ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

МИХАЙЛОВ
ЕВГЕНИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ

НЕКРАСОВА АЛЕКСЕЯ ДМИТРИЕВИЧА

Содержание

Лекция 1. Комплексные числа

Введение. Знакомство с комплексными числами

Комплексные числа не относятся напрямую к геометрии, но будут применяться в дальнейшем повсеместно, поэтому данная лекция полностью посвящена ознакомлению с этой темой.

Введем базовое определение:

Определение 1. *Мнимой единицей называется некоторое число i, квадрат которого равен минус единице:*

$$i^2 = -1.$$

Тогда задача нахождения корней из отрицательных чисел становится выполнимой.

Введем определение комплексного числа:

Определение 2. *Комплексным числом z называется комбинация двух вещественных чисел и комплексной единицы:*

$$z = x + iy,$$

где x, y — вещественные.

Если говорить более строго, то можно сказать, что комплексным числом z называется упорядоченная пара двух вещественных чисел:

$$z = (x, y),$$

или, если нам известно комплексное число z, то можно утверждать, что мы знаем два вещественных числа, являющихся реальной и мнимой частями данного комплексного числа, соответственно:

$$x = Re(z), \quad y = Im(z).$$

Теперь можно вводить для таких чисел все те операции, которые были введены для обычных вещественных чисел.

Определение 3. *Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ мы будем называть равными тогда и только тогда, когда равны их вещественные и мнимые части, т.е. $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.*

Определение 4. *Комплексно сопряженным числом к числу $z = x+iy$ называется число $z^* = x - iy$. Аналогично иногда будем обозначать комплексно сопряженное число $\hat{z} = x - iy$.*

Определение 5. *Модулем комплексного числа называется величина:*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Вычислим произведение комплексного числа на его комплексно сопряженное:

$$z^*z = (x - iy)\,(x + iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Аналогично операциям с вещественными числами вводятся операции сложения, умножения, деления и так далее.

Теперь рассмотрим конкретные задачи.

Задача 1. *Вычислить:*

$$(3 + i)(2 - i) = 6 - 3i + 2i - i^2 = 7 - i$$

Задача 2. *Вычислить:*

$$\frac{12 + i}{5 - 2i} = \frac{(12 + i)(5 + 2i)}{(5 - 2i)(5 + 2i)} = \frac{60 + 24i + 5i + 2i^2}{25 + 4} = \frac{58 + 29i}{29} = 2 + i$$

Задача 3. *Вычислить:*

$$\frac{6 + 17i}{4 + 3i} = \frac{(6 + 17i)(4 - 3i)}{(4 + 3i)(4 - 3i)} = \frac{24 + 68i - 18i - 51i^2}{16 + 9} = \frac{75 + 50i}{25} = 3 + 2i$$

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел

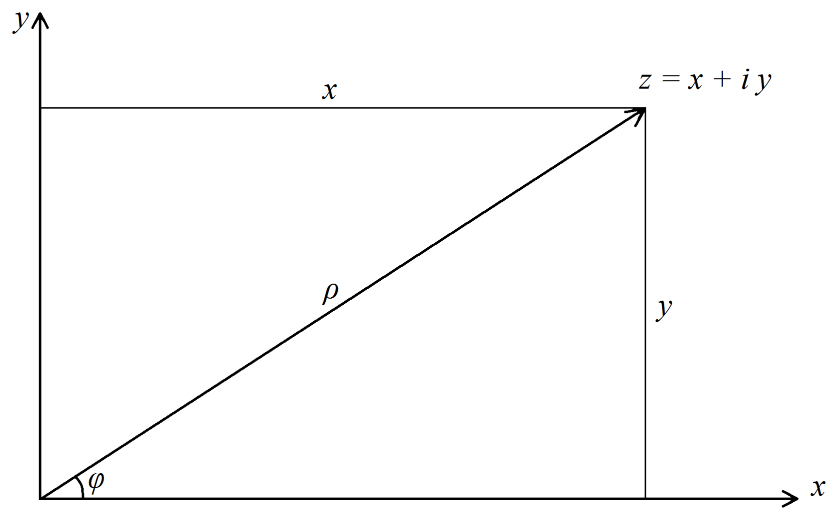

Рис. 1. К геометрической форме записи комплексного числа

Любому комплексному числу z можно сопоставлять точку на плоскости (x, y) (см. рис. 1). Данной точке можно сопоставить вектор, выходящий из начала координат, причем его длина окажется равной модулю числа z: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Угол между этим вектором и осью Ox $\varphi = Arg(z)$ называется аргументом z. Для определенности введем главное значение аргумента: $-\pi < arg(z) \leqslant \pi$. С новыми введенными обозначениями комплексное число может быть записано в так называемой тригонометрической форме записи:

Определение 6. *Тригонометрической формой записи числа z называется представление:*

$$z = \rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right).$$

Задача 4. *Привести к тригонометрической форме записи:*

$$1 + i = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$1 + i = \sqrt{2}\cos\varphi + i\sqrt{2}\sin\varphi$$

$$1 = \sqrt{2}\cos\varphi \quad 1 = \sqrt{2}\sin\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Задача 5. *Привести к тригонометрической форме записи:*

$$-1 + i\sqrt{3} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$-1 + i\sqrt{3} = 2\cos\varphi + i2\sin\varphi$$

$$-1 = 2\cos\varphi \quad \sqrt{3} = 2\sin\varphi$$

$$\cos\varphi = -\frac{1}{2} \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varphi = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

$$-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

Показательная форма записи комплексных чисел

Сначала введем формулу Эйлера (без доказательства):

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Определение 7. *Показательной формой записи комплексного числа будем называть выражение:*

$$z = \rho e^{i\varphi}.$$

Задача 6. *Вычислить* $(1+i)^{10}$*:*

$$\text{Как было показано ранее: } (1+i)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

$$(1+i)^{10}=2^{\frac{10}{2}}e^{10i\frac{\pi}{4}}=2^5e^{i\frac{5\pi}{2}}=32e^{i\frac{\pi}{2}}=32\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=32i$$

Задача 7. *Вычислить* $(1-i)^{20}$*:*

$$(1-i)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$(1-i)^{20}=2^{10}e^{-20i\frac{\pi}{4}}=2^{10}e^{-5i\pi}=1024e^{i\pi}=1024\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=-1024$$

Комплексные числа позволяют без труда доказывать тригонометрические формулы, с большим трудом получаемые в рамках школьного курса.

