ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД
ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ШИШКИН
АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ФИЛИППОВУ ЕКАТЕРИНУ АЛЕКСАНДРОВНУ

Содержание

Лекция 1

Понятие вектора

Замечание 1

$$asinx + bcosx = \sqrt{a^2 + b^2} \times \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} sinx + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} cosx\right)$$

Выберем $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = cos\varphi$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = sin\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, тогда

$$asinx + bcosx = \sin(x + \varphi)$$

Следовательно:

$$sinx + cosx = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Замечание 2

$$sin\frac{1}{x} \neq cos\frac{1}{x}, x \to \infty$$

$$cos\frac{1}{x} = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) + 1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Приращение функции в данной точке:

$$A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где A – производная функции в данной точке

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = \alpha(0) \text{ - условие непрерывности функции}$$

Числовой осью называется прямая, на которой задано положительное направление, т.О, называемая началом отсчета, и масштабный отрезок.
Полярная ось – это луч, выходящий из полюса (т.О), на котором задан масштабный отрезок.
Координата вектора – это проекция вектора на числовые оси.
Величиной вектора на оси называется число, равное длине этого вектора со знаком «+», если направление вектора совпадает с направлением оси, и со знаком «-», если они имеют разные направления.

Декартова система координат

Декартовой прямоугольной системой координат на плоскости называется упорядоченная система из двух взаимно перпендикулярных числовых осей, занумерованных в каком-либо порядке, с заданной линейной единицей для измерения длин.

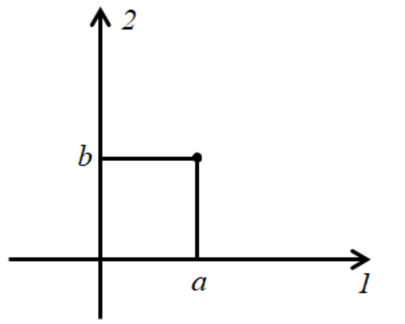


Рис.1 Изображение точки на плоскости в декартовой системе координат

Полярная система координат

Полярная система координат определяется заданием некоторой точки О, называемой полюсом, исходящего из этой точки луча, называемого полярной осью, и масштаба для измерения длин. При задании полярной системы должно быть сказано, какие повороты вокруг точки О считаются положительными (против часовой стрелки) и отрицательными (по часовой стрелке).

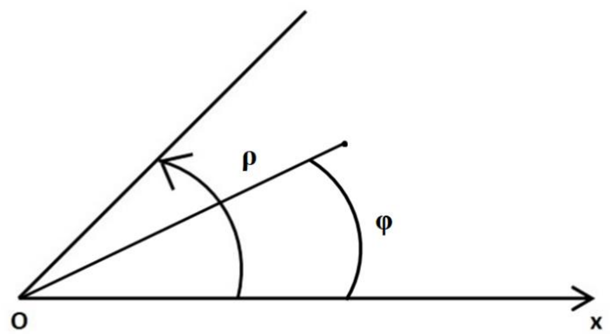


Рис.2 Изображение точки на плоскости в полярной системе координат

Проекция вектора на числовую ось

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ **на числовую ось** $\boldsymbol{x}$ называется число, равное величине $\overrightarrow{A_xB_x}$, где точка A_x является проекцией точки A на ось x, а B_x – проекцией точки B на эту же ось.

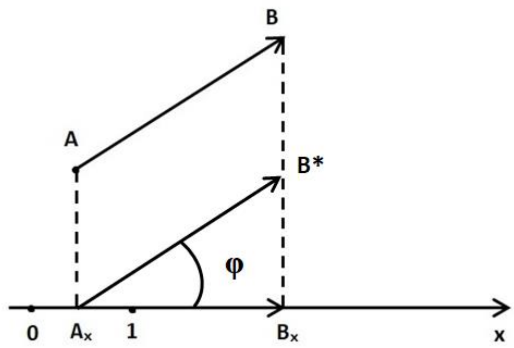


Рис.3 Изображение проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось x

$\text{Пр}_{Ox}\overrightarrow{AB} = A_xB_x = \left|\overrightarrow{A_xB^*}\right| \cdot cos\varphi,\ \left|\overrightarrow{A_xB^*}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$

Задача 1

Дана трехмерная система координат, и в ней задан вектор. Может ли он составлять углы $\alpha = \frac{\pi}{6}$ с координатной осью $\boldsymbol{x}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$ с осью $\boldsymbol{y}$?

Для любого единичного вектора должно выполняться следующее соотношение:

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$$

Для решения задачи нужно посмотреть существование угла γ. Сумма первых двух членов больше единицы, а квадрат любой величины не может быть отрицательным, поэтому данное тождество не выполняется. Следовательно, вектор не может составлять данные углы с координатными осями.

Коллинеарные векторы

Коллинеарными векторами называются ненулевые векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых.

Линейно зависимые векторы

Векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ называются **линейно зависимыми**, если существуют действительные числа $c^1, c^2, \dots, c^n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что:

$$c^1\overrightarrow{a_1} + c^2\overrightarrow{a_2} + \cdots + c^n\overrightarrow{a_n} = \vec{0} \quad (*)$$

т.е., из этих векторов можно составить нулевую линейную комбинацию.

Векторы, не являющиеся линейно зависимыми, являются **линейно независимыми**. Это значит, что для данного набора векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ нельзя найти такой набор чисел $c^1, c^2, \dots, c^n$, чтобы выполнялось равенство (*).

Задача 2

Длина вектора $\vec{a}$ равна $|\vec{a}| = 13$, длина вектора $\vec{b}$ равна$|\vec{b}| = 19$. Сумма этих векторов равна $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Найти разность этих векторов $|\vec{a} - \vec{b}|$ =?

Вспомним определение суммы двух векторов:

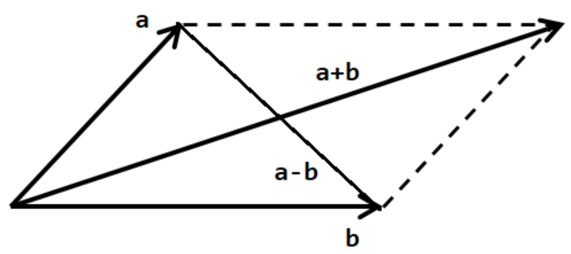


Рис.4 Сложение двух векторов по правилу параллелограмма

Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех четырех сторон. Из этой теоремы следует $|\vec{a} - \vec{b}| = 22$.

Задача 3

Дан вектор $\vec{c}$ в виде разложения по базису $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$: $\vec{c} = 16\vec{\imath} - 15\vec{\jmath} + 12\vec{k}$. Найти разложение по этому же базису вектора $\vec{d} \uparrow\downarrow \vec{c}, |\vec{d}| = 75$.

Найдем модуль вектора $\vec{c} = \sqrt{16^2 + 15^2 + 12^2} = 25$. Тогда $\vec{d} = 75\left(-\frac{16}{25}\vec{\imath} + \frac{15}{25}\vec{\jmath} - \frac{12}{25}\vec{k}\right) = -48\vec{\imath} + 45\vec{\jmath} - 36\vec{k}$.

Задача 4

Даны векторы $\vec{p} = \{2; -3\}, \vec{q} = \{1; 2\}, \vec{a} = \{9; 4\}$. Найти разложение вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{p}, \vec{q}$. Являются ли векторы $\vec{p}, \vec{q}$ базисом?

Возьмем линейную комбинацию $\vec{p}, \vec{q}$ и приравняем нулевому элементу. Получим верное тождество, следовательно, являются базисом.

Нужно получить следующее выражение: $\vec{a} = x\vec{p} + y\vec{q}$. Если векторы равны, то равны и их координаты в любом базисе, поэтому данное выражение можно записать в виде: $\begin{cases} 9 = 2x + y \\ 4 = -3x + 2y \end{cases}$. Решив эту систему линейных уравнений, находим координаты и имеем разложение вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{p}, \vec{q}$.

Задача 5

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60°. Зная, что $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 6$, определить модуль вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot cos0° = |\vec{a}|^2$. Для решения задачи достаточно взять скалярный квадрат суммы $\overrightarrow{(a + b + c)}^2$. В результате получим $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 10$.

Задача 6

Даны вершины треугольника $A(3; 2; -3), B(5; 1; -1), C(1; -2; 1)$. Определить его внешний угол при вершине A.

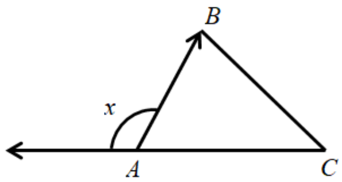


Рис.5 Изображение треугольника на плоскости

$$(\overrightarrow{AB}, -\overrightarrow{AC}) = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot cosx$$

Из этого следует $x = \arccos\left(-\frac{4}{9}\right)$.

