ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. СЕМИНАРЫ. ЧАСТЬ 1

ЮШКОВ
ЕГОР ВЛАДИСЛАВОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ
ЧЕРНИКОВУ ПОЛИНУ ГЕОРГИЕВНУ

Оглавление

Семинар 1. Пределы. **4**
Определение предела функции 4
Бесконечно малые и бесконечно большие функции 6
Первый замечательный предел 6
Предел при бесконечно большом аргументе $\boldsymbol{lim x} \to \infty$ 9
Семинар 2. Асимптотические формулы. **10**
Второй замечательный предел 10
Непрерывность функции 11
Неопределенности типа 0/0 13
Асимптотические формулы 14
Гиперболические функции 15
Семинар 3. Вычисление пределов. **16**
Семинар 4. Производные. **19**
Свойства производных 20
Производная от сложной функции 21
Обратная функция и ее производная 22
Примеры вычисления производных 23
Семинар 5. Дифференциалы. Производные высших порядков. **26**
Дифференциал 26
Инвариантность формы первого дифференциала 29
Производные и дифференциалы старших порядков 30
Формула Ньютона-Лейбница 33

Семинар 1. Пределы.

Определение предела функции

Опр. B - предел функции в точке a по Коши: $B = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, если

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \ \ \forall x, U_\delta\colon |x-a| \le \ \delta \ \ |f(x)-B| < \varepsilon$$

Замечание. Понятие предела будет использоваться в тех случаях, когда значение функции в точке a не определено.

Опр. B - предел функции в точке a по Гейне: $B = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, если

$$\forall x_n \to a \quad f(x_n) \to B,\ \ x_n \ne a$$

Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0} sinx = 0$.

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \ \ \forall x\colon\ 0 < |x| < \delta \ \ \ |x| \le \ \delta\ |sinx| < \varepsilon$$

Если мы x будем откладывать как угол на единичной окружности (рис. 1.1), то x находится в малой окрестности 0, то есть x близок к 0. Для единичной окружности $sinx$ будет высотой, опущенной из точки пересечения радиуса с окружностью.

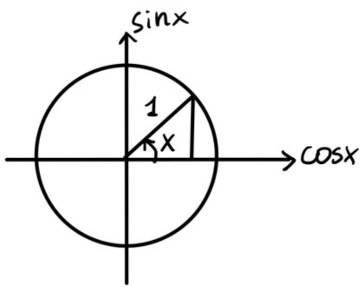

Рис. 1.1. Единичная окружность.

Покажем, что $|sinx| < x$.
$2S = rsinx = 1\cdot sinx = sinx$, где S - площадь треугольника (рис. 1.2).
$x = 2S_{sec} = x, \quad S_{sec} = \frac{1}{2}r^2x$ - площадь сектора.
Понятно, что $S_{sec} > S$, так как треугольник вложен в сектор. Следовательно, $sinx < x$.

Аналогично можно записать неравенства для x меньших 0. Соответственно, объединив 2 случая, получим $|sinx| < |x|$, а $|x| < \delta$.
Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta = \varepsilon > 0 \ \ \forall x\!: \ 0 < |x| < \delta \ \ |x| \leq \ \delta \ \ |sinx| < \varepsilon$$

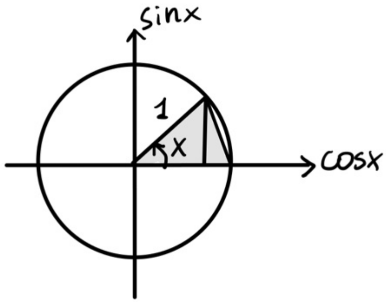

Рис. 1.2. Треугольник.

Найдем предел $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to 0$.

Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Для этого покажем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \ \ \forall x\!: \ 0 < |x| < \delta \ \ |x| \leq \ \delta \ \ \left|x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| < \varepsilon$$

$$\left|x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$$

Возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, тогда $\left|x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ ■.

Рассмотрим теперь случай, когда пределе не существует. Например, пусть $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Покажем, что при $x \to 0$ $f(x)$ ни к чему не стремится. Предположим, что предел существует, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \ \ \forall x\!: \ 0 < |x| < \delta \ \ |x| \leq \ \delta \ \ \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| < \varepsilon$$

Выберем x', x'': $x' = \frac{1}{2\pi n}$, $x'' = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$. При этом $|x'| < \delta, |x''| < \delta$.

То есть $\begin{cases} \left|\sin\left(\frac{1}{x'}\right) - B\right| < \varepsilon \ \Rightarrow \ |B| < \varepsilon \\ \left|\sin\left(\frac{1}{x''}\right) - B\right| < \varepsilon \ \Rightarrow \ |1 - B| < \varepsilon \end{cases}$

$|1| = |1 - B + B| \leq |1 - B| + |B| < 2\varepsilon$ - противоречие. Следовательно, предела не существует.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

__Опр__. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой в точке a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

__Опр.__ Функция $f(x)$ называется бесконечно большой в точке A, если

$$\forall M > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \ \ \forall x\colon\ 0 < |x| < \delta \ \ |x - A| < \ \delta \ \ |f(x)| > M$$

$f(x) = \frac{1}{x-a}$ - бесконечно большая в точке a.

Свойства арифметических операциях над пределами функций:

Пусть для $f(x), g(x)\ \exists\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = B,\ \ \lim\limits_{x\to a} g(x) = C$. Тогда

- $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = B + C$
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\, g(x)) = BC$
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\,/g(x)) = B/C, \quad C \neq 0$

Рассмотрим различные случаи $\frac{f}{g}$:

$$f \to 1 \qquad \frac{f}{g} \to \infty$$
$$g \to 0$$

$$f \to 0 \qquad \frac{f}{g} = \frac{x}{x^2} \to \infty$$
$$g \to 0 \qquad \frac{f}{g} = \frac{x}{x} \to 1$$
$$\frac{f}{g} = \frac{\sqrt{x}}{x} \to 0$$

Первый замечательный предел

Вспомним из механики колебания маятника. Угловое ускорение маятника пропорционально силе, действующей на маятник, которая в свою очередь пропорциональна sin (x) (из-за проекции силы тяжести). Таким образом, мы получаем, что$\ddot{\varphi} \sim \sin(\varphi)$. Однако, еще из школы мы знаем, что при малых φ $\ddot{\varphi} \sim \varphi$.

То есть $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, что и называется *первым замечательным пределом*.

Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Для этого покажем, что $\sin(x) < x < tg(x),\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

На самом деле скорость изменения $\sin(x)$ меньше, чем скорость изменения x, скорость которого в свою очередь меньше скорости изменения $tg(x)$, так как $(\sin(x))' = \cos(x)$, $x' = 1,\ \left(tg(x)\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Таким образом функции ведут себя следующим образом: рис. 1.3.

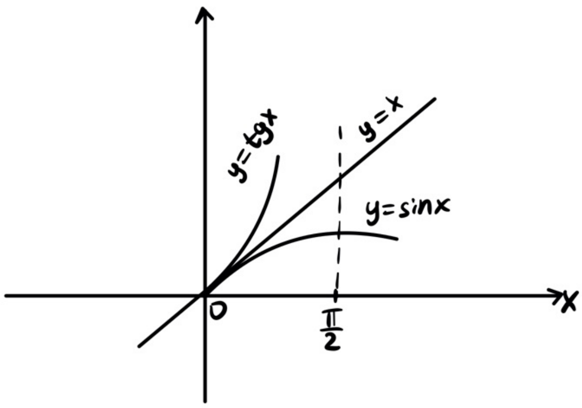

Рис. 1.3. Графики функций.

