас уже была параметризована, поэтому нам не нужно было параметризовать нашу кривую. Мы воспользовались параметризацией, посчитали элемент длинны dl, свели к определенному интегралу и посчитали определенный интеграл.

Задача 4. Найти координаты центра тяжести однородной дуги окружности $x^2 + y^2 = 4$, соединяющей точки $A(2, 0)$, $B(-1, \sqrt{3})$.

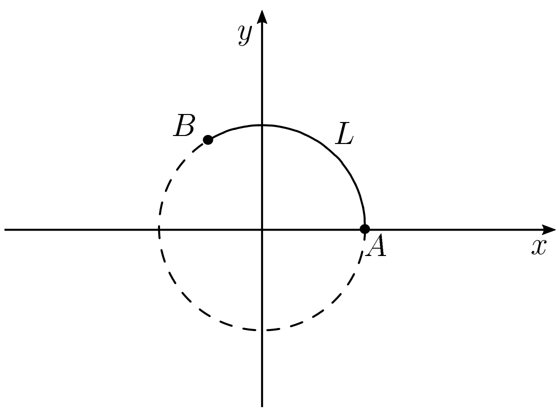

Рис. 33. Кривая L.

Сделаем следующую параметризацию:

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t. \end{cases}$$

Очевидно, что параметр $t \in [0, \frac{2\pi}{3}]$. Вычислим теперь координаты центра тяжести такой дуги.

$$x_c = \frac{\sum\limits_i x_i \rho_0 \Delta l_i}{\sum\limits_i \rho_0 \Delta l_i} = \frac{\int\limits_L x dl}{\int\limits_L dl}$$

$$\int\limits_L x dl = \int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} 2\cos t \cdot \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} dt = 4 \cdot \int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} \cos t dt = 2\sqrt{3}$$

$$\int\limits_L dl = \int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} dt = \frac{4\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x_c = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

$$y_c = \frac{\sum\limits_i y_i \rho_0 \Delta l_i}{\sum\limits_i \rho_0 \Delta l_i} = \frac{\int\limits_L y dl}{\int\limits_L dl}$$

$$\int\limits_L y dl = \int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} 2\sin t \cdot \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} dt = 4 \cdot \int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin t dt = 4 \cdot \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y_c = \frac{9}{2\pi}$$

Задача 5. Найти момент инерции относительно осей координат одного витка однородной винтовой линии. Параметризуется виток следующим образом

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = \dfrac{t}{2\pi}. \end{cases}$$

Причём $0 \le t \le 2\pi$.

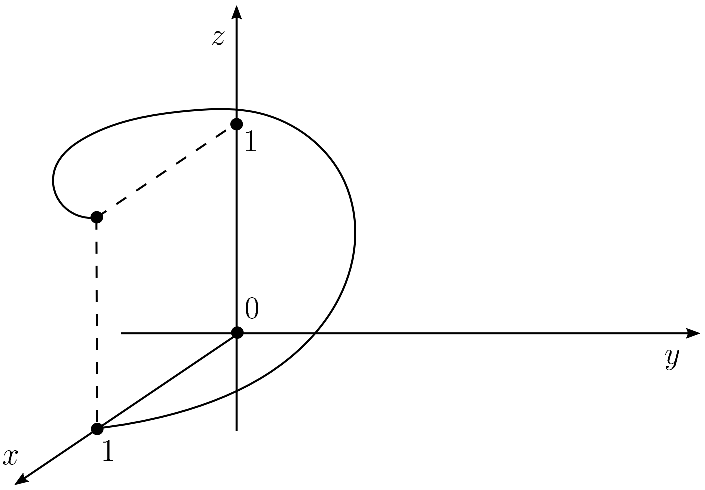

Рис. 34. Кривая L.

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i^2 + z_i^2\right) \rho_0 \cdot \Delta l_i = \int\limits_L \left(y^2 + z^2\right) \rho_0 dl =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \frac{t^2}{4\pi^2}\right) \cdot \rho_0 \cdot \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2} dt =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}} \cdot \rho_0 \cdot \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} + \frac{t^2}{4\pi^2}\right) dt$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos 2t dt = 0$$

$$\Rightarrow I_x = \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}} \cdot \rho_0 \cdot \left(\pi + \frac{1}{3} \cdot \frac{(2\pi)^3}{4\pi^2}\right)$$

$$\Rightarrow I_x = \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}} \cdot \rho_0 \cdot \frac{5\pi}{3}$$

Далее вычислим момент инерции I_z относительно оси z. Момент инерции I_y относительно оси y предлагается вычислить самостоятельно.

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + y_i^2\right) \rho_0 \cdot \Delta l_i = \int\limits_L \left(x^2 + y^2\right) \rho_0 dl =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) \cdot \rho_0 \cdot \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2} dt = \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}} \cdot \rho_0 \cdot 2\pi$$

Семинар 8

Криволинейные интегралы II рода.

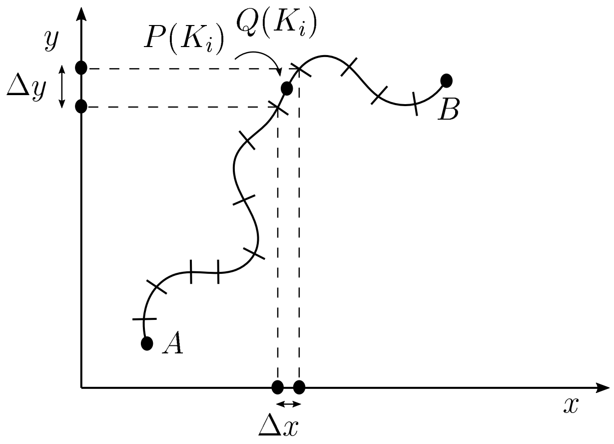

Рис. 35. Кривая L.

Предположим, что у нас на плоскости задана некоторая кривая $y = y(x)$, как задана кривая это не принципиально, главное, что кривая задана некоторым образом. Теперь предположим, что в каждой точке этой кривой определены функции $P(M)$ и $Q(M)$, где M – это точка на кривой. Предположим, что у нас кривая изменяется от некоторой начальной точки A до конечной точки B. Поступим следующим образом, разобьём эту кривую на части, на каждой части возьмем некоторую точку K_i и в этой точке возьмем значения функций.

Определение 1. Если существует предел $\lim\limits_{max(\Delta l_i)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} P(K_i)\Delta x_i$ и не зависит от выбора точек K_i $\forall i$, то такой предел называется **криволинейным интегралом II рода**.

$$\lim_{max(\Delta l_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} P(K_i)\Delta x_i = \int\limits_{AB} P(x,y)dx$$

Где Δl_i – длина i–го кусочка проволоки, а $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Определение 2. Если существует предел $\lim\limits_{max(\Delta l_i)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} Q(K_i)\Delta y_i$ и не зависит от выбора точек K_i $\forall i$, то такой предел называется **криволинейным интегралом II рода**.

$$\lim_{max(\Delta l_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(K_i)\Delta y_i = \int\limits_{AB} Q(x,y)dy$$

Где Δl_i – длина i–го кусочка проволоки, а $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$.

Замечание 1. В отличие от величины Δl_i величины Δx_i и Δy_i могут быть отрицательными!

Замечание 2. Иногда **криволинейным интегралом II рода** называют сумму:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy$$

Замечание 3. Если задать кривую на плоскости параметрически $\begin{cases} y = \psi(t), \\ x = \phi(t). \end{cases}$ при $t \in [\alpha, \beta]$, тогда криволинейный интеграл II рода можно свести к определённому:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P\left(\phi(t), \psi(t)\right) \phi' dt + Q\left(\phi(t), \psi(t)\right) \psi' dt$$

Задача 1. Вычислить криволинейный интеграл II рода $\int\limits_{OA} xdy - ydx$ для незамкнутых кривых заданных параметрически: а) OA – отрезок, б) OA – дуга параболы, осью которой является ось Oy. Где $O(0,0)$, $A(1,2)$.

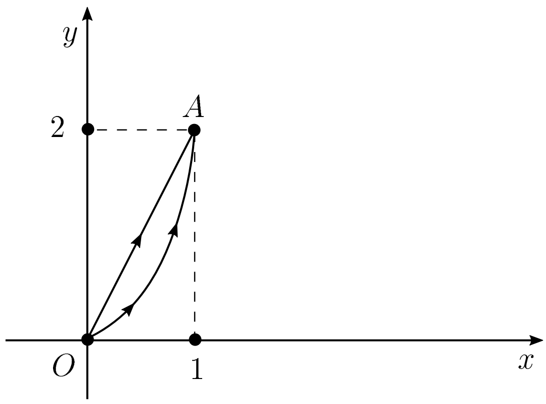

Рис. 36. Кривая OA.