Задача 7

Дан вектор $\vec{s} = \{4; -3; 2\}$. Найти проекцию вектора $\vec{s}$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

По определению скалярного произведения $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}$. Из этого следует $\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|}$.

Способ 1. Выберем вектор $\vec{a}(1; 1; 1)$. Скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{s}) = 4 - 3 + 2 = 3$. Тогда $\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{s} = \frac{(\vec{a},\vec{s})}{|\vec{a}|} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Способ 2. Задачу можно решить и другим способом. Можно описать направление в пространстве с помощью единичного вектора. А единичный вектор считается по формуле $cos^2\alpha + cos^2\alpha + cos^2\alpha = 1$. Отсюда $cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. И тем самым мы задали направление $\vec{e} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$. По формуле для проекции, полученной выше, придем к тому же ответу.

Задача 8

Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}, \vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}, \vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$. Вычислить $\text{Пр}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$.

$(\vec{a} + \vec{b}) = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$

$$\text{Пр}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{\vec{c}(\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{c}|}, |\vec{c}| = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13$$

$$\text{Пр}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{12 + 8 - 72}{13} = -4$$

Тройка векторов

Тройкой векторов называются три вектора, если указано, какой из них является первым, вторым, третьим, записанные в порядке нумерации.

Тройка некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется **правой**, если после приведения их к общему началу, кратчайший поворот вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$ совершающимся против часовой стрелки.

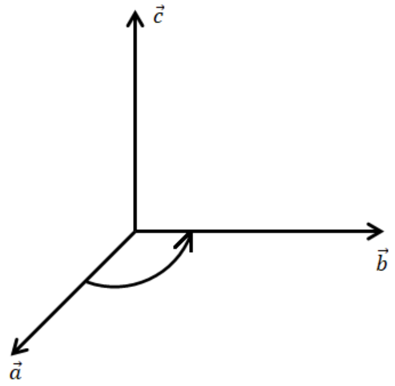


Рис.6 Правая тройка векторов

Возьмем в качестве базиса три вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, образующих правую тройку. Обозначим

$\begin{array}{ccc} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{i} & \vec{k} & \vec{j} \end{array}$ – появляется левая тройка векторов.

$\begin{array}{ccc} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{j} & \vec{i} & \vec{k} \end{array}$ – левая тройка, $\begin{array}{ccc} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{i}+\vec{j} & \vec{i}-\vec{j} & \vec{j} \end{array}$ – компланарная тройка векторов, поэтому не правая и не левая, $\begin{array}{ccc} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{i}+\vec{j} & \vec{j} & \vec{k} \end{array}$ – правая тройка.

Задача 9

Известны длины векторов $|\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 2$. Известно скалярное произведение двух векторов $(\vec{a}, \vec{b}) = 12$. Найти длину векторного произведения $|[\vec{a}, \vec{b}]|$.

По определению скалярного произведения:
$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos(\vec{a},\vec{b})$.Отсюда находим угол между векторами и подставляем в формулу для векторного произведения: $[\vec{a},\vec{b}] = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot sin(\vec{a},\vec{b})$.

Задача 10

Даны 2 вектора $\vec{a} = \{3;-1;-2\}, \vec{b} = \{1;2;-1\}$. Найти координаты вектора $[\vec{a},\vec{b}]$.

Посчитав определитель $[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, решим задачу.

Задача 11

Доказать: $[\vec{a},\vec{b}]^2 + (\vec{a},\vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2$ (**)

Доказательство: Из определения векторного произведения $|[\vec{a},\vec{b}]| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot sin(\vec{a},\vec{b})$.
Из определения скалярного произведения: $|(\vec{a},\vec{b})| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|cos(\vec{a},\vec{b})|$.

Вспомним следующее свойство: $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$.

Тогда $[\vec{a},\vec{b}]^2 = \left(|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot sin(\vec{a},\vec{b})\right)^2$ и $(\vec{a},\vec{b})^2 = \left(|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos(\vec{a},\vec{b})\right)^2$. Сложим левые и правые части этих равенств, применим свойство $(\vec{a},\vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2$ и основное тригонометрическое тождество. Тогда получим (**). Ч.т.д.

Задача 12

Даны координаты вершин треугольника $A(1;-1;2), B(5;-6;2), C(1;3;-1)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

Возьмем два вектора $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, выходящие из вершины А. Тогда длина векторного произведения $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ будет площадью параллелограмма. Если разделить эту площадь на 2, то получим площадь нашего треугольника. А площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|h = \frac{S_{\text{парал.}}}{2} = \frac{25}{2}, |\overrightarrow{AC}| = 5$. Из этого можно найти высоту h=5.

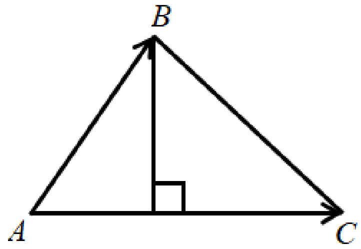


Рис.7 Рисунок к задаче 12

Смешанное произведение

Задана тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Известно, что это правая тройка векторов и эти векторы взаимно ортогональны друг другу. Также известно $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 3$. Найти, чему равно смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

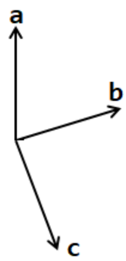


Рис.8 Изображение взаимно ортогональных векторов

По определению модуль смешанного произведения – объем параллелепипеда, тогда $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$.

Задача 13

Доказать: $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c})(\vec{c} + \vec{a}) = 2\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Доказательство: по определению смешанного произведения, воспользовавшись свойствами векторного и скалярного произведений, получим $\left([(\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c})](\vec{c} + \vec{a})\right) = \left([\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}], (\vec{c} + \vec{a})\right) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{a} + \vec{a}\vec{c}\vec{c} + \vec{a}\vec{c}\vec{a} + \vec{b}\vec{c}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}\vec{a} = 2\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ (здесь учтено, что произведение компланарных векторов дает 0). Ч.т.д.

Лекция 2

Прямая на плоскости и в пространстве

Введем прямоугольную декартову систему координат. В этой системе координат прямую можно описать линейным уравнением вида:

$$Ax + By + C = 0 \text{ (*)}$$

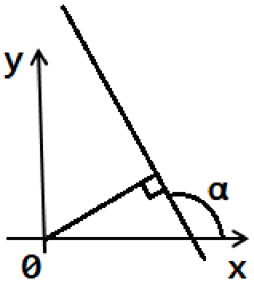


Рис.9 Изображение прямой в декартовой системе координат

В заданной системе координат нарисованная прямая опишется строго определенным единственным уравнением (*). Уравнению данного вида будет соответствовать единственная прямая.

Уравнение (*) остается неизменным, если мы умножаем уравнение на некоторое число, отличное от нуля.

Уравнение прямой в отрезках на осях: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Если мы поделим (*) на $\sqrt{A^2 + B^2}$: $\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$, тогда коэффициенты при x и при y обладают следующим свойством: если возвести в квадрат эти коэффициенты и сложить, то получится единица, а это значит, что это косинус и синус угла, который прямая образовывает с положительным направлением оси x:

$x cos\alpha + y sin\alpha - p = 0$ (p – расстояние от начала координат до прямой) – нормированное уравнение прямой.

Задача 1

Найти проекцию точки $P(-6;4)$ на прямую $4x-5y+3=0$ (**).

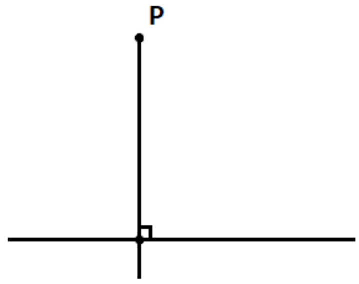


Рис.10 Изображение прямой, проходящей через данную точку, перпендикулярно к заданной прямой

Чтобы найти точку пересечения, надо написать уравнение прямой, проходящей через точку P, перпендикулярно к заданной прямой, а потом совместно решить систему уравнений двух взаимно перпендикулярных прямых.

Прямая, проходящая через данную точку, имеет вид:

$$y-4=k(x+6), x_0=-6, y_0=4, k \text{ – угловой коэффициент.}$$

Если две прямые перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно –1.

Из (**) $k=\frac{4}{5}$, значит, $k_1=-\frac{5}{4}$.

Уравнение заданной прямой: $y=\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}$. Уравнение прямой, перпендикулярной к данной: $y=-\frac{5}{4}x-\frac{30}{4}+4=-\frac{5}{4}x-\frac{16}{4}$. Приравнивая правые части этих уравнений, получаем координаты проекции точки P: $P'(-2;-1)$.

Задача 2

Дана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;1)$ под углом 45° к данной прямой.

