МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КУГУШЕВ
ЕВГЕНИЙ ИВАНОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Содержание

Лекция 1 ... 6
Уравнения Лагранжа 2-го рода ... 6
Принцип Даламбера-Лагранжа для систем с геометрическими связями ... 6
Кинетическая энергия системы ... 7
Разрешимость относительно старших производных ... 9
Обобщённые силы ... 9
Потенциальные силы ... 10
Лекция 2 ... 11
Первые интегралы уравнений Лагранжа. Понижение порядка по Раусу ... 11
Обобщенный интеграл энергии (интеграл Якоби) ... 11
Натуральные механические системы ... 11
Калибровка лагранжиана ... 12
Понижение порядка по Раусу ... 12
Функция Рауса ... 13
Лекция 3 ... 15
Симметрии. Вариационные принципы ... 15
Поле симметрий ... 15
Теорема Нётер ... 15
Свойства поля симметрий. Замена координат ... 16
Вариационный принцип Гамильтона ... 17
Принцип наименьшего действия ... 20
Вариационный принцип Мопертюи-Якоби ... 20
"Действие" по Якоби ... 20
Лекция 4 ... 22
Вариационные принципы. Состояния равновесия ... 22
Вариационный принцип Мопертюи-Якоби ... 22
Вариация по Якоби ... 23
Вариация по Гамильтону ... 23
Равновесие ... 24
Функция по Ляпунову ... 25
Теорема Ляпунова об устойчивости ... 25
Теорема Лагранжа-Дирихле ... 25
Лекция 5 ... 27

Теорема Лагранжа-Дирихле. Малые колебания ... 27
Теорема Лагранжа-Дирихле ... 27
Линеаризация уравнений Лагранжа около положения равновесия ... 27
Вековое уравнение линеаризованных уравнений Лагранжа ... 28
Уравнения малых колебаний ... 28
Диссипативные и гироскопические силы ... 28
Влияние диссипативных и гироскопических сил на устойчивость положения равновесия 29
Теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению ... 29
Лекция 6 ... 31
Положения равновесия ... 31
Неустойчивость положения равновесия и гироскопическая стабилизация ... 31
Теорема о невозможности гироскопической стабилизации ... 31
Консервативный случай ... 32
Парность и чётность корней характеристического полинома ... 32
Теорема Лиувилля ... 32
Лекция 7 ... 34
Инвариантная мера ... 34
Построение инвариантной меры на многообразие уровней первых интегралов ... 34
Интегрируемость в квадратурах ... 35
Теорема Якоби. Последние множители ... 36
Теорема Пуанкаре о возвращении ... 37
Лекция 8 ... 38
Динамика твёрдого тела с неподвижной точкой ... 38
Динамика твёрдого тела с неподвижной точкой ... 38
Динамическое уравнение Эйлера ... 38
Случай Эйлера ... 38
Динамика тяжелого твердого тела с неподвижной точкой ... 39
Уравнение Пуассона ... 39
Понятие о трех классических случаях интегрируемости: ... 40
Геометрическая интерпретация волчка Эйлера по Пуансо ... 40
Регулярная прецессия в случае Эйлера ... 41
Лекция 9 ... 42
Случай Лагранжа. Уравнения Гамильтона ... 42
Случай Лагранжа ... 42

Понижение по Раусу ... 42
Канонические уравнения Гамильтона. Вывод из уравнений Лагранжа ... 43
Функция Гамильтона в случае натуральной системы ... 44
Лекция 10 ... 45
Принцип Гамильтона ... 45
Преобразование Лежандра ... 45
Принцип Гамильтона в фазовом пространстве: ... 45
Лемма об аннуляторе канонической 2-формы ... 46
Интегральные инварианты ... 48
Абсолютный интегральный инвариант ... 49
Лекция 11 ... 50
Канонические преобразования ... 50
Канонические преобразования ... 50
Свободные канонические преобразования и их производящая функция ... 50
Производящая функция тождественного преобразования ... 51
Перевернутый маятник ... 52
Уравнение Гамильтона-Якоби ... 53
Полный интеграл ... 53
Понижение порядка по Уиттекеру ... 54
Автономизация системы ... 55
Лекция 12 ... 56
Геометрические аспекты Гамильтоновой механики ... 56
Симплектическое многообразие ... 56
Размерность симплектического многообразия ... 56
Теорема Дарбу ... 56
Гамильтоново векторное поле ... 56
Теорема Пуассона о первых интегралах ... 57
Теорема Пуассона о первых интегралах ... 58
Теорема Лиувилля об интегрируемых системах ... 58
Лекция 13 ... 61
Теорема Лиувилля. Примечания к курсу ... 61
Теорема Лиувилля ... 61
Переменная "действие-угол" ... 61
Метод разделения переменных (уравнение Гамильтона-Якоби) ... 62

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Лекция 1

Уравнения Лагранжа 2-го рода

Уравнения Лагранжа 2-го рода выводятся для механических систем на которые наложены идеальные голономные связи. Выводятся они из принципа Даламбера-Лагранжа.

Принцип Даламбера-Лагранжа для систем с геометрическими связями

Пусть у нас есть система материальных точек, у которой: $\overline{r}_1 \dots \overline{r}_N -$ радиусы векторы, $\overline{m}_1 \dots \overline{m}_N -$ массы, $F_1 \dots F_N -$ действующие силы, и на систему наложены геометрические связи

$$f_i(\overline{r}_1 \dots \overline{r}_N, t) = 0 \qquad (1)$$
$$i = 1 \dots k$$

Будем считать, что ранг матрицы Якоби максимален

$$rank \left\| \frac{\partial f_i \dots f_N}{\partial \overline{r}_1 \dots \overline{r}_N} \right\| = k$$

Уравнения связи высекают в пространстве гиперповерхность с обобщенными координатами $q = (q_1 \dots q_N)$ (См. рис.1.1)

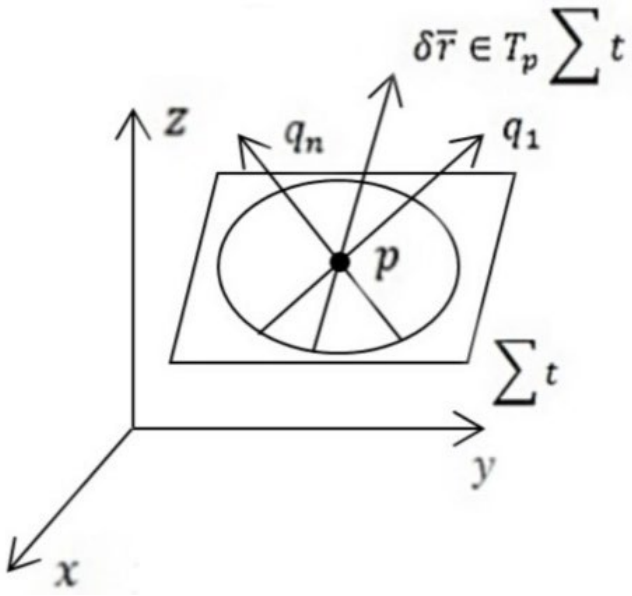


Рис. 1.1. Гиперповерхность, конфигурационное пространство

$$\overline{r}_i = \overline{r}_i(q_i \dots q_N, t) \qquad (2)$$

Если подставить (2) в (1), то уравнения будут тождественно выполняться

$$f(r_1(q,t) \dots r_N(q,t), t) = 0 \qquad (3)$$
$$\forall q, \forall t$$

$n = 3N - k -$ число степеней свободы системы

$$rank \left\| \frac{\partial \overline{r}_1 \dots \overline{r}_N}{\partial q_1 \dots q_N} \right\| = n$$

Виртуальное перемещение ($\delta\overline{r}$) — это такое перемещение, уравнения которого сохраняются с точностью до малых 2-ого порядка (касательный вектор).

$$\delta\overline{r_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{4}$$

$$\delta r = (\delta r_1 \dots r_N)$$

$$\forall \delta q = (\delta q_i \dots \delta q_N)$$

Любому физическому движению $\overline{r}(t)$ соответсвует какое-то изменение обобщенных координат во времени $q(t)$

Для действительных движений:

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\overline{r}}_i - \overline{F_i}, \delta\overline{r}_i) = 0 \tag{5}$$

$$\forall \delta\overline{r}$$

Кинетическая энергия системы

Используя (2) можем сказать, что

$$\dot{\overline{r}}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} \tag{6}$$

Кинетическая энергия системы

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\overline{r}}_i^2}{2} = T_2 + T_1 + T_0 = T(q, \dot{q}, t)$$

$$T_2 = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij}(q,t)\dot{q}_i\dot{q}_j$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} b_i(q,t)\dot{q}_i$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} b_i(q,t)\dot{q}_i$$

$$T_0 = c(q,t)$$

Обобщенные силы

$$Q = (Q_1 \dots Q_N)$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} \overline{F}_j \frac{\partial \overline{r_j}}{\partial q_i} = Q_i(q, \dot{q}, t)$$

Принцип Даламбера-Лагранжа виртуальных перемещений эквивалентен выполнению уравнения Лагранжа $2-$ го рода:

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\overline{r}}_i - \overline{F_i}, \delta\overline{r}_i) = 0 <=> \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

Доказательство:

Подставим в (5) (4) и получим:

$$\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\overline{r}}_i - \overline{F_i}, \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\delta q_j) = 0$$

$$\forall \delta q = (\delta q_1 \dots \delta q_n)$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\overline{r}}_i - \overline{F_i}, \frac{\partial r_i}{\partial q_j})\delta q_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\overline{r}}_i - \overline{F_i}, \frac{\partial r_i}{\partial q_j}) = 0$$

Лемма:

$$\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\overline{r}}_i, \frac{\partial r_i}{\partial q_j}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

Доказательство:

Воспользуемся правилом Лейбница

$$(\dot{fg}) = \dot{f}g - f\dot{g}$$

$$f = (m_i\ddot{\overline{r}}_i)$$

$$g = \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$$

$$(m_i\ddot{\overline{r}}_i, \frac{\partial r_i}{\partial q_j}) = \frac{d}{dt}(m_i\ddot{\overline{r}}_i, \frac{\partial r_i}{\partial q_j}) - m_i\ddot{\overline{r}}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) \quad (7)$$

Будем пользоваться соотношениями:

$$\text{а)}\ \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$$

$$\text{б)}\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial t}$$

$$g = \sum\frac{\partial g}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial q}{\partial t}$$

Функцию (7) разобьём на две части, 1а и 1б:

$$1\text{а} = \frac{d}{dt}(m_i\dot{r}_{i_i}\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j}) = \frac{d}{dt}(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{m_i\dot{r}_i^2}{2}\right))$$

$$u\frac{\partial u}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}(\frac{u^2}{2})$$

$$1б = -m_i\dot{r}_i\frac{\partial\dot{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial}{\partial q_j}(\frac{m_i\dot{r}_i^2}{2})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right) = 1а$$

$$-\frac{\partial T}{\partial q_i} = 1б$$

Лемму доказали и получили уравнения Лагранжа 2-ого рода.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

Разрешимость относительно старших производных

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

$$T_2 = \frac{1}{2}(A(q,t),\dot{q},\dot{q})$$

$$T_1 = (B(q,t),\dot{q})$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}} = A\dot{q} + B$$

$$\frac{d}{dt}(A\dot{q}) + \frac{d}{dt}(B)$$

$$\frac{d}{dt}(B) = \frac{\partial B}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}(A\dot{q}) = A\ddot{q} + (\frac{d}{dt}A)\dot{q}$$