а) Сделаем следующую параметризацию $\begin{cases} x = t, \\ y = 2t. \end{cases}$, причём $t \in [0, 1]$.

$$I = \int\limits_{OA} xdy - ydx = \int\limits_{0}^{1} t2dt - 2tdt = 0$$

б) Сделаем следующую параметризацию $\begin{cases} x = t, \\ y = 2t^2. \end{cases}$, причём $t \in [0, 1]$.

$$I = \int\limits_{OA} xdy - ydx = \int\limits_0^1 t4tdt - 2t^2dt = \int\limits_0^1 2t^2dt = \frac{2t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Задача 2. Вычислить криволинейный интеграл II рода $\int\limits_L (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$. Кривая L задаётся с помощью функции $y = 1 - |1-x|$, причём $x \in [0,2]$.

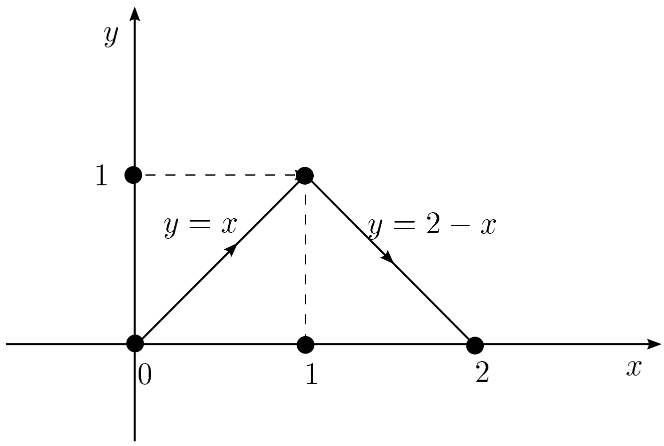

Рис. 37. Кривая L.

Теперь, чтобы вычислить криволинейный интеграл II рода, нужно сделать параметризацию. В зависимости от участка кривой параметризация разная.

а) Первый участок кривой при $x \in [0,1]$. Сделаем параметризацию $\begin{cases} x = t, \\ y = t. \end{cases}$, причём $t \in [0,1]$. Тогда

$$I_1 = \int\limits_{L_1} \left(x^2+y^2\right)dx + \left(x^2-y^2\right)dy = \int\limits_0^1 2t^2dt = \frac{2}{3}$$

б) Второй участок кривой при $x \in [1,2]$. Сделаем параметризацию $\begin{cases} x = t, \\ y = 2-t. \end{cases}$, причём $t \in [1,2]$. Тогда

$$I_2 = \int\limits_{L_2} \left(x^2+y^2\right)dx + \left(x^2-y^2\right)dy = \int\limits_1^2 \left(t^2+(2-t)^2\right)dt - \left(t^2-(2-t)^2\right)dt =$$

$$= \int_1^2 2(2-t)^2 dt = -2 \cdot \frac{(2-t)^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow I = \int_L \left(x^2 + y^2\right) dx + \left(x^2 - y^2\right) dy = I_1 + I_2 = \frac{4}{3}$$

Задача 3. Вычислить криволинейный интеграл II рода $\int_L ydx + zdy + xdz$. Кривая параметризована следующим образом

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = t. \end{cases}$$

При t от 2π до 0.

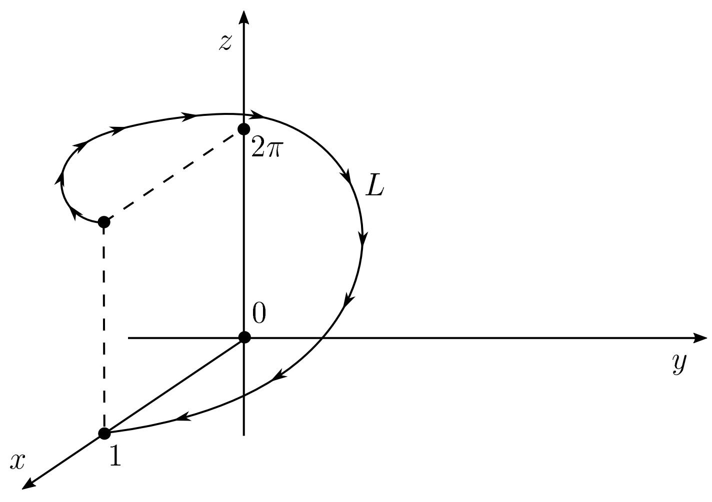

Рис. 38. Кривая L.

$$I = \int_L ydx + zdy + xdz = \int_{2\pi}^{0} \sin t(-\sin t)dt + t\cos t dt + \cos t dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t - t\cos t - \cos t\right) dt$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos t dt = 0$$

$$\int\limits_0^{2\pi} t\cos t dt = \int\limits_0^{2\pi} td(\sin t) = t\sin t\Big|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} \sin t dt = 0$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) dt = \left\{\int\limits_0^{2\pi} \cos 2t dt = 0\right\} = \pi$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_L y dx + z dy + x dz = \pi$$

Задача 4. Пусть $\vec{F}$ – это сила, с которой материальная точка массы m, перемещенная в начало координат $O(0,0)$, притягивает точку массой $m=1$, находящейся в точке (x,y). Найти работу силы притяжения при перемещении материальной точки массой $m=1$ вдоль кривой AB, где AB – это часть эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

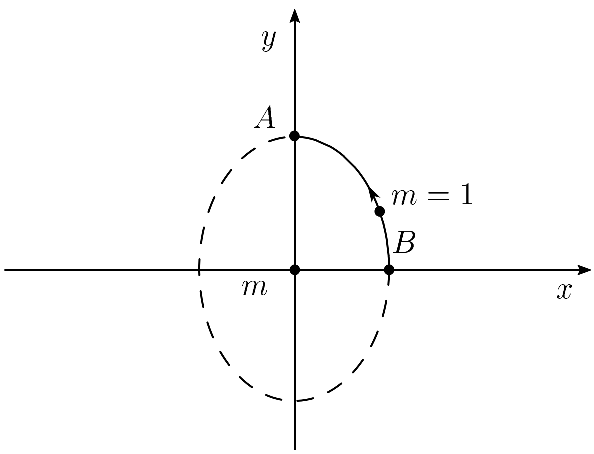

Рис. 39. Кривая AB.

Предположим, что у нас на плоскости в каждой точке этой плоскости задана сила $\vec{F}=(P,Q)$. P и Q – это некоторые функции, то есть в каждой точки на плоскости они могут принимать какие-то значения. Мы хотим посчитать работу по перемещению материальной точки по кривой (См. рис. 39).

Как бы вы считали работу при движении точки по кривой? Вы бы взяли эту кривую и разбили на достаточно малые части так, чтобы можно было считать, что в пределах каждой части сила постоянна. Таким образом, чтобы посчитать работу нам нужно

$$A = \sum_i \left(\vec{F}, \vec{\Delta r}\right) = \sum_i \left(P_i \Delta x_i + Q_i \Delta y_i\right) = \int\limits_L P dx + Q dy$$

Сила определяется как $\vec{F} = -\gamma \cdot \frac{m \cdot 1}{r^3} \cdot \vec{r}$. Таким образом

$$P = -\frac{\gamma m x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad Q = -\frac{\gamma m y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow A = \int\limits_{AB} \frac{-\gamma m x dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{-\gamma m y dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Сделаем следующую параметризацию $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$ причём $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Тогда получаем:

$$A = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (-\gamma m) \frac{2\cos t\left(-2\sin t dt\right) + 3\sin t \cdot 3\cos t dt}{\left(4\cos^2 t + 9\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}} = \left\{u = 4\cos^2 t + 9\sin^2 t\right\} =$$

$$= \int\limits_4^9 (-\gamma m) \frac{du}{2 \cdot u^{\frac{3}{2}}} = \gamma m u^{-\frac{1}{2}} \Big|_4^9 = -\frac{\gamma m}{6}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{\gamma m}{6}$$

Задача 5. Вычислить работу силы $\vec{F} = (x-y, 2x+y)$ в положительном направлении вдоль замкнутого контура: треугольник с вершинами $A(1,1)$, $B(3,3)$, $C(3,-1)$.