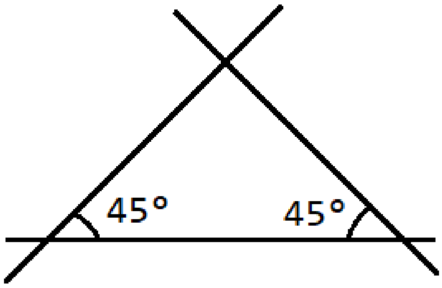


Рис.11 Прямые, проходящие под углом 45° к заданной прямой, из данной точки

Будем искать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; 1)$ и составляющей заданный угол 45° с прямой, определяемой уравнением $2x + 3y + 4 = 0$, в форме:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 1 = k(x - 2),$$

эта прямая проходит через точку $M_0(2; 1)$, и нам остается выбрать ее угловой коэффициент k так, чтобы она составляла угол 45° с прямой $2x + 3y + 4 = 0$.

Для прямых, пересекающихся под углом φ, с заданными угловыми коэффициентами k, k_1, существует формула:

$$\pm tg\varphi = \frac{k - k_1}{1 + kk_1}$$

Из последнего уравнения определяем угловой коэффициент искомой прямой: $k - k_1 = \pm tg\varphi \pm kk_1 tg\varphi$, и, стало быть, при $(1 \pm k_1 tg\varphi) \neq 0$ получим

$$k = \frac{k_1 \pm tg\varphi}{1 \mp k_1 tg\varphi} = \frac{-\frac{2}{3} \pm 1}{1 \mp \left(-\frac{2}{3}\right)} = \left\{-5; \frac{1}{5}\right\}$$

Подставив k в $y - 1 = k(x - 2)$, получаем уравнения прямых, проходящих через точку $M_0(2; 1)$ под углом 45° к данной прямой:

$$x - 5y + 3 = 0 \text{ или } 5x + y - 11 = 0$$

Задача 3

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $C(-5;4)$, зная, что длина ее отрезка, заключенного между прямыми $x + 2y + 1 = 0,\ x + 2y - 1 = 0$, равна 5.

Если расстояние между данными прямыми больше 5, то задача решений не имеет. Если равно 5, то единственное решение, меньше 5 – два решения.

В данной задаче расстояние между параллельными прямыми меньше 5.

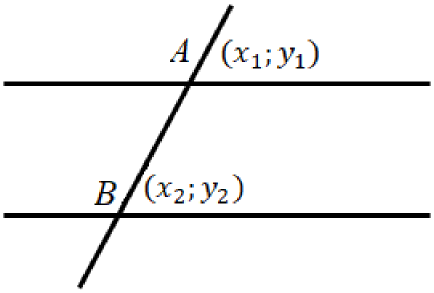


Рис.12 Пересечение параллельных прямых искомой прямой

Искомая прямая задается уравнением $y - 4 = k(x + 5)$. Найдем угловой коэффициент k. Решаем это уравнение совместно с уравнением $x + 2y + 1 = 0$:

$$\begin{cases} x_1 + 2y_1 + 1 = 0 \\ y_1 - 4 = k(x_1 + 5) \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем координаты первой точки пересечения $(x_1;y_1)$. Аналогично, решаем систему совместно с уравнением $x + 2y - 1 = 0$ и получаем координаты второй точки пересечения $(x_2;y_2)$.

Далее, зная, что длина отрезка, заключенного между параллельными прямыми, равна 5, запишем:

$$\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2} = 5$$

Получаем уравнение относительно углового коэффициента k:

$$\frac{80(1+k)^2}{(1+2k)^2} + \frac{20(3k+2)^2}{(1+2k)^2} - \frac{80(1+k)(3k+2)}{(1+2k)^2} - \frac{16(3k+2)}{1+2k} + \frac{32(1+k)}{1+2k} = 21$$

Решения этого уравнения: $k = \{-\frac{7}{24}; -\frac{3}{4}\}$. Следовательно, уравнение прямой:

$$3x + 4y - 1 = 0 \text{ или } 7x + 24y - 61 = 0$$

Задача 4

Доказать, что прямая $2x - 3y + 6 = 0$ не пересекает отрезка, ограниченного точками $M_1(-2; -3)$ и $M_2(1; -2)$.

Запишем уравнение прямой в нормированном виде:

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0$$

Подставим в левую часть сначала координаты точки M_1, а затем координаты точки M_2, а затем найдем отклонения δ_{M_1} и δ_{M_2} соответственно точек M_1 и M_2 от данной прямой:

$$\delta_{M_1} = -\frac{11}{\sqrt{13}}, \delta_{M_2} = -\frac{14}{\sqrt{13}}$$

Для того, чтобы данная прямая пересекала отрезок M_1M_2, необходимо и достаточно, чтобы точки M_1 и M_2 лежали по разные стороны от этой прямой, т.е. необходимо и достаточно, чтобы отклонения δ_{M_1} и δ_{M_2} имели разные знаки, но т.к. они имеют одинаковый знак " $-$ ", то прямая $2x - 3y + 6 = 0$ не пересекает отрезок M_1M_2. Ч.т.д.

Задача 5

Даны вершины треугольника $A(-10; -13), B(-2; 3), C(2; 1)$. Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины C.

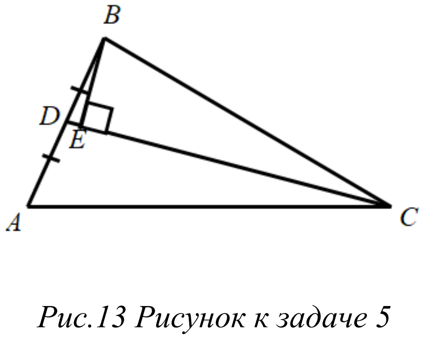


Рис.13 Рисунок к задаче 5

Координаты точки $D\left(\frac{-10-2}{2};\frac{-13+3}{2}\right)=(-6;-5)$.

Запишем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

Для *CD*: $\frac{x+6}{2+6}=\frac{y+5}{1+5}$, т.е. $\frac{x+6}{8}=\frac{y+5}{6}$. Следовательно, прямая *CD* задается уравнением $3x-4y-2=0$.

Расстояние от точки *B* до *CD*: $\rho(B,CD)=\frac{|3\cdot(-2)+3\cdot(-4)-2|}{\sqrt{9+16}}=4=BE$

Задача 6

Составить уравнения биссектрис углов, образованных двумя пересекающимися прямыми: $x-3y+5=0,\ 3x-y-2=0$.

Коэффициенты при *x*, *y* не пропорциональны, следовательно, прямые пересекаются и образуют 4 угла.

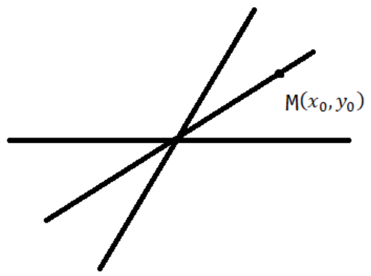


Рис.14 Изображение двух пересекающихся прямых и биссектрисы

Выберем на биссектрисе точку $M(x_0,y_0)$ и запишем формулу расстояния от этой точки до любой из двух прямых:

$$\frac{|1x_0-3y_0+5|}{\sqrt{1+9}}=\frac{|3x_0-y_0-2|}{\sqrt{1+9}}$$

«Снимая» модуль, получаем: $4x-4y+3=0, 2x+2y-7=0$

Задача 7

Определить, какой из углов, острый или тупой, образованных двумя прямыми $3x - 2y + 5 = 0$ (1) и $2x + y - 3 = 0$ (2), содержит начало координат.

В уравнении (1) свободный коэффициент со знаком " $+$ ", поэтому нормаль к этой прямой направлена, как на рис.15 (от прямой к началу координат). Во втором уравнении свободный член со знаком " $-$ ", поэтому нормаль направлена от начала координат к прямой. По теореме об углах с соответственно перпендикулярными сторонами находим еще два равных угла (см. рис.15).

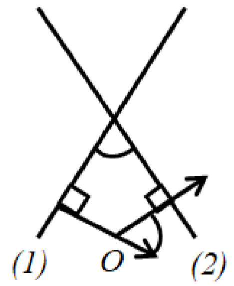


Рис.15 Рисунок к задаче 7

$$\overrightarrow{n_1} = \{3; -2\}, \overrightarrow{n_2} = \{2; 1\}$$

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}$$

Знак косинуса угла между нормалями определяется знаком скалярного произведения $sign\ cos\varphi = siqn(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = sign(6 - 2) > 0$. Следовательно, угол острый.

Канонические уравнения прямой в пространстве

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{l} = t,$$

$$\vec{a} = \{m; n; l\} - \text{направляющий вектор}, t - \text{параметр}$$

Эта запись считается условной (так как содержатся нули в знаменателях).