Другой способ доказать, что $\sin(x) < x$ - воспользоваться единичной окружностью, рассмотренной ранее.

Теперь можно разделить неравенство на $\sin(x)$: $1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$

При $x \to 0$ $\frac{1}{\cos(x)} \to 1$. Получается, что $1 < \frac{x}{\sin(x)} < 1$. Следовательно (по теореме «о двух милиционерах» (двух эвольвентах)), $\frac{x}{\sin(x)} \to 1$ и $\frac{\frac{1}{x}}{\sin(x)} \to 1$, то есть $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ ■.

Рассмотрим теперь $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(x)}{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x cos(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \frac{1}{\cos(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 0.$

Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)} = \frac{1}{1}$$

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0\ \ \forall x:\ 0<|x|<\delta\ \ |x|\le\ \delta\ \ |\cos(x)-1|<\varepsilon$$

$$|\cos(x)-1| = \left|1-2\sin^2\frac{x}{2}-1\right| = 2\left|\sin^2\frac{x}{2}\right| < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 < \frac{x^2}{2} < \frac{\delta^2}{2}$$

Если в качестве δ взять $\sqrt{\varepsilon}$, то $\frac{x^2}{2} < \frac{\delta^2}{2} \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-(1+3x+3x^2)}{x^4+x^3}$.

Как делать **нельзя**: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x^4+x^3} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} x^3}{\lim\limits_{x\to 0} x^4+x^3}$. Так делать нельзя, потому что нижний предел равен 0.

Вместо этого можно сократить дробь на x^3, то есть $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x^4+x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\ \frac{1}{x+1} = 1$.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-(1+3x+3x^2)}{x^4+x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)} = 1$.

Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-2x^2+x-2}$.

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-2x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x^2(x-2)+(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{x^2+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} x+2}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)} = \frac{4}{5}$.

Усложним задачу и посчитаем $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}^2-2^2\right)}\frac{(\sqrt{1+2x})^2-3^2}{\sqrt{1+2x}+3} = \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+2}{x-4}\ \frac{2x-8}{\sqrt{1+2x}+3} =$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{1+2x})^2-3^2}{\sqrt{1+2x}+3} = \lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3} = \frac{\lim\limits_{x\to 4} 2\left(\sqrt{x}+2\right)}{\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{1+2x}+3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Рассмотри аналогичный пример: $\lim\limits_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

Домножим числитель на сопряженное, а знаменатель дополним до суммы кубов:

$\lim\limits_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{x\to -8}\frac{\left(\sqrt{1-x}\right)^2-3^2}{\sqrt{1-x}+3}\cdot\frac{2^2-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{2^3+\left(\sqrt[3]{x}\right)^3} == \lim\limits_{x\to -8}\frac{-8-x}{\sqrt{1-x}+3}\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{8+x}\ =$

$\lim\limits_{x\to -8}\ \frac{-4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3} == -\frac{4+4+4}{6} = -\frac{12}{6} = -2.$

Предел при бесконечно большом аргументе $\lim\limits_{x\to\infty}$

Перейдем к пределам на бесконечности.

Прежде всего поймем, что такое предел на бесконечности. На «плюс» бесконечности:
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = B \Leftrightarrow \ \forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\, A > 0 \ \ \forall x\colon\ x > A \ \ |f(x) - B| > A$

Аналогично на «минус» бесконечности:
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = B \Leftrightarrow \ \forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\, A > 0 \ \ \forall x\colon\ x < -A \ \ |f(x) - B| < \varepsilon$

Рассматриваемый предел можно свести к предыдущим задачам, «перевернув» числитель и знаменатель:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(x-2)(x+1)}}{\dfrac{1}{x^2-4}}$$

Теперь и числитель, и знаменатель стремятся к 0.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{(x-2)(x+1)}}{\dfrac{1}{x^2-4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\dfrac{4}{x^2}}{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = 1$$

Рассмотрим подробнее предел на $+\infty$ и докажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.
Это означает, что $\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\, A > 0 \ \ \forall x\colon\ x > A \ \ \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$
Возьмем A = $\frac{1}{\varepsilon}$: $\left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{A} = \varepsilon$.
При этом мы можем выбрать A различными способами.

Семинар 2. Асимптотические формулы.

Докажем первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}$ без использования производных.

Вспомним, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ имеет в точке $x = a$ предел, равный B, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \ \ \forall x\colon \ 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - B| < \varepsilon$$

Ранее упоминалось, что $sinx \le x \le tgx$ при малых x, $\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Так как $x \ne 0$, поделим неравенство на $sinx$: $1 \le \frac{x}{sinx} \le \frac{1}{cosx}$.

При $x \to 0 \quad \frac{1}{cosx} \to 1$. Ранее мы уже показывали на единичной окружности, что $sinx \le x$. Теперь покажем, что $x \le tgx$. Для этого построим вторую высоту (рис. 2.1).

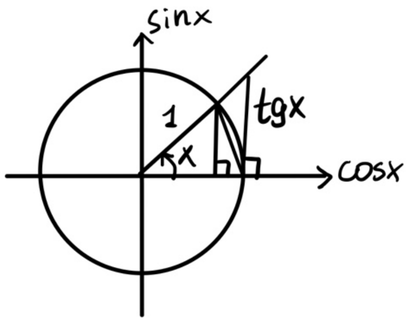

Рис. 2.1. Второй перпендикуляр - tgx.

Площадь большого треугольника равна $\frac{1}{2}tgx$, и она включает в себя площадь сектора, равную $\frac{1}{2}x$. Соответственно, $\frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tgx$ и $x \le tgx$.

Второй замечательный предел

Вторым замечательным пределом называется предел $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, где e = 2,7…

Вспомним, что у монотонной ограниченной функции есть предел.

Мы можем рассмотреть $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ и показать, что при $x \to 0$ функция является монотонной и ограниченной.

Докажем монотонность. Для этого рассмотрим $x = \frac{1}{n}, n \to \infty,\ f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Рассмотри отношение $\frac{f\left(x=\frac{1}{n+1}\right)}{f\left(x=\frac{1}{n}\right)} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} = \left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} =$ $\frac{\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}(n+1)}{n} > \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\ (n+1)\right)\frac{n+1}{n} = \frac{n}{n+1}\frac{n+1}{n} = 1.$

При переходе в неравенство мы использовали неравенство Бернулли. Таким образом, при переходе от n к n+1 значение возрастает, соответственно, функция является монотонной.

Непрерывность функции

Рассмотрим два графика функции рис. 2.2 и рис. 2.3:

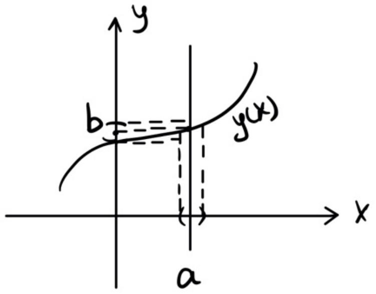

Рис. 2.2. Непрерывная функция.