Итак, что такое положительное направление обхода? Когда у вас контур незамкнут понятно от какой точки мы стартуем до какой точки идем, а вот, когда контур замкнут, то тут уже нужно понять направление обхода. Договоримся считать положительным направлением такое направление, чтобы область, которую ограничивает контур, при обходе оставалась слева.

$$A = \int\limits_{ACB} \left(\vec{F}, \vec{dr}\right) = \int\limits_{ACB} (x-y)dx + (2x+y)dy$$

$$\int\limits_{ACB} = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB} + \int\limits_{BA}$$

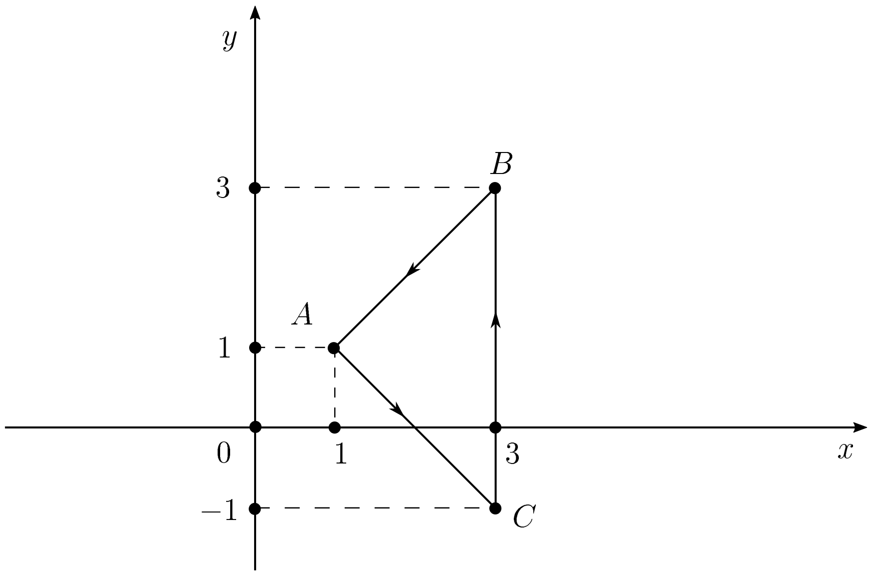

Рис. 40. Кривая ACB.

а) На отрезке AC сделаем следующую параметризацию $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 1 - 2t. \end{cases}$, причём $t \in [0, 1]$. Тогда

$$\int\limits_{AC} (x - y)dx + (2x + y)dy = \int\limits_0^1 4t \cdot 2dt + (3 + 2t)(-2dt) = \int\limits_0^1 (-6 + 4t)dt =$$

$$= \left(-6t + 2t^2\right)\Big|_0^1 = -4$$

б) На отрезке CB сделаем следующую параметризацию $\begin{cases} x = 3, \\ y = -1 + 4t. \end{cases}$, причём $t \in [0, 1]$. Тогда

$$\int\limits_{CB} (x - y)dx + (2x + y)dy = \int\limits_0^1 (5 + 4t)4dt = 20 + 16 \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = 28$$

в) На отрезке BA сделаем следующую параметризацию $\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 3 - 2t. \end{cases}$, причём $t \in [0, 1]$. Тогда

$$\int\limits_{CB} (x - y)dx + (2x + y)dy = \int\limits_0^1 3(3 - 2t)(-2dt) = -18 + 12 \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = -12$$

Тогда окончательно получаем, что

$$A = \int\limits_{ACB} (x-y)dx + (2x+y)dy = -4 + 28 - 12 = 12$$

Формула Грина.

Знаете ли вы, что, например, площадь плоской фигуры можно посчитать не с помощью двойного интеграла, а с помощью криволинейного интеграла, просто интегрируя по контуру этой фигуры? Казалась бы, это странно, как можно площадь посчитать с помощью криволинейного интеграла, когда с помощью криволинейного интеграла, например, мы считаем длину кривой. Но при этом, если вы учтете, что контур, который ограничивает фигуру, полностью определяет площадь этой фигуры, то, интегрируя по контуру, вы можете вычислить и площадь. **Формула Грина** связывает криволинейные интегралы с двойными.

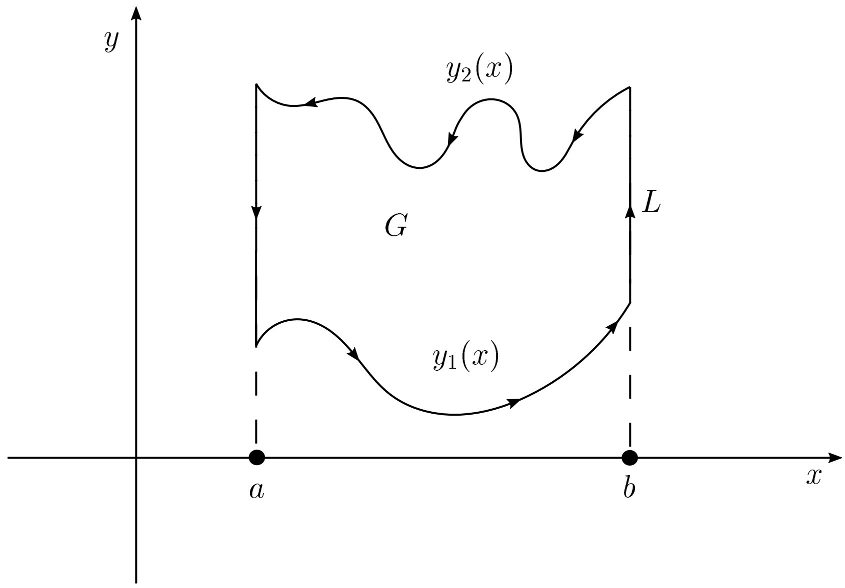

Рис. 41. Область G.

Пусть в каждой точке области G определены непрерывные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, более того, у нас определены производные этих функций Q_x и P_y, которые тоже являются непрерывными. Тогда справедлива следующая формула

$$\int\limits_{L} Pdx + Qdy = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

которая называется **формулой Грина**. При этом важно, чтобы обход по контору L был положительным.

Замечание 1. Если мы хотим вычислить площадь с помощью формулы Грина, то можно сделать следующим образом:

$$S = \iint\limits_G dxdy = \int\limits_L xdy = \int\limits_L -ydx$$

Замечание 2. Если у нас есть некоторая функция u, которая определена на замкнутой области G с контуром L, и так получилось, что $du = Pdx + Qdy = u_x dx + u_y dy$, тогда, если функции u_x, u_y – непрерывные функции, то мы получаем:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$$

Так как $u_{xy} = u_{yx}$ в данном случае. Таким образом, получаем, что криволинейный интеграл II рода от полного дифференциала по **замкнутому контуру** равен нулю:

$$\oint\limits_L du = 0$$

Замечание 3. Верно и противоположное: если у вас в некоторой области интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю, то под интегралом полный дифференциал.

Теорема 1. Следующие условия являются эквивалентными:

1) Интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.

2) Подынтегральное выражение есть полный дифференциал.

3) Интеграл от полного дифференциала не зависит от пути интегрирования.

Задача 6. Вычислить криволинейный интеграл II рода по замкнутому контуру $\oint\limits_L xy^2dy - x^2dx$. Где L: $x^2 + y^2 = 4$.

Если мы выберем положительное направление обхода вокруг окружности, то мы можем воспользоваться формулой Грина.

$$\oint\limits_L xy^2dy - x^2dx = \oint\limits_L Pdx + Qdy = \{P = -x^2,\ Q = xy^2\} = \iint\limits_G \left(y^2 - 0\right) dxdy$$

Перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi, \\ y = \rho\sin\phi. \end{cases}$$

Тогда получаем:

$$\iint\limits_G y^2 dxdy = \iint\limits_g \rho^2 \sin^2\phi\rho d\rho d\phi = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \sin^2\phi \int\limits_0^2 dr \cdot r^3 =$$

$$= 4 \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\phi \left(\frac{1-\cos 2\phi}{2}\right) = 4\pi$$

Задача 7. С помощью криволинейных интегралов вычислить площадь области, которая ограничена эллипсом $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t. \end{cases}$ причём $0 \le t \le 2\pi$.

$$S = \iint\limits_G dxdy = \oint\limits_L xdy = \int\limits_0^{2\pi} 3\cos t 2\cos t dt = 6\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = 6\pi$$

Задача 8. С помощью криволинейных интегралов вычислить площадь области, которая ограничена кривыми $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x}, Ox, \\ x = 1, x = 2. \end{cases}$.

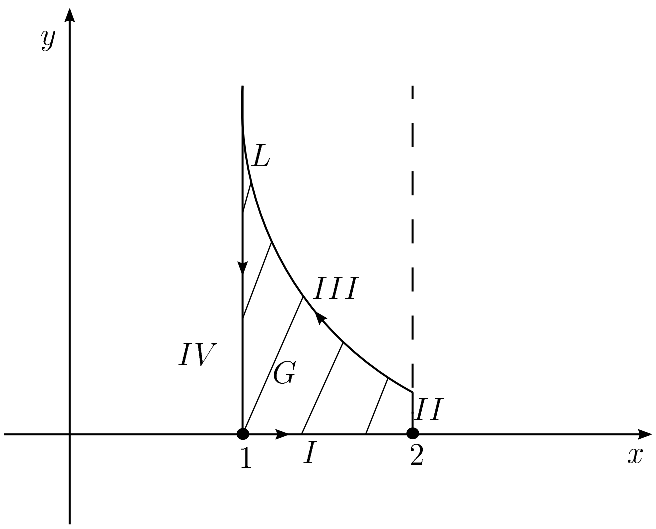

Рис. 42. Область G.

$$S = \iint_G dxdy = \oint_L -ydx = \int_I -ydx + \int_{II} -ydx + \int_{III} -ydx + \int_{IV} -ydx$$

Интеграл $\int_I -ydx = 0$, так как на участке I переменная $y = 0$. Интеграл $\int_{II} -ydx = 0$, так как на участке II переменная $x = const$. Интеграл $\int_{IV} -ydx = 0$, так как на участке IV переменная $x = const$.