Если подставить выражения в уравнение Лагранжа 2-ого рода, выражения будут иметь вид:

$$A(q,t)\ddot{q} = H(q,\dot{q},t)$$

$\ddot{q} = A^{-1}H$- уравнение разрешили относительно старших производных

Матрица А положительно определенная $(Au,u) > 0, \forall u \neq 0, u \in R^n$

Обобщённые силы

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} F_j\frac{\partial r_j}{\partial q_i}$$

Чтобы вычислить обобщённую силу, посчитаем мощность сил:

$$\sum_i F_i\dot{r}_i = \sum_j(\sum_i F_i\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot{q}_j)$$

$$\dot{r}_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot{q}_j$$

Чтобы вычислить обобщённую силу, нужно зафиксировать связи и начать изменять координату Q_{j*}

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Потенциальные силы

Существует какая-то функция $V((r_1 \dots r_N, t))$ такая, что $F_j = -\frac{\partial V}{\partial r_j}$

$U = -V, U -$ силовая функция

Рассмотрим случай, когда силы потенциальны и консервативны, не зависят от времени. А связи стационарны. $r_i = r_i(q), V(r_1 \dots r_N)$

$$Q_i = \sum_j F_j \frac{\partial r_j}{\partial q_i} = -\sum_j \frac{\partial V}{\partial r_j}\frac{\partial r_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

$$V(q_1 \dots q_N) = V(r_1 \dots r_N) = V(r_1(q), r_2(q) \dots r_N(q))$$

Уравнение Лагранжа 2-ого рода будет выглядеть так:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

$$-\frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

L- функция Лагранжа (Лагранжиан)

Свойства лагранжевых систем:

Первые интегралы уравнений Лагранжа:

1) Обобщенный интеграл энергии (интеграл Якоби)

Если $L = (q, \dot{q})$- не зависит от t, то $E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L$- первый интеграл системы уравнения Лагранжа

2) Циклические интегралы

Если $L = (q, \dot{q})$- не зависит от q_j, то q_j- циклическая координата, а $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \beta_j = const$- первый интеграл системы уравнения Лагранжа.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 2
Первые интегралы уравнений Лагранжа. Понижение порядка по Раусу

Обобщенный интеграл энергии (интеграл Якоби)

Если $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, то $E = (q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L$ - первый интеграл системы уравнения Лагранжа 2-ого рода. Докажем, что функция не меняется во времени, если подставить уравнение Лагранжа.

Доказательство:

Пусть $q(t)$ – удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(E\left(q(t), \frac{dq}{dt}, t\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} - \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\right]\dot{q} = 0 * \dot{q} = 0$$

Натуральные механические системы

1) связи не зависят от t
2) обобщенные координаты выбраны независящие от t

$$r = r(q)$$

$$\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial q}\dot{q} = T = T_2(q, \dot{q})$$

3) потенциальная энергия не зависит от t

Функция Лагранжа будет представлять собой:

$$L = T_2 - V = \frac{\sum a_{ij(q)}\dot{q}_i\dot{q}_j}{2} - V(q)$$

Матрица кинетической энергии:

$$A = \|a_{ij}\|$$

1) симметрическая
2) положительно определенная

$$L = L_2 + L_1 + L_0$$

$$L_0 = T_0 - V$$

Натуральная система — это система, у которой функция Лагранжа представляется в виде $L = L_2 + L_0$ и $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}}\dot{q} = 2L_2$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}}\dot{q} = L_1$$

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}} = L_0$$

Интеграл Якоби будет представлять собой:

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L = 2L_2 + L_1 - L_2 - L_1 - L_0 = L_2 - L_0 = T + V$$

Калибровка лагранжиана

Изменение $L \to \tau$ так, что уравнения Лагранжа для τ $\ll\!=\!\gg$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

Правила калибровки:

1) $L \to \lambda, \lambda \neq 0$ const

2) $L \to L + f(t)$

3) $f(q_i, t)$- функция

$$\frac{d}{dt}f = \sum \frac{\partial f_i}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = \varphi(q, \dot{q}, t)$$

$$L \to L + \varphi \quad L \to L + \frac{df}{dt}$$

Калибровка лагранжиана позволяет упростить работу с уравнениями Лагранжа

Понижение порядка по Раусу

Пусть $L(q, \dot{q}, t)$ –функция Лагранжа, $q = (q_1 \dots q_n)$ – координаты, часть которых циклические.

q_c – циклические координаты, q_p – позиционные координаты

$$q = (q_p, q_c)$$

$$q_p = (q_1 \dots q_k), q_c = (q_{k+1} \dots q_n)$$

Пусть

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} \equiv 0, \qquad i = k+1 \dots n$$

Ƀ- циклические интегралы

$$(2) \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \beta_i = const, \qquad i = k+1 \dots n$$

$$\beta = (\beta_{k+1} \dots \beta_n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_c} = \beta$$

Систему уравнений (2) можно разрешить относительно $\dot{q}_c$

$$(2) \quad \ll\!=\!\gg \quad \dot{q}_c = \dot{q}_c(q_p, \dot{q}_p, \beta)$$

потому что $det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial q_c^2} \right\| \neq 0$

$$L = T - V$$

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_c^2}\right\| = \left\|\frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{q}_c^2}\right\|$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

$$\frac{(A\dot{q},\dot{q})}{2}, (Au,u) > 0, u \neq 0$$

$$A_c = \frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{q}_c^2}$$

$$T_2 = \frac{Au,u}{2} = \frac{A_c v,v}{2} > 0, \qquad v \neq 0$$

Функция Рауса

$$R(q_p, \dot{q}_{p,}, t, \beta) = [L - \beta\dot{q}_c]|_{\dot{q}_c = \dot{q}_c(q_p, \dot{q}_{p,\beta,t})}$$

Если по начальным условиям определены константы циклических интегралов $\beta = (\beta_{k+1} \dots \beta_n)$, то изменение позиционных координат $q_p(t)$ удовлетворяет уравнению Лагранжа 2-ого рода, где в качестве лагранжиана используется функция Рауса.

Есть:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Доказать:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_p} - \frac{\partial R}{\partial q_p} = 0$$

Доказательство:

$$dR = \frac{\partial R}{\partial q_p}dq_p + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_p}d\dot{q}_p + \frac{\partial R}{\partial \beta}d\beta + \frac{\partial R}{\partial t}dt$$

$$R = \left[L(q_p, \dot{q}_{p,}t) - \beta\dot{q}_c\right]|_{\dot{q}_c = \dot{q}_c(q_p, \dot{q}_p, \beta, t)}$$

$$dR = \frac{\partial L}{\partial q_p}dq_p + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p}d\dot{q}_p\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_c}d\dot{q}_c\frac{\partial L}{\partial t}dt - \dot{q}_c d\beta - \beta d\dot{q}_c$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_p} = \frac{\partial L}{\partial q_p}, \qquad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p}, \qquad \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}, \qquad \frac{\partial R}{\partial \beta} = -\dot{q}_c$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \;\; \ll=\gg \;\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_p}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_p}$$

Пусть

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L$- первый обобщенный интеграл энергии

$$\mathrm{E}(q_p, \dot{q}_p, \dot{q}_c)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = 0$$

$$E^* = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_p}\dot{q}_p - R$$

Если в первый обобщенный интеграл энергии подставить $\dot{q}_c = \dot{q}_c(q_p, \dot{q}_p, \beta)$, то получится $E^*(q_p, \dot{q}_p, \beta)$

$$E|_{\dot{q}_c = \dot{q}_c(q_p, \dot{q}_p, \beta)} = E^*(q_p, \dot{q}_p, \beta)$$

$$E|_{\dot{q}_c} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L\right)|_{\dot{q}_c} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p}\dot{q}_p + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_c}\dot{q}_c - L\right)|_{\dot{q}_c} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p}\dot{q}_p\right)|_{\dot{q}_c} + (\beta\dot{q}_c - L)|_{\dot{q}_c} ==$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_p}\dot{q}_p - R$$

Лекция 3
Симметрии. Вариационные принципы

Поле симметрий

$$q = (q_1 \dots q_n)$$

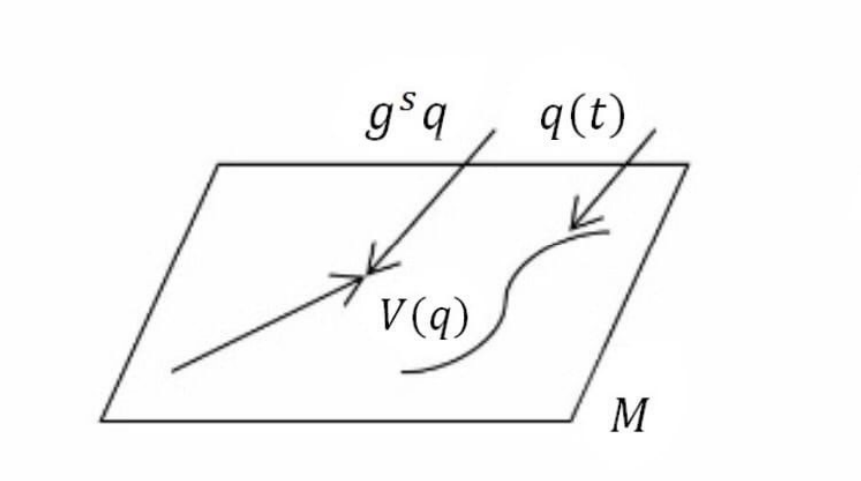


Рис. 3.2. Конфигурационное пространство

$L(q, \dot{q}, t) -$ Лагранжиан

$V(q)$- векторное поле на M

$$V = (V_1 \dots V_n)$$

$$\frac{dq}{ds} = V(q)$$

$g^s q$- фазовый поток

$q^*(t)$-кривая

$$q(t, s) = g^s q^*$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \dot{q}$$

Векторное поле $V(q)$ (на конфигурационном многообразии) называется полем симметрии для системы $L(q, \dot{q}, t)$. Если для любой кривой и любого сдвига $\forall q^*(t), \forall s$ выполняется условие $L\left(q(t,s), \frac{\partial q(t,s)}{\partial t}, t\right) = L(q^*, \dot{q}^*, t)$.

Теорема Нётер

Введем функцию $W(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} V = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} V_i$- первый интеграл уравнений Лагранжа 2-ого рода.