Уравнение плоскости в декартовой системе координат

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Если дано такое уравнение, то оно определяет в заданной системе координат единственную плоскость. Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между геометрическим образом и его описанием в виде уравнения.

Вектор с координатами $\{A;B;C\}$ имеет геометрический смысл. Это вектор, перпендикулярный к данной плоскости. Если, помимо этого, известна точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. То можно записать уравнение плоскости. Для этого зададим произвольный вектор $\overrightarrow{M_0M}$ в плоскости. Любой вектор, принадлежащий плоскости, будет ортогонален вектору нормали $\vec{n}$.

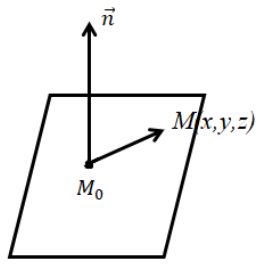


Рис.16 Изображение вектора, лежащего в плоскости и вектора нормали, ортогонального этой плоскости

Условие ортогональности (равенство нулю скалярного произведения): $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Получили уравнение плоскости, проходящей через заданную точку M_0 и ортогональной к заданному вектору $\vec{n}$.

Аналогично случаю прямой на плоскости, можно провести тождественное преобразование уравнения плоскости, поделив левую и правую части на $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$:

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

Тогда сумма квадратов коэффициентов при *x,y,z* даст единицу, следовательно, это направляющие косинусы $cos\alpha, cos\beta, cos\gamma$. Поэтому плоскость можно описать еще одним уравнением:

$$cos\alpha x + cos\beta y + cos\gamma z - p = 0$$

Задача 8

Даны точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_2(4;-2;-1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1, перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2} = \{1;-1;-3\}, A = 1, B = -1, C = -3$. Подставляя эти коэффициенты в уравнение плоскости и учитывая, что плоскость проходит через точку M_1, получаем следующее уравнение:

$$x - y - 3z + 2 = 0$$

Задача 9

Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(3;-2;-7)$ параллельно плоскости $2\mathrm{x} - 3\mathrm{z} + 5 = 0$.

Запишем уравнение плоскости, проходящей через данную точку M_1:

$$2(x-3) - 3(z+7) = 0$$

$$2x - 3z - 27 = 0$$

Получили уравнение искомой плоскости, которая параллельна данной (коэффициенты x,z пропорциональны).

Задача 10

Две грани куба лежат на плоскостях $2x - 2y + z - 1 = 0,\ 2x - 2y + z + 5 = 0$. Вычислить объем этого куба.

Запишем нормированные уравнения плоскости $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{1}{3} = 0, \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{5}{3} = 0$.

Расстояния между плоскостями: $\frac{5}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = 2$. Следовательно, $V = 2^3 = 8$.

Задача 11

Определить, лежит ли начало координат внутри острого или тупого угла, образованного двумя плоскостями $x - 2y + 3z - 5 = 0,\ 2x - y - z + 3 = 0.$

Координаты векторов нормалей: $\overrightarrow{n_1} = \{1; -2; 3\},:\ \overrightarrow{n_2} = \{2; -1; -1\}$. По аналогии с задачей 7, знак косинуса угла между нормалями определяется знаком скалярного произведения $sign\ cos\varphi = siqn(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = sign(2 + 2 - 3) = 1 > 0$. Следовательно, угол острый.

Параметрические уравнения прямой

Вспомним канонические уравнения прямой. Если известна одна точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющий вектор $\vec{a} = \{l; m; n\}$, то прямая может быть определена уравнениями вида

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

Обозначим буквой *t*каждое из равных отношений в канонических уравнениях:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t$$

Отсюда $x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, z = z_0 + nt$. Это – параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в направлении вектора $\vec{a} = \{l; m; n\}$.

Задача 12

Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2; 0; -3)$ параллельно:

1) вектору $\vec{a} = \{2; -3; 5\}$;
2) прямой $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$;
3) оси *Ox*;
4) оси *Oy*;
5) оси *Oz*.

Во всех пяти случаях числители канонических уравнений будут одинаковыми, т.к. координаты точки $M_1(2;0;-3)$ не изменяются.

1) $\frac{x-2}{2} = -\frac{y}{3} = \frac{z+3}{5}$; 4) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}$;

2) $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$; 5) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{1}$;

3) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{0}$;

Задача 13

Даны вершины треугольника $A(3;-1;-1), B(1;2;-7)$ и $C(-5;14;-3)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.

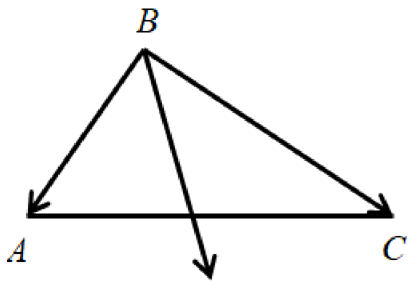


Рис.17 Рисунок к задаче 13

Идея: Т.к. нам известны координаты вершин треугольника, то мы можем найти координаты вектора $\overrightarrow{BA} = \{2;-3;6\}$ и $\overrightarrow{BC} = \{-6;12;4\}$. Отсюда следует, что вектор $\overrightarrow{BC}$ в два раза длиннее вектора $\overrightarrow{BA}$. Далее можно вектор $\overrightarrow{BA}$ удлинить в два раза, т.е. сделать векторы одинаковыми, и тогда их суммой будет диагональ ромба, которая является искомым направляющим вектором. Затем записать канонические уравнения.

Задача 14

Составить канонические уравнения прямых: $x-2y+3z-4=0, 3x+2y-5z-4=0$.

Чтобы записать канонические уравнения, нам нужен направляющий вектор. Нам известны плоскости, а значит, известны и нормали к ним. Вектор, который перпендикулярен этим нормалям – векторное произведение.

Итак, направляющий вектор $\vec{a} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}]$.

Вернемся к системе $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}$. Т.к. неизвестных – три, а уравнений – два, то выберем $z = 0$. Тогда получим $\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$. Решение этой системы $x = 2, y = -1$. Таким образом, мы уже знаем одну точку прямой: $M_0(2; -1; 0)$.

Теперь найдем направляющий вектор. Имеем $\overrightarrow{n_1} = \{1; -2; 3\}, \overrightarrow{n_2} = \{3; 2; -5\}$; отсюда $\vec{a} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = \{4; 14; 8\}$, т.е. $l = 4, m = 14, n = 8$.

Таким образом, канонические уравнения прямой: $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{14} = \frac{z}{8}$ или $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$.

Критерий пересечения прямых через канонические уравнения

Для того, чтобы две прямые $l_1(\overrightarrow{a_1}, M_1)$ и $l_2(\overrightarrow{a_2}, M_2)$ пересекались, необходимо и достаточно, чтобы:

1) векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{M_1M_2}$ были компланарны;
2) векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ не должны быть коллинеарны.

Задача 15

Даны прямые $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}, \frac{x-3}{l} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$; при каком значении l они пересекаются?

Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов: их смешанное произведение равно нулю.

Даже не зная l можно сказать, что направляющие векторы не коллинеарны (т.к. нет пропорциональности).

Из канонических уравнений направляющие векторы $\overrightarrow{a_1} = \{2; -3; 4\}, \overrightarrow{a_2} = \{l; 4; 2\}$. Затем возьмем точку $M_1(-2; 0; 1)$, принадлежащую первой плоскости, и точку $M_2(3; 1; 7)$, принадлежащую второй. Тогда $\overrightarrow{M_1M_2} = \{5; 1; 6\}$. Теперь используем необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ l & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0, \text{ следовательно, } l = 3.$$

Задача 16

Составить уравнения движения точки $M(x; y; z)$, которая, имея начальное положение $M_0(3; -1; -5)$, движется прямолинейно и равномерно в направлении вектора $\vec{s} = \{-2; 6; 3\}$ со скоростью $v = 21$.

$$|\vec{s}| = \sqrt{4 + 36 + 9} = 7$$

Тогда вектор скорости: $3 \cdot \vec{s} = \vec{v} = \{-6; 18; 9\}$.

Запишем параметрические уравнения прямой: $x = 3 - 6t, y = -1 + 18t, z = -5 + 9t$, где параметр t – время, $t \in [t_0; +\infty)$. Это и есть уравнения движения точки.

Замечание 1

Плоскость пересекается прямой. Нужно найти угол φ между данной прямой и плоскостью.