Таким образом, остаётся вычислить интеграл $\int_{III} -ydx$. Сделаем следующую параметризацию $\begin{cases} x = t, \\ y = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$

$$\int_{III} -ydx = \int_2^1 -\frac{1}{t}dt = -\ln|t|\Big|_2^1 = \ln 2$$

$$S = \ln 2$$

Задача 9. Доказать, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и вычислить криволинейный интеграл $\int_{AB} xdy + ydx$. $A(-1, 2)$, $B(2, 3)$.

Так как $y_x = x_y = 0$, то конструкция $xdy + ydx = du$ – полный дифференциал. Где $u = xy$. Так как подынтегральное выражение является полным дифференциалом, то интеграл не зависит от пути интегрирования, а зависит от начальной и конечной точки. Тогда получаем:

$$\int_{AB} xdy + ydx = \int_{AB} d(xy) = (xy)\Big|_A^B = 6 - (-2) = 8$$

Задача 10. Доказать, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и вычислить криволинейный интеграл $\int_{AB} \frac{ydx - xdy}{x^2}$. $A(2, 1)$, $B(1, 2)$.

$$\int_{AB} \frac{ydx - xdy}{x^2} = \int_{AB} \underbrace{\frac{y}{x^2}}_{P} dx - \underbrace{\frac{1}{x}}_{Q} dy$$

Чтобы доказать, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом должно выполняться $Q_x = P_y$. Вычисляем $Q_x = \frac{1}{x^2}$ и $P_y = \frac{1}{x^2} \Rightarrow Q_x = P_y$. В силу данного равенства мы получаем, что наш интеграл не зависит от пути интегрирования. В силу этого получаем

$$u(x,y) = \int\limits_{(1,1)}^{(x,y)} \frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy$$

Где $du = \frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy$. Причём функция u определена с точностью до константы, поэтому не важно какую точку мы выберем в качестве нижнего предела интегрирования. Так как конструкция вида $\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy$ – полный дифференциал, то мы можем выбирать любой путь интегрирования от точки $(1,1)$ до точки (x,y).

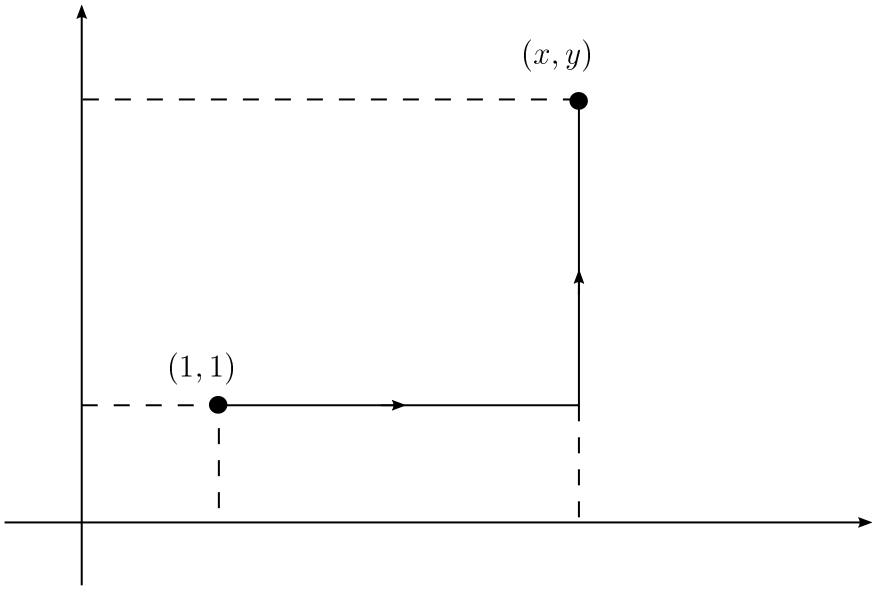

Рис. 43. Выбранный путь интегрирования.

$$u(x,y) = \int\limits_{(1,1)}^{(x,y)} \frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = \int\limits_{1}^{x} \frac{1}{x^2}dx - \int\limits_{1}^{y} \frac{1}{x}dy =$$

$$= -\frac{1}{x}\bigg|_1^x - \frac{y}{x}\bigg|_1^y = 1 - \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = 1 - \frac{y}{x}$$

Таким образом, если учесть, что $du = \frac{ydx - xdy}{x^2}$ – полный дифференциал, а интеграл от полного дифференциала не зависит от пути интегрирования, а только от начальной и конечной точки, то получаем:

$$\int\limits_{AB} \frac{ydx - xdy}{x^2} = \int\limits_{AB} du = u(B) - u(A) = \left(1 - \frac{y}{x}\right)\bigg|_A^B = -\frac{3}{2}$$

Семинар 9

Локальный экстремум функции нескольких переменных.

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ определена в некоторой окрестности точки M_0.

Определение 1. Точка M_0 называется точкой **локального максимума** функции $u = f(M)$, если существует такая окрестность точки M_0, что для любой точки $M \neq M_0$ из этой окрестности справедливо $f(M) < f(M_0)$. Это неравенство справедливо для всех точек из указанной окрестности, кроме самой точки M_0.

Замечание. Совершенно аналогично вводится понятие **локального минимума**.

Теорема 1. Необходимое условие экстремума. Пусть функция $u = f(M)$ имеет в точке M_0 локальный экстремум и существует в точке M_0 производная $\frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0)$. Тогда $\frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0) = 0$.

Здесь условие достаточно слабое, мы требуем существование только какой-то одной производной, но все производные, которые в точке локального экстремума существуют должны обращаться в ноль. Этот результат является вполне естественным, действительно, если у нас функция в точке M_0 имеет локальный экстремум, максимум или минимум, то это означает, что по любой из координат функция, при фиксированных значениях остальных переменных, также имеет локальный экстремум, максимум или минимум, поэтому, если существует производная по соответствующей переменной, она должна обращаться в ноль в силу соответствующий теоремы для функции одной переменной.

Следствие. Если функция дифференцируема в точке M_0, то тогда дифференциал функции u должен обращаться в ноль и в точке M_0. Действительно, если функция дифференцируема в точке M_0, то тогда это означает, что существуют частные производные по всем переменным, а из предыдущей теорема следует, что все эти частные производные в точке M_0 должны обратиться в ноль. Отсюда вытекает, что дифференциал функции u в точке M_0 должен быть равен нулю, то есть $du(M_0) = 0$.

Определение 2. Если в какой-то точке M_0 выполнено необходимое условие экстремума, то есть все существующие частные производные равны нулю, то тогда такая точка называется **точкой возможного экстремума**.

Однако *необходимых условий* недостаточно, чтобы провести полное исследование функции на экстремум. Нам нужны некоторые *достаточные условия*, а для того, чтобы получить достаточные условия, нам понадобятся некоторые сведения о **квадратичных формах**.

Некоторые сведения о квадратичных формах.

Определение 3. Квадратичной формой называется функция вида:

$$Q(x_1,\dots,x_m) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \ldots +$$

$$+a_{1m}x_1x_m + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \ldots + a_{mm}x_m^2$$

Где a_{ij} – некоторые числа, которые называются **коэффициентами квадратичной формы**, $i,j = 1,\dots,m$.

Определение 4. Матрица следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей квадратичной формы**.

Следует обратить внимание, что матрица квадратичной формы всегда может быть сделана симметричной и по умолчанию подразумевается, что эта матрица симметрична. Но если это не так, то всегда можно преобразовать коэффициенты квадратичной формы таким образом, чтобы $a_{12} = a_{21}$ или в качестве этих коэффициентов взять среднее арифметическое a_{12} и a_{21}, тогда, даже если исходная матрица не была симметричной, то после такого преобразования, матрица квадратичной формы станет симметричной.

Определение 5. Следующие определители

$$\delta_1 = a_{11}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots$$

называются **угловыми минорами** матрицы квадратичной формы.