Доказательство:

$$\frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial s}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial s}=0$$

$$\frac{\partial q}{\partial s}=V(q)$$

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial q}{\partial s}\right)=\frac{\partial}{\partial t}V(q)$$

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial s}=\dot{V}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q}V(q)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{V}=0$$

Будем предполагать, что $q^*(t)$- решение уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}\Big|_{q^*,\dot{q}^*}=0$$

Надо доказать:

$$\frac{d}{dt}[W(q^*,\dot{q}^*,t)]=0$$

Доказательство:

$$\frac{d}{dt}W=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}V\right)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{V}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}V-\frac{\partial L}{\partial q}V=\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}\right]V=0$$

Свойства поля симметрий. Замена координат

$$q\to Q=(Q_1\dots Q_n)$$

$$q=q(Q)\ll=\gg Q=Q(q)$$

$$L\to L^*(Q,\dot{Q},t)$$

$$L^*=L(q(Q),\dot{q}(Q),t)$$

$$\dot{q}=\frac{\partial q}{\partial Q}\dot{Q}$$

$$\frac{d}{ds}Q=\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{dq}{ds}=\frac{\partial Q}{\partial q}V=V^*$$

V^*-поле симметрии для L^*

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$W^* = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{Q}} V^* = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}} V^* = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q}{\partial Q} V^* = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} V = W$$

Применим теорему о выпрямлении векторного поля:

$$\frac{dq}{ds} = V(q)$$

$$V(q_0) \neq 0$$

$$V^* = (1{,}0 \dots 0)$$

$$\frac{dQ_1}{ds} = 1, \qquad \frac{dQ_j}{ds} = 0$$

В новых координатах получится:

$$W^* = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{Q}_1} = \beta_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{Q}_1}\right) = 0 => \frac{\partial L^*}{Q q_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{dL^*}{dQ_i} = 0$$

$$i = 1 \dots n$$

Q_1-циклическая координата

Вариационный принцип Гамильтона

$$q = (q_1 \dots q_n)$$

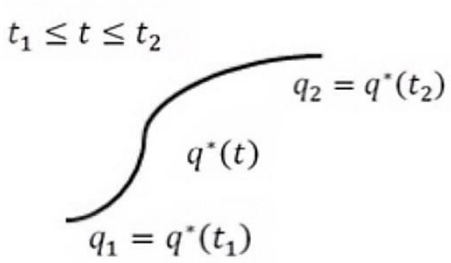


Рис. 3.2. Конфигурационное пространство

Функционал "Действие"

$$I(q^*) = \int_{t_1}^{t_2} L(q^*, \dot{q^*}, t)dt$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Вариация кривой по Гамильтону

$$R \to M, q(t,\alpha)$$

$$-\varepsilon < \alpha < \varepsilon$$

Вариацией кривой q^* по Гамильтону называется семейство кривых $q(t,\alpha)$ такое, что

1) $q(t,0) = q^*(t)$

2) $q(t_1,\alpha) = q^*(t_1), \quad q(t_2,\alpha) = q^*(t_2)$- фиксированные концы

Вариация функционала "Действие" I на вариацию кривой – это $dI|_{\alpha=0} = \left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \delta\alpha$

$$I\big(q(\cdot,\alpha)\big) = I(\alpha)$$

q^*- экстремаль I, если $\delta\mathrm{I}\big(q(\cdot,\alpha)\big) = 0, \forall$- вариации кривой $q(\cdot,\alpha)$

Вариационный принцип Гамильтона: кривая $q^*(t), \ t_1 \le t \le t_2$ является решением уравнения Лагранжа ≪=≫ q^* -экстремаль I

Доказательство:

$$\delta I \ll=\gg \left.\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$$

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t,\alpha), \dot{q}(t,\alpha), t)dt$$

$$\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha}\right) dt\Big|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - (\frac{d}{dt})\right]\frac{\partial q}{\partial \alpha}dt\Big|_{\alpha=0}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\frac{\partial q}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\frac{\partial q}{\partial \alpha}$$

1) q^*- решение уравнений Лагранжа, $\left.\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}\right|_{\alpha=0} = 0 \ => \left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$

2) пусть $\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0, \forall$- вариации кривой q^*

Обозначим $f(t) = \left.\left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\right|_{\alpha=0}$

$$f(t) \equiv 0$$

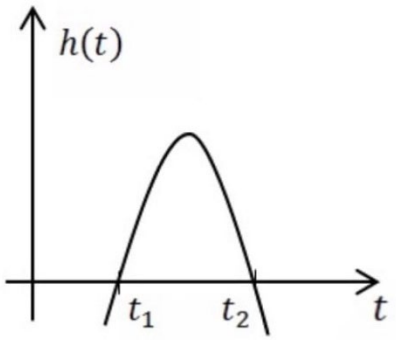


Рис. 3.3. График функции $\boldsymbol{h(t)}$

$$h(t) = -(t - t_1)(t - t_2)$$

$$\tilde{q}(t, \alpha) = q^*(t) + \alpha h(t) f(t)$$

1) $\alpha = 0, \quad q(t, 0) = q^*$

2) $q(t_1, \alpha) = q^*(t_1), \quad q(t_2, \alpha) = q^*(t_2)$

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha} = hf$$

$$0 = \frac{dI(\tilde{q})}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} h(t) f^2 dt|_{\alpha=0}$$

$$h(t) > 0, \qquad t \neq t_1, \qquad t \neq t_2, \qquad f \equiv 0$$

$$f(t) = \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\Big|_{\alpha=0} \equiv 0$$

Следствие:

1) $$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L^*(Q, \dot{Q}, t) dt$$

$$q \to Q$$

$$L^* = L(q(Q, t), \dot{q}(\dot{Q}, Q, t), t)$$

$$\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial Q}\dot{Q} + \frac{\partial q}{\partial t}$$

При замене координат форма уравнений Лагранжа сохраняется, и новый лагражиан получается при подстановке старых обобщенных координат и скоростей, выраженных через новые координаты и скорости.

2) $$L \to L^* + \frac{d}{dt}\big(f(q, t)\big) = L^* + \sum d_i(q, t)\dot{q}_i + d_0(q, t)$$

$$d_i = \frac{df}{dq_i}, \quad d_0 = \frac{df}{dt}$$

$$I^* = \int_{t_1}^{t_2} \left[L + \frac{df}{dt}\right] dt = I + f\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$\delta I^* = \delta I$$

$$q(t_i, \alpha) = q^*(t_1)\ , \quad \frac{\partial q}{\partial \alpha}\Big|_{t_1} = 0$$

$$\frac{d}{d\alpha} I = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\frac{\partial q}{\partial \alpha} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial q}{\partial \alpha}\right) dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial q}{\partial \alpha}\Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

3) $$I(q^*) = I(g^s q^*)$$

Принцип наименьшего действия

$$L = \frac{\sum a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j}{2} - V(q)$$

$t_2 - t_1$- мало и $q_1 - q_2$- близки, то $q^* \to min\ I$

Вариационный принцип Мопертюи-Якоби

1) Натуральная система

$$T = \frac{\sum a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j}{2}$$

$a_{ij} = a_{ji}, \quad A = \|a_{ij}\|$- положительно-определенная, $\quad V = V(q)$

2) Фиксируется h- значение интеграла энергии

$$T + V = h$$

ОВД: $h - V(q) \geq 0, \quad D: \{q, : h - V(q) > 0\}$

$$q(t): T + V = h$$

"Действие" по Якоби

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2(h - V)\sum a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j}\, dt = 2\int \sqrt{(h - V)}T dt$$

Значение J не зависит от параметризации

s- новый параметр, $\frac{ds}{dt} > 0$

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$\dot{q}_i = \frac{dq}{ds}\frac{ds}{dt} = q_i'\dot{s}$$

$$J = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{2(h-V)\sum a_{ij}q_i'q_j'}\,\dot{s}dt$$

J- длина кривой в римановой метрике в которой $ds^2 = 2(h-V)\sum a_{ij}\,dq_i dq_j$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 4
Вариационные принципы. Состояния равновесия

Вариационный принцип Мопертюи-Якоби

1) Натуральная система

$$L = T - V = \frac{(A(q)\dot{q}, \dot{q})}{2} - V(q)$$

$$q = (q_1 \dots q_n)$$

2) $T + V = h$- интеграл энергии

Фиксируем h, D: $\{q, : h - V > 0\}$

$$T = h - V \geq 0$$

$$J(\gamma) = 2\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(h-V)T}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2(h-V)\sum_{i,j} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j}\,dt$$

$$A = \|a_{ij}(q)\|, \;\; T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

3) $J(\gamma)$- не зависит от параметризации

$$s(t) \leftrightarrow t(s), \qquad \frac{dt}{ds} > 0, \qquad \frac{ds}{dt} > 0\,, \qquad s_1 \leq s \leq s_2$$

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{ds}\frac{ds}{dt} = q_i'\dot{s}$$

$$J(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2(h-V)\sum_{i,j} q_i'q_j'}\,\dot{s}dt$$

$$\dot{q}_i\dot{q}_j = q_i'q_j'\dot{s}^2$$

$$\dot{s}dt = ds$$

$J(\gamma)$-"Действие" по Якоби

4) кривую можно параметризовать, чтобы при движении энергия системы была равна h:

$$T + V = (\frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}q_i'q_j')\dot{s}^2 + V(q) = h$$

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$\dot{s} > 0, \qquad \dot{s} = \sqrt{\frac{2(h-V)}{\sum a_{ij}\,(q) q_i' q_j'}} = f(s)$$

$$s(t) = s_1 + \int_{s_1}^{t} f(x)dx$$

Вариация по Якоби

5) Вариация по Якоби

γ_α- семейство кривых

$\gamma_0 = \gamma^*$

$$\gamma_\alpha = q(s, \alpha)$$

$$q(s_i, \alpha) = q_i$$

Вариация по Гамильтону

6) а) Имея вариацию по Якоби, можем получить вариацию по Гамильтону

б) Вариация по Гамильтону и есть вариация по Якоби

Параметризуем $\gamma^*(t)$: $h,\ t_1 \le t \le t_2$

$$s \to s\lambda + s_1^*,\ \ \lambda: s_2 = s_2^*$$

$$\Delta s = s_2^* - s_1^*$$

$$\lambda = \frac{\Delta s}{s_2(\alpha) - s_1(\alpha)}$$

$$s(\alpha) \to \frac{s(t)}{s^*(t)}$$

Вариация "Действия" на вариации кривой

$$\delta J(\gamma_\alpha) = \left.\frac{dJ}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \delta\alpha$$

Экстремаль функционала "Действия" по Якоби

γ^*- экстремаль, если ∀ её вариации γ_α будет $\delta J(\gamma_\alpha) = 0$

Принцип Мопертюи-Якоби:

Кривая γ^* является экстремалью "Действия" по Якоби ≪=≫ когда γ^*(t) параметризованная так, чтобы энергия системы на ней равнялась h,

1) является экстремалью "Действия" по Гамильтону.

2) является решением уравнений Лагранжа $L = T - V$

Доказательство:

$$(\sqrt{T} - \sqrt{h - V})^2 = T - V + h - 2\sqrt{(h - V)T}$$

γ^*- экстремаль "Действия" по Якоби

$$\gamma^*(t): T + V = h$$

$\forall$вариации $\gamma_\alpha(t) = q(t, \alpha)$- вариация по Гамильтону

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - V)dt = -h(t_2 - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} 2\sqrt{(h - V)T}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} (\sqrt{T} - \sqrt{h - V})^2 dt$$

$$\left.\frac{dJ}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 + \frac{dJ}{d\alpha} + \int_{t_1}^{t_2} (\sqrt{T} - \sqrt{h - V})\frac{d}{d\alpha}\left(\sqrt{T} - \sqrt{h - V}\right)dt \Bigg|_{\alpha=0} = 0$$

При $\alpha = 0$, $\sqrt{T} - \sqrt{h - V} \equiv 0$, $T = h - V$

$ds^2 = 2(h - V)\sum a_{ij}(q)dq_i dq_j$- метрика Якоби

Равновесие

Положения равновесия

Натуральная система, в которой $L = T - V = \frac{1}{2}(A(q)\dot{q}, \dot{q}) - V(q)$

$$A = \|a_{ij}\|, \qquad A = A^T, \qquad (Au, u) > 0, \qquad \forall u \neq 0$$

Точка q_0- называется положением равновесия, если $q(t) \equiv q_0$- решение уравнений Лагранжа, система может находиться в положении q_0 все время.

$$\dot{x} = f(x), \qquad x = (q, \dot{q})$$

$$x_0 = (q_0, 0)$$

$$f(x_0) = 0$$

Состояния равновесия

Точка $(q_0, 0)$ в фазовом пространстве системы

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = A\dot{q} + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1(A\dot{q}, \dot{q})}{2}\right) - \frac{\partial V}{\partial q}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = A\ddot{q} + \frac{d}{dt}\dot{q}$$

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = A\ddot{q} + \frac{d}{dt}\dot{q} - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1(A\dot{q},\dot{q})}{2}\right) - \frac{\partial V}{\partial q}$$

$$q(t) \equiv q_0 => \dot{q} \equiv 0, \ddot{q} \equiv 0$$

q_0-положение равновесия $=> \left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q_0} = 0$

Пусть $\left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q_0} = 0 => \dot{q}(t) = q_0$ - равновесие

Утверждение для натуральных систем:

q_0- положение равновесия $<=> \left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q_0} = 0$

Функция по Ляпунову

$V(x)$- функция Ляпунова (для положения равновесия)

1) $V(x_0) = 0$ – вектор окрестности

$$\mathrm{V(x)} > 0, \qquad x \neq x_0$$

2) Пусть для $\forall x(t)$- решение системы $\dot{x} = f(x)$ выполнено:

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq 0 <=> \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} \leq 0$$

$\frac{\partial V}{\partial x} f \leq 0$- полная производная сил системы

Теорема Ляпунова об устойчивости

Если для положения равновесия x_0 существует функция Ляпунова, то это положение устойчиво по Ляпунову.