Задача 8. *Формула двойного угла:*

$$\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi=\left(e^{i\varphi}\right)^2$$

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

$$\left(e^{i\varphi}\right)^2=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2=\cos^2\varphi+2i\cos\varphi\sin\varphi+i^2\sin^2\varphi$$

$$\left(e^{i\varphi}\right)^2=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi+2i\cos\varphi\sin\varphi=\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi$$

$$\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi \quad \sin 2\varphi=2\cos\varphi\sin\varphi$$

Корень из комплексного числа

При операции взятия корня от комплексного числа уже важно учитывать, что в показательной форме записи присутствует фаза:

$$z=\rho e^{i(\varphi+2\pi k)},\ \text{где } k \text{ — целое число.}$$

Тогда:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\frac{k}{n}\right)},\quad k=0,\ldots,n-1.$$

Задача 9. *Вычислить корень третьей степени из -1:*

$$-1=e^{i(\pi+2\pi k)}$$

$$\sqrt[3]{-1}=1e^{i\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\frac{k}{3}\right)},\quad k=0,1,2$$

$$\sqrt[3]{-1}=\begin{cases} e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1 \\ e^{i\frac{5\pi}{3}}=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Задача 10. *Вычислить корень из i:*

$$i = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}$$

$$\sqrt{i} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right)}, \quad k = 0, 1$$

$$\sqrt{i} = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

На этом мы заканчиваем знакомство с комплексными числами и переходим к следующей теме.

Лекция 2. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Системы линейных уравнений

Рассмотрим простейшую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Введем векторы:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Тогда эту систему уравнений можно переписать в компактной матричной форме:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

или, аналогично:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Метод Крамера

Введем дополнительные матрицы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}.$$

С их помощью решение системы может быть записано в следующем виде:

$$x_1 = \frac{detA_1}{detA}, \quad x_2 = \frac{detA_2}{detA}.$$

Такие же результаты могут быть получены и для систем большего числа уравнений.

Рассмотрим теперь систему из трех уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Введем матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}$$

Аналогично системе из двух уравнений можем записать с помощью этих матриц ответ:

$$x_1 = \frac{detA_1}{detA}, \quad x_2 = \frac{detA_2}{detA}, \quad x_3 = \frac{detA_3}{detA}.$$

На самом деле такой метод решения требует огромного числа вычислительных операций:

$$detA = a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\right),$$

для подсчета данного определителя $detA$ потребуется 14 действий. Для подсчета четырех определителей $detA, detA_1, detA_2, detA_3$ потребуется 56 действий. Всего для нахождения решения системы из трех уравнений с использованием данного метода нужно 59 действий. К тому же метод Крамера не всегда удается применить. Простой пример:

$$x_1 + x_2 = 1.$$

Решение: x_1 — любое число, $x_2 = 1 - x_1$.

Метод Крамера не позволяет получить решение системы, в которой число неизвестных больше числа уравнений. Поэтому в дальнейшем мы будем использовать более совершенный и требующий меньшего числа действий метод Гаусса.

Метод Гаусса

Запишем рассматриваемую систему в общем виде:

Определение 8. *Системой порядка n из m линейных алгебраических уравнений называется система:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Замечание: в общем случае может быть $m \leqslant n$.

Перепишем данную систему в матричном виде:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Определение 9. *В случае, когда вектор $\vec{b} = \vec{0}$, система называется однородной.*

Метод Гаусса для однородных систем

Проиллюстрируем метод Гаусса в простейшем случае для однородной системы:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 \\ 4\left(-\dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{2}x_3\right) - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 \\ -2x_2 + 2x_3 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 \\ -4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 - \dfrac{5}{4}x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{5}{4}x_3 \\ x_1 = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{4}x_3\right) + \dfrac{1}{2}x_3 = -\dfrac{1}{8}x_3 \end{cases}$$

В качестве ответа запишем:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{8}x_3, \\ x_2 = \dfrac{5}{4}x_3, \\ x_3 = x_3. \end{cases}$$

Перепишем это в универсальном матричном виде:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix} x_3.$$

В данном случае x_3 — свободный параметр. Учитывая этот факт, можем переписать ответ без использования дробей:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} C.$$

Теперь мы можем обобщить полученный результат.

Чтобы найти решение системы, задаваемой матрицей A (разумеется, при условии $a_{11} \neq 0$, иначе придется поменять порядок уравнений в системе, или, что то же самое, переставить местами строчки в матрице A):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

надо выполнить следующую последовательность действий:

1) Делим первую строчку матрицы на a_{11}:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

2) Вычитаем первую строчку из всех последующих строк с соответствующими коэффициентами так, чтобы во всех последующих строчках в первом столбце остались нули:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & \cdot & \dots & \cdot \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdot & \dots & \cdot \end{pmatrix},$$

3) Приводим вторую строчку к такому виду, чтобы элемент a_{22} оказался равным единице:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & \cdot \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdot & \dots & \cdot \end{pmatrix},$$

4) Повторяем данную последовательность действий 1–3 с каждой последующей строчкой, в итоге получим матрицу вида:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \cdot \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \cdot \end{pmatrix}.$$

В случае, когда матрица квадратная, полученная нами матрица будет называться треугольной.

Замечание: если в матрице оказались две одинаковые строки, то можно вычеркнуть одну из них, т. к. две одинаковые строки равносильны двум одинаковым уравнениям.

Замечание: строчки в матрицах можно свободно менять местами, аналогично тому, как можно менять местами уравнения в системе.

Применим сформулированный алгоритм для решения конкретных задач.