Определение 6. Квадратичная форма называется **положительно определенной**, если она принимает только положительные значения в случае, когда все переменные $x_1,\dots,x_m$ не обращаются в ноль одновременно. То есть $Q(x_1,\dots,x_m) \geq 0$, причём $Q(x_1,\dots,x_m) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \ldots = x_m = 0$.

Определение 7. Квадратичная форма называется **отрицательно определенной**, если она принимает только отрицательные значения в случае, когда все переменные $x_1,\dots,x_m$ не обращаются в ноль одновременно. То есть $Q(x_1,\dots,x_m) \leq 0$, причём $Q(x_1,\dots,x_m) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \ldots = x_m = 0$.

Для того, чтобы исследовать квадратичную форму нам понадобится **критерий Сильвестра**. Обычно принято *положительно определенную* и *отрицательно определенную* квадратичные формы называть **знака определенными**, те квадратичные формы, которые принимают любые значения, как положительные, так и отрицательные, принято называть **знака переменными** или **знака неопределенными**.

Определение 8. Если квадратичная форма $Q(x_1, \ldots, x_m)$ принимает при всех $x_1, \ldots, x_m$ неотрицательные значения, но обращается в ноль не только при $x_1 = \ldots = x_m = 0$, то ее называют **квазиположительно определенной**.

Аналогично вводится понятие **квазиотрицательно определенной** квадратичной формы.

Критерий Сильвестра. Для того, чтобы квадратичная форма была **положительно определённой**, необходимо и достаточно, чтобы все её угловые миноры $\delta_1 > 0, \ldots, \delta_m > 0$.

Для того, чтобы квадратичная форма была **отрицательно определённой**, необходимо и достаточно, чтобы знаки у всех её угловых миноров чередовались $\delta_1 < 0, \delta_2 > 0, \delta_3 < 0, \delta_4 > 0, \ldots$

Теорема 2. Достаточное условие экстремума. Пусть функция $u = f(M)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки M_0 и дважды дифференцируема в самой точке M_0. Пусть, кроме того, точка M_0 – точка *возможного экстремума*, то есть первый дифференциал функции $du\Big|_{M_0} = 0$. Тогда

1) Если второй дифференциал $d^2u\Big|_{M_0}$ в точке M_0 представляет собой **положительно определенную** квадратичную форму переменных $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$, то функция $u = f(M)$ имеет в точке M_0 **локальный минимум**.

2) Если второй дифференциал $d^2u\Big|_{M_0}$ в точке M_0 представляет собой **отрицательно определенную** квадратичную форму переменных $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$, то функция $u = f(M)$ имеет в точке M_0 **локальный максимум**.

3) Если второй дифференциал $d^2u\Big|_{M_0}$ в точке M_0 представляет собой **знакопеременную** квадратичную форму переменных $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$, то функция $u = f(M)$ **не имеет** в точке M_0 **экстремума**.

Замечание. Следует добавить, что, если $d^2u\Big|_{M_0}$ представляет собой **квази знака определенную** квадратичную форму, то экстремум в точке M_0 может быть, а может не быть. Теорема на этот счет ответа не дает.

Поскольку по условию теоремы функция u в точке M_0 дважды дифференцируема, то мы можем расписать функцию u по формуле Тейлора до члена второго порядка с остаточным членом форме Пеано.

$$u = f(M_0) + \underbrace{df\Big|_{M_0}}_{=0} + \frac{1}{2}d^2u\Big|_{M_0} + o\left(\rho^2\right)$$

Точка M_0, по условию теоремы, является точкой возможного экстремума, тогда первый дифференциал функции обращается в ноль. Тогда полное приращение функции $\Delta u = u - f(M_0)$ будет полностью определяться вторым дифференциалом и остаточным членом, поэтому, если второй дифференциал представляет собой положительно определенную квадратичную форму, то приращение функции Δu в точке M_0 будет положительным и это означает, что в точке M_0 функция имеет локальный минимум, достаточно лишь показать, что остаточный член не влияет на знак этого приращения, если же второй дифференциал представляет собой отрицательно определенную квадратичную форму, то тогда приращение будет отрицательным и соответственно это означает, что в точке M_0 функция имеет локальный максимум.

Если же второй дифференциал также обращается в ноль, то тогда мы должны наложить условия на функцию о дифференцируемости большего порядка и рассматривать третий, а потом и четвёртый дифференциалы, если третий дифференциал функции u в точке M_0 отличен от нуля, а второй и первый дифференциалы обращаются в ноль, то это точно означает что экстремума нет, потому что, если третий дифференциал отличен от нуля, то он может принимать значения, как положительные, так и отрицательные. Если третий дифференциал равен нулю, то полное приращение функции будет фактически определяться четвертым дифференциалом. Это дифференциал четного порядка, он может принимать только положительные или только отрицательные значения, поэтому, в зависимости от знака четвёртого дифференциала, мы можем говорить о наличии или об отсутствии экстремума функции многих переменных, однако следует заметить, что такого удобного инструмента исследования, как квадратичные формы, у нас уже для четвёртого дифференциала не будет.

Задача 1. Требуется найти точки локального экстремума следующей функции многих переменных $u = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$.

Нетрудно видеть, что данная функция является бесконечно дифференцируемой. Получим систему уравнений для поиска точек возможного экстремума.

$$\begin{cases} u_x = 3x^2 - 3 = 0, \\ u_y = -6y^2 + 6 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1, \\ y = \pm 1. \end{cases}$$

Таким образом, у нас будет четыре точки возможного экстремума $A_1(1;1)$, $A_2(1;-1)$, $A_3(-1;1)$, $A_4(-1;-1)$. Давайте проведем исследование с помощью сформулированной теоремы о достаточных условиях в каждой из этих точек. Найдем второй дифференциал, для этого посчитаем вторые частные производные.

$$u_{xx} = 6x, \quad u_{xy} = 0, \quad u_{yy} = -12y$$

$$d^2u = 6xdx^2 - 12ydy^2$$

Второй дифференциал представляет собой квадратичную форму, которую нам нужно исследовать на знакоопределенность в каждой из выписанных точек.

1) $d^2u\Big|_{A_1} = 6dx^2 - 12dy^2$. С помощью матрицы квадратичной формы выясним по критерию Сильвестра знакоопределённость такой квадратичной формы.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta_1 = 6 > 0, \delta_2 = -72 < 0$$

Знаки угловых миноров чередуются, но не в том порядке, в каком это должно быть по критерию Сильвестра, поэтому квадратичная форма является знака переменной $\Rightarrow$ в точке A_1 нет экстремума.

2) $d^2u\Big|_{A_2} = 6dx^2 + 12dy^2$. С помощью матрицы квадратичной формы выясним по критерию Сильвестра знакоопределённость такой квадратичной формы.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta_1 = 6 > 0, \delta_2 = 72 > 0$$

Таким образом, все угловые миноры нашей матрицы положительны. Следовательно, квадратичная форма положительно определенная, следовательно A_2 – точка локального минимума.

3) $d^2u\Big|_{A_3} = -6dx^2 - 12dy^2$. С помощью матрицы квадратичной формы выясним по критерию Сильвестра знакоопределённость такой квадратичной формы.

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta_1 = -6 < 0, \delta_2 = 72 > 0$$

То есть знаки угловых миноров чередуются, причем именно так, как это должно быть по критерию Сильвестра для отрицательно определенной квадратичной формы. Таким образом, квадратичная форма отрицательно определенная и в точке A_3 имеет место локальный максимум.

4) $d^2u\Big|_{A_4} = -6dx^2 + 12dy^2$. С помощью матрицы квадратичной формы выясним по критерию Сильвестра знакоопределённость такой квадратичной формы.

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta_1 = -6 < 0, \delta_2 = -72 < 0$$

Следовательно, в точке A_4 нет экстремума.

Задача 2. Исследовать на экстремум следующую функцию двух переменных $u = (x^2+2y^2)\,e^{-\left(x^2+y^2\right)}$.

Получим систему уравнений для поиска точек возможного экстремума.

$$\begin{cases} u_x = 2xe^{-\left(x^2+y^2\right)} - \left(x^2+2y^2\right)\cdot 2x\cdot e^{-\left(x^2+y^2\right)} = 0, \\ u_y = 4ye^{-\left(x^2+y^2\right)} - \left(x^2+2y^2\right)\cdot 2y\cdot e^{-\left(x^2+y^2\right)} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\cdot\left(1-x^2-2y^2\right) = 0, \\ y\cdot\left(2-x^2-2y^2\right) = 0. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений находятся следующие точки возможного экстремума: $A_1(0;0)$, $A_2(0;1)$, $A_3(0;-1)$, $A_4(1;0)$, $A_5(-1;0)$.

$$\begin{cases} u_x = 2\cdot\left(x-x^3-2xy^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}, \\ u_y = 2\cdot\left(2y-x^2y-2y^3\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}. \end{cases}$$

$$u_{xx} = 2\cdot\left(1-3x^2-2y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)} - 2\cdot\left(x-x^3-2xy^2\right)\cdot 2xe^{-\left(x^2+y^2\right)}$$

$$u_{xy} = -8xye^{-\left(x^2+y^2\right)} - 2\cdot\left(x-x^3-2xy^2\right)\cdot 2ye^{-\left(x^2+y^2\right)}$$

$$u_{yy} = 2\cdot\left(2-x^2-6y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)} - 2\cdot\left(2y-x^2y-2y^3\right)\cdot 2ye^{-\left(x^2+y^2\right)}$$

1) $d^2u\Big|_{A_1(0;0)} = 2dx^2+4dy^2 > 0$. Нетрудно видеть, что построенная квадратичная форма является положительно определенной, значит в точке A_1 имеет место локальный минимум.