$\forall \varepsilon$ мало, чтобы $V(x) > 0,\ V(x_0) = 0$ при $x \in D_{2\varepsilon}(x_0),\ x \neq x_0$

$\alpha = minV(x) > 0$

$\exists \delta(\varepsilon)$, что $\forall x \in D_\delta(x_0),\ |V(x) = V(x_0)| < \frac{\alpha}{2},\ |V(x)| < \frac{\alpha}{2}$

$\forall x^* \in D_\delta(x_0),\ x^* \leq \frac{\alpha}{2} => \tilde{x}(t),\ \tilde{x}(0) = x^*,\ V\left(\tilde{x}(t)\right) \leq \frac{\alpha}{2}, => \forall t\ \ \tilde{x}(t) \in\ D_\varepsilon(x_0)$

Теорема Лагранжа-Дирихле
об устойчивости положения равновесия натуральной системы

Пусть q_0- точка локального строгого минимума потенциальной энергии, тогда q_0-устойчивое положение равновесия.

Доказательство:

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$q_0\ minV(q) => \frac{\partial V}{\partial q}\Big|_{q_0} = 0 => q_0$- положение равновесия

$\exists$ интеграл энергии $E(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}A(q)\dot{q},\dot{q}) + V(q) - V(q_0)$

$x_0 = (q_0, 0)$- состояние равновесия

$$E(q_0, 0) = 0$$

$$(q,\dot{q}) \neq (q_0, 0) => E(q,\dot{q}) > 0$$

1) $\dot{q} \neq 0 \ => T > 0$

2) $q \neq q_0 \ => V(q) > V(q_0)$

$\frac{dE}{dt} = 0 => E(q,\dot{q})$- функция Ляпунова

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 5
Теорема Лагранжа-Дирихле. Малые колебания

Теорема Лагранжа-Дирихле

Если q_0- точка строгого локального минимума, то q_0- устойчиво по Ляпунову

$$V(q) \to V(q) - V(q_0)$$

$$E = T + V$$

$$L = L_2 + L_0$$

$$L = L_2 + L_1 + L_0$$

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L = 2L_2 + L_1 - L_2 - L_1 - L_0 = L_2 - L_0$$

Если q_0- точка строгого локального максимума, то q_0- устойчиво по Ляпунову, доказательство аналогично

Линеаризация уравнений Лагранжа около положения равновесия

$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in R^n, \qquad f(x_0) = 0$$

$$f(x) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0}(x - x_0) + O(x - x_0)^2$$

$$x \to x - x_0, \qquad \dot{x} = D(x - x_0), \qquad D = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0}$$

$$L = \frac{1}{2}A\big((q)\dot{q}, \dot{q}\big) - V(q)$$

q_0- положение равновесия $\to q - q_0,\ q = 0$- положение равновесия, $V(0) = 0$

Разложим функцию Лагранжа в ряд:

$$L = \frac{1}{2}A\big((q)\dot{q}, \dot{q}\big) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}q, q\right) + O(|\dot{q}|^3 + |q|^3)$$

$$A(0) = A, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} = B$$

$$L^* = \frac{1}{2}(A\dot{q}, \dot{q}) - \frac{1}{2}(Bq, q)$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}} = A\dot{q}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}} = A\ddot{q}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial q} = -Bq$$

$$A\ddot{q} + Bq = 0$$

$$A = A(0), \qquad B = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\right|_0$$

A, B- симметрические, A- положительно-определенная, $(Au, u) > 0,\ u \neq 0$

Вековое уравнение линеаризованных уравнений Лагранжа

$$A\ddot{q} + Bq = 0$$

$$u(t) = e^{\lambda t}u$$

$det|A\lambda^2 + B| = 0$- характеристическое уравнение

$$\lambda_1 \dots \lambda_{2n}$$

$$\lambda = \pm\sqrt{\lambda^2}, \qquad \beta_i = -\lambda_i^2$$

Общий вид решения:

$$q(t) = \sum_{i=1}^{2n} c_i\, e^{\lambda_i t}$$

Уравнения малых колебаний

Если положение равновесия является точкой невырожденного локального минимума потенциальной энергии, то линеаризованные уравнения являются уравнениями малых колебаний.

Уравнения малых колебаний - уравнения Лагранжа, линеаризованные в окрестности положения равновесия, которое является точкой невырожденного локального минимума потенциальной энергии.

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x = 0$$

$$\ddot{x}_i = -\omega_i^2 x_i$$

Диссипативные и гироскопические силы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q$$

V-потенциальная часть

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q$$

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L$$

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} - \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}\right)\dot{q} = Q\dot{q}$$

$$\frac{d}{dt}E = Q\dot{q}$$

Производная механической энергии= мощности обобщенных сил

Силы называются диссипативными, если $\forall q, \dot{q}, Q\dot{q} \leq 0$ и $\exists\ \dot{q}, \dot{q}\ \ Q\dot{q} < 0$

Силы называются гироскопическими, если $\forall q, \dot{q}, Q\dot{q} = 0$

Силы Релея

Если $(\varphi u, u) \geq 0$, тогда $\varphi\dot{q}$- силы Релея

$$R = \frac{1}{2}(\varphi\dot{q}, \dot{q})$$

Влияние диссипативных и гироскопических сил на устойчивость положения равновесия

Положение равновесия натуральной системы устойчивое в силу теорему Лагранжа-Дирихле, останется устойчивой при дополнении диссипативных и гироскопических сил.

$$L = T - V$$

$E = T + V$- функция Ляпунова

$$\frac{dE}{dt}Q\dot{q} \leq 0$$

Диссипативные силы обладают полной диссипацией, если $Q\dot{q} < 0, \forall q, \forall \dot{q} \neq 0$

Если диссипативные силы обладают полной диссипацией, то тогда положение равновесия становится асимптотически устойчивым.

Теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению

Пусть $\lambda_1 \ldots \lambda_{2n}$- корни характеристического уравнения

$$\dot{x} = f(x), \qquad f(0) = 0$$

$$A = \left.\frac{df}{dx}\right|_0, \qquad x \in R^n$$

$$|\lambda E - A| = 0$$

Если $\forall Re\lambda_i < 0$, то положение равновесия асимптотически устойчиво, если $\exists\ i^*: Re\lambda_{i^*} > 0$, то положение равновесия неустойчиво.

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Число корней, у которых $Re\lambda_i > 0$ называется степенью неустойчивости.

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Лекция 6
Положения равновесия

Неустойчивость положения равновесия и гироскопическая стабилизация

Степень неустойчивости положения равновесия натуральной системы — это число характеристических чисел матрицы B, которые меньше нуля, число λ_i для которых $\lambda_i > 0$ – чем больше данных корней, тем сильнее неустойчивость.

Если перейти в нормальные координаты в окрестности положения равновесия, то матрица вторых производных потенциальной энергии станет диагональной

$\frac{(Bq,q)}{2}$ - в исходных координатах

$\frac{(B_\lambda x,x)}{2}$ - в нормальных координатах, где B_λ- диагональная матрица

Теорема о невозможности гироскопической стабилизации

Если степень неустойчивости положения равновесия натуральной системы нечетна, то положение равновесия невозможно стабилизировать добавлением в систему гироскопических и диссипативных сил. Мы также предполагаем, что все собственные числа матрицы вторых производных потенциальной энергии отличны от нуля.

Добавим обобщенную силу Q, которая зависит от положения точки, от ее скорости и диссипативные или гироскопические силы.

$(Q, \dot{q}) \leq 0$ если функция непрерывна при $\dot{q} = 0$, тогда $Q = D(q, \dot{q})\dot{q}$

Если обобщенные силы линеаризовать, то $Q_{\text{лин}} = C\dot{q}$, $C = D,$ когда $q = 0$ и $\dot{q} = 0$

Без обобщенных добавочных сил линеаризованное уравнение $A\ddot{q} + Bq = 0$, где

A - матрица кинетической энергии системы

B – матрица вторых производных потенциальной энергии.

C добавлением обобщенных добавочных сил, появляется добавочное слагаемое $C\dot{q}$

$$A\ddot{q} + Bq = C\dot{q}$$

В соответствии с теоремой Ляпунова, если какое-нибудь характеристическое число системы имеет положительную вещественную часть, то тогда положение равновесия исходной системы будет неустойчиво.

Характеристический полином:

$$f(\lambda) = det|A\lambda^2 - C\lambda + B|$$

Рассмотрим значение полинома на вещественной оси

$$\lambda \epsilon R$$

$f(0) = det|B| = \lambda_1 \dots \lambda_n, \quad \lambda_n < 0$

Матрица B симметрическая, поэтому все корни вещественные, также нечетное количество этих чисел меньше нуля, поэтому их произведение меньше нуля, остальные числа положительны. В случае нечетной степени неустойчивости, значение полинома в точке ноль меньше нуля.

$$\lambda \to +\infty$$

$$f(\lambda) \sim det(A\lambda^2) = \lambda^{2n} detA > 0$$

Для достаточно больших λ значение полинома становится строго положительным.

Консервативный случай

Рассмотрим консервативный случай, когда энергия сохраняется, в систему добавили только гироскопические силы

$$E = T + V$$

Для гироскопических сил в линеаризованном виде матрица C является кососимметрической.

$f(\lambda)$- четная функция, тогда $f(\lambda) = f(-\lambda)$- четность характеристического полинома в консервативном случае

$$f(-\lambda) = det|A\lambda^2 + C\lambda + B|$$

Значение определителя самой матрицы и транспонированной матрицы совпадает, тогда

$$f(-\lambda) = det|A\lambda^2 + C\lambda + B| = det|A^T\lambda^2 + C^T\lambda + B^T| = det|A\lambda\text{^}2 - C\lambda + B|$$

Парность и чётность корней характеристического полинома

$$f(\lambda) = 0 \to f(-\lambda) = 0,$$

$$f(\lambda) = 0 \to f\left(\bar{\bar{\lambda}}\right) = 0$$

$$\lambda = a + bi$$

$$\bar{\bar{\lambda}} = a - bi$$

В консервативном случае устойчивость положения равновесия возможна только в том случае, когда все собственные числа системы чисто мнимые.