Задача 11. *Решить систему уравнений:*

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Матрица данной системы:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

Переместим третью строчку на место первой, т. к. в таком случае сразу получим элемент $a_{11} = 1$.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 9 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

Действуем в соответствии с алгоритмом.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Нулевые строчки означают тождества, и потому тоже вычеркиваются.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Перепишем преобразованную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

В качестве независимых переменных выберем x_3, x_4 и выразим через них x_1, x_2:

$$\begin{cases} x_2 = -x_3 + x_4, \\ x_1 = -2x_2 - 3x_3 + x_4 = -2\left(-x_3 + x_4\right) - 3x_3 + x_4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - x_4, \\ x_2 = -x_3 + x_4, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

Перепишем в векторном виде.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

Задача 12. *Решить систему уравнений:*

$$\begin{cases} x_1 + 13x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 17x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 13 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 17 & 6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 13 & 5 & 3 \\ 4 & 17 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 13 & 5 & 3 \\ 0 & -35 & -14 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 13 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 13 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 13 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 13x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_2 + \dfrac{2}{5}x_3 + \dfrac{1}{5}x_4 = 0, \\ x_3 + \dfrac{1}{2}x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{2}x_4 - 3x_4 = -\dfrac{1}{2}x_4, \\ x_2 = \dfrac{1}{5}x_4 - \dfrac{1}{5}x_4 = 0, \\ x_3 = -\dfrac{1}{2}x_4, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

Ответ:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} x_4.$$

Метод Гаусса для неоднородных систем

Теперь перейдем к изучению неоднородных систем, то есть к случаю, когда вектор правой части $\vec{b} \neq 0$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Эту систему мы можем охарактеризовать с помощью так называемой расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Для данной матрицы справедлив сформулированный выше для однородных матриц алгоритм и все указанные закономерности. Теперь только вместе с основной матрицей меняется и столбец правой части. Проиллюстрируем на примерах.

Задача 13. *Решить систему уравнений:*

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 4, \\ 4x_1 - x_2 + = 5, \\ 5x_1 + x_2 + 5x_3 = 9. \end{cases}$$

Ее расширенная матрица:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 5 & 9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 5 & 9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{19}{4} & \frac{35}{4} & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{19}{4} & \frac{35}{4} & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{13}{8} & \frac{13}{8} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{3}{4}x_2 - \dfrac{3}{4}x_3 = 1, \\ \qquad x_2 + \dfrac{3}{2}x_3 = \dfrac{1}{2}, \\ \qquad\qquad x_3 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 1, \\ x_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}x_3 = -1, \\ x_1 = 1 + \dfrac{3}{4}x_2 + \dfrac{3}{4}x_3 = 1. \end{cases}$$

Ответ:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Лекция 3. Вычисление обратной матрицы

Общие сведения об обратных матрицах

Определение 10. *Обратной матрицей для квадратной матрицы A называется матрица A^{-1} такая, что:*

$$A^{-1}A = I,$$

где I — единичная матрица соответствующей размерности.

Вычисление обратной матрицы полезно при решении систем алгебраических уравнений:

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Умножим обе части системы на A^{-1}:

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Тогда, с учетом определения обратной матрицы, получим:

$$I\vec{x} = \vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Такой метод решения особенно полезен, когда необходимо получить решение сразу для нескольких различных векторов правой части $\vec{b}$. Достаточно один раз вычислить A^{-1}, и затем можно получить решение системы для любого вектора $\vec{b}$.

Существует несколько различных способов вычисления обратных матриц. В этой лекции мы рассмотрим два основных метода.

Метод вычисления обратных матриц с использованием миноров

Будем иллюстрировать данный метод на примере матриц размерности 3×3, и потому вспомним необходимые сведения о матрицах размера 3×3.

Матрица 3×3 в общем виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ее миноры получаются вычеркиванием из матрицы строк и столбцов с соответствующими номерами. Например, минор m_{11} получается вычеркиванием первой строки и первого столбца и взятием определителя от оставшихся элементов:

$$m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Минор m_{23} получается вычеркиванием второй строки и третьего столбца:

$$m_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Чтобы вычислить матрицу A^{-1}, нужно вычислить ее поэлементно с использованием формулы:

$$\left(A^{-1}\right)_{ik} = \frac{(-1)^{i+k}}{detA} m_{ki}.$$

Решим конкретные задачи с использованием метода миноров.

Задача 14. *Найти матрицу, обратную к матрице:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для начала вычислим определитель матрицы A:

$$detA = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)) + 0 \cdot (2 \cdot 1 - 0 \cdot 1) + 2 \cdot (2 \cdot (-1) - 0 \cdot 1) = 2 - 4 = -2.$$

Теперь вычисляем миноры:

$$m_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad m_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad m_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

$$m_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad m_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad m_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$m_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad m_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad m_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Вычисляем элементы обратной матрицы:

$$\left(A^{-1}\right)_{11} = \frac{(-1)^{1+1}}{-2} 2 = -1, \quad \left(A^{-1}\right)_{12} = \frac{(-1)^{1+2}}{-2} 2 = 1,$$

$$\left(A^{-1}\right)_{13} = \frac{(-1)^{1+3}}{-2} (-2) = 1, \quad \left(A^{-1}\right)_{21} = \frac{(-1)^{2+1}}{-2} 2 = 1,$$

$$\left(A^{-1}\right)_{22} = \frac{(-1)^{2+2}}{-2} 1 = -\frac{1}{2}, \quad \left(A^{-1}\right)_{23} = \frac{(-1)^{2+3}}{-2} (-3) = -\frac{3}{2},$$

$$\left(A^{-1}\right)_{31} = \frac{(-1)^{3+1}}{-2} (-2) = 1, \quad \left(A^{-1}\right)_{32} = \frac{(-1)^{3+2}}{-2} (-1) = -\frac{1}{2},$$

$$\left(A^{-1}\right)_{33} = \frac{(-1)^{3+3}}{-2} 1 = -\frac{1}{2}.$$

В качестве ответа выпишем матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Иногда данный метод также называют методом Крамера. Этот метод, так же как и метод Крамера для решения систем уравнений, требует большого числа вычислений и потому на практике применяется нечасто.

Оценим количество необходимых действий для его использования: каждый минор при вычислении требует 3-х действий. Всего нужно вычислить девять миноров, то есть 27 действий. Еще 27 действий надо произвести для вычисления элементов матрицы, итого 54 действия. И посчитать определитель исходной матрицы. В итоге около 70 действий.