2) $d^2u\Big|_{A_2(0;1)} = -2e^{-1}dx^2 - 8e^{-1}dy^2 < 0$. Таким образом, мы видим, что второй дифференциал в точке A_2 представляет собой отрицательно определенную квадратичную форму по критерию Сильвестра. Следовательно, точка A_2 представляет собой точку максимума.

3) $d^2u\Big|_{A_3(0;-1)} = -2e^{-1}dx^2 - 8e^{-1}dy^2 < 0$. Таким образом, мы видим, что второй дифференциал в точке A_2 представляет собой отрицательно определенную квадратичную форму по критерию Сильвестра. Следовательно, точка A_3 представляет собой точку максимума.

4) $d^2u\Big|_{A_4(1;0)} = -4e^{-1}dx^2 + 2e^{-1}dy^2$. Таким образом, мы видим, что в точке A_4 второй дифференциал представляет собой знакопеременную квадратичную форму,

которая может принимать, как положительные, так и отрицательные значения. Следовательно, в точке A_4 экстремума нет.

Совершенно аналогично рассматривается точка A_5 и там возникает подобная ситуация. В точке A_5 также нет экстремума.

Задача 3. Найти точки локального экстремума функции трех переменных $u = x^3 + xy + y^2 - 2zx + 2z^2 + 3y - 1$.

Найдем точки возможного экстремума.

$$\begin{cases} u_x = 3x^2 + y - 2z = 0, \\ u_y = x + 2y + 3 = 0, \\ u_z = -2x + 4z = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2z, \\ 2z + 2y + 3 = 0, \\ 12z^2 + y - 2z = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z, \\ y = -z - \dfrac{3}{2}, \\ 12z^2 - 3z - \dfrac{3}{2} = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow 24z^2 - 6z - 3 = 0 \Rightarrow 8z^2 - 2z - 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = -2, \\ z_1 = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\dfrac{1}{2}, \\ y_2 = -\dfrac{5}{4}, \\ z_2 = -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Таким образом, получаем две точки возможных экстремумов $A_1\left(1; -2; \frac{1}{2}\right)$, $A_2\left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}; -\frac{1}{4}\right)$. Проведем исследование в этих точках функции на экстремум, используя уже достаточные условия экстремума.

$$du = \left(3x^2 + y - 2z\right) dx + (x + 2y + 3)\, dy + (-2x + 4z)\, dz$$

$$d^2u = (6xdx + dy - 2dz)\, dx + (dx + 2dy)\, dy + (-2dx + 4dz)\, dz$$

$$d^2u = 6xdx^2 + 2dxdy - 4dxdz + 2dy^2 + 4dz^2$$

1) $d^2u\Big|_{A_1} = 6dx^2 + 2dxdy - 4dxdz + 2dy^2 + 4dz^2.$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим угловые миноры матрицы квадратичной формы: $\delta_1 = 6 > 0$, $\delta_2 = 11 > 0$ и вычислим δ_3:

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

Поскольку все угловые миноры получились строго положительными, отсюда следует, что данная квадратичная форма является положительно определенной, поэтому точка A_1 представляет собой точку локального минимума.

2) $d^2u\Big|_{A_2} = -3dx^2 + 2dxdy - 4dxdz + 2dy^2 + 4dz^2$.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим угловые миноры матрицы квадратичной формы: $\delta_1 = -3 < 0$, $\delta_2 = -7 < 0$.

Мы видим, что уже не имеет место соответствующее чередование угловых миноров по критерию Сильвестра. Если форма является положительно определенной, то все угловые миноры должны быть положительными, что не имеет место в данном случае. Если форма является отрицательно определенной, то знаки угловых миноров должны чередоваться: нечетные должны быть отрицательными, а четные – положительными, что также не имеет место в данном случае, поэтому можно не вычислять уже третий угловой минор и сказать, что данная квадратичная форма является знакопеременной по критерию Сильвестра. Следовательно, в точке A_2 нет экстремума.

Задача 4. Доказать, что функция $u = (x - y^2)(2x - y^2)$ обладает следующими свойствами:

а) Имеет в точке $O(0;0)$ локальный минимум вдоль каждой прямой, проходящей через $O(0;0)$.

б) Не имеет локальный экстремум в точке $O(0;0)$.

а)Что касается прямых, проходящих через начало координат, то они могут быть заданы следующими уравнениями: $y = kx$, где k может принимать любые значения, том числе ноль, либо $x = 0$. Давайте покажем, что вдоль любой из таких прямых функция имеет локальный минимум. Для этого рассмотрим функцию

$$u\left(x, kx\right) = \left(x - k^2x^2\right)\left(2x - k^2x^2\right) = 2x^2 - 3k^2x^3 + k^4x^4$$

$$u_x\left(x, kx\right) = 4x - 9k^2x^2 + 4k^4x^3$$

$$u_x\left(x, kx\right)\Big|_{x=0} = 0$$

Таким образом, $x = 0$ является точкой возможного экстремума. Убедимся, что это именно точка минимума. Для этого, поскольку данная функция является бесконечно дифференцируемой, удобно взять вторую производную.

$$u_{xx}\left(x, kx\right) = 4 - 18k^2x + 12k^4x^2$$

$$u_{xx}\left(x, kx\right)\Big|_{x=0} = 4 > 0$$

Таким образом, вторая производная принимает в данной точке положительное значение. Следовательно, $x = 0$ в данном случае будет точкой локального минимума. Наше рассуждение не зависит от k и при $k = 0$ также остаётся справедливым.

Рассмотрим второй вариант прямой, когда она описывается уравнением $x = 0$. Тогда получаем, что $u(0, y) = y^4$. Здесь без исследования непосредственно видно, что данная функция имеет в нуле точку минимума, потому что при всех $y \neq 0$ она принимает положительные значения, а при $y = 0$ принимает свое минимальное значение равное нулю. Таким образом, этот пункт полностью исследован. Мы показали, что, если двигаться вдоль любой прямой, проходящий через начало координат, наша функция имеет локальный минимум.

б) Теперь покажем, что данная функция не имеет локального экстремума в точке с координатами $O(0; 0)$. Для доказательства этого пункта мы не можем пользоваться достаточными условиями экстремума, потому что они не позволяют доказать отсутствие экстремума в какой-либо точке. Давайте непосредственно убедимся, показав, что в любой окрестности начала координат имеются точки, в которых функция принимает, например, как значение равное нулю, так и отрицательные значения. Отсюда будет следовать, что в начале координат экстремум отсутствует. Для того, чтобы это показать, рассмотрим две последовательности точек.

$$A_n\left(\frac{1}{n^2}; \frac{1}{n}\right) \Rightarrow u(A_n) = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right) = 0$$

$$B_n\left(\frac{3}{n^2}; \frac{2}{n}\right) \Rightarrow u(B_n) = \left(\frac{3}{n^2} - \frac{4}{n^2}\right)\left(\frac{6}{n^2} - \frac{4}{n^2}\right) = -\frac{2}{n^4} < 0$$

Дальше, делая n достаточно большим, мы получаем, что точки последовательностей A_n и B_n будут находиться в любой сколь угодно малой окрестности начала координат, таким образом есть точки в любой сколь угодно малой окрестности начала координат не совпадающие с началом координат, где функция принимает нулевые значения, и есть точки, где функция принимает отрицательные значения. Таким образом, отсюда следует, что функция не имеет локального экстремума в начале координат согласно определению локального экстремума.

Семинар 10

Замена независимых переменных.

Сегодня рассмотрим еще одно важное понятие, такое как **замена переменных**. Это находит активное применение, как в физике, так и в математике, в частности, для решения разного вида дифференциальных уравнений возникает необходимость перейти от одних каких-то переменных к другим, в том числе в выражениях, содержащих частные производные. Пока мы с вами будем отрабатывать инструмент перехода и выполнение этой замены переменных, в дальнейшем это будет активно использоваться в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений, в курсе методов математической физики, когда будут исследоваться определенного вида уравнение в частных производных, часто делая замену переменных, мы можем привести уравнение к уравнению более простого вида в новых переменных, где его удается аналитически решить.