Теорема Лиувилля

$\rho(x)$ – плотность инвариантной меры $\rho(x) <=> div(\rho V) = 0$

$$div(\rho V) = \sum \frac{\partial \rho Vi}{\partial xi}$$

Теорема Лиувилля утверждает, что плотность $p(x)$есть плотность инвариантной меры тогда и только тогда когда дивергенция $p(V) = 0$.

$$\int_D^{\forall D,t} \rho\, dx = \int_{g^t D} \rho\, dx \leftrightarrow \int_D \rho\, dx = \int_D \rho^*\, dy$$

$$x \to y$$

$$x = g^t y$$

$$y = g^{-t} x$$

$$\int_D \rho\, dx = \int_D \rho\,(g^t y)\left|\frac{\partial g^t y}{\partial y}\right| dy <=> 0 = \frac{d}{dt}\left(\rho(g^t x)\left|\frac{\partial g^t x}{\partial x}\right|\right)$$

$$\frac{d}{dt}\rho(g^t x)\left|\frac{\partial g^t x}{\partial x}\right| + \rho(g^t x)\frac{d}{dt}\left|\frac{\partial g^t x}{\partial x}\right|$$

$$g^t x = x + V(x)t + 0(t^2)$$

$$t = 0,\ \ g^t x = x$$

$$\frac{\partial g^t x}{\partial x} = E + \frac{\partial V}{\partial x}t + 0(t^2)$$

$$t = 0,\ \ \left|\frac{\partial g^t\, x}{\partial x}\right| = 1$$

$$\frac{d}{\partial t}\left(\rho(g^t x)\right) = \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}g^t x = \frac{\partial \rho}{\partial x}V(x)$$

$$|E + Bt + 0(t^2)| = 1 + trBt + 0(t^2)$$

$$t = 0,\ \ \frac{d}{dt}\left|\frac{\partial g^t x}{\partial x}\right| = tr\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\rho(x)\sum \frac{\partial Vi}{\partial xi}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}V + \rho(x)\sum \frac{\partial Vi}{\partial xi} = 0$$

$$\sum\left(\frac{\partial \rho i}{dxi}Vi + \rho\frac{\partial Vi}{\partial xi}\right) = 0$$

$$\sum \frac{\partial(\rho Vi)}{\partial xi} = 0 <=> div\rho V = 0$$

Лекция 7
Инвариантная мера

Построение инвариантной меры на многообразие уровней первых интегралов

Первый интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = V(x)\ x \epsilon R^n$$

$F(x)$ –первый интеграл, если $\forall x(t)$ имеет одно решение

$$F\big(\bar{x}(t)\big) = const$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}v\right) = 0$$

Пусть исходная система допускает инвариантную меру и несколько первых интегралов.

$F_1(x)$ ... $F_k(x)$ – первые интегралы

$$C = (C_1 - C_k)\epsilon R^k$$

$M_c = \{x_1 : F_1(x) = C_1 \dots F_k(x) = C_k\}$ -совместный уровень

Если инвариантная мера была у исходного дифференциального уравнения и если мы взяли совместный уровень интегралов, на котором они независимы, то тогда на этом многообразии дифференциальное уравнение тоже будет обладать инвариантной мерой.

$$F_1 = const = C_1$$

$$F(x_1 \dots x_n) = C$$

$$x_1 = x_1(x_2 \dots x_n c)$$

$$x \to y \epsilon R^n$$

$$y_1 = F(x_1 \dots x_n) = C$$

$$y_2 = x_2$$

$$y_n = x_n$$

$$\dot{y} = V^*(y)$$

$$\dot{y} = 0$$

$$\dot{y_2} = V_2^*$$

$$\dot{y_n} = V_n^*$$

$\alpha(y)$ –плотность

$$\sum \frac{\partial \alpha v^* i}{\partial y i} = 0 \leftrightarrow \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial \alpha V^* i}{dy i} = 0$$

$y_2 \dots y_n$ –координаты на m_c

$$Z = (y_2 \dots y_n)$$

$$\dot{Z} = \tilde{V}$$

$$d_\mu = \alpha(y) dy_1 \wedge dy_2 \dots dy_n$$

$$d_\mu = \alpha(y) dF \wedge dy_2 \dots dy_n$$

$$dF \wedge dV$$

$$dV - (n-1) \text{ форма}$$

$$dF - 1 \text{ форма}$$

$$d_\mu = \alpha(y) dy_1 \wedge dy_2 \dots dy_n$$

$$d_\mu = \alpha(y) dF \wedge dy_2 \dots dy_n$$

$$d_\mu = dF \wedge dV_1 = dF \wedge dV_2$$

$$dF \wedge (dV_1 - dV_2) = 0$$

$$dV_1 - dV_2 = dF \wedge dV_3$$

$$dF = 0$$

$$dV_1 - dV_2 | m_c = 0$$

Интегрируемость в квадратурах

Система интегрируется в квадратурах, если при помощи определенного набора операций удается найти ее общее решение.

Наборы операций:

1. Алгебраические операции
2. Взятие производных от известных функций
3. Нахождение первообразных
4. Обращение уравнений

$$\dot{x} = V(x)$$

$$x \in R^n$$

$F_1 \dots F_{n-1}$ –независимый первый интеграл

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$\operatorname{rank}\begin{vmatrix}\partial F_1 \dots & F_{n-1}\\ \partial x_1 \dots & \partial_n\end{vmatrix} = n-1$$

$$F_1 = C_1$$

$$F_{n-1} = C_{n-1}$$

$$x_1 = x_1(x_n C_1 - C_{n-1})$$

$$x_2 = x_2(x_n C_1 - C_{n-1})$$

$$x_{n-1} = x_{n-1}(x_n C_1 - C_n)$$

$$\dot{x_n} = V_n(x_1 \ \dots \ x_n)$$

$\dot{x_n} = f(x_n, C_1 \dots C_n)$ – уравнение 1 порядка

Теорема Якоби. Последние множители

Пусть $x = V(x) \ \ x \epsilon R^n$

$$V(x_0) \neq 0$$

$F_1 - F_{n-1}$- первые интегралы

$\rho(x)$ – плотность инвариантная мера,

$$M_c = \{F_1 = C_1 \dots F_{n-2} = C_2\}$$

$$\dot{y_1} = u_1(y_1 y_2)$$

$$\dot{y_2} = u_2(y_1 y_2)$$

$\alpha(y_1 y_2)$ – плотность анвариантной меры

$$\frac{\partial \alpha u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \alpha u_2}{\partial y_2} = 0$$

$\omega = -\alpha u_2 dy_1 + \alpha u_1 dy_2 \quad \omega - 1$ форма

$$d\omega = \left(\frac{\partial \alpha u_2}{\partial y_2} + \frac{\partial \alpha u_1}{\partial y_1}\right) dy_1 \wedge dy_2$$

$$d\omega = 0$$

$$\varphi(y_1 y_2) : d\varphi = \omega$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} dy_2 = -\alpha u_2 dy_1 + \alpha u_1 dy_2$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = -\alpha u_2$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = \alpha u_1$$

Теорема Пуанкаре о возвращении

$$\dot{x} = V(x) \quad x \in R^n$$

$$g^t x, \quad t = \Delta t, \quad g^{\Delta t} x = Tx$$

$$x \to g^{\Delta t} x$$

$$d\mu = \rho(x)dx - \text{инвариантная мера}$$

$$\int_D d\mu = \int_{T(D)} d\mu$$

$$\mu(D) = \mu(TD)$$

Если $\mu(D) > 0$, то $\exists\, x \in D, n \in \gtrless$

$$T^n x \epsilon 0$$

$$T^{-k}(D) \cap T^{-k-c}(D) \neq \emptyset$$

$$T(A \cap B) = T(A) \cap T(B) \neq \emptyset$$

$$T^{k+l}\left(T^{-k}(D)\right) = T^l(D) \neq \emptyset$$

$$T^{k+l}\left(T^{-k-l}(D)\right) = D$$

$$D \cap T^l(D) \neq \emptyset$$

Лекция 8
Динамика твёрдого тела с неподвижной точкой

Динамика твёрдого тела с неподвижной точкой

Здесь можно применить теорему об изменении кинетического момента твердого тела

$\bar{K} = y_0\bar{\omega}$

$\frac{d\bar{k}}{dt} = M -$ суммарный момент всех сил, приложенных к твердому телу

Момент внешних сил $\bar{M} = \sum \bar{\bar{r}}_i(x)F_i$

$J_0 = diag\{A, B, C\} -$ диагональная матрица с главными моментами инерции

По теореме о сложении скоростей

$$\dot{K}|_{\text{абс}} = \frac{d\bar{k}}{dt}|_{\text{отл}} + [\omega, \bar{k}]$$

$$J_0\frac{d\bar{\omega}}{dt} + [\omega, J_0\bar{\omega}] = \bar{M}$$

Динамическое уравнение Эйлера

$$\bar{\omega} = \omega_x\bar{e}_x + \varphi_y\bar{e}_y + \varphi_z\bar{e}_z$$

$$p = \omega_1 \;\; q = \omega_2 \;\; r = \omega_3$$

$J_0\omega = \{Ap, Bq, Cr\}$ –вектор кинетического момента

$$|p\ q\ r\ Ap\ Bq\ Cr\ |$$

$$C_{qr} - B_{qr} = (C - B)qr$$

$$A_{pr} - C_{pr} = (A - C)pr$$

$$B_{pq} - A_{pq} = (B - A)pq$$

$$\bar{M} = M_1\bar{e}_1 + M_2\bar{e}_2 + M_3\bar{e}_3$$

$$A\dot{p} + (C - B)qr = M_1$$

$$B\dot{q} + (A - C)pr = M_2$$

$$C\dot{r} + (B - A)pr = M_3$$

Случай Эйлера

Случай Эйлера– случай, когда суммарный момент твердого тела равен нулю.

Моменты силы могут зависеть от угловой скорости тела, от его положения

Углы Эйлера - φ, π, θ

$$\bar{\bar{\omega}} = \bar{\bar{\omega}}\left(\varphi, \psi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}\right)$$

$$\bar{M} = \bar{M}(\varphi, \psi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta})$$

$$p = \dot{\psi} sin\theta sin\varphi + \dot{\theta} cos\varphi$$

$$q = \dot{\psi} sin\theta cos\varphi - \dot{\theta} sin\varphi$$

$$r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} cos\theta$$

Динамика тяжелого твердого тела с неподвижной точкой

$$M = \left[\underline{\rho}, m\underline{g}\right]$$

$$\underline{\gamma} = \gamma_1 \underline{e_1} + \gamma_2 \underline{e_2} + \gamma_3 \underline{e_3}$$

$$\underline{\rho} = a\underline{e_1} + b\underline{e_2} + c\underline{e_3}$$

$$\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

$$\underline{\rho} = (a, b, c)$$

$$m\underline{g} = -mg \times \underline{\gamma}$$

$$\left[\underline{\rho}, \underline{\gamma}\right]$$

$$a\ b\ c\ \gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3$$

$$b\gamma_3 - c\gamma_2$$

$$c\gamma_1 - a\gamma_3$$

$$a\gamma_2 - b\gamma_1$$

$$A\dot{p} + (C - B)qr = mg(c\gamma_1 - a\gamma_3)$$

$$B\dot{q} + (A - C)pr = mg(a\gamma_3 - c\gamma_1)$$

$$C\dot{r} + (B - A)pr = mg(b\gamma_1 - a\gamma_3)$$

Уравнение Пуассона

$$a = \frac{d\gamma}{dt}\Big|_{\text{абс}} = \frac{d\gamma}{dt}\Big]_{\text{отн}} + \left[\underline{\omega}, \underline{\gamma}\right]$$

$$p\ q\ r\ \gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3$$

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$q\gamma_3 - r\gamma_2$$

$$r\gamma_1 - p\gamma_3$$

$$p\gamma_2 - q\gamma_1$$

$$\dot{\gamma}_1 + q\gamma_3 - r\gamma_2 = 0$$

$$\dot{\gamma}_2 + r\gamma_1 - p\gamma_3 = 0$$

$$\dot{\gamma}_3 + p\gamma_2 - q\gamma_1 = 0$$

Вся динамическая система из шести неизвестных называется системой Эйлера-Пуассона.