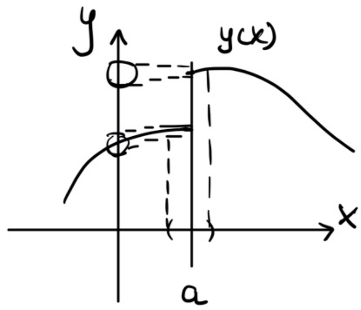

Рис. 2.3. Разрывная функция.

У непрерывной функции (рис. 2.2) существует предел, так как при приближении функции к значению a, значение функции приближается к b, то есть всегда можно выбрать столь малую окрестность точки a, что значение функции будет лежать в ε - окрестности значения b. Таким образом $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ =b. В случае разрывной функции (рис. 2.3) предела не существует. То есть выбирая, x сколь угодно близкие к a, получим 2 различных значения функции. Таким образом для разрывной функции $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Итак, если $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(a)$, то такая функция назщывается *непрерывной*.

Если $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, то такая функция называется *разрывной*.

При этом точки разрыва классфицируют следующим образом:

1) Если $\nexists \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\nexists \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, то это *разрыв второго рода*.
   Например, $f(x) = \frac{1}{x}$ (рис. 2.4) имеет разрыв второго рода.

2) Если $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, но $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, то это разрыв первого рода. Пример на рис. 2.3.
3) $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) \neq f(a)$ и $\exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) \neq f(a)$, то это *устранимый разрыв.* Пример на рис. 2.5.

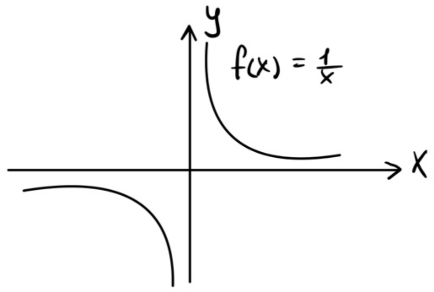

Рис. 2.4. график f(x)=1/x.

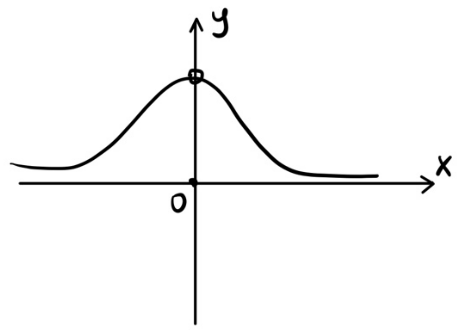

Рис. 2.5. Устранимый разрыв.

Так, первый замечательный предел $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$ имеет устранимый разрыв, так же, как и второй $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to e$.

Исследуем на непрерывность $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ в точке $x = 0$.
Значения функции в точке $x = 0$ не существует, так как на 0 делить нельзя, поэтому эта функция точно разрывна.

Теперь рассмотрим $f(x) = x^2$ в точке $x = 0$.
$\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0} x \lim\limits_{x\to 0} x = 0 \cdot 0 = 0$.
Или по определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall x\colon\; 0 < |x| < \delta \quad |x^2 - 0| < \varepsilon$$

В качестве δ возьмем $\sqrt{\varepsilon}$. Тогда $|x|^2 < \delta^2 = \varepsilon$. То есть 0 действительно является пределом функции.

Рассмотрим более сложный пример: $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+2}{x^3+1}$.
$\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+2}{x^3+1} \nexists$, так как при $x \to -1$ $x^3 + 1 \to 0$, то есть ограниченную функцию $x^2 + 2$ делим на бесконечную малую $x^3 + 1$ и получаем бесконечно большую. Соответственно предела не существует, то есть функция разрывна.

Введем определение. Будем говорить, что функция непрерывна во всех области, если она непрерывна в каждой точке. При исследовании на непрерывность в каждой точке необходимо исследовать только точки, в которых есть особенность.
Отметим, что элементарные функции непрерывны во всех точках, в которых они определены, и композиция из этих функция тоже является непрерывной.

Неопределенности типа 0/0

Ранее мы обсуждали, что $f(x)$ - бесконечно малая функция, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall x\colon\; 0 < |x-a| < \delta \;\; |f(x)| < \varepsilon$$

Если $g(x) \nrightarrow 0$, то есть не является бесконечно малой, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ является непрерывной.
В случае, когда $g(x) \to 0$, а $f(x) \nrightarrow 0$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ является разрывной.
В случае, когда $g(x) \to 0$ и $f(x) \to 0$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ представляет из себя неопределенность типа $\frac{0}{0}$.
Соответственно, если $g(x) \to \infty$ и $f(x) \to \infty$, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ представляет из себя неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$.
При неопределенности $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ можно получить, что угодно. Например, если $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, то $\frac{f(x)}{g(x)} \to \infty$. Если $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 3x^2$, то $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{2}{3}$. А если $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$, то $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$.

__Опр__. Если $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то будем говорить, что $f(x)$много меньше, чем $g(x)$ в точке a, или $f(x) = \bar{o}(g(x))$ («о -малое»).

Например, $x^2 = \bar{o}(x)$ в точке $x = 0$.

Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{sinx}$:
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{sinx} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{sinx} x = 1 \cdot 0 = 0$, то есть $x^2 = \bar{o}(sinx)$ в точке $x = 0$.
Покажем, что $sinx = x + \bar{o}(x)$, то есть $sinx - x = \bar{o}(x)$. Для этого рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx - x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{x} - 1 = 1 - 1 = 0$. Таким образом, $sinx = x + \bar{o}(x)$, или $sinx \approx x$.
Формулы типа $sinx = x + \bar{o}(x)$ называются *асимптотическими формулами.*

Асимптотические формулы

Ранее мы доказали, что $sinx = x + \bar{o}(x)$.
Теперь найдем асимптотическую формулу для $cosx$.

$\lim\limits_{x\to 0} cosx = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} cosx - 1 = 0$

$cosx = 1 - \frac{x^2}{2} + \bar{o}(x^2)$

$cosx - 1 = \frac{x^2}{2} + \bar{o}(x^2)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{cosx - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} - \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x^2}{2\cdot 2}2} = \frac{1}{2} - \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 0$$

Таким образом, мы доказали приближенную формулу для $cosx$.
Теперь рассмотрим приближение тангенса: $tgx = x + \bar{o}(x)$.

$tgx - x = \bar{o}(x)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx - x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{xcosx} - 1 = \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{cosx} - 1 = 0$$

Докажем еще одну формулу:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \bar{o}(x)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x}{x}\frac{\sqrt{1+x} + 1 + \frac{1}{2}x}{\sqrt{1+x} + 1 + \frac{1}{2}x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 + x - \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^2}{x\left(\sqrt{1+x} + 1 + \frac{1}{2}x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{4}}{x\left(\sqrt{1+x} + 1 + \frac{1}{2}x\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{4}}{x\left(\sqrt{1+x} + 1 + \frac{1}{2}x\right)} = 0$$

Вообще говоря, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \bar{o}(x)$ является частным случаем формулы $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \bar{o}(x)$.
Также есть такие формулы:

- $e^x = 1 + x + \bar{o}(x)$

- $a^x = 1 + xlna + \bar{o}(x\ )$
- $\ln(1+x) = x + \bar{o}(x\ )$
- $shx = x + \bar{o}(x\ )$
- $chx = 1 + \frac{x^2}{2}\bar{o}(x\ )$

Еще раз, чтобы доказать эту формулу $\ln(1+x) = x + \bar{o}(x\ )$,
рассмотрим разность $\ln(1+x) - x = \bar{o}(x\ )$ и перейдем к пределу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-x}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{x}\ln(1+x) - 1 = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} - 1 = lne - 1 = 1 - 1 = 0$$

Покажем, что $e^x = 1 + x + \bar{o}(x\ )$
$e^x - 1 = x + \bar{o}(x\ )$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x} = \{e^x = 1 + t\} = \lim_{t\to 0}\frac{1 + \mathrm{t} - 1}{\ln(1+t)} - 1 = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} - 1 = 1 - 1 = 0$$

Гиперболические функции

Функцию $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx$ назовем *гиперболическим синусом*, $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$ - *гиперболическим косинусом*.
Если мы запишем синус через тригонометрическую запись комплексных чисел, получим $\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = sinx$. Аналогично косинус $\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i} = cosx$.