Решим еще одну задачу с использованием данного метода, после чего перейдем к изучению более прогрессивных методов.

Задача 15. *Найти матрицу, обратную к матрице:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A:

$$detA = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 1) + 2 \cdot (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = -2.$$

Вычисляем миноры:

$$m_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad m_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad m_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$m_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad m_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad m_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$m_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad m_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad m_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Вычисляем элементы обратной матрицы:

$$\left(A^{-1}\right)_{11} = \frac{(-1)^2}{-2} 0 = 0, \quad \left(A^{-1}\right)_{12} = \frac{(-1)^3}{-2}(-2) = -1,$$

$$\left(A^{-1}\right)_{13} = \frac{(-1)^4}{-2}(-2) = 1, \quad \left(A^{-1}\right)_{21} = \frac{(-1)^3}{-2}(-1) = -\frac{1}{2},$$

$$\left(A^{-1}\right)_{22} = \frac{(-1)^4}{-2}(-1) = \frac{1}{2}, \quad \left(A^{-1}\right)_{23} = \frac{(-1)^5}{-2} 1 = \frac{1}{2},$$

$$\left(A^{-1}\right)_{31} = \frac{(-1)^4}{-2}(-1) = \frac{1}{2}, \quad \left(A^{-1}\right)_{32} = \frac{(-1)^5}{-2} 1 = \frac{1}{2},$$

$$\left(A^{-1}\right)_{33} = \frac{(-1)^6}{-2} 1 = -\frac{1}{2}.$$

Ответ:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Метод Гаусса

Пусть необходимо вычислить матрицу, обратную к матрице A. Запишем саму матрицу A, а справа от нее запишем единичную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

Теперь будем преобразовывать данную матрицу до тех пор, пока слева не получится единичная матрица. Тогда в правой части полученной в итоге матрицы окажется матрица A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \underbrace{b_{n1}}_{} & \underbrace{b_{n2} \quad \dots \quad b_{nn}}_{A^{-1}} \end{array}\right).$$

Задача 16. *Вычислить обратную матрицу, используя метод Гаусса:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Добавим присоединенную единичную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Преобразуем матрицу в соответствии с правилами:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Ответ:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Проведем проверку, действительно ли мы нашли обратную матрицу:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{2}{3}\cdot 1 + 0 & \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{2}{3}\cdot 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot 1 & \frac{1}{3}\cdot 2 + 0 - \frac{2}{3}\cdot 1 \\ -\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1 + 0 & -\frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{2}{3}\cdot 1 & -\frac{1}{3}\cdot 2 + 0 + \frac{2}{3}\cdot 1 \\ \frac{1}{3}\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot 1 + 0 & 0 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\cdot 2 + 0 + \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Задача 17. *Вычислить обратную матрицу, используя метод Гаусса:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Ответ:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Лекция 4. Фигуры на плоскости и в пространстве

Прямая на плоскости

Со школьных времен известно следующее: если мы имеем декартову прямоугольную систему координат, то в ней большинство прямых выражется следующей формулой (так называемое уравнение с угловым коэффициентом):

$$y = kx + b.$$

Для точного задания определенной прямой достаточно знать направление данной прямой и одну точку, через которую эта прямая проходит. В геометрии направление задается вектором.

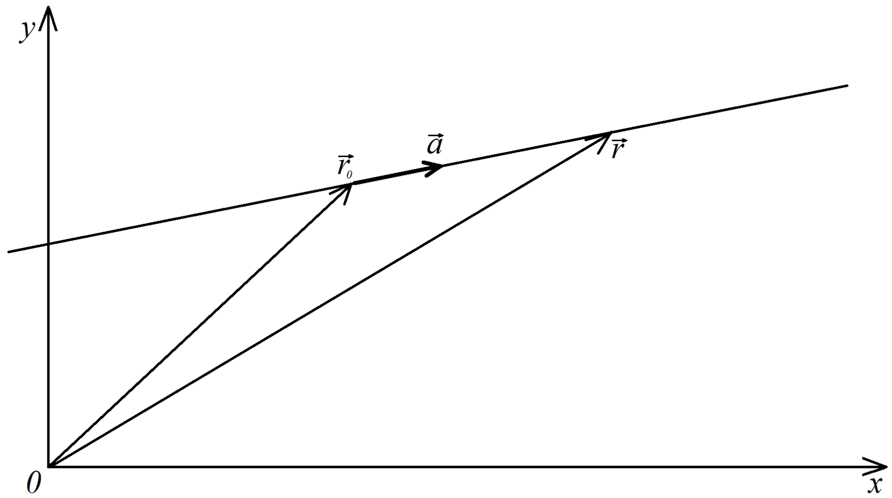

Рис. 2. Задание прямой на плоскости

Пусть в декартовой системе координат нам задано определенное направление $\vec{a}$, а также точка с радиус-вектором $\overrightarrow{r_0} = (x_0, y_0)$ (см. рис. 2). Тогда любую точку с радиус-вектором $\vec{r}$, лежащую на задаваемой данным направлением и данной точкой $\overrightarrow{r_0}$ прямой, можно выразить в виде:

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{a}t,$$

где t — произвольный параметр.

Данное уравнение называется векторным параметрическим уравнением прямой. С помощью такого уравнения можно задать любую точку, лежащую на нашей прямой.

Перепишем то же самое с помощью вектор-столбцов:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} t.$$

Покомпонентно:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t, \\ y = y_0 + a_y t. \end{cases}$$

Такая форма записи называется параметрическим уравнением прямой в координатах.