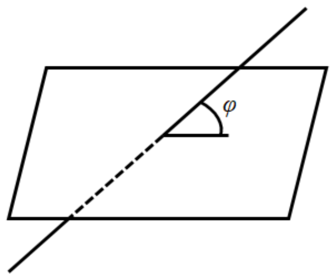


Рис.18 Изображение пересечения плоскости прямой

Для нахождения угла нужно использовать формулу: $sin\varphi = \frac{|(\vec{a},\vec{n})|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|}$

Замечание 2

Расстояние от плоскости L до точки M_0: $\rho = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Задача 17

Доказать, что прямая $x = 3t - 2, y = -4t + 1, z = 4t - 5$ параллельна плоскости $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

Вектор нормали к плоскости $\vec{n} = \{4; -3; -6\}$. Направляющий вектор прямой $\vec{a} = \{3; -4; 4\}$. Т.к. вектор нормали перпендикулярен к плоскости, а направляющий вектор сонаправлен с прямой, то, если вектор нормали перпендикулярен к прямой, то она параллельна плоскости. Для проверки этого нужно посчитать скалярное произведение и убедиться, что оно будет равно нулю.

$$(\vec{a}, \vec{n}) = 12 + 12 - 24 = 0$$

Ч.т.д.

Задача 18

Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2; -3; -5)$ перпендикулярно к плоскости $6x - 3y - 5z + 2 = 0$.

Направляющий вектор $\vec{a} = \{6; -3; -5\}$. Тогда канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2; -3; -5)$:

$$\frac{x - 2}{6} = \frac{y + 3}{-3} = \frac{z + 5}{-5}$$

Задача 19

Найти проекцию точки $P(2; -1; 3)$ на прямую $\begin{cases} x = 3t \\ y = 5t - 7. \\ z = 2t + 2 \end{cases}$

Для решения задачи надо через данную точку провести плоскость, которая будет перпендикулярна к прямой. Тогда они пересекутся в какой-нибудь точке, и остается найти расстояние между двумя точками.

Уравнение плоскости: $3(x - 2) + 5(y + 1) + 2(z - 3) = 0$. Подставляем x,y,z, тогда $t = 1$. Следовательно, координаты точки $A(3; -2; 4)$. И расстояние между точками A и P: $\rho = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$.

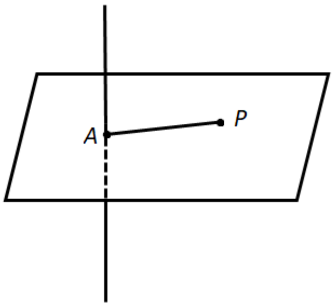


Рис.19 Рисунок к задаче 19

Лекция 3

Кривые второго порядка

Эллипс

В канонической системе координат (СК, в которой уравнение эллипса имеет наиболее простой вид) фокусы эллипса находятся либо на оси x, либо на оси y симметрично относительно начала координат. Само уравнение в этой СК называется каноническим уравнением эллипса.

Есть 2 подхода:

1) В первой СК каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a>b$, а во второй СК: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a<b$.
2) В первой СК каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, а во второй СК: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1, a>b$ в обеих СК.

В произвольной СК уравнение 2-го порядка имеет вид: $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c=0$. Для решения таких задач используют преобразование СК: поворот на заданный угол или параллельный сдвиг.

$J_1=a_{11}+a_{22},\ J_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},\ J_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix}$ – это инварианты данного уравнения. Их можно посчитать для канонических уравнений. Если инвариант J_2 положителен, то уравнение эллиптического типа, если отрицателен – гиперболического типа, если равен нулю – параболического типа.

Задача 1

Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что его большая ось равна 20, а эксцентриситет $\varepsilon=3/5$.

Имеется первая каноническая СК. Тогда уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$$

Задача 2

Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что расстояние между его директрисами равно 32/3 и эксцентриситет $\varepsilon = 3/4$.

В данной задаче используется вторая каноническая СК. Уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$$

Гипербола

Задача 3

Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат (первая каноническая СК), зная, кроме того, что уравнение асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами 2c $= 20$.

Уравнение асимптот: $y = \pm\frac{b}{a}$. Из этого получаем отношение b к a. Далее, $c^2 = a^2 + b^2$. Получаем систему двух уравнений, из которой $a = 6$, $b = 8$.

Тогда уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$.

Задача 4

Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат (вторая каноническая СК), зная, кроме того, что расстояние между директрисами равно 50/7 и эксцентриситет $\varepsilon = 7/5$.

Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{25}=-1$.

Задача 5

Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = -144$. Найти: 1) полуоси a и b; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот; 5) уравнения директрис.

1) $a = 3, b = 4$
2) $c = 5$, следовательно, $F_1(0{,}5), F_2(0, -5)$
3) $\varepsilon = 5/4$
4) $y = \pm\frac{4}{3}x$
5) $D = \pm\frac{b}{\varepsilon} = \pm\frac{16}{5}$

Парабола

Для параболы 4 канонических уравнения.

Задача 6

Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что парабола расположена в верхней полуплоскости симметрично относительно оси Oy и ее параметр $p = 1/4$.

Каноническое уравнение параболы: $x^2 = \frac{1}{2}y$.

Задача 7

Установить, что уравнение определяет параболу, и найти координаты ее вершины A, величину параметра p и уравнение директрисы $y^2 = 4x - 8$.

$A(2; 0); p = 2; D: x - 1 = 0$

Поверхности 2-го порядка

Каноническое уравнение эллипсоида: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Однополостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Двуполостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

Конус (коническая поверхность): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

Эллиптический параболоид (+)/гиперболический параболоид (–): $2z=\frac{x^2}{p}\pm\frac{y^2}{q}$.

Цилиндрическая поверхность: $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$.

1) Если коэффициенты общего уравнения 2-го порядка при x^2, y^2, z^2 одного знака и произведение этих переменных отсутствует, то это уравнение эллипсоида.
2) Если коэффициенты при x^2, y^2, z^2 разных знаков и произведение этих переменных отсутствует, то это уравнение гиперболоида.
3) Если присутствуют квадраты двух переменных, а третья переменная не входит ни в одно из смешанных произведений, то это уравнение параболоида.
4) Если уравнение второй степени однородное, то это уравнение конической поверхности.
5) Если в уравнении отсутствует одна переменная, то это уравнение цилиндрической поверхности.

Примеры

$2x^2+3y^2+7z^2-20x+6y-14z-10=0$ – эллипсоид.

$-2x^2+3y^2+7z^2-20x+6y-14z-10=0$ – гиперболоид.

$z=xy$ – параболоид.

$x^2-yz=0$ – коническая поверхность.

$y^2=\sqrt{3}z-x+2$ – параболическая/цилиндрическая поверхность

Каноническое уравнение прямой

$z^2=2xy$. Как записать каноническое уравнение?

Если произвести повороты на 45°, то получим каноническое уравнение конуса: ${z'}^2 = {x'}^2 - {y'}^2$

$z = 2xy$. Поворот на тот же угол, получаем каноническое уравнение: $z' = {x'}^2 - {y'}^2$ – гиперболический параболоид.

Замечание

Типичная ошибка: задана некая поверхность *F(x,y,z) = 0*. Нужно найти сечение какой-то плоскостью, например, *z = 0*.

Ответ: $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Задача 8

Доказать, что эллиптический параболоид $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 2y$ имеет одну общую точку с плоскостью $2x - 2y - z - 10 = 0$, и найти ее координаты.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 2y \\ 2x - 2y - z - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 2y \\ 2y = 2x - z - 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 2x - z - 10 \\ 2y = 2x - z - 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 2x + z = -10 \\ 2y = 2x - z - 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{9}(x-9)^2 + \frac{1}{4}(z+2)^2 - 10 = -10 \\ 2y = 2x - z - 10 \end{cases}$$

, т.о., эллиптический параболоид: $\frac{1}{9}(x-9)^2 + \frac{1}{4}(z+2)^2 = 0$. Сумма квадратов может равняться нулю тогда и только тогда, когда выражения в скобках равны нулю. Отсюда следует: $x = 9, z = -2$. Подставив это во второе уравнение системы, получим $y = 5$. Таким образом, координаты общей точки: $(9; 5; -2)$.

Задача 9

Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к вектору $\vec{n} = \{2; -1; -2\}$ и касающейся эллиптического параболоида $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 2z$.

Уравнение: $2x - y - 2z - 4 = 0$.

Лекция 4

Кривые, заданные параметрически

Точки возможного экстремума t: те значения, где $\dot{x}, \dot{y}$ равны нулю, либо не существуют.

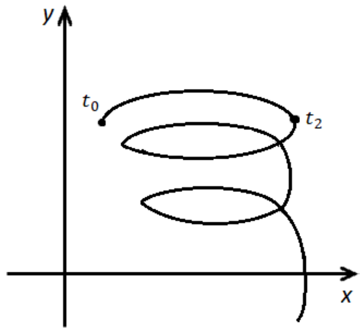


Рис.20 Изображение кривой на плоскости

Как найти экстремум в точке t_0? Если при переходе через t_0, в сторону возрастания t, $\dot{x}$ не меняет знака, а $\dot{y}$ меняет знак с «+» на «–», то экстремум – максимум, с «–» на «+» – минимум.