Докажем, что $shx = x + \bar{o}(x\ )$.
Воспользуемся уже имеющимся результатом. Мы знаем, что $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx$ и $e^x = 1 + x + \bar{o}(x\ )$.
Соответственно, $e^{-x} = 1 - x + \bar{o}(-x\ )$.
Тогда достаточно показать, что $shx - x = \bar{o}(x\ )$, то есть $\lim\limits_{x\to 0}\frac{shx - x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1 + x + \bar{o}(x\ ) - 1 + x - \bar{o}(-x\ )}{2x} - 1 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x + \bar{o}(x\ ) - \bar{o}(-x\ )}{2x} - 1 = \lim\limits_{x\to 0} 1 + \frac{\bar{o}(x\ ) - \bar{o}(-x\ )}{2x} - 1 = 0$,
так как $\bar{o}(x\ ) - \bar{o}(-x\ ) = \bar{o}(x\ )$

Семинар 3. Вычисление пределов.

Посчитаем предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}$.

При $x\to a$ мы получаем неопределенность 0/0. Чтобы работать с асимптотическими формулами, нужно, чтобы аргумент стремился к 0, поэтому сделаем замену $t=x-a$:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}=\{t=x-a\}=\lim_{t\to 0}\frac{(t+a)^{t+a}-a^a}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{a^a\left(\frac{(t+a)^{t+a}}{a^a}-1\right)}{t}$$

Так как $(t+a)^{t+a}=e^{\ln(t+a)^{t+a}}=e^{(t+a)\ln(t+a)}=\left\{\ln(t+a)=\ln\left(1+\frac{t}{a}\right)a\right\}=e^{(t+a)\left(lna+\ln\left(1+\frac{t}{a}\right)\right)}-e^{(t+a)\left(lna+\frac{t}{a}+\bar{o}\left(\frac{t}{a}\right)\right)}=e^{alna+tlna+t+\bar{o}(t)}=a^a a^t e^t e^{\bar{o}(t)}$.

$$\lim_{t\to 0}\frac{a^a\left(\frac{(t+a)^{t+a}}{a^a}-1\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{a^a}{t}\left(a^a a^t e^t e^{\bar{o}(t)}1\right)=$$
$$=\{a^t=1+t\ln a+\bar{o}(t);e^t=1+t+\bar{o}(t)\}=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{a^a}{t}\Big(\big(1+t\ln a+\bar{o}(t)\big)(1+t+\bar{o}(t)(1+\bar{o}(t)-1\Big)=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{a^a}{t}\big(t\ln a+t+\bar{o}(t)\big)=\lim_{t\to 0}a^a\left(\ln a+1+\frac{\bar{o}(t)}{t}\right)=a^a(\ln a+1)$$

$\frac{\bar{o}(t)}{t}$ часто обозначают как $\bar{o}(1)$.

Найдем предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)\right)}{\sin bx}$, раскрыв неопределенность 0/0.

Так как $\sin x=x+\bar{o}(x)$, то $\sin bx=bx+\bar{o}(bx)$, и

$\ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)\right)=\ln\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+ax)}{\cos(\frac{\pi}{4}+ax)}-\ln\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos ax+\cos\frac{\pi}{4}\sin ax}{\cos\frac{\pi}{4}\cos(ax)-\sin\frac{\pi}{4}\sin(ax)}$

$\sin(ax)=ax+\bar{o}(x)$

$\cos(ax)=1-\frac{(ax)^2}{2}+\bar{o}(x)$

$\ln(1+x)=x+\bar{o}(x)\quad\Rightarrow\ln\big(1+ax+\bar{o}(x)\big)=ax+\bar{o}(x)+\bar{o}\big(ax+\bar{o}(x)\big)=ax+\bar{o}(x)$,

так как $\lim\limits_{x\to 0}(\bar{o}(x)+\frac{\bar{o}(ax+\bar{o}(x))}{x}=0$

Предполагаем, что b$\neq$ 0.

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)\right)}{\sin bx}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\bigl(1+ax+\bar{o}(x)\bigr)-\ln(1-ax+\bar{o}(x))}{bx+\bar{o}(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax+\bar{o}(x)-(-ax+\bar{o}(x))}{bx+\bar{o}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2a+\frac{2\bar{o}(x)}{x}}{b+\frac{\bar{o}(x)}{x}}=\frac{2a}{b}$$

Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos(xe^{x})-\cos(xe^{-x}))}{x^3}$, разрешив неопределенность 0/0.

Так как

$\cos(t)=1-\frac{t^2}{2}+\bar{o}(t)$

$e^t=1+t+\bar{o}(t)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos(xe^{x})-\cos(xe^{-x}))}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(1-\frac{(xe^{x})^2}{2}+\bar{o}((xe^{x})^2)-(1-\frac{(xe^{-x})^2}{2}+\bar{o}((xe^{-x})^2)\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\frac{1}{2}\bigl(-x^2e^{2x}+\bar{o}(x^2e^{2x})+x^2e^{-2x}+\bar{o}(x^2e^{-2x})\bigr)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\left(-1-2x-\bar{o}(2x)+1-2x+\bar{o}(-2x)\right.$$

$$\left.+\frac{\bar{o}(x^2e^{-2x})+\bar{o}(x^2e^{2x})}{x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(-4+\frac{\bar{o}(-2x)+\bar{o}(2x)}{x}+\frac{\bar{o}(x^2e^{-2x})+\bar{o}(x^2e^{2x})}{x^3}\right)=-2+0+0$$

$$=-2$$

так как при $x\to 0$ $\frac{\bar{o}(-2x)+\bar{o}(2x)}{x}\to 0$ и $\frac{\bar{o}(x^2e^{-2x})+\bar{o}(x^2e^{2x})}{x^3}\to 0$.