Первые интегралы уравнений Эйлера-Пуассона:

1. Энергии
2. Площадей
3. Тривиальный

Инвариантная мера уравнений Эйлера-Пуассона

$\rho(p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = 1$ – плотность инвариантной меры

$$div(\rho \underline{v}) = 0$$

Понятие о трех классических случаях интегрируемости:

1. Случай Эйлера
   - $a = b = c = 0$
   - $\underline{K}^2 = k^2 = const$
   - $A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2$
   - $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h$
2. Случай Лагранжа
   - $A = B \neq C$
   - центр масс лежит на оси динамической симметрии
3. Случай Ковалевской
   - $A = B = 2C$
   - $C = 0$

Геометрическая интерпретация волчка Эйлера по Пуансо

$$Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_2^3 = 1$$

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Движение твердого тела происходит таким образом, что эллипсоид инерции катится без проскальзывания по некоторой неподвижной плоскости, ортогональной вектору кинетического момента.

$$A = B$$

$$\underline{n} = (Ax_1, Bx_2, Cx_3)$$

$$\lambda\underline{n} = \underline{k} = (Ap, Bq, Cr)$$

$$\lambda Ax_1 = Ap$$

$$\lambda Bx_2 = Br$$

$$\lambda Cx_3 = Cr$$

$$\lambda\underline{OP} = \underline{\omega}$$

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h$$

$$\lambda^2(Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2) = 2h$$

$$\lambda^2 = 2h$$

Регулярная прецессия в случае Эйлера

$$\omega = \underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2$$

$\underline{\omega}_1 -$ вектор постоянный в абсолютном пространстве

$\underline{\omega}_2 -$ вектор постоянный в пространстве, связанном с твердым телом

$$A = B$$

В случае, когда волчок Эйлера симметричен, любое его движение представляет регулярную прецессию.

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Лекция 9
Случай Лагранжа. Уравнения Гамильтона

Случай Лагранжа

$$A = B \neq C$$

$a = b = c$ - центр масс лежит на оси динамической симметрии

$$p = \dot{\Psi} sin\theta sin\varphi + \dot{\theta} cos\varphi$$

$$q = \dot{\Psi} sin\theta cos\varphi - \dot{\theta} sin\varphi$$

$$z = \dot{\varphi} + \dot{\Psi} cos\theta$$

$$L = T - V$$

$$V = mgCcos\theta$$

$$T = \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cz^2}{2}$$

$$q^2 + q^2 = \dot{\theta}^2 + \dot{\Psi}^2 sin^2\theta$$

$$T = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\Psi}^2 sin^2\theta + \frac{1}{2}C(\dot{\varphi} + \dot{\Psi} cos\theta)^2$$

1) $T + V = h$- интеграл энергии

φ, Ψ- циклические координаты

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}} = k, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \omega$$

2) $A\dot{\Psi} sin^2\theta + C\left(V\dot{\varphi} + \dot{\Psi} cos\theta\right)cos\theta = k$

3) $\dot{\varphi} + \dot{\Psi} cos\theta = \omega$

Понижение по Раусу

$$A\dot{\Psi} sin^2\theta + C\omega cos\theta = k$$

$$\dot{\Psi} = \frac{k - \omega cos\theta}{Asin^2\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \frac{(k - \omega cos\theta)^2}{2Asin^2\theta}\frac{1}{2}C\omega^2 + mgccos\theta = h$$

$$\frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + V(\theta) = h$$

Уравнение движения точки по прямой:

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$A\ddot{\theta} = -\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$F(x) = \frac{(k - c\omega x)^2}{2A(1 - x^2)} + mgcx$$

$$F(x) = A_0 + A_1 x + \frac{A_2}{1 - x} + \frac{A_3}{1 + x}$$

$$A_2, A_3 > 0$$

$$\dot{\varphi} + \dot{\Psi} cos\theta = \omega$$

$$\dot{\varphi} = \omega - \frac{k - \omega cos\theta}{Asin^2\theta} cos\theta$$

$$F' = A_1 + \frac{A_2}{(1 - x)^2} - \frac{A_3}{(1 + x)^2}$$

$$F'' = \frac{A_2}{(1 - x)^3} + \frac{A_3}{(1 + x)^2} > 0$$

Гамильтонова механика: уравнения Гамильтона

$$L(q, \dot{q}, t), \qquad q \in R^n$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Канонические уравнения Гамильтона. Вывод из уравнений Лагранжа

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

$(p_1 \dots p_n)$- обобщенные импульсы

Если $det \left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\right| \neq 0$

$$\dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$$

$$H(q, p, t) = (p\dot{q} - L)|_{\dot{q}(q,p,t)}$$

Канонические уравнения Гамильтона

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$dH = H_q dq + H_p dp + H_t dt$$

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$dH = pd\dot{q} + \dot{q}dp - L_q dq - L_{\dot{q}} d\dot{q} - L_t dt$$

$$p = L_{\dot{q}}$$

$$H_q = -L_q, \qquad H_p = \dot{q}, \qquad H_t = -L_t$$

$$\dot{p} = L_q = -H_q$$

Функция Гамильтона в случае натуральной системы

$$L = T - V = \frac{(A(q)\dot{q}, \dot{q})}{2} - V(q)$$

$$p = A\dot{q}$$

$$\dot{q} = A^{-1}p$$

$$(A^{-1}p, p) - \frac{(AA^{-1}p, (A^{-1}p)}{2} + V(q)$$

$$H = \frac{(AA^{-1}p)}{2} + V(q) = \frac{(\dot{q}, A\dot{q})}{2} + V(q) = h$$

Лекция 10
Принцип Гамильтона

Преобразование Лежандра

Есть координатное пространство x $\in R^n$, задана порождающая функция $f(x)$.

Введем новые координаты:

$$y = \frac{df}{dx} \Rightarrow x = x(y)$$

$$g(y) = xy - f|_{x=x(y)}$$

$$x = \frac{dg}{dy} \Rightarrow y(x)$$

$$xy - g|_{g(x)} = f(x)$$

Принцип Гамильтона в фазовом пространстве:

$$I = \int_{t1}^{t2} (p\dot{q} - H)dt$$

Ведем понятие вариации кривой-семейство кривых.

α-параметр вариации

$$\gamma_\alpha = \left(q_\alpha(t); p_\alpha(t)\right)$$

$$-\varepsilon < \alpha < \varepsilon$$

Потребуем, чтобы при нулевом значении параметра выполнялось:

$$\gamma_0 = \left(q(t); p(t)\right)$$

$$q_\alpha(t_{i)} = q_i$$

$$p_\alpha(t_{i)} = p_i$$

Можем посчитать вариацию функционала

$SI(\gamma_\alpha) = \frac{dI}{d\alpha}|_{\alpha=0}$.

Если для любых вариаций кривых вариация функционала действия обращается в ноль, то такая кривая называется экстремалью функционала.

Кривая $\gamma_0 = \left(q(t); p(t)\right)$ является решением уравнения Гамильтона тогда и только тогда, когда γ_0 –экстремаль функционала i.

Доказательство:

$z = (q, p) \in$ R-конфигурационное пространство

Функция Лагранжа:

$$\Lambda(z, \dot{z}, t) = P\dot{q} - H(q, p, t)$$

$$\dot{z} = (\dot{q}\dot{p})$$

Составим уравнение второго рода для этой Лагранжевой системы

$$\frac{d}{dt}\frac{d\Lambda}{d\dot{z}} - \frac{d\Lambda}{dz} = 0$$

Когда $i = 1 \ldots n$, то $\frac{d\Lambda}{d\dot{z}_ı} = \frac{d\Lambda}{di_i} = P_i$, а также $\frac{d\Lambda}{dz_i} = -\frac{dH}{dq_i}$

Тогда:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\Lambda}{d\dot{z}}\right) = \dot{p}_i$$

$$\dot{p}_i + \frac{dH}{dq_i} = 0$$

$$\dot{p}_i = -\frac{dH}{dq_i}$$

$$\frac{d\Lambda}{d\dot{z}_ı} = \frac{d\Lambda}{d\dot{p}_j} = 0$$

$$\frac{d\Lambda}{dz_i} = -\frac{dH}{dp_i} = \dot{q}_j - \frac{dH}{dp_i}$$

Получаем первую группу уравнений Гамильтона:

$$\dot{q}_ı - \frac{dH}{dp_j} = 0$$

$$\dot{q}_ı = \frac{dH}{dp_j}$$

Для этой функции Лагранжа вариационный принцип Гамильтона выполняется и выглядит так:

$$I = \int_{t1}^{t2} \Lambda(z, \dot{z}, t)dt = \int_{t1}^{t2} (p\dot{q} - H)dt$$

Лемма об аннуляторе канонической 2-формы

Введем 1- и 2- формы

$$\omega_1 = pdq - Hdt$$

$$\omega_2 = dp \wedge dq - dH \wedge dt$$

Принято использовать краткие обозначения:

/\ - внешнее произведение 1-форм, то есть $dp \wedge dq = \sum p_i dq$

Введем гамильтоново векторное поле -V_H

$$V_H = (H_p, -H_q, 1)$$

$$\omega_i(\check{з}, \eta)$$

$$\check{з}, \eta \in T(M * R)$$

Вектор η_0 -аннулятор формы ω_2 , если $\omega_2(\check{з}, \eta_0) = 0$

для любого вектора $\check{з} \in T(M * R)$. $\omega_2 = d\omega_1$

Вектор η_0 -аннулятор формы ω_2 тогда и только тогда, когда η_0 коллинеарен гамильтонову векторному полю V_H

$$\eta_0 = \lambda V_H$$

Доказательство:

$$\check{з} = (\check{з}_q, \check{з}_p, \check{з}_t)$$

$$\eta = (\eta_q, \eta_p, \eta_t)$$

$$dp/\backslash dq = \begin{vmatrix} dp_i(\check{з}) & dq_i(\check{з}) \\ dp_i(\eta) & dq_i(\eta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \check{з}p_i & \check{з}q_i \\ \eta p_i & \eta q_i \end{vmatrix} = \check{з}p_i * \eta q_i - \eta p_i * \check{з}q_i$$

$$dp/\backslash dq = \check{з}_p * \eta_q - \eta_p * \check{з}_q$$

$$dH/\backslash dt(\check{з}, \eta) = \begin{vmatrix} dH(\check{з}) & dt(\check{з}) \\ dH(\eta) & dt(\eta) \end{vmatrix}$$

$dH(\check{з}) = H_q\check{з}_q + H_p\check{з}_p + H_t\check{з}_t$

$$dH(\eta) = H_q\eta_q + H_p\eta_p + H_t\eta_t$$

$$dt(\check{з}) = \check{з}_t$$

$$dt(\eta) = \eta_t$$

Проверим необходимые факты:

1) $\omega_2(\check{з}, V_H) = \check{з}_p H_p - \check{з}_q H_q - (H_q\check{з}_q + H_p\check{з}_p + H_t\check{з}_t) + (H_q H_p - H_p H_q + H_t)\check{з}_t = 0$

2) η- аннулятор

$$e_{qi} = (0 - 1, 0 - 0)$$

$$\check{з}_{qi} = 1$$

Подставим в выражение для формы

$$-\eta_{pi} - H_{qi}\eta_t = 0$$

$$\eta_{qi} - H_{pi}\eta_t = 0$$

$$\eta_{pi} = -H_{qi}\eta_t$$

$\eta_{qi} = -H_{pi}\eta_t$, $\eta_t = \eta_t$

$$\eta = (\eta_q, \eta_p, \eta_t) = \lambda(H_p, -H_q, 1)$$

$$\lambda = \eta_t$$

Интегральные инварианты

Относительный интегральный инвариант Пуанкаре-Картана

Рассмотрим 1-форму $\omega_1 = pdq - Hdt$

γ_2 –замкнуто-ориентированная кривая в расширенном фазовом пространстве $M * R$

$\varkappa$-относительный интегральный инвариант Пуанкаре-Картана вычисляется через:

$$\int_{\gamma_1} \omega_1 = \int_{\gamma_2} \omega_2$$

$$\omega_2 = dp \wedge dq - dH \wedge dt$$

$$\omega_2|_\delta = (\check{\xi}, \eta)$$

Из леммы об аннуляторе следует, что ω_2 , которая вычисляется для пары векторов, касательных боковой поверхности, равна нулю.

$$\omega_2|_\delta = 0$$

$$\check{\xi} = \alpha_1 V_H + \alpha_1 e$$

$$\eta = \beta_1 V_H + \beta_1 e$$

$$\omega_2(\check{\xi}, \eta) = 0$$

$$d\delta = \gamma_1 - \gamma_2$$

По формуле Стокса:

$$0 = \int_\delta \omega_2 = \int_\delta d\,\omega_1 = \int_{d\delta} \omega_1 = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} \omega_1 = \int_{\gamma_1} \omega_1 - \int_{\gamma_2} \omega_1$$

Относительный интегральный инвариант Пуанкаре-Картана

Рассмотрим с другой стороны:

Пусть $\gamma_1 : dt = 0$, *t=const*

$$\int_{\gamma_1} \omega_1 dt = \int_{\gamma_1} pdq$$

Интегральный инвариант Пуанкаре, который говорит, что

$$\int_{\gamma_1} pdq = \int_{gt\gamma} pdq$$

При сдвиге вдоль решений уравнений Гамильтона, значение интеграла по замкнутому контуру сохраняется.