Декартов лист

Дано уравнение: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ $(a > 0)$. Это кривая Декарта (Декартов лист).

Введем следующую зависимость $y = xt$. Тогда получим уравнение: $(t^3 + 1)x^3 - 3axt = 0$. Решения: $x = 0, y = 0$(частный случай общего решения), либо $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}$.

t	$-\infty$	-1	-1	$+\infty$
x	0	$+\infty$	$-\infty$	0
y	0	$-\infty$	$+\infty$	0

$\dot{x} = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$; $\dot{y} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$. $\dot{x}, \dot{y}$ не существуют при $t = -1$ – не является точкой возможного экстремума.

При $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$: $\dot{x} = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} = 0$, при $t = 0, \sqrt[3]{2}$: $\dot{y} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} = 0$.

t	$-\infty$ $\quad -1$	-1 $\quad 0$	0 $\quad 2^{-\frac{1}{3}}$	$2^{-\frac{1}{3}}$ $\quad \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}$ $\quad +\infty$
x	0 $\quad +\infty$	$-\infty$ $\quad 0$	0 $\quad a\sqrt[3]{4}$	$a\sqrt[3]{4}$ $\quad a\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{2}$ $\quad 0$
y	0 $\quad -\infty$	$+\infty$ $\quad 0$	0 $\quad a\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{2}$ $\quad a\sqrt[3]{4}$	$a\sqrt[3]{4}$ $\quad 0$
$\dot{x}$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\dot{y}$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$

$y' = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$ $\quad y'' = \frac{2(1+t^3)^4}{3a(1-2t^3)^3}$

Ищем асимптоты: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{t\to-1} t = -1$.

Найдем предел $\lim\limits_{x\to+\infty} (y + x) = \lim\limits_{t\to-1} \frac{3a(t^2+t)}{1+t^3} = -a$. Т.о., асимптота $y = -x - a$.

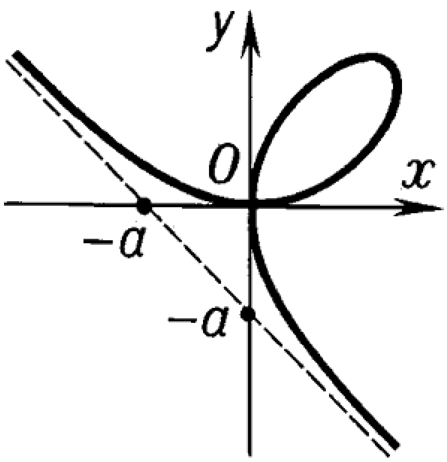


Рис.21 Кривая Декарта

Точки возврата

Значение параметра $t = t_0$, при котором $\dot{x} = \dot{y} = 0$, «подозрительно». Как проверить? Для этого нужно посчитать $\ddot{x}, \ddot{y}$. Если при $t = t_0$ или $\ddot{x}$, или $\ddot{y}$ отличны от нуля – это точка возврата.

Точка возврата I рода – направление выпуклости меняется. Точка возврата II рода – направление выпуклости не меняется (знак второй производной).

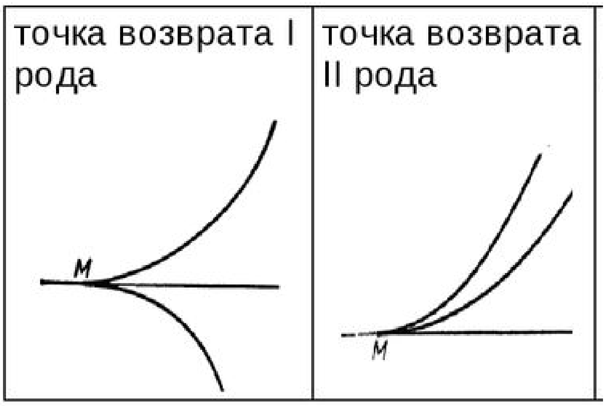


Рис.22 Точки возврата

$y' = \infty$ - если $\dot{x}$ сохраняет знак при переходе через это t_0, а $\dot{y}$ меняет знак, то это точка возврата I рода, в противном случае - II рода.

Если y'' меняет знак при переходе через t_0, то это точка возврата I рода.

Задача 1

Дано: $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = 2t^3 - 3t^2 \end{cases}$.

Область определения – вся числовая ось.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2(t-1), \text{при } t = 1\ \dot{x} = 0 \\ \dot{y} &= 6t(t-1), \text{при } t = 0{,}1\ \dot{y} = 0 \end{aligned}. \qquad y' = 3t, y'' = \frac{3}{2(t-1)}$$

t	$-\infty$	0	0	1	1	$+\infty$
x	$+\infty$	0	0	-1	-1	$+\infty$
y	$-\infty$	0	0	-1	-1	$+\infty$
$\dot{x}$	$-$		$-$		$+$	
$\dot{y}$	$+$		$-$		$+$	

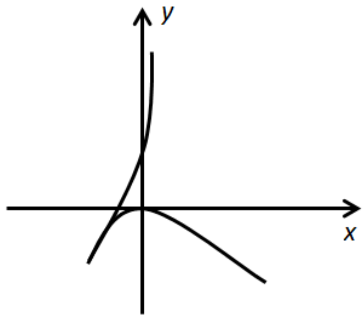


Рис.23 Изображение искомой кривой

Пример

Дана кривая: $\begin{cases} x = \frac{t^2}{t-1} \\ y = \frac{t}{t^2-1} \end{cases}$

Найдем область определения.

t	$-\infty$	-1	-1	1	1	$+\infty$
x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
y	0	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0

Из этой таблицы следует: вертикальная асимптота $x = -\frac{1}{2}$.

Проверим наклонные и горизонтальные асимптоты. Для этого нужно найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \begin{matrix} \lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t(t+1)} = 0 \\ \lim\limits_{t\to 1}\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{2} \end{matrix}$. Из первого следует: $y = 0$ – горизонтальная асимптота.

$\lim\limits_{t\to 1}\left(y - \frac{x}{2}\right) = \lim\limits_{t\to 1}\frac{2t - t^2(t+1)}{2(t^2-1)} = -\frac{3}{4}$ (для нахождения предела использовалось правило Лопиталя).

Исследуем на экстремум. Для этого находим $\dot{x} = \frac{t(t-2)}{(t^2-1)^2}, \dot{y} = \frac{-t^2-1}{(t^2-1)^2}$. $\dot{x} = 0$ при $t = 0, 2, \dot{y} \neq 0$.

t	$-\infty$	-1	-1	0	0	1	1	2	2	$+\infty$
x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\infty$	$+\infty$	4	4	$+\infty$
y	0	$-\infty$	$+\infty$	0	0	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
$\dot{x}$	$+$		$+$		$-$		$-$		$+$	
$\dot{y}$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
y''	$-$		$+$	$-$	$+$		$-$		$+$	

$y' = \frac{-t^2-1}{t(t-2)(t^2-1)^2}$; $y'' = 2\left(\frac{t-1}{t(t-2)(t+1)}\right)^3(t^3 + 3t + 1)$;

Используя формулы Кардана, $t \cong -\frac{1}{3}, x \cong -\frac{1}{12}$.

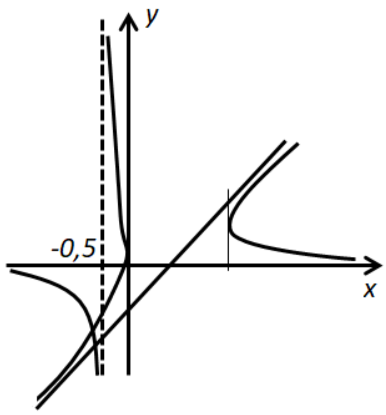


Рис.24 Изображение искомой кривой

Задача*

Дано: $\begin{cases} x + y = 10 \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \frac{5}{2}\sqrt[6]{xy} \end{cases}$

Область определения системы уравнений: $xy \geq 0$.

1) Рассмотрим случай $x = 0$. Тогда $y = 0$. Из первого уравнения системы $0 \neq 10$. Следовательно, $x \neq 0$.
2) $y = 0, x = 0$. Следовательно, $y \neq 0$.

Поделим второе уравнение системы на $\sqrt[6]{xy}$, тогда: $\sqrt[6]{\frac{x}{y}} + \sqrt[6]{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}$. Обозначим $\sqrt[6]{\frac{x}{y}} = t$.

Тогда получается квадратное уравнение относительно t.

Задача 2

Дано: $\begin{cases} x^a = y^b \\ \log_c \frac{x}{y} = \frac{\log_c x}{\log_c y} \end{cases}$. Решить систему уравнений.