Но с текущим математическим аппаратом мы не в состоянии доказать, что $\frac{\bar{o}(x^2e^{-2x})+\bar{o}(x^2e^{2x})}{x^3}\to 0$, поэтому будем действовать более хитрым способом - разложим разность косинусов.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x}))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{x(e^x+e^{-x})}{2}\sin\frac{x(e^x-e^{-x})}{2}}{x^3}=$$
$$=\left\{\frac{(e^x+e^{-x})}{2}=1+\bar{o}(x);\ \frac{e^x-e^{-x}}{2}=shx\right\}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\bar{o}(x)\right)}{x}\frac{\sin\left(x(x+\bar{o}(x))\right)}{x^2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}-2\frac{\sin\left(x+\bar{o}(x)\right)}{x+\bar{o}(x)\left(\frac{x}{x+\bar{o}(x)}\right)}\cdot\frac{\sin\left(x^2+x\bar{o}(x)\right)}{x^2+x\bar{o}(x)\left(\frac{x^2}{x^2+\bar{o}(x)}\right)}=$$
$$=\left\{\frac{\sin\left(x^2+x\bar{o}(x)\right)}{x^2+x\bar{o}(x)}\to 1 \text{ первый замечательный предел}\right\}=-2\cdot 1=$$
$$=-2$$

Вычислим $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[13]{x}-\sqrt[7]{x}}{\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{x}}$.
Воспользуемся асимптотической формулой $(1+t)^{\alpha}=1+\alpha t+\bar{o}(t),$ t→ 0.

$$\sqrt[13]{x}=\sqrt[13]{1+x-1}=1+\frac{1}{13}(x-1)+\bar{o}(x-1)$$

Сделаем замену $t=x-1$, при $x\to 1$ $t\to 0$.
Теперь

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[13]{x}-\sqrt[7]{x}}{\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{x}}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{13}}-(1+t)^{\frac{1}{7}}}{(1+t)^{1/5}-(1+t)^{\frac{1}{3}}}=\lim_{t\to 0}\frac{1+\frac{1}{13}t+\bar{o}(t)-1-\frac{1}{7}t+\bar{o}(t)}{1+\frac{1}{5}t+\bar{o}(t)-1-\frac{1}{3}t+\bar{o}(t)}=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{7}+\frac{\bar{o}(t)+\bar{o}(t)}{t}\right)}{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{\bar{o}(t)+\bar{o}(t)}{t}}=\frac{\frac{1}{13}-\frac{1}{7}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}$$

Вычислим $\lim\limits_{x\to 1}\ (1-x)\log_x 2$.
Так как $\ln(1+t)=x+\bar{o}(t),\ t\to 0$, то $\ln(x)=\ln(1+x-1)=x-1+\bar{o}(x-1)$.
Сделаем замену $t=x-1$, при $x\to 1$ $t\to 0$.
$\log_a(1+t)=\frac{t}{\ln a}+\bar{o}(t)$
$\log_a(1+t)-\frac{t}{\ln a}\bar{o}(t)$
$\lim\limits_{t\to 0}\frac{(\log_a(1+t)-t\log_a e)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}-\log_a e=0$

$$\lim_{x\to 1}\ (1-x)\log_x 2=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\log_2 x}=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{\log_2(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{\frac{t}{\ln 2}+\bar{o}(t)}=\lim_{t\to 0}-\frac{1}{\frac{1}{\ln 2}+\frac{\bar{o}(t)}{t}}$$
$$=\ln 2.$$

Семинар 4. Производные.

Дадим неточное определение производной: производная — это скорость изменения функции.
Предположим, что есть некоторая материальная точка, которая движется вдоль прямой x (рис. 4.1), начиная с момента времени $t = 0$. Если нарисовать график зависимости координаты от времени, то получится рис. 4.2.
Теперь предположим, мы хотим посчитать скорость в интервале $(t_0; t_0 + \Delta t)$. Для этого мы берем перемещение Δx и делим его на Δt. Величина $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ называется скоростью точки в интервал Δt.

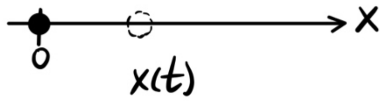

Рис. 4.1. Движение материальной точки

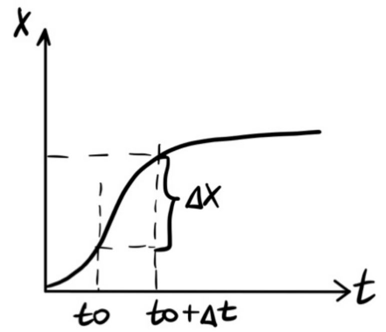

Рис. 4.2. График зависимости координат от времени

Но в каждый момент времени на интервале $(t_0; t_0 + \Delta t)$ скорость разная. Чтобы получить *мгновенную скорость*, нужно уменьшать интервал: чем сильнее уменьшен интервал, тем точнее получается значение скорости в конкретной точке.
Таким образом, *мгновенной скоростью* назовем производную от переменной $x(t)$.

Теперь рассмотрим математическое определение производной.
Пусть задана некоторая функция $y = f(x)$. *Приращением функции в точке* называется отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ - скорость движения.
Чтобы получить скорость движения в точке (*мгновенную скорость*), необходимо взять максимально маленький интервал $(t_0; t_0 + \Delta t)$, то есть устремить Δt к 0. Мгновенную скорость не изменения координаты $x(t)$ назовем производной функции $x(t)$ по переменной t.

Итак, пусть задана функция $y = f(x)$.
$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) -$ *приращение функции*
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ назовем *разностным отношением.*
Производной функции $y = f(x)$ назовем предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \dot{f}$

Мы будем рассматривать функции, для которых существует такой предел, то есть производная, хотя в общем говоря, есть функции, у которых нет производных.

Рассмотрим пример: $f(x) = x^2$.
Тогда $f' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0$
Аналогично можно посчитать производную для $f(x) = x^\alpha$ $f' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Посчитаем производную от $f(x) = \sin x$.
Так как $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$,

$$f' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x_0+\Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \{\text{первый замечательный предел}\} =$$

$$= \cos x_0$$

Аналогично доказывается, что $(\cos x)' = -\sin\ x$.

Рассмотрим $f(x) = e^x$.
Так как $e^x = 1 + x + \bar{o}(x)$, то

$$f' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x_0+\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x_0}(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x_0}(1+\Delta x+\bar{o}(\Delta x)-1)}{\Delta x} = e^{x_0}.$$

Таким образом, $f(x) = e^x,\ (e^x)' = e^x$.
Аналогично доказывается, что $f(x) = a^x,\ (a^x)' = a^x\ln a$.

Теперь рассмотрим $f(x) = tg\ x$. Мы могли бы вычислить производную, как вычисляли раньше, а могли бы заметить, что $f(x) = tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Возникает вопрос: можно ли найти производную каждой из функций найти производную их отношений?

Свойства производных

Пусть заданы $u(x), v(x)$.
Тогда

- $(u+v)' = u' + v'$
- $(u-v)' = u' - v'$
- $(uv)' = u'v + v'u$

- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$

Таким образом, $tg\ x' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.
Аналогично $ctg\ x' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Докажем, что $(u-v)' = u' - v'$.

$$(u-v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{u}(x_0+\Delta x) - v(x_0+\Delta x) - (\mathrm{u}(\mathrm{x}_0) - v(x_0))}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{u}(x_0+\Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} + \frac{-v(x_0+\Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} = u' - v' \blacksquare.$$

Докажем, что $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x_0+\Delta x)}{v(x_0+\Delta x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0+\Delta x) + \boldsymbol{u(x_0)v(x_0)} - \boldsymbol{u(x_0)v(x_0)}}{\Delta x v(x_0) v(x_0+\Delta x)}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{v(x_0)v(x_0+\Delta x)} \left(\frac{v(x_0)\big(u(x_0+\Delta x) - u(x_0)\big)}{\Delta x} \right.$$
$$\left. - \frac{u(x_0)\big(v(x_0+\Delta x) - v(x_0)\big)}{\Delta x} \right) = \frac{1}{v^2}(vu' - uv') \blacksquare.$$

Таким образом, мы можем вычислять не только производные от функций, но и производные от их алгебраических комбинаций.

$$(\sin x + \cos x)' = (\sin x)' + (\cos x)' = \cos\ x - \sin\ x$$

$$(x^3 \cdot 2^x)' = (x^3)' 2^x + x^3 (2^x)' = 3x^2 2^x + x^3 2^x \ln 2$$

Производная от сложной функции

Обратим внимание на то, что $f_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, но, вообще говоря, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq f_x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f_x$ и соответственно, $\Delta y \neq f_x \Delta x$.

$$\Delta y = f_x \Delta x + \bar{o}(\Delta x)$$

Если приращение функции можно представить в виде $\Delta y = f_x \Delta x + \bar{o}(\Delta x)$, то функция *дифференцируема*.