Абсолютный интегральный инвариант

В расширенном пространстве:

$$\int_{\delta} dp \wedge dq - dH \wedge dt$$

$$d(gt_{\delta}) = gt(d\delta)$$

В фазовом пространстве:

$$\omega_1 = pdq$$

$$\omega_2 = dp \wedge dq$$

$$\int_{\delta} \omega_2 = \int_{d\delta} \omega_1 = \int_{gt(d\delta)} \omega_1 = \int_{d(g^t\delta)} \omega_1$$

Лекция 11
Канонические преобразования

Канонические преобразования

Пусть существует расширенное фазовое пространство, введем другие координаты

$$\omega_2 = dp \wedge dq - dH \wedge dt$$

$$\widetilde{\omega_2} = dP \wedge dQ - d\tilde{H} \wedge dT$$

Потребуем, чтобы $\omega_2 = \widetilde{\omega_2}$. Если эти формы совпадают, то совпадают аннуляторы следовательно, кривые. То есть оба уравнения 2-формы описывают одну кривую.

Преобразование координат от p, q, t к координатам P, Q, T называется каноническим, если выполнено условие $\omega_2 = \widetilde{\omega_2}$

Прежние соотношения:

$$\frac{dq}{dt} = Hp, \qquad \frac{dp}{dt} = -Hq$$

Новые соотношения :

$$\frac{dQ}{dT} = \tilde{H}p, \qquad \frac{dP}{dT} = -\tilde{H}Q$$

Если имеется некая константа, уравнение сохранит свой вид. $c = const$- валентная константа. $c = 1$- унивалентная.

$$dp \wedge dq - dH \wedge dt = dP \wedge dQ - d\tilde{H} \wedge dT$$

$$\omega_1 : d\omega_1 = \omega_2;\ \widetilde{\omega_1} : d\tilde{\omega}_1 = \widetilde{\omega_2}$$

$$pdq - Hdt = PdQ - \tilde{H}dT + d\Pi$$

П= П(q, Q, t)

S=S(q, Q, t)- преобразовывающая функция

Свободные канонические преобразования и их производящая функция

n	*q*	*Q*	*n*	$Q = Q(q, p, t) \Rightarrow p = p(q, Q, t)$
n	*p*	*P*	*n*	$P = P(q, p, t) \Rightarrow P = P(q, Q, t)$
	2n	*2*	*n*	

$\frac{\partial Q}{\partial p} \neq 0$-свободное каноническое преобразование

$$pdq - Hdt = PdQ - \tilde{H}dT + dS_q dq + S_Q dQ + S_t dt$$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \qquad P = \frac{\partial S}{\partial Q}$$

$$\widetilde{H} = \frac{\partial S}{\partial t} + H$$

У нас имеется $p = f(q, Q, t)$ и $P = g(q, Q, t)$ Если $\frac{\partial f}{dQ}$ отлично от 0, то мы можем выразить $Q = Q(q, p, t)$.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial Q} \neq 0$$

Производящая функция тождественного преобразования

Распишем $PdQ = -QdP + d(PQ)$

Если введем $d\Pi + d(PQ) = d\Pi^*$; $\Pi + (PQ) = \Pi^*$, то получается:

$$pdq - Hdt = -QdP - \widetilde{H}dt + d\Pi$$

$Q = Q(q, p, t)$; *P=P(q, p, t)*

Надо избавиться от p, для этого нужно выразить $p = p(q, P, t)$, при этом нужно, чтобы выполнялось $\frac{\partial P}{\partial p} \neq 0$

Раскроем дифференциалы :

$$pdq - Hdt = -QdP - \widetilde{H}dt + S_q dq + S_P dP + S_t dt$$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}$$

$$Q = \frac{\partial S}{\partial p}$$

$$\widetilde{H} = \frac{\partial S}{\partial t} + H$$

Нужно выразить p

$$\frac{\partial p}{\partial P} = \frac{\partial^2 S}{\partial p \partial Q} \neq 0$$

В этом случае в качестве произведения берем :

$$S = qP$$

$$p = P + \varepsilon f q$$

$$\mathrm{Q} = \mathrm{q} + \varepsilon f_P$$

Канонические преобразования, близкие к тождественным, задаются так:

$$\mathrm{T}S = qP + \varepsilon f'(q,p,t)$$

Перевернутый маятник

Попробуем показать, что $x_A = 0, y_A = a\varepsilon\cos\tau$, где $\tau = \frac{\omega t}{\varepsilon}$, а $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$$\varepsilon \to 0$$

$$y_A = -a\omega\sin\tau$$

$$\begin{cases} x = lsin\,\varphi \\ y = -l\,cos\,\varphi + a\,\varepsilon\,cos\,\tau \end{cases}$$

$$\dot{x} = e\,cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$\dot{y} = e\,sin\varphi\,\dot{\varphi} - a\omega\,sin\tau$$

Потенциальная энергия

$$V = mgy = -mgl\,cos\varphi + mga\varepsilon\,cos\tau$$

Кинетическая энергия

$$L = \frac{(e^2\dot{\varphi}^2 - 2al\omega\dot{\varphi}\,sin\,\varphi\,sin\tau + a^2\omega^2 sin^2\tau}{2} - V$$

Отбросим последние слагаемые в уравнения, тогда функция Лагранжа будет следующей:

$$L = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{2a\omega\dot{\varphi}}{l}sin\varphi\,sin\tau + \omega^2 cos\varphi$$

Перейдем в гамильтонову форму:

$$p = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \dot{\varphi} - \frac{2a\omega\sin\varphi\sin\tau}{l}$$

$$\dot{\varphi} = P + \frac{2a\omega}{l}sin\varphi\,sin\tau$$

Получается, что функция Гамильтона имеет такой вид:

$$H = \frac{(P + \frac{2a\omega}{l}sin\varphi\,sin\tau)^2}{2} - \omega^2\cos\varphi$$

Нам нужно подобрать замену от φ и p к Ф и Р, такую, чтобы новая функция Гамильтона имела бы вид $\tilde{n} = \tilde{n}_0(\Phi, \mathrm{P}) + O(\varepsilon)$

Применим каноническое преобразование:

$$S = \varphi P + \varepsilon f(\varphi, P, \tau)$$

$$\widetilde{H} = St + H$$

$\omega f_t(, P, \tau) + H$ в данную формулу подставим следующие значения:

$$p = P + \varepsilon f_\varphi$$

$$\varphi = \Phi - \varepsilon f_P$$

Новый гамильтониан:

$$\widetilde{H} = \omega f_\tau + H(\Phi, P, \mathrm{T}) + O(\varepsilon)$$

$H(\Phi, P, \mathrm{T}) = H_0(\Phi, P) + H(\Phi, P, \mathrm{T})$, где $H_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(\,\Phi, P, \mathrm{T})\, dT$

$$H = \omega f_\tau + H_0 + H_1 + a\varepsilon$$

$$f = \int_0^\tau \frac{H_1}{\varepsilon} dT$$

Раскрываем скобки в функции Гамильтона:

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{2a\omega}{l} sin\varphi\ sin\tau P + \frac{2a^2\omega^2}{l^2}\sin^2\varphi\ \ sin^2\tau - \omega^2 cos\varphi$$

Уравнение Гамильтона-Якоби

Координаты q, p мы заменили на Q, P. Поставим задачу, что $\widetilde{H} = 0$, то есть Q=0, P=0

$Q = Q_0, P = P_0$

Будем пользоваться свободными преобразованиями

У нас есть $S(q, Q), p = \frac{\partial S}{\partial q}$

$\widetilde{H} = \frac{\partial S}{\partial t} + H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, \mathrm{t}) = 0$ (*)

Полный интеграл

Функция $\mathrm{W}(\mathrm{q}, \alpha)$- полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, если выполнено условие :

1) для любого α функции $\mathrm{S} = \mathrm{W}(\mathrm{q}, \alpha)$- решение уравнения *

2) чтобы определитель матрицы вторых производных $|\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\partial q}| \neq 0$

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Если известен полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, то канонические уравнения Гамильтона интегрируются в квадратурах.

$$S(q,Q) = W(q,Q)$$

$q,p \to Q,P \ ; |\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial q}| \neq 0$

$$\overline{H} = 0$$

Понижение порядка по Уиттекеру

Пусть гамильтониан автономен H(q,p) , тогда в системе есть интеграл энергии $H = h$. Зафиксируем значение h. $H(q,p) = h$, выберем такое h, чтобы $dH \neq 0$;

$$\mathrm{M}h = \{q,p: H(q,p) = h\}$$

$$V_H^* = (H_p, -H_q$$

$$\omega^*{}_2 = dp \wedge dq$$

$$\omega^*{}_2|_{Mh}$$

Теперь у нас есть форма $\omega_2 = dp \wedge dq - dH \wedge dt$

V_H-аннулятор

Оказывается, V_H^* –аннулятор формы $\omega^*{}_2$, суженный на Mc

Если вектор ξ касается Mh , то на векторе ξ=(ξ*, ξ_t) $dH(\xi) = 0$

$$\omega^*{}_2(\xi *, V_H^*) = \omega_2(\xi, V_H^*) = 0$$

Пусть $\frac{\partial H}{dP_n} \neq 0$, тогда уравнение можно разрешить

$$P_n = -K(q, \dots, q_n, p_1 \dots p_{n-1}, h)$$

Тогда

$$\omega^*{}_2 = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dq_{n-1} \wedge dP_{n-1}$$

$$p^* = p, \dots, p_{n-1}$$

$$q^* = q, \dots, q_{n-1}$$

$$\omega^*{}_2 = dP^* \wedge dq^* - dK \wedge dqn$$

$$q_n = \tau$$

$$K = K(q^*, p^*, \tau, h)$$

Напишем уравнение Гамильтона для этой системы:

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$\frac{dq^*}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial p^*}$$

$$\frac{dp^*}{d\tau} = -\frac{\partial K}{\partial q^*}$$

Мы получили Гамильтонову систему, которая имеет n-1 координату импульса.