Также известно, что прямую можно задать, зная две точки, через которые она проходит. Пусть известны две точки с радиус-векторами $\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}$. Тогда мы можем задать вектор $\vec{a} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$, а в качестве вектора $\overrightarrow{r_0}$ можем использовать любую из точек $\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}$. Тогда получаем еще одну форму записи для уравнения прямой (через две точки):

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_1} + (\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1})\, t.$$

Каноническое уравнение прямой

В параметрической форме записи уравнения прямой в координатах мы можем избавиться от параметра t, выражая параметр через заданные значения. Можно записать:

$$x - x_0 = a_x t, \quad t = \frac{x - x_0}{a_x},$$

$$y - y_0 = a_y t, \quad t = \frac{y - y_0}{a_y}.$$

Отсюда получим каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y}.$$

Преобразуем данное уравнение:

$$\frac{1}{a_x}(x - x_0) = \frac{1}{a_y}(y - y_0),$$

$$\frac{1}{a_x}(x - x_0) + \left(-\frac{1}{a_y}\right)(y - y_0) = 0.$$

Переобозначим постоянные и получим общий вид уравнения прямой на плоскости, проходящей через заданные точки:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Продолжим преобразования:

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 = 0,$$

обозначим:

$$C = -Ax_0 - By_0.$$

Тогда:

$$Ax + By + C = 0.$$

Последнее уравнение называется общим уравнением прямой на плоскости.

Заметим:

$$Ax + By = (\vec{r}, \vec{n}),$$

где:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Тогда получим еще один вариант записи уравнения прямой:

$$(\vec{r}, \vec{n}) + C = 0.$$

Заметим еще:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad \vec{r} - \overrightarrow{r_0} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix},$$

и тогда:

$$(\vec{r} - \overrightarrow{r_0}, \vec{n}) = 0.$$

Всюду в выражениях выше вектор $\vec{n}$ — вектор нормали к данной прямой. Получим компоненты вектора нормали через компоненты направляющего вектора прямой $\vec{a}$:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \end{pmatrix}, \text{или:} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}.$$

Решим некоторые характерные для данной темы задачи.

Задача 18. *Пусть на плоскости дана прямая с направляющим вектором $\vec{a}$, проходящая через точку, задаваемую радиус-вектором $\overrightarrow{r_0}$, и также пусть дана произвольная точка M (не лежащая на прямой), через которую проведен перпендикуляр к данной прямой. Найти точку пересечения перпендикуляра с прямой и расстояние от точки до прямой.*

Уравнение прямой может быть задано в виде:

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{a}t.$$

Уравнение перпендикуляра:

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_1} + \vec{n}q,$$

где $\overrightarrow{r_1}$ — координаты точки M, $\vec{n}$ — вектор нормали к прямой, q — произвольный параметр (как и t). Приравнивая полученные выражения, сможем найти координаты точки пересечения:

$$\overrightarrow{r_0} + \vec{a}t = \overrightarrow{r_1} + \vec{n}q.$$

Теперь найдем расстояние от точки M до прямой:

$$\rho = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

где A, B, C определяются из уравнения прямой в общем виде.

Задача 19. *Найти угол пересечения двух прямых, задаваемых векторами $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$.*

Из формулы для скалярного произведения:

$$(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}) = a_1 a_2 \cos\varphi,$$

или в обратную сторону:

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})}{a_1 a_2}.$$

С другой стороны, можем то же самое получить и для нормалей к данным прямым:

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})}{n_1 n_2}.$$

Задача 20. *Составить уравнение прямой, проходящей через точки* $(2, 5)$, $(-3, 7)$.

Введем векторы:

$$\overrightarrow{r_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{r_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{r_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{a} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Получим уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{a}t,$$

или:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} t.$$

То же самое можно написать и в скалярной форме:

$$\begin{cases} x = 2 - 5t, \quad t = \dfrac{x-2}{-5}, \\ y = 5 + 2t, \quad t = \dfrac{y-5}{2}. \end{cases}$$

Уравнение в каноническом виде:

$$\frac{x-2}{-5} = \frac{y-5}{2}.$$

Получим уравнение в общем виде:

$$2(x-2) = -5(y-5),$$

$$2(x-2) + 5(y-5) = 0,$$

$$2x - 4 + 5y - 25 = 0,$$

$$2x + 5y - 29 = 0.$$

Задача 21. *Получить из параметрического уравнения прямой уравнения в остальных формах:*

$$\begin{cases} x = 5, \\ y = 3 - 7t. \end{cases}$$

То же самое запишем в векторном виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix} t.$$

Далее:

$$t = \frac{y-3}{-7} = \frac{x-5}{0},$$

$$0 \cdot y - 3 \cdot 0 + 7x - 35 = 0,$$

$$7x - 35 = 0,$$

$$x - 5 = 0.$$

Задача 22. *Найти расстояние от точек $(2, 1)$, $(5, -3)$ до прямой, заданной уравнением:*

$$3x - 4y = 12.$$

Пересекает ли отрезок, проведенный между данными точками, прямую?

Воспользуемся стандартной формулой для расстояния от точки до прямой, заданной в общем виде:

$$\rho_1 = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Определить, с какой стороны от прямой лежит точка, можно по знаку выражения в числителе данной формулы (больше или меньше нуля). Поэтому определить, пересекает ли отрезок между точками прямую, можно из знаков для этого выражения.

$$3x - 4y - 12 = 0.$$

$$\rho_1 = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2.$$

$$\rho_2 = \frac{|3 \cdot 5 - 4 \cdot (-3) - 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{15}{\sqrt{25}} = 3.$$

Нетрудно видеть, что выражение в числителе для первой точки меньше нуля, а для второй больше. Поэтому отрезок пересекает прямую.

Задача 23. *Даны уравнения прямых для двух сторон параллелограмма:*

$$8x + 3y = -1, \quad 2x + y = 1,$$

а также уравнение одной из его диагоналей:

$$3x + 2y = -3.$$

Найти координаты вершин параллелограмма и уравнения остальных сторон.

Найдем первую вершину из условия пересечения прямых, задающих стороны:

$$y = 1 - 2x,$$

$$8x + 3 \cdot (1 - 2x) = -1,$$

$$2x = -4, \quad x = -2,$$

$$y = 1 - 2 \cdot (-2) = 5.$$

Координаты первой вершины A*:* $(-2, 5)$.

Координаты двух других вершин найдем из условий пересечения с диагональю:

$$y = \frac{-3 - 3x}{2},$$

$$8x + 3\frac{-3 - 3x}{2} = -1,$$

$$8x + \frac{-9 - 9x}{2} = -1,$$

$$16x - 9 - 9x = -2,$$

$$7x = 7, \quad x = 1, \quad y = -3.$$

Координаты второй вершины D*:* $(1, -3)$.

$$y = 1 - 2x,$$

$$3x + 2 \cdot (1 - 2x) = -3,$$

$$-x + 2 = -3, \quad x = 5, \quad y = -9.$$

Координаты третьей вершины B*:* $(5, -9)$.