Предположим, задана некоторая функция $y = f(x),\ x = \varphi(t)$.
Тогда $y = f(\varphi(t))$. Как посчитать $f\big(\varphi(t)\big)'$?
$\Delta y \approx f_x \Delta x$, $\Delta x \approx \varphi_t \Delta t$, то есть $\Delta y \approx f_x \varphi_t \Delta t$.
Соответственно,

$$f\big(\varphi(t)\big)' = f_x \varphi_t$$

Например, $y(t) = e^{2t}$.
$y(x) = e^x, x = 2t,\ \ y = e^{2t}$

$$f\big(\varphi(t)\big)' = (e^{2t})' = (e^x)_x (2t)_t = e^x 2 = e^{2t} 2$$

Пусть теперь $y(t) = e^{t^2 + \sin t}$.

$y(x) = e^x, x = t^2 + \sin t$

$(e^{t^2+\sin t})' = (e^x)_x (x)_t = e\text{^}x\ (2t + \cos t) = e^{t^2+\sin t}(2t + \cos t)$

Обратная функция и ее производная

Предположим, мы хотим посчитать производную от $y = \ln x$ или $y = \arcsin x$.
Если функция *взаимно-однозначная* (рис.4.3), то как $y = f(x)$ каждому x ставит в соответствие некоторое значение y, так и $x = g(y)$ каждому y ставит в соответствие единственный x.

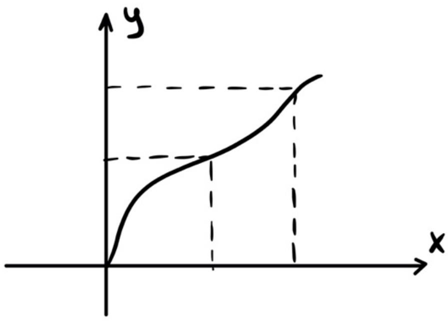

Рис. 4.3. Взаимно-однозначная функция.

Но не все функции взаимно-однозначные. Существуют функции, которые, анпример, ставят в соответствие каждому x единственный y, но не каждому y единственный x, как на рис. 4.4. Для одного y здесь несколько x.

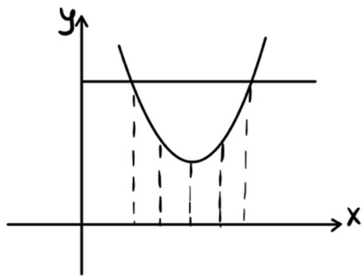

Рис. 4.4. Не взаимно-однозначная функция

Для взаимно-однозначных функций $y = f(x)$ существует *обратная функция* $x = f^{-1}(y)$.
При этом $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f(y)'}$
Так как $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f_x$, то $(f^{-1}(y))' = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$

Например, пусть $y = e^x,\ x = \ln y$.
Тогда $(\ln y)'_y = \frac{1}{(e^x)'_x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$.

Рассмотрим другой пример: $y = \arcsin x,\ x = \sin y$.

$$(\arcsin x)\,'_x = \frac{1}{(\sin y)'_x} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos \arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Аналогично доказывается, что $(\operatorname{arctg} x)\,'_x = \frac{1}{(1+x^2)}$.

Примеры вычисления производных

Вычислим производную для $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.
Можно представить, что $y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{u}{v}$ и воспользоваться формулой $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, $(const)' = 0$.
Тогда

$$y' = \frac{(ax+b)'(cx+d) - (ax+b)(cx+d)'}{(cx+d)^2} = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2}$$

Вычислим производную от $y = \sqrt{a^2 + x^2}$.
Представим как $y = \sqrt{t},\ t = a^2 + x^2$.
Тогда

$$y' = \left(\sqrt{t}\right)_t (a^2 + x^2)_x = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} 2x = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$ считается по формуле $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$ или

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Рассмотрим $y = \sin(\sin(\sin(x)))$.
Сначала попробуем найти производную от $y = \sin(\sin(x))$.
$y = \sin t\,,\ t = \sin x$ определяют сложную функцию $y = \sin(\sin(x))$.
Поэтому

$$y' = (\sin t)_t (\sin x)_x = \cos t \cos x = \cos\,(\sin x) \cos x$$

Тогда для $y = \sin(\sin(\sin(x)))$ $y = \sin t\,,\ t = \sin(\sin(x))$.

$$y' = (\sin t)_t (\sin(\sin x))_x = \cos t \cos\,(\sin x) \cos x$$
$$= \cos(\cos\,(\sin x) \cos x) \cos\,(\sin x) \cos x$$

Посчитаем производную от $y = e^{x^2} \cos 2x$.
Предоставим ее как $y = uv$ и воспользуемся формулой $(uv)' = u'v + v'u$ и $\cos 2x = \cos t\,, t = 2x$
Тогда

$$y' = \left(e^{x^2}\right)' \cos 2x + e^{x^2} (\cos 2x)' = e^{x^2} 2x cos\ 2x + e^{x^2} (\cos t)_t\ (2x)_x$$
$$= e^{x^2} 2x cos\ 2x + e\hat{}x^2 (-\sin 2x) 2$$

Посчитаем производную от $y = \sin(\ln x)$.
Представим функцию как $y = \sin t\,,\ \ t = \ln x$

$$y' = (\sin t)_t (lnx)_x = \cos\,(\ln x) \frac{1}{x}$$

Рассмотрим пример сложнее: $y = \ln \frac{x+a}{\sqrt{x^2+1}}$.
Представим функцию как $y = ln\, t\,,\ \ t = \frac{x+a}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{u}{v}$.
Тогда

$$y' = (\ln t)_t \left(\frac{x+a}{\sqrt{x^2+1}}\right)_x = \frac{1}{\frac{x+a}{\sqrt{x^2+1}}} \frac{(x+a)'\sqrt{x^2+1} - (x+a)\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{\frac{x+a}{\sqrt{x^2+1}}} \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+a)\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}2x}{x^2+1}$$

Вычислим производную от $y = arctg\left(x + \sqrt{1+x^3}\right)$.
Представим функцию как $y = arctg(t),\ \ t = x + \sqrt{1+x^3}$.
Тогда

$$y' = \left(arctg(t)\right)_t \left(x + \sqrt{1+x^3}\right)_x$$

Так как $y = arctg(x)$ обратная функция от $x = tg\ y$, то

$$(acrtg\ x)_x = \frac{1}{(tg\ y)_x} = \frac{\frac{1}{1}}{\cos^2 y} = \frac{\frac{1}{\sin^2 y + \cos^2 y}}{\cos^2 y} = \frac{1}{tg^2 y + 1} = \frac{1}{x^2+1}$$

$y = \sqrt{1+x^3},\ y = \sqrt{t}, t = 1 + x^3$

$y' = \left(\sqrt{t}\right)_t (1+x^3)_x = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} 3x^2 = \frac{1}{2}\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^3}}$

Итак,

$$y' = \left(arctg(t)\right)_t \left(x + \sqrt{1+x^3}\right)_x = \frac{1}{1 + \left(x + \sqrt{1+x^3}\right)^2}\left(1 + \left(x + \sqrt{1+x^3}\right)_x\right) =$$

$$= \frac{1}{1 + \left(x + \sqrt{1+x^3}\right)^2}\left(1 + \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}\right)$$

Семинар 5. Дифференциалы. Производные высших порядков.