Пусть у нас имеется некоторое выражение, содержащее частные производные, пока ограничимся случаем производных первого порядка. То есть у нас есть функция $\Phi\left(x, y, z, z_x, z_y\right)$ и в этом выражении требуется перейти к новым переменным u и v, которые задаются с помощью формул

$$\begin{cases} x = f(u,v), \\ y = g(u,v). \end{cases}$$

Добавим еще два соотношения: z является функцией от старых переменных x и y, когда мы перейдем к новым переменным это уже будет функция переменных u и v, но, вообще говоря, какая-то другая, поэтому скажем, что эта функция w от новых переменных u и v. То есть

$$\begin{cases} z = z(x,y), \\ z = w(u,v). \end{cases}$$

Постараемся в этом выражении $\Phi\left(x, y, z, z_x, z_y\right)$ старых переменных x и y, в том числе с частными производными по x и по y, перейти к выражению, содержащее только новые переменные u и v и производные по новым переменным u и v от функции w. Для этого рекомендуется сделать следующие шаги: давайте возьмем дифференциалы от всех равенств, которые написаны здесь. Отметим, что пока мы возьмем первые дифференциалы, а форма первого дифференциала является инвариантной, поэтому нам все равно какие переменные являются независимыми, какие являются функциями других переменных.

$$\begin{cases} dx = f_u du + f_v dv, \\ dy = g_u du + g_v dv, \\ dz = z_x dx + z_y dy, \\ dz = w_u du + w_v dv. \end{cases}$$

$$\Rightarrow dz = z_x\left(f_u du + f_v dv\right) + z_y\left(g_u du + g_v dv\right) = \left(z_x f_u + z_y g_u\right) du + \left(z_x f_v + z_y g_v\right) dv$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_u = z_x f_u + z_y g_u, \\ w_v = z_x f_v + z_y g_v. \end{cases}$$

Таким образом, мы для поиска z_x и z_y получаем некоторую систему уравнений, которая может быть решена и отсюда могут быть найдены частные производные старых переменных z_x и z_y через производные w_u и w_v. Функции f и g – известные. Это всё подставляем в выражение $\Phi\left(x, y, z, z_x, z_y\right)$ и тогда в нём перейдём к новым переменным.

Обратим внимание, что данная система является линейной. Определитель этой системы носит название **якобиана перехода** от переменных x и y к переменным u и v.

Существует обратный метод:

$$\begin{cases} u = f(x, y), \\ v = g(x, y), \\ z = z(x, y), \\ z = w(u, v). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f_x dx + f_y dy, \\ dv = g_x dx + g_y dy, \\ dz = z_x dx + z_y dy, \\ dz = w_u du + w_v dv. \end{cases}$$

$$\Rightarrow dz = w_u\left(f_x dx + f_y dy\right) + w_v\left(g_x dx + g_y dy\right) = \left(w_u f_x + w_v g_x\right) dx + \left(w_u f_y + w_v g_y\right) dy$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_x = w_u f_x + w_v g_x, \\ z_y = w_u f_y + w_v g_y. \end{cases}$$

В отличие от предыдущего результата, мы получили сразу выражения для производных старых переменных без какой-либо необходимости решения системы уравнений, которая была получена в прошлый раз, поэтому в каком-то смысле выражать новые переменные через старые для нахождения производных поудобнее, но с другой стороны такое выражение менее удобно для подстановки в исходную функцию.

Данные формулы, которые мы получили с помощью дифференциалов, можно было также получить с помощью производной сложной функции, однако, как правило, путь нахождение данных соотношений с помощью формулы производной сложной функции приводит к большему количеству ошибок, хотя технически он несколько покороче.

Задача 1. Требуется, введя новые переменные $u = x$ и $v = \frac{y}{x}$, преобразовать дифференциальное уравнение $xz_x + yz_y = z$.

$$\begin{cases} u = x, \\ v = \dfrac{y}{x}, \\ z = z(x, y), \\ z = w(u, v). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx, \\ dv = -\dfrac{y}{x^2} dx + \dfrac{dy}{x}, \\ dz = z_x dx + z_y dy, \\ dz = w_u du + w_v dv. \end{cases}$$

$$\Rightarrow dz = w_u dx + w_v\left(-\frac{y}{x^2}dx + \frac{dy}{x}\right) = \left(w_u - \frac{y}{x^2}w_v\right)dx + w_v\frac{dy}{x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_x = w_u - \dfrac{y}{x^2}w_v, \\ z_y = \dfrac{w_v}{x}. \end{cases}$$

$$xz_x + yz_y = z \Rightarrow x\left(w_u - \frac{y}{x^2}w_v\right) + \frac{y}{x}w_v = w$$

$$\Rightarrow xw_u = w \Rightarrow uw_u = w$$

Если посмотреть на исходное уравнение и полученное, то полученное уравнение значительно проще, более того, полученное уравнение таково, что мы бы в принципе смогли его решить, даже не зная основных методов решения дифференциальных уравнений, на основе того, что уже прошли к этому моменту в математическом анализе. Однако в этой задаче вопрос о решении дифференциального уравнения не стоял, только должным образом его преобразовать, поэтому мы на этом остановимся.

Задача 2. Пусть есть выражение $\Phi\left(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}\right)$. В этом выражении нам требуется сделать замену переменных, перейдя к каким-то новым переменным u и v.

$$\begin{cases} u = f(x,y), \\ v = g(x,y), \\ z = z(x,y), \\ z = w(u,v). \end{cases}$$

Будем предполагать, что первая замена переменных в выражениях, содержащих первые частные производные выполнена тем методом, который был уже разобран.

$$\Rightarrow \begin{cases} du = f_x dx + f_y dy, \\ dv = g_x dx + g_y dy, \\ z_x = F\left(u, v, w, w_u, w_v\right), \\ z_y = G\left(u, v, w, w_u, w_v\right). \end{cases}$$

Разумеется, мы предполагаем, что все присутствующие у нас функции являются дважды дифференцируемыми. Теперь возникает вопрос каким образом получить выражение для вторых производных? Для первых производных мы использовали первые дифференциалы, следовательно, возникает идея для вторых производных использовать вторые дифференциалы, но здесь следует обратить внимание, что в общем случае форма второго дифференциала не является инвариантной, поэтому могут возникнуть трудности с тем, что с одной стороны u и v независимые новые переменные, с другой стороны они явно выражаются, как какие-то функции от переменных x и y. И использование вторых дифференциалов, когда в общем-то не очень понятно, кто и каким образом от кого зависит, несколько неудобно.

Давайте ограничимся тем, что используем первые дифференциалы от первых производных. Они будут содержать нужные нам производные второго порядка.

Рассмотрим $z_x = z_x(x, y)$.

$$z_x = z_x(x, y) \Rightarrow dz_x = z_{xx}dx + z_{xy}dy$$

$$dz_x = F_u du + F_v dv + F_w dw + F_{w_u} dw_u + F_{w_v} dw_v =$$

$$= F_u du + F_v dv + F_w \left(w_u du + w_v dv\right) + F_{w_u} \left(w_{uu} du + w_{uv} dv\right) + F_{w_v} \left(w_{vu} du + w_{vv} dv\right) =$$

$$= F_u \left(f_x dx + f_y dy\right) + F_v \left(g_x dx + g_y dy\right) + F_w w_u \left(f_x dx + f_y dy\right) + F_w w_v \left(g_x dx + g_y dy\right) +$$

$$+ F_{w_u} w_{uu} \left(f_x dx + f_y dy\right) + F_{w_u} w_{uv} \left(g_x dx + g_y dy\right) + F_{w_v} w_{vu} \left(f_x dx + f_y dy\right) + F_{w_v} w_{vv} \left(g_x dx + g_y dy\right)$$

$$\Rightarrow z_{xx} = F_u f_x + F_v g_x + F_w w_u f_x + F_w w_v g_x + F_{w_u} w_{uu} f_x + F_{w_u} w_{uv} g_x + F_{w_v} w_{vu} f_x + F_{w_v} w_{vv} g_x$$

$$\Rightarrow z_{xy} = F_u f_y + F_v g_y + F_w w_u f_y + F_w w_v g_y + F_{w_u} w_{uu} f_y + F_{w_u} w_{uv} g_y + F_{w_v} w_{vu} f_y + F_{w_v} w_{vv} g_y$$

Совершенно аналогично мы точно также рассмотрим функцию z_y, как функцию старых переменных x и y и ее дифференциал запишем в виде $dz_y = z_{yx}dx + z_{yy}dy$. С другой стороны мы рассмотрим $z_y = G\left(u, v, w, w_u, w_v\right)$, как функцию новых переменных и точно также сможем расписать дифференциал dz_y такой функции. Затем, если мы приравняем коэффициенты при dx в двух выражениях для dz_y мы получим выражение для производной z_{yx}, если приравняем коэффициенты при dy получим выражение для производной z_{yy}. Поскольку мы исходно предполагали, что все присутствующие функции являются дважды дифференцируемыми, в том числе функция $z = z(x, y)$, то справедливо $z_{xy} = z_{yx}$, поэтому производная z_{yx} уже нами вычислена. С одной стороны из-за этого мы можем не рассматривать все слагаемые, а с другой стороны у нас есть своеобразный способ себя проверить при преобразованиях: если указанные частные производные совпали, то скорее всего арифметических ошибок у нас не было, если частные производные отличаются, то следует искать арифметическую ошибку. Вторую производную z_{yy} мы вычислять не будем, она считаются совершенно аналогично.