Теперь найдем уравнения прямых для двух других сторон: т. к. прямые в параллелограмме попарно параллельны, то очевидно, что две другие прямые могут быть записаны в виде:

$$8x + 3y = \alpha,$$

$$2x + y = \beta.$$

Неизвестные коэффициенты α, β *можно найти из условий принадлежности точек* B*,* D *соответствующим прямым:*

$$8 \cdot 5 + 3 \cdot (-9) = \alpha, \quad \alpha = 13,$$

$$2 \cdot 1 + (-3) = \beta, \quad \beta = -1.$$

Окончательно, уравнения прямых:

$$8x + 3y = 13,$$

$$2x + y = -1.$$

Осталось найти координаты четвертой вершины (получим их из условия пересечения только что найденных прямых):

$$y = -1 - 2x,$$

$$8x + 3 \cdot (-1 - 2x) = 13,$$

$$2x = 16, \quad x = 9, \quad y = -17.$$

Координаты четвертой вершины C*:* $(8, -17)$.

Лекция 5. Кривые второго порядка

Эллипс

Определение 11. *Эллипсом называется множество точек на плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек, называемых фокусами, остается постоянной величиной.*

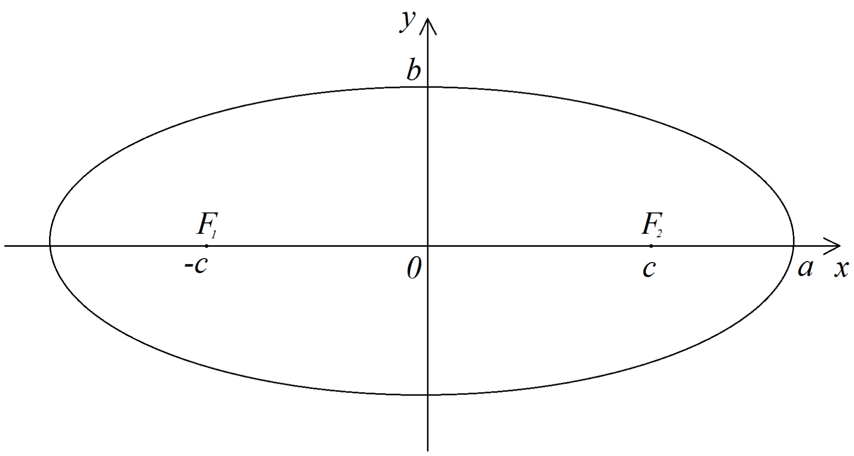

Рис. 3. Эллипс

В соответствии с определением, для любой точки A, принадлежащей эллипсу с фокусами в точках F_1, F_2 можем записать:

$$F_1A + F_2A = 2a,$$

где a — большая полуось эллипса при соответствующем выборе декартовой системы координат. В той же системе координат фокусы окажутся в точках с координатами $c, -c$ вдоль оси Ox. Параметр c обычно называют фокальным параметром. Параметр b — меньшая полуось эллипса (см. рис. 3).

Запишем теорему Пифагора для прямоугольного треугольника, вершинами которого являются фокусы F_1, F_2 и точка с координатами $(0, b)$:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Отсюда можно получать соотношения между параметрами эллипса.

Введем еще один параметр:

Определение 12. *Эксцентриситетом эллипса называется отношение фокального параметра к большей полуоси:*

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Уравнение окружности в школе записывалось в виде:

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1.$$

Аналогично этому уравнение эллипса может быть записано следующим образом:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Для эллипса удобно также ввести две вспомогательные прямые, называемые директрисами, задаваемые уравнениями:

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}.$$

И, наконец, проведем касательную к эллипсу в произвольной точке (x_0, y_0). Для этого продифференцируем уравнение эллипса:

$$\frac{2xdx}{a^2} + \frac{2ydy}{b^2} = 0,$$

$$\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} = 0.$$

Заменим дифференциалы на конечные приращения $dx \to x - x_0, dy \to y - y_0$:

$$\frac{x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} = 0,$$

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 0,$$

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}.$$

Заметим, что точки, задаваемые полученным уравнением, лежат на эллипсе:

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

Полученное уравнение задает прямую, касательную к эллипсу в точке (x_0, y_0).

Задача 24. *Рассмотреть эллипс, задаваемый уравнением:*

$$4x^2 + 9y^2 = 36,$$

вычислить для него эксцентриситет, найти уравнение директрисы, большую и малую полуоси, положение фокусов, фокальный параметр, найти уравнение касательной в точке $(1, \frac{4}{3}\sqrt{2})$.

Приведем уравнение эллипса к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

Отсюда:

$$a = 3, \quad b = 2, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}, \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Уравнение директрисы:

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{9}{\sqrt{5}}.$$

Уравнение касательной в точке $(1, \frac{4}{3}\sqrt{2})$*:*

$$\frac{1 \cdot x}{9} + \frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{4} y = 1,$$

$$\frac{x}{9} + \frac{\sqrt{2}}{3} y = 1.$$

Гипербола

Определение 13. *Гиперболой называется множество точек на плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек, называемых фокусами, остается постоянной величиной.*