Область определения системы уравнений: $a, b \in (-\infty, +\infty);\ y, c \in (0,1) \cup (1, +\infty);\ x \in (0, +\infty)$.

$$\begin{cases} x^a = y^b \\ \log_c \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_c x}{\log_c y} \end{cases} \Leftrightarrow a\log_c x = b\log_c y$$

1) Если $\mathrm{a} = 0$, тогда первое уравнение системы: $0 = b\log_c y \Rightarrow$
   $b = 0$
   $b \neq 0, \log_c y = 0 \Leftrightarrow \mathrm{y} = 1 \notin \text{ОО}$

Т.о., при $a = 0, b \neq 0$ решений нет.

Пусть $y = t \in (0,1) \cup (1, +\infty)$. Тогда из второго уравнения $\left(1 - \frac{1}{\log_c t}\right)\log_c x = \log_c t$.

Если $t \neq c$, то $\log_c x = \frac{\log_c t}{1 - \frac{1}{\log_c t}} = \frac{\log_c t}{\log_c \frac{t}{c}} \log_c t = \log_{\frac{t}{c}} t \cdot \log_c t \Leftrightarrow \log_c x = \log_c t^{\log_{\frac{t}{c}} t} \Leftrightarrow x = t^{\log_{\frac{t}{c}} t}$.

При $a = b = 0$ система имеет решение $\begin{cases} x = t^{\log_{\frac{t}{c}} t} \\ y = t, \text{где } t \in (0,1) \cup (1, +\infty) \backslash \{c\} \end{cases}$

2) $a \neq 0$. Тогда $\log_c x = \frac{b}{a}\log_c y$. Подставляем во второе уравнение. Получаем: $\left(\frac{b}{a} - 1\right)\log_c y = \frac{b}{a}$. Чтобы решить, нужно поделить на $\left(\frac{b}{a} - 1\right)$, что возможно при $a \neq b$. Если это условие не выполнено, то решений нет.

Если же $a \neq b$, то $\log_c y = \frac{b}{b-a}$. Тогда $\log_c x = \frac{b^2}{a(b-a)}$. Если $b = 0$, тогда $\log_c y = 0, y = 1 \Rightarrow$ решений нет, т.к. $y = 1$ не принадлежит области определения системы уравнений.

Ответ: 1) при $a = b = 0$ $\begin{cases} x = t^{\log_{\frac{t}{c}} t} \\ y = t, \text{где } t \in (0,1) \cup (1, +\infty) \backslash \{c\} \end{cases}$

2) при $a = 0, b \neq 0$ или $a \neq 0, b = 0$ или $a = b \neq 0$ решений нет

3) $ab \neq 0, a \neq b$ $x = c^{\frac{b^2}{a(b-a)}}, y = c^{\frac{b}{b-a}}$.

Системы неравенств

Дано: $\begin{cases} 3x+2y>0 \\ 4x+3y<0 \end{cases}$. Найти множество значений x,y, при которых система неравенств будет выполняться.

Для решения нужно заменить неравенства на равенства: $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 4x+3y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{2}x \\ y=-\frac{4}{3}x \end{cases}$

Т.о., $\begin{cases} x>0 \\ -\frac{3}{2}x<y<-\frac{4}{3}x \end{cases}$

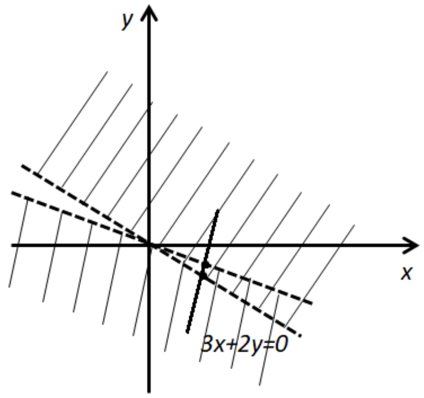


Рис.25 Изображение решений системы на плоскости

Аналитический способ решения:

$\begin{cases} y>-\frac{3}{2}x \\ y<-\frac{4}{3}x \end{cases} \Rightarrow -\frac{3}{2}x<y<-\frac{4}{3}x$ – эта запись будет иметь смысл тогда и только тогда, когда будет выполнено условие $-\frac{3}{2}x<-\frac{4}{3}x \Rightarrow 9x>8x \Rightarrow \mathrm{x}>0$.

Лекция 5

Планиметрия

Дано: треугольник, один из внешних углов которого *x*. Доказать: $x = \alpha + \beta$.

Доказательство: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. С другой стороны, $x + \gamma = \pi$. Следовательно, $x = \alpha + \beta$.

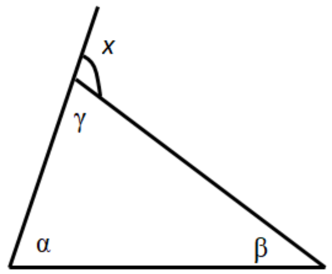


Рис.26 Рисунок к задаче

Дано: угол α. Найти: угол *x*.

$x = \alpha, x + \alpha = \pi$

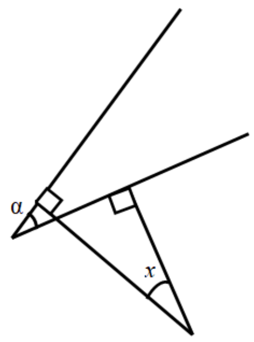


Рис.27 Рисунок к задаче

Дано: окружность, касательная *AB*, секущая *CD*. Как связаны между собой касательная и секущая?

$$AB^2 = AC \cdot AD$$

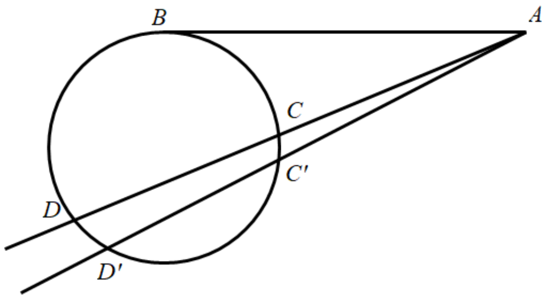


Рис.28 Рисунок к задаче

Следствие: если провести вторую секущую $C'D'$, то $AC \cdot AD = AC' \cdot AD'$.

Дано: окружность, 2 хорды (см. рис.29). Как соотносятся между собой x,y,z,s?

$$xy = zs$$

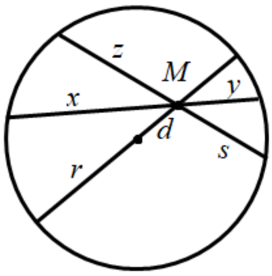


Рис.29 Рисунок к задаче

Следствие: пусть теперь известен радиус r. Проведем третью хорду, совпадающую с диаметром. Точка M находится на расстоянии d от центра окружности. Тогда $xy = zs = r^2 - d^2$.

Дано: окружность, вписанная в некоторый четырехугольник. При каких условиях это возможно?

В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противолежащих сторон равны.

Доказательство этого утверждения следует из того, что касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны.

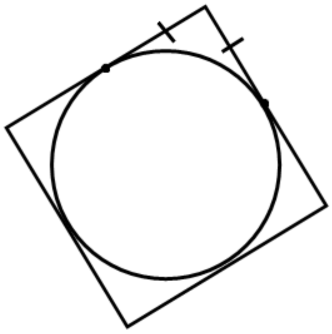
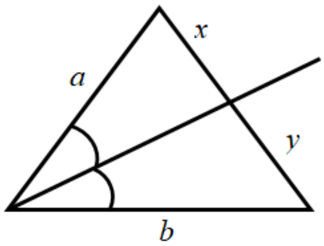


Рис.30 Рисунок к задаче

Дан треугольник. Формулы его площади:

$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\ sin\alpha = \frac{abc}{4R} = pr$, где R – *радиус описанной окружности,* r – радиус вписанной окружности, p – полупериметр.



$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

Рис.31 Изображение треугольника и биссектрисы одного из его углов

Дано: x – угол между касательной и хордой, l – длина дуги, которую отсекает хорда. Чему он равен?

$$x = \frac{l}{2}$$

Доказательство: (см.рис. 32) вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.

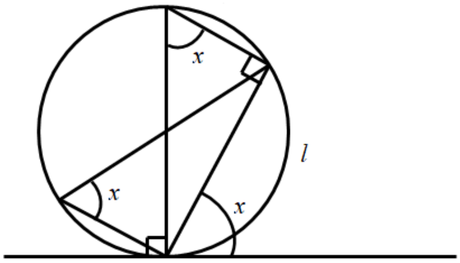


Рис.32 Рисунок к задаче

Дано: окружность, дуги α и β. Найти угол x.

$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Доказательство: Угол, опирающийся на дугу α: $\frac{\alpha}{2} = x + \frac{\beta}{2}$. Следовательно, $x = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Ч.т.д.