Таблицу производных, представленную ниже, необходимо знать наизусть:

$$1. C' = 0$$
$$2. x' = 1$$
$$3. \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$4. \left(a^x\right)' = a^x \ln a$$
$$5. \left(x^\alpha\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, x \in R$$
$$6. (e^x)' = e^x$$
$$7. \left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$
$$8. \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$
$$9. (\sin x)' = \cos x$$
$$10. (\cos x)' = -\sin x$$
$$11. \left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$12. (ctg\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$
$$13. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$14. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$15. (arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$16. \left(arcctg\, x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$$
$$17. \left(sh\, x\right)' = ch\, x$$
$$18. (ch\, x)' = sh\, x$$
$$19. (th\, x)' = \frac{1}{ch^2 x}$$
$$20. (cth\, x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$$

Дифференциал

Ранее уже упоминалась, что $f_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, но, вообще говоря, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq f_x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f_x$ и соответственно, $\Delta y \neq f_x \Delta x$.

Наглядно это видно на рис. 5.1. Производная — это тангенс угла касательной, а $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ — это тангенс угла секущей, соединяющей на рис. 5.1. красные точки.

Если приращение функции можно представить в виде $\Delta y = f_x \Delta x + \bar{o}(\Delta x)$, то функция *дифференцируема.*

Опр. Дифференциалом будем называть линейную часть приращения $\Delta y = f_x \Delta x + \bar{o}(\Delta x)$, то есть $f_x \Delta x = dy$.

$$\Delta y \neq dy, \Delta y \approx dy$$

$dy = f_x' dx$, *где*
dy - *дифференциал,*
dx- *приращение*

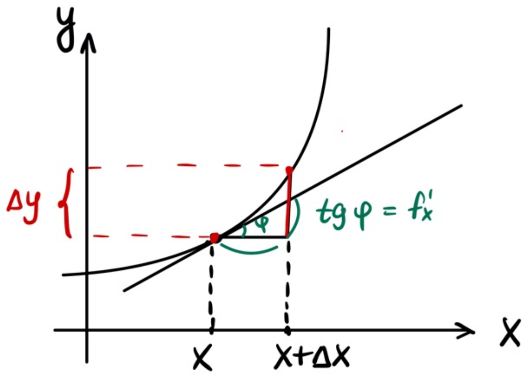

Рис. 5.1. Приращение и производная

Задача 1.

Найти дифференциал функции $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

dy—?

Решение:

$dy = f'_x \Delta x = f'_x dx$

$y = \ln t,\ \ t = x + \sqrt{1 + x^2}$

$$y' = (\ln t)_t \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)_x = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}\left(1 + \frac{1}{2}(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}2x = \right.$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$dy = y'\Delta x = y'dx = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}dx$$

Ответ: $dy = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

Задача 2.

$y = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

Найти dy в точках $x = 0,\ \ x = 1$.

Решение:

$$dy = y'dx = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\pi}{2}dx$$

$x = 0\colon\ dy = \cos\left(\frac{\pi 0}{2}\right)\frac{\pi}{2}dx = 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$x = 1\colon\ dy = \cos\left(\frac{\pi 1}{2}\right)\frac{\pi}{2}dx = 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0$

Ответ: $x = 0\colon\ dy = \frac{\pi}{2}$

$x = 1\colon\ dy = 0$

Задача 3.

Используя дифференциал, посчитать $\sqrt[3]{1{,}01}$.

Решение:

$$\Delta y = f_x \Delta x + \bar{o}(\Delta x)$$

$y(x + \Delta x) - y(x) = dy + \bar{o}(\Delta x)$

$y(x + \Delta x) = y(x) + dy + \bar{o}(\Delta x)$

$\sqrt[3]{1{,}01} = \sqrt[3]{x + \Delta x} = \sqrt[3]{1 + 0{,}01} = \sqrt[3]{1} + dy + \bar{o}(0{,}01)$

$\sqrt[3]{1{,}01} \approx \sqrt[3]{1} + dy$

$dy = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Delta x$

$x = 1,\ \Delta x = 0{,}01\colon\ dy = \frac{1}{3} \cdot 1^{-\frac{2}{3}} \cdot 0{,}01 = 0{,}03$

$\sqrt[3]{1{,}01} \approx \sqrt[3]{1} + 0{,}03 = 1{,}03$

Ответ: $\sqrt[3]{1{,}01} \approx 1{,}03$

Важно запомнить эту формулу:

$y(x + \Delta x) = y(x) + dy + \bar{o}(\Delta x)$

Если обозначить $x + \Delta x$ за x_0, то формула примет вид:

$y(x_0) = y(x) + y' + \bar{o}(x_0 - x) + \cdots$

$y(x) - y(x_0)y' \approx y'(x_0)(x_0 - x)$

Задача 4.

Посчитать $e^{0,2}$.

Решение:

Известно, что $e^0 = 1$.
Тогда $e^{0,2} = e^{(x+\Delta x)}$, где $x = 0$, $\Delta x = 0,2$
$y(x+\Delta x) \approx y(x) + y'(x)$
$e^{(x+\Delta x)} \approx e^x + e^x \Delta x$
$e^{0,2} \approx e^0 + e^0 0,2 = 1 + 0,2 = 1,2$
Ответ: 1,2

Задача 5.

Посчитать $\sqrt[4]{255}$.

Решение:

Известно, что $\sqrt[4]{256} = 4$.
Тогда $\sqrt[4]{x+\Delta x} = \sqrt[4]{256-1}$
$y(x+\Delta x) \approx y(x) + y'(x)$

$$\sqrt[4]{255} = \sqrt[4]{256} + \frac{1}{4}(256)^{-\frac{3}{4}}(-1) = 4 + \frac{1}{4}4^{-3}(-1) = 4 - \frac{1}{256} = \frac{4 \cdot 256 - 1}{256} = \\ = \frac{1024-1}{256} = \frac{1023}{256}$$

Ответ: $\frac{1023}{256}$

Инвариантность формы первого дифференциала

Рассмотрим 2 случая: 1) $x -$ независимая переменная; 2) $x -$ зависимая переменная:

$\boldsymbol{x} -$ **независимая переменная**	$\boldsymbol{x} -$ **зависимая переменная**
$y = y(x)$	$y = y(x),\ x = x(t),\ \ y = y(x(t))$
$dy = y'dx = y'\Delta x$	$dy = y_x x_t dt = y_x x_t \Delta t$ $dx = x_t \Delta t$ $dy = y'dx$
$y'_x = \dfrac{dy}{dx}$	$y'_x = \dfrac{dy}{dx}$

Очевидно, форма первого дифференциала для функций, где $x -$ независимая переменная и где $x -$ зависимая переменная, совпадает. Это называется *инвариантностью первого дифференциала.*

Производные и дифференциалы старших порядков

$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ – производная. Возможная ситуация, когда производная существует не в одной точке, а во всех точках некоторого интервала. И если производная существует в каждой точке, то, по сути, производная сама является функцией, то есть $y' = g$. Тогда для g тоже можно посчитать предел разностного отношения, то есть найти производную: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{y'(x+\Delta x) - y'(x)}{\Delta x} = (y')' = y'' = \ddot{y} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ - *вторую производную.*
Аналогично, $(y'')' = y''' = y^{(3)}$ - третья производная, и так далее.
Таким образом, $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

Если физический смысл первой производной – скорость изменения, то вторая производная показывает скорость изменения скорости - ускорение.