Задача 3. Сделать замену $\begin{cases} u = y - ax, \\ v = y + ax. \end{cases}$ в уравнении Даламбера $z_{xx} = a^2 z_{yy}$.

$$\begin{cases} u = y - ax, \\ v = y + ax, \\ z = z(x, y), \\ z = w(u, v). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dy - adx, \\ dv = dy + adx, \\ dz = z_x dx + z_y dy, \\ dz = w_u du + w_v dv. \end{cases}$$

$$\Rightarrow dz = w_u \left(dy - adx\right) + w_v \left(dy + adx\right) = a \left(w_v - w_u\right) dx + \left(w_u + w_v\right) dy$$

$$\begin{cases} z_x = a \left(w_v - w_u\right), \\ z_y = w_u + w_v. \end{cases}$$

Давайте перейдем к нахождению вторых частных производных. Мы можем взять первые дифференциалы от полученных выражений. Тогда получаем:

$$dz_x = z_{xx} dx + z_{xy} dy = a w_{vu} du + a w_{vv} dv - a w_{uu} du - a w_{uv} dv =$$

$$= a w_{vu} \left(dy - adx\right) + a w_{vv} \left(dy + adx\right) - a w_{uu} \left(dy - adx\right) - a w_{uv} \left(dy + adx\right) =$$

$$= \left(-a^2 w_{vu} + a^2 w_{vv} + a^2 w_{uu} \quad a^2 w_{uv}\right) dx + \left(a w_{vu} + a w_{vv} - a w_{uu} - a w_{uv}\right) dy$$

Функция w предполагается дважды дифференцируемой. Тогда получаем:

$$z_{xx} = a^2 w_{vv} + a^2 w_{uu} - 2a^2 w_{uv}$$

Аналогичным путем найдём вторую частную производную z_{yy}. Тогда мы сможем преобразовать наше исходное уравнение. Для этого проделаем те же самые рассуждения:

$$dz_y = z_{yx} dx + z_{yy} dy$$

$$dz_y = w_{uu} du + w_{uv} dv + w_{vu} du + w_{vv} dv =$$

$$= w_{uu} \left(dy - adx\right) + w_{uv} \left(dy + adx\right) + w_{vu} \left(dy - adx\right) + w_{vv} \left(dy + adx\right) =$$

$$= \left(w_{uu} + w_{uv} + w_{vu} + w_{vv}\right) dy + \ldots$$

$$\Rightarrow z_{yy} = w_{uu} + 2w_{uv} + w_{vv}$$

Теперь мы можем преобразовать уравнение, подставляя туда найденные частные производные:

$$z_{xx} = a^2 z_{yy}$$

$$\Rightarrow a^2 w_{vv} + a^2 w_{uu} - 2a^2 w_{uv} = a^2 \left(w_{uu} + 2w_{uv} + w_{vv}\right)$$

$$\Rightarrow w_{uv} = 0$$

Мы можем решить данное дифференциальное уравнение.

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(w_u\right) = 0 \Rightarrow w_u = f(u)$$

$$w = \underbrace{\int f(u)du}_{=f_1(u)} + f_2(v)$$

$$w = f_1(u) + f_2(v)$$

$$\Rightarrow z(x,y) = f_1\left(y - ax\right) + f_2\left(y + ax\right)$$

Таким образом, общее решение уравнения Даламбера может быть представлена в таком виде. Где f_1 и f_2 – произвольные дважды дифференцируемые функции. С физической точки зрения уравнение Даламбера описывает распространение колебаний в пространстве или, проще говоря, распространение волн в пространстве. И с физической точки зрения обычно переменная x соответствует времени, а переменная y соответствует координате, то есть первое слагаемое f_1 описывает волну, распространяющуюся вдоль оси y с течением времени x слева направо, а второе слагаемое описывает волну, распространяющуюся вдоль оси y с течением времени x справа налево (аргументы функций $y \pm ax$ должны быть постоянными). В дальнейшем уравнение Даламбера будет подробно исследовано в курсе методов математической физики, где будет активно использована та замена, которую мы достаточно подробно обсуждали.

Задача 4. Вводя новую независимую переменную, решить уравнение Эйлера $x^2y'' + xy' + y = 0$. Рекомендуется ввести замену переменных по следующей формуле $x = e^t$.

Давайте будем действовать через производные, используя понятие производной сложной функции. Тогда получаем:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y'(x)e^t \Rightarrow y'(x) = y'(t)e^{-t}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(y'(x)e^t\right) = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot e^t + y'(x)e^t$$

$$\Rightarrow y''(t) = y''(x)e^{2t} + y'(t) \Rightarrow y''(x) = y''(t)e^{-2t} - y'(t)e^{-2t}$$

Теперь мы можем преобразовать наше уравнение Эйлера:

$$x^2y'' + xy' + y = 0 \Rightarrow e^{2t} \cdot \left(y''(t)e^{-2t} - y'(t)e^{-2t}\right) + e^t y'(t)e^{-t} + y(t) = 0$$

$$\Rightarrow y''(t) - y'(t) + y'(t) + y(t) = 0 \Rightarrow y''(t) + y(t) = 0$$

Таким образом, мы приходим к привычному уравнению колебаний. Это уравнение имеет следующее решение:

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

$$y(x) = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)$$

Где C_1 и C_2 – некоторые константы. Таким образом, с помощью удобной замены переменных нам удалось построить решение уравнения Эйлера.

Задача 5. Требуется решить дифференциальное уравнение $yz_x - xz_y = (y - x)z$, вводя новые переменные u, v и w по следующим формулам:

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2, \\ v = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}, \\ w = \ln z - x - y, \\ w = w(u, v). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx + 2ydy, \\ dv = -\dfrac{dx}{x^2} - \dfrac{dy}{y^2}, \\ dw = \dfrac{dz}{z} - dx - dy, \\ dw = w_u du + w_v dv. \end{cases}$$

Так как $z = z(x, y)$, получаем:

$$dw = \frac{z_x dx + z_y dy}{z} - dx - dy = w_u\left(2xdx + 2ydy\right) - w_v\left(\frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y^2}\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{z_x}{z} - 1 = 2xw_u - \dfrac{w_v}{x^2}, \\ \dfrac{z_y}{z} - 1 = 2yw_u - \dfrac{w_v}{y^2}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_x = z \cdot \left(2xw_u - \dfrac{w_v}{x^2} + 1\right), \\ z_y = z \cdot \left(2yw_u - \dfrac{w_v}{y^2} + 1\right). \end{cases}$$

Теперь мы можем преобразовать исходное дифференциальное уравнение:

$$yz_x - xz_y = (y - x)z$$

$$y \cdot z \cdot \left(2xw_u - \frac{w_v}{x^2} + 1\right) - x \cdot z \cdot \left(2yw_u - \frac{w_v}{y^2} + 1\right) = (y - x)z$$

$$2xyw_u - \frac{y}{x^2}w_v + y - 2xyw_u + \frac{x}{y^2}w_v - x = y - x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}\right) w_v = 0 \Rightarrow w_v = 0 \Rightarrow w = f(u)$$

Теперь наша задача состоит только в том, чтобы вернуться к исходным переменным. Для этого давайте соответствующие замены подставим в выражение для функции w. Таким образом, мы получим:

$$f(u) = \ln z - x - y \Rightarrow f\left(x^2 + y^2\right) + x + y = \ln z$$

$$\Rightarrow z = \exp\left(x + y + f\left(x^2 + y^2\right)\right)$$

Таким образом, функция такого вида, где f – любая дважды дифференцируемая функция одного аргумента, является решением исходного уравнения. С помощью замены достаточно сложное исходное уравнение в частных производных нам удалось свести к весьма простому уравнению, содержащему только одну частную производную по переменной v. Это уравнение в общем виде легко удалось решить, но, возвращаясь к старым переменным, мы получили решение исходного дифференциального уравнения в старых переменных.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД
ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