Автономизация системы

Пусть дана не автономная система. То есть $H(q,p,t)$, $\dot{q} = H_p, \dot{p} = -H_q, \dot{t} = 1$

Переобозначим в этих уравнениях $q_{n+1} = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_{n+1}} = 1$

Должно выполняться $\widetilde{H} = p_{n+1} + \cdots$

В качестве новой функции Гамильтона берем следующее:

$$\widetilde{H}\left(q_1, \dots, q_n, q_{n+1}, p_1, \dots, p_{n+1}\right) = H\left(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, q_{n+1}\right) + P_{n+1}$$

Добавится еще уравнение

$$\dot{P}_{n+1} = -\frac{\partial H}{\partial q_{n+1}}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Лекция 12
Геометрические аспекты Гамильтоновой механики

Симплектическое многообразие

Это некое гладкое многообразие (M, **ω**), на нем должна быть задана 2-форма **ω**, которая :

а) невырожденная (то есть при любом $u \in T_x M;\ u \neq 0\ ; v \in T_x M\ ;\ \omega(u,v) \neq 0)$

б) замкнутая (т.е $d\omega = 0$). Иногда называют симплектической сруктурой.

Пусть размерность этого пространства равна Mk

Тогда возьмем точку $x_1, \dots, x_k\ ; \left(A_{(x)}u, v\right)$ то матрицы $A^T = -A$

Размерность симплектического многообразия

Условие A $\Leftrightarrow det\ A \neq 0$, но если размерность нечетная, то $k = 2n + 1; detA \neq 0$

Размерность симплектического многообразия четная.

Теорема Дарбу

Для любой точки $x \in M$ в некоторой окрестности этой точки существуют координаты $x = (q_1,..,q_n,\ p_1,..,p_n)$ такие, что форма симплектической структуры будет иметь вид:

$$\omega = dP \wedge dq$$

$$dP \wedge dq = \sum_{i=1}^{n} \frac{dp_i}{dq_i} = dp_i \wedge dq_i(u,v) = \begin{vmatrix} dp_i(u) & dq_i(u) \\ dp_i(v) & dq_i(v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{pi} & u_{qi} \\ v_{pi} & v_{qi} \end{vmatrix} = u_p v_q - u_q v_p$$

Матрица A имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} = I$

Тогда $\omega(u,v) = (A_n, V),\ \omega(u,v) = \left(u, \tilde{A}V\right)$

Гамильтоново векторное поле

Можем ввести расширенное фазовое пространство $\widetilde{M} = M \times R,$ форма

$\omega_2 = dp \wedge dq - dH \wedge dt$

$$\omega_2 = \widetilde{\omega} - dH \wedge dt$$

В автономном случае можно дать еще одно определение $H(x) = H(q,p)$

Тогда можно ввести вектор $V_H = (H_p, -H_q)$

$$\omega(u, V_H) = q_p H_p + u_q H_q = \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} u_i + \sum \frac{\partial H}{\partial pi} u_{i+n} = dH(u) \partial J^{-1} : T^*{}_x M \to T_x M$$

$$V_H = J^{-1}(dH)$$

Скобка Пуассона:

Функция, заданная на нашем бинарном пространстве $F, G \in C^\infty(M)$

Функции F,G ставят в соответствие {F,G}=W

Определение функции Пуассона:

$$\{\mathrm{F}, \mathrm{G}\} = \partial_{vF} G = dG(V_F) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{V_F}, \boldsymbol{V_G})$$

Свойства операции:

1) Билинейная : $\{\alpha F_1 + \beta F_2, G\} = \alpha\{F_1 G\} + \beta\{F_2 G\}$
2) Кососимметрическая: $\{\mathrm{F}, \mathrm{G}\} = -\{G, \mathrm{F}\}$
3) Тождество Якоби:

Имеем три функции H, F , G ; $\big\{H, \{\mathrm{F}, \mathrm{G}\}\big\} + \big\{F, \{\mathrm{G}, \mathrm{H}\}\big\} + \big\{G, \{H, F = 0\}\big\}$

$$V_F = \big(F_p, -F_q\big)$$

4) В канонических координатах имеет вид :

$$dG(V_F) = G_q F_p - G_p F_q = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \mathrm{q_i}} * \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{p_i}} - \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \mathrm{p_i}} * \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{q_i}}\right)$$

5) Формула Лейбница :$\{HF, G\} = H\{F, H\} + F\{H, G\}$
6) Алгебры Ли :
   1) векторное пространство X
   2) с бинарной операцией $[x_1, x_2] = x_3$

Требуется, чтобы бинарная операция была билинейная, кососимметрическая и тождество Якоби – получаем алгебру Ли. $[A, B] = AB - BA$

Теорема Пуассона о первых интегралах

H- функция Гамильтона , которая записывается в канонических координатах

$$\dot{q} = H_p;\ \dot{p} = H_q$$

F - первый интеграл

Должно выполняться следующее соотношение :

$$\frac{\partial F}{dq}\dot{q} + \frac{\partial F}{dp}\dot{p} = 0$$

$$\frac{\partial F}{dq}H_p + \frac{\partial F}{dp}H_q = 0$$

Это означает, что $\{H, F\} = 0$

Теорема Пуассона о первых интегралах

Пусть функции F, G– первые интегралы Гамильтоновой системы с гамильтонианом H. Теорема утверждает, что скобка Пуассона этих функций $\{F, G\}$ - тоже первый интеграл нашей системы.

Док-во: $\{H, F\} = \{H, G\} = 0$

Надо доказать: $\{H, \{F, G\}\} = 0$

Воспользуемся Тождеством Якоби $\{H, \{F, G\}\} + \{F, \{H, G\}\} + \{G, \{H, F\}\} = 0$

Теорема Лиувилля об интегрируемых системах

Если F, G – функции на фазовом пространстве M и скобка Пуассона этих функций равна нулю $\{F, G\} = 0$, то говорят , что функции F, G находятся в инволюции (или коммутируют)

Пусть есть ф-я $F_1 .. F_n$ на фазовом пространстве M.

Пусть $M_c = \{x \in M: F_1(x) = c_1 \dots F_n(x) = c_n\} -$ совместный уровень.

$c = \{c_1, \dots, c_n\}$

Отметим, что $V_H = I * grad\ H$

Пусть на уровне

1) функции независимы, т.е. ранг матрицы Якоби $\left|\frac{\partial F..F_n}{\partial x}\right| = n$

2) функции находятся в инволюции. Для любых i, j скобка Пуассона равна нулю $\{F_i, F_j\} = 0$

При выполнении этих условий симплектическая структура обращается в ноль $\omega|_{Mc} = 0$

$$\omega|_{Mc} = \omega\{\xi, \eta\}; \xi, \eta \in T_x M_c$$

Доказательство :

Возьмем уровень M_c. Введем гамильтоново поле$V_i = V_{Fi} = \{F_{ip}, -F_{iq}\}$

1) Все V_i касаются M_c. $\{F_i, F_j\} = (grad\ F_i, V_j) = 0$

$$\{F, G\} = \omega(V_F, V_G)$$

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$0 = \{F_i,\ F_j\} = \omega(V_i,\ V_j)$$

Пусть $F_1 ..\ F_n$ – первые интегралы гамильтоновой системы (с функцией Гамильтона H), находящиеся в инволюции $\{F_i, F_j\} = 0$ и в точке x_0 функции $F_1 ..\ F_n$ функционально независимы. Тогда в окрестности этой точки уравнения Гамильтона интегрируются в квадратурах.

Доказательство:

$$c_{01} = F_1(x_0) \dots c_{0n} = F_n(x_0)$$

Введем вектор $c = (c_1 \dots c_n) \in R^n$; $c \in U_\varepsilon(c_0)$ в которых $F_1 ..\ F_n$ –независимы; $x = (q, p)$

$$M_c = \{x: F_1(x) = c, .. F_n(x) = c_n\}$$

$$F_1(q,p) = c_1$$

$$\begin{cases} F_1(q,p) = c_1 \\ F_n(q,p) = c_n \end{cases} \to p = p(q,c)$$

$$\left|\frac{\partial F_{1,..}F_n}{\partial p_1, .. p_n}\right| \neq 0$$

$$\omega = dp \wedge dq$$

$dp \wedge dq\ |_{Mc} = 0$; Pdq- замкнута $\Rightarrow$ fΦ(q, c)

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial q}$$

Введем функцию $W = -h(c)t + \Phi(q,c)$

$\frac{\partial S}{dt} + H(q, \frac{\partial S}{\partial q})$- уравнение Якоби

$$-h + H(q,p) = 0$$

$$H = h$$

Проверим невырожденность:

$$|\ \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial s}\ | \neq 0$$

$$F = \left(F_{,1,}, .. F_n\right); F = C; F\left(q, p(q,c)\right) = 0$$

Возьмем матрицу Якоби :

$$E = \frac{\partial F}{\partial C} = \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial C}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$$|\frac{\partial P}{\partial C}| \neq 0$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial c} = \frac{\partial p}{\partial c}$$

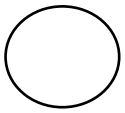
Лекция 13
Теорема Лиувилля. Примечания к курсу

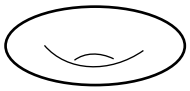
Теорема Лиувилля

Рассмотрим следующую ситуацию: пусть у многообразия уровней есть связанные компоненты, которые являются компактными.

Пусть M_c- связная компактная компонента уровня. Тогда верно следующее:

1) $M_c = T^n$- n-мерный тор

T^1=  S'

T^2=  $S' \times S' \dots \times S'$

2) В некоторой окрестности этого тора M_{c0} существуют канонические координаты, которые принято обозначать φ, I , которые обозначают угол действия, в которых функция Гамильтона $H = H(I)$.

Можем ввести такие координаты φ, в которых $\varphi = (\varphi_1, .. \varphi_n)$

$$\dot{I} = 0$$
$$\dot{\varphi} = \omega(I)$$
$$I = I_0$$
$$\varphi = \omega t + \varphi_0$$

Такое движение называют условно-периодическим.

Переменная "действие-угол"

$$q \to q(\varphi, I)$$
$$p \to p(\varphi, I)$$

Существует каноническая замена координат, которая будет удовлетворять:

1) $q(\varphi_1, .. \varphi_k + 2\pi, \varphi_{k+1}, .. \varphi_k, I) = q(\varphi_1, .. \varphi_k, .. \varphi_n, I)$

Те же требования для p.

2) функция Гамильтона зависит только от переменных $H = H(I)$

Если удалось отделить некоторые координаты $H(f(q_1, p_1), q_1, .. q_n, p_1, .. p_n)$

$$\int_\varphi pdq = \int_\varphi Id\varphi = 2\pi I$$

значение переменной действия подсчитывается как $I = \frac{1}{2\pi}\int pdq;\ I(h) \to h(I)$

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

$W(q, I)$ - производящая функция

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}$$

Интегрируя по фазовым кривым, можем найти производящую функцию:

$$\int_{q0}^{q} pdq = \int_{q0}^{q} \frac{\partial W}{\partial q} dq = W(q) - W(q0)$$

Отсюда находим угол $\frac{\partial W}{\partial I} = \varphi$

Метод разделения переменных (уравнение Гамильтона-Якоби)

$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) = 0$ - уравнение Гамильтона-Якоби

Метод состоит из двух частей:

1) $H(q, p)$ полный интеграл можно искать в виде $S = -ht + W(q, \alpha)$

Где $h = h(\alpha)$

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = h$$

2) Если в функции Гамильтона отделяется пара переменных $H(f(q_1, p_1), q_1, .. q_n, p_1, .. p_n)$, тогда f является первым интегралом системы и

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} \neq f\left(q, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right) = 0$$

$$S = \tilde{S} + \tilde{S}$$

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{S}}}{\partial t} + H(f^*(\alpha),\ q_2 .. q_n, \frac{\partial \tilde{\tilde{S}}}{\partial q_2} .. \frac{\partial \tilde{\tilde{S}}}{\partial q_n}$$

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