Дифференциал $dy = y'(x)dx$ — функция, так как в каждой точке x он свой, то есть зависит от x.
Попробуем посчитать дифференциал второго порядка, то есть дифференциал от дифференциала:

$$d(dy) = (y'(x)dx)'dx = y''(x)(dx)^2 = d^2 y$$

Очевидно,

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = y^{(n)}(x)(dx)^n$$

Снова рассмотрим 2 случая: 1) $x -$ независимая переменная; 2) $x -$ зависимая переменная, чтобы понять, как будет выглядеть форма дифференциала высшего порядка.

x **— независимая переменная**	x **— зависимая переменная**
$y = y(x)$	$y = y(x),\ x = x(t),\ \ y = y(x(t))$
$dy = y'_x dx$ $d(dy) = d^2y = y''_{xx}(dx)^2$	$dy = y_x x_t dt;\ dx = x'_t dt;\ d^2x = x''_{tt}(dt)^2$ $d(dy) = d^2y = (y_x x_t dt)'_t dt = (y_x x_t)'_t (dt)^2 =$ $= (y_{xx} x_t x_t + y_x x_{tt})(dt)^2 =$ $= y''_{xx}(x_t dt)^2 + y_x x''_{tt}(dt)^2 =$ $= y''_{xx}(dx)^2 + y_x d^2x$
$y'_x = \dfrac{dy}{dx}$ $y''_{xx} = \dfrac{d^2y}{(dx)^2}$	$y'_x = \dfrac{dy}{dx}$

Задача 1.

Найти $(sinx)^{10}$.

Решение:

$(\sin x)' = \cos x$
$(\sin x)'' = (\cos x) = -\sin x$
$(\sin x)''' = -\cos x$
$(\sin x)^{(4)} = \sin x$
…
$(\sin x)^{(9)} = cos\, x$
$(\sin x)^{(10)} = -\sin x$

Таким образом, можно вывести формулу: $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

Ответ: $-\sin x$

Задача 2.

Найти $(x^3 + e^{2x})^{(100)}$.

Решение:

Начнем считать производные последовательно.

$(x^3+e^{2x})' = 3x^2 + 2e^{2x}$

$(x^3+e^{2x})'' = 6x + 2^2e^{2x}$

$(x^3+e^{2x})''' = 6 + 2^3e^{2x}$

$(x^3+e^{2x})^{(4)} = 0 + 2^4e^{2x}$

...

$(x^3+e^{2x})^{(100)} = 2^{100}e^{2x}$

Ответ: $2^{100}e^{2x}$

Задача 3.

Найти $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{(8)}$.

Решение:

$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{(8)} = \left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{(8)}$

Так как $(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$, то

$\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{(8)} = -2\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(8)} = \frac{(-2)8!}{(x+1)^9}$

Так как

$\left(\frac{1}{x+1}\right)' = -\frac{1}{(x+1)^2}$

$\left(\frac{1}{x+1}\right)'' = (-1)(-2)\frac{1}{(x+1)^4}$

...

$\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(8)} = (-1)(-2)\dots(-8)\frac{1}{(x+1)^9} = \frac{(-1)^8 8!}{(x+1)^9}$

Ответ: $\frac{(-1)^8 8!}{(x+1)^9}$

Задача 4.

Найти $(\cos^2 x)^{(50)}$.

Решение:

$$(\cos^2 x)^{(50)} = \left(\frac{\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\right)^{(50)} = \frac{1}{2}(\cos 2x) = \frac{1}{2}2^{50}\left(\cos 2x + \frac{50\pi}{2}\right) = -2^{49}\cos 2x$$

Ответ: $-2^{49}\cos 2x$

Задача 5.
Найти $(x\sin x\,)^{(20)}$.

Решение:

$(uv)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$ - формула Лейбница.
$(uv)' = u'v + v'u$
$(uv)'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv''$
Таким образом,

$$(x\sin x\,)^{(20)} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k x^{(k)} (\sin x)^{(20-k)}$$

Начиная с $k = 2\quad x^{(k)}$ обнуляется, поэтому

$$(x\sin x\,)^{(20)} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k x^{(k)} (\sin x)^{(20-k)} = x(\sin x)^{(20)} + C_{20}^1 1 (\sin x)^{(19)} =$$
$$= x\sin(x + \frac{\pi}{2}20) + 20\sin(x + \frac{\pi}{2}19) = x\sin x\ + 20(-\cos x)$$

Ответ: $x\sin x\ + 20(-\cos x)$

Формула Лейбница

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$$

Докажем эту формулы методом математической индукции.

<u>База</u>: $n = 1\ \ (uv)' = u'v + v'u$
<u>Шаг</u>: пусть верно для n: $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$, докажем, что верно для $n+1$.
Мы хотим доказать, что $(uv)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(k)} v^{(n+1-k)}$.

$$(uv)^{(n+1)} = ((uv)^{(n)})'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(u^{(k)} v^{(n-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(u^{(k+1)} v^{(n-k)} + u^{(k)} v^{(n+1-k)}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(u^{(k)} v^{(n+1-k)}\right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(u^{(k+1)} v^{(n-k)}\right) = \{k+1 = l\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(u^{(k)} v^{(n+1-k)}\right) + \sum_{l=1}^{n+1} C_n^{l+1} u^{(l)} v^{(n+1-l)} = \{l = k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(u^{(k)} v^{(n+1-k)}\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} u^{(k)} v^{(n+1-k)} = C_n^0 u^{(0)} v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n+1-k)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} C_n^{k+1} u^{(k)} v^{(n+1-k)} + C_n^n u^{(n+1)} v^{(0)} = (uv)^{n+1} =$$

$$= u^0 v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) u^{(k)} v^{(n+1-k)} + u^{(n+1)} v^0 =$$

$$= C_{n+1}^0 u^0 v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} (C_{n+1}^k) u^{(k)} v^{(n+1-k)} + C_{n+1}^{n+1} u^{(n+1)} v^0 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(k)} v^{(n+1-k)}$$

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k)!\,(n+1-k)!} = C_{n+1}^k \blacksquare.$$

Посчитаем с помощью доказанной формулы $(x^2 e^{2x})^{(100)}$.

$$(x^2 e^{2x})^{(100)} = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k (x^2)^{(k)} (e^{2x})^{(100-k)} =$$

$$= C_{100}^0 x^2 (e^{2x})^{(100)} + C_{100}^1 2x (e^{2x})^{(99)} + C_{100}^2 2 (e^{2x})^{(98)} =$$

$$= x^2 2^{100} e^{2x} + 100\ 2x\ 2^{99} e^{2x} + 100 \frac{99}{2} 2^{98} e^{2x}.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