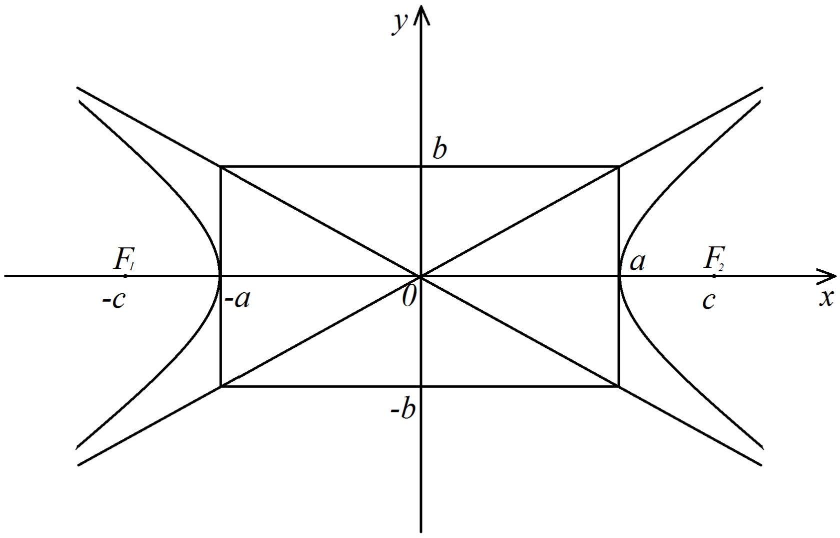

Рис. 4. Гипербола

Если F_1, F_2 — фокусы гиперболы, то для любой точки A, лежащей на гиперболе, выполнено:

$$F_2A - F_1A = 2a.$$

Аналогично эллипсу вводятся все параметры гиперболы, выражаемые через a — действительную полуось, b — мнимую полуось, c — фокальный параметр (см. рис. 4).

Если для эллипса получалось, что эксцентриситет всегда меньше единицы, то для гиперболы получается, что эксцентриситет всегда больше единицы:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1.$$

Уравнение гиперболы в каноническом виде задается следующим образом:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Преобразуем:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1.$$

Отсюда можно получить поведение гиперболы при больших значениях x, y: видно, что при $|x| \to \infty, |y| \to \infty$ ветви гиперболы приближаются к одной из двух прямых:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

Эти прямые называются асимптотами гиперболы.

Чтобы получить уравнение касательной к гиперболе, продифференцируем уравнение гиперболы:

$$\frac{xdx}{a^2} - \frac{ydy}{b^2} = 0.$$

Заменяем бесконечно малые приращения конечными:

$$\frac{x_0(x - x_0)}{a^2} - \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} = 0,$$

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 0,$$

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}.$$

Получаем уравнение касательной:

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Задача 25. *Для гиперболы, задаваемой уравнением:*

$$4x^2 - y^2 = 4,$$

найти a, b, c, ε, а также уравнение касательной в точке $x_0 = 2, y_0 = 3\sqrt{2}$.

Приведем уравнение к стандартному виду:

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

$$\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

Отсюда:

$$a = 1, \quad b = 2.$$

Параметр с получается из формулы:

$$b^2 = a^2 + c^2,$$

$$c = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

Эксцентриситет:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

Дополнительно найдем уравнения асимптот:

$$\frac{x}{1} - \frac{y}{2} = 0, \quad \frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 0,$$

откуда:

$$y = 2x, \quad y = -2x.$$

Теперь найдем уравнение касательной в точке $2, 3\sqrt{2}$*:*

$$\frac{2x}{1^2} - \frac{3\sqrt{2}y}{2^2} = 1,$$

$$2x - \frac{3y}{2\sqrt{2}} = 1,$$

$$4x\sqrt{2} - 3y = 2\sqrt{2}.$$

Парабола

Определение 14. *Параболой называется множество точек на плоскости, расстояния от каждой из которых до фиксированной точки, называемой фокусом, и до прямой, называемой директрисой, будут одинаковыми.*

Уравнение параболы в каноническом виде:

$$y^2 = 2px.$$

Координаты фокуса F_1: $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, директриса задается уравнением: $x = -\frac{p}{2}$ (см. рис. 5).

Аналогично гиперболе и эллипсу, получим уравнение касательной к параболе:

$$2ydy = 2pdx,$$

$$2y_0(y - y_0) = 2p(x - x_0),$$

$$2y_0y - 2y_0^2 = 2px - 2px_0,$$

$$y_0y = p(x + x_0).$$

Решим задачу:

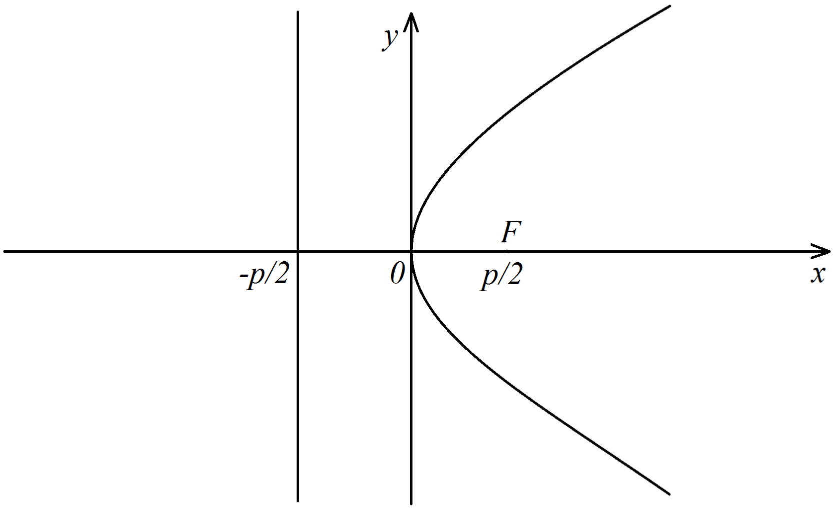

Рис. 5. Парабола

Задача 26. *Парабола задается уравнением:*

$$y^2 = 4x.$$

Для нее найти положение фокуса, уравнение директрисы и найти уравнение касательной в точке $x_0 = 4, y_0 = 4$.

Сразу из уравнения видно:

$$p = 2.$$

Тогда фокус F *имеет координаты:* $x = 1, y = 0$.
Уравнение директрисы: $x = -1$.
Уравнение касательной:

$$4y = 1(x + 4),$$

$$4y - x = 4.$$

Уравнение кривой второго порядка в общем виде

Запишем уравнение кривой второго порядка в общем виде:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0.$$

Можно показать (в следующей лекции будет показано), что для подавляющего большинства случаев (кроме нескольких вырожденных) данное уравнение приводится к виду уравнения либо гиперболы, либо параболы, либо эллипса.

Лекция 6. Канонический вид уравнений 2-го порядка

Приведение кривой второго порядка к каноническому виду

Определение 15. *Уравнение кривой второго порядка в общем виде:*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0.$$

Можно ли для данного уравнения придумать замену координат, чтобы получить уравнение для определенного вида кривой второго порядка: эллипса, параболы или гиперболы?

Исходя из общих геометрических соображений, для некоторой определенной кривой всегда можно подобрать такую систему координат, чтобы сразу в данной системе координат получить уравнение кривой в каноническом виде. Как это осуществить технически?

Выделение полного квадрата означает переход в косоугольную систему координат, нам это неинтересно, будем оставаться в прямоугольной системе координат.

Значит, прежде всего надо повернуть систему координат на определенный угол φ:

$$x = x^{'}\cos\varphi - y^{'}\sin\varphi,$$
$$y = y^{'}\cos\varphi + x^{'}\sin\varphi.$$

Пока что рассмотрим только квадратичную часть изначальной формы. Тогда:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = a_{11}\left(x^{'}\cos\varphi - y^{'}\sin\varphi\right)^2 + 2a_{12}\left(x^{'}\cos\varphi - y^{'}\sin\varphi\right)\cdot$$
$$\cdot\left(y^{'}\cos\varphi + x^{'}\sin\varphi\right) + a_{22}\left(y^{'}\cos\varphi + x^{'}\sin\varphi\right)^2 = a_{11}x^{'2}\cos^2\varphi - 2a_{11}x^{'}y^{'}\cos\varphi\sin\varphi +$$
$$+ a_{11}y^{'2}\sin^2\varphi + 2a_{12}x^{'}y^{'}\cos^2\varphi + 2a_{12}x^{'2}\cos\varphi\sin\varphi - 2a_{12}y^{'2}\cos\varphi\sin\varphi - 2a_{12}x^{'}y^{'}\sin^2\varphi +$$
$$+ a_{22}y^{'2}\cos^2\varphi + 2a_{22}x^{'}y^{'}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}x^{'2}\sin^2\varphi = x^{'2}\left(a_{11}\cos^2\varphi + a_{12}\sin 2\varphi + a_{22}\sin^2\varphi\right) +$$
$$+ x^{'}y^{'}\left(-a_{11}\sin 2\varphi + 2a_{12}\cos 2\varphi + a_{22}\sin 2\varphi\right) + y^{'2}\left(a_{11}\sin^2\varphi - a_{12}\sin 2\varphi + a_{22}\cos^2\varphi\right).$$

Для того, чтобы ушло смежное слагаемое с произведением $x^{'}y^{'}$, нужно потребовать:

$$-a_{11}\sin 2\varphi + 2a_{12}\cos 2\varphi + a_{22}\sin 2\varphi = 0,$$
$$\sin 2\varphi\,(a_{11} - a_{22}) = 2a_{12}\cos 2\varphi.$$

Значит:

$$\frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}.$$

В итоге получим:

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}.$$

Исходное уравнение в переменных x', y' превратится в:

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + b'_1x' + b'_2y' + c' = 0.$$

Из такого уравнения уже можно выделять полный квадрат, оставаясь в прямоугольной системе координат.

Задача 27. *Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка и определить тип кривой:*

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0.$$

Сразу из уравнения:

$$a_{11} = 5, \quad a_{12} = 3, \quad a_{22} = 5.$$

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = \frac{5-5}{6} = 0,$$

откуда:

$$2\varphi = 90^\circ, \quad \varphi = 45^\circ.$$

$$x = x'\frac{1}{\sqrt{2}} - y'\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = y'\frac{1}{\sqrt{2}} + x'\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Подставляем в уравнение:

$$5\left(x'\frac{1}{\sqrt{2}} - y'\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 6\left(x'\frac{1}{\sqrt{2}} - y'\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(y'\frac{1}{\sqrt{2}} + x'\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 5\left(y'\frac{1}{\sqrt{2}} + x'\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 -$$
$$- 16\left(x'\frac{1}{\sqrt{2}} - y'\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 16\left(y'\frac{1}{\sqrt{2}} + x'\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 16 = 5\frac{x'^2}{2} - 5x'y' + 5\frac{y'^2}{2} +$$
$$+6\left(\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2}\right) + 5\left(\frac{x'^2}{2} + x'y' + \frac{y'^2}{2}\right) - 32\frac{x'}{\sqrt{2}} - 16 = 5\frac{x'^2}{2} - 5x'y' + 5\frac{y'^2}{2} + 3x'^2 - 3y'^2 +$$
$$+ 5\frac{x'^2}{2} + 5x'y' + 5\frac{y'^2}{2} - 32\frac{x'}{\sqrt{2}} - 16 = 8x'^2 + 2y'^2 - 16\sqrt{2}x' - 16 = 0.$$

Выделим полный квадрат по переменной x':

$$8\left(x'^2 - 2\sqrt{2}x' + 2\right) - 16 + 2y'^2 - 16 = 0,$$

$$8\left(x' - \sqrt{2}\right)^2 + 2y'^2 - 32 = 0.$$

Введем новые переменные:

$$x'' = x' - \sqrt{2},$$

$$y'' = y'.$$

Уравнение во вновь веденных переменных примет вид:

$$8x^{''2} + 2y^{'2} - 32 = 0,$$

$$\frac{x^{''2}}{4} + \frac{y^{''2}}{16} = 1.$$

Таким образом, мы получили уравнение эллипса в каноническом виде. Новые переменные через изначальные переменные x, y *выражаются из следующих соотношений:*

$$x^{'} = x^{''} + \sqrt{2},$$

$$y^{'} = y^{''},$$

$$x = \frac{x^{''}}{\sqrt{2}} - \frac{y^{''}}{\sqrt{2}} + 1,$$

$$y = \frac{x^{''}}{\sqrt{2}} + \frac{y^{''}}{\sqrt{2}} + 1.$$

Вычислим параметры получившегося эллипса:

$$a^2 = 16, \quad b^2 = 4,$$

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Положения фокусов в новых переменных:

$$y^{''} = \pm 2\sqrt{3}.$$

В изначальных переменных:

$$F1: \quad x = 1 - \sqrt{6}, \quad y = 1 + \sqrt{6},$$

$$F2: \quad x = 1 + \sqrt{6}, \quad y = 1 - \sqrt{6}.$$

Эксцентриситет:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД
ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