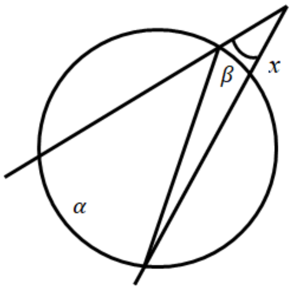


Рис.33 Рисунок к задаче

Задача 1

Основания равнобочной трапеции равны 21 и 9, а высота равна 8. Найти радиус описанной окружности.

По теореме Пифагора:

$$r^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + (8 + y)^2$$

$$r^2 = y^2 + \left(\frac{21}{2}\right)^2$$

Решая уравнения выше, получаем $y = \frac{13}{8}$. Тогда $r = \frac{85}{8}$.

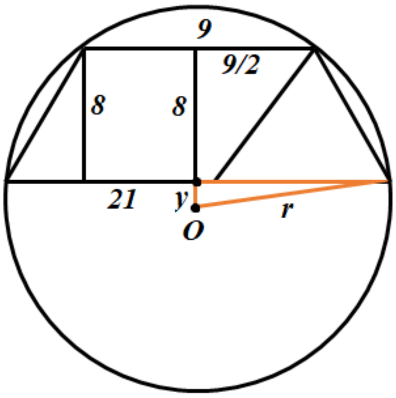


Рис.34 Рисунок к задаче 1

Задача 2

Высота ромба, опущенная из вершины тупого угла, делит его сторону на отрезки длиной m и n. Найти диагонали ромба.

$$AB = n + m$$

$$\Delta ABK: BK = \sqrt{(m+n)^2 - m^2} = \sqrt{n^2 + 2nm}$$

$$\Delta BDK: BD = \sqrt{BK^2 + DK^2} = \sqrt{2n(m+n)}$$

$$AC = 2AO = 2\sqrt{AD^2 - OD^2} = \sqrt{4m^2 + 2n^2 + 6mn}$$

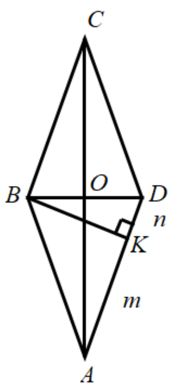


Рис.35 Рисунок к задаче 2

Задача 3

В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найти периметр квадрата.

$$\frac{1}{2}ab = x^2 + \frac{1}{2}x(a-x) + \frac{1}{2}x(b-x)$$

$$x = \frac{ab}{a+b}$$

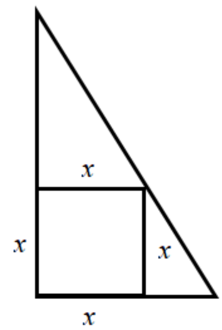


Рис.36 Рисунок к задаче

Задача

В равнобедренном треугольнике основание равно 16, а боковая сторона 10. Найти радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами.

$$sin\frac{B}{2} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$r = \frac{8}{3}, R = \frac{25}{3}$$

$$O_1O_2 = O_1B - BM + O_2M = R - h + r = 5$$

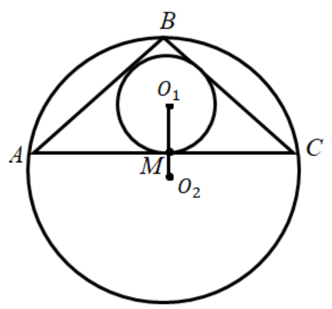


Рис.37 Рисунок к задаче 3

Задача 4

Из точки M к окружности проведены: секущая MAB, проходящая через центр окружности т.O, и секущая MCD, внешняя часть которой равна радиусу окружности. Найти угол между секущими, если известно, что угол DOB равен $\frac{2}{5}\pi$.

$x = \frac{\pi}{5} - \frac{x}{2}$

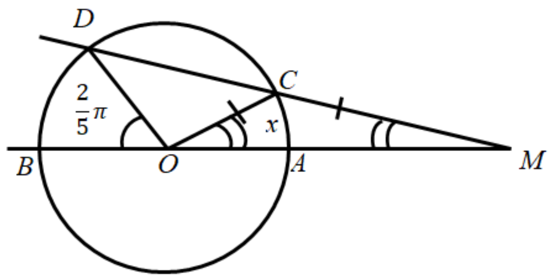


Рис.38 Рисунок к задаче 4

Задача 5

Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника, проходит через вершину противолежащего острого угла и имеет центр на гипотенузе треугольника. Каков радиус окружности, если длины катетов 5 и 12?

$AC = 13$

$\frac{KO}{BC} = \frac{AO}{AC}$

$\frac{x}{5} = \frac{13-x}{13}$

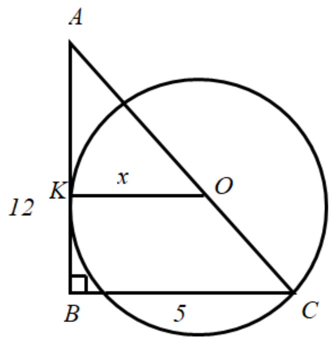


Рис.39 Рисунок к задаче 5

Задача 6

В окружности радиуса r проведена хорда длины $r/2$. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой – секущая, параллельная касательной. Найти расстояние между касательной и секущей.

$$AK = AB \cdot cosA$$

$$cosA = \frac{AM}{AO} = \frac{\frac{r}{4}}{r} = \frac{1}{4}$$

$$AB = \frac{r}{2} \Rightarrow AK = \frac{r}{8}$$

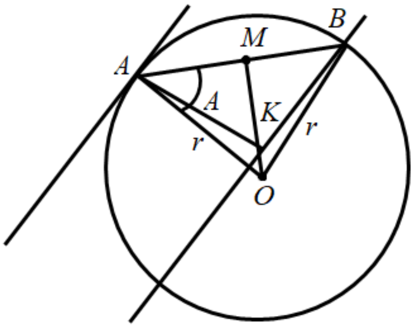


Рис.40 Рисунок к задаче 6

Задача 7

Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 15. Радиус вписанной в него окружности равен 6. Найти стороны треугольника.

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ (x+6)^2 + (y+6)^2 = 900 \end{cases}$$

Таким образом, стороны треугольника: 18, 24, 30

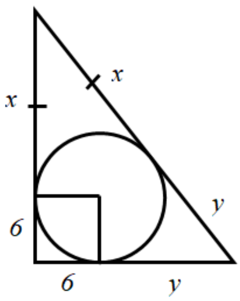


Рис.41 Рисунок к задаче 7

Задача 8

Из точки вне круга проведены две секущие. Внутренний отрезок первой равен 47, а внешний – 9. Внутренний отрезок второй секущей на 72 больше внешнего ее отрезка. Найти длину второй секущей.

Задача 9

Сумма двух неравных высот равнобедренного треугольника равна l. Угол при вершине равен α. Найти боковую сторону.

Дано: $AE + BD = l, \angle B = \alpha, AB = BC$

Найти: $AB = x$

$$AE = x \cdot sin\alpha$$

$$BD = x \cdot cos\frac{\alpha}{2}$$

Складываем два последних равенства:

$$l = x\left(sin\alpha + cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

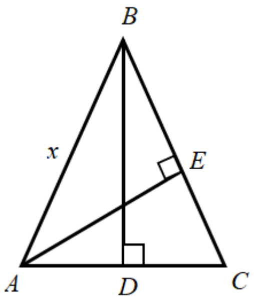


Рис.42 Рисунок к задаче 9

Задача 10

Угол при основании равнобедренного треугольника равен α. Найти отношение радиусов вписанной и описанной окружностей.

По теореме синусов: $\frac{a}{sin\alpha} = 2R$. Отсюда $R = \frac{a}{2sin\alpha}$.

$$r = AK \cdot tg\frac{\alpha}{2} = acos\alpha \cdot tg\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{r}{R} = 2sin\alpha \cdot cos\alpha \cdot tg\frac{\alpha}{2} = sin2\alpha \cdot tg\frac{\alpha}{2} = 2cos\alpha(1 - cos\alpha)$$

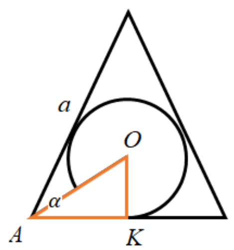


Рис.43 Рисунок к задаче 10

Задача 11

В ромбе через вершину острого угла α проведена прямая, делящая этот угол в отношении 1:2. В каком отношении эта прямая делит сторону ромба, которую она пересекает?

Дано: $\angle ABE = \frac{2}{3}\alpha, \angle EBC = \frac{\alpha}{3}$

Найти: $\frac{DE}{EC}$

Найдем $\angle DBE = \frac{2}{3}\alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{6}$.

Применяя теорему синусов, $\frac{DE}{sin\frac{\alpha}{6}} = \frac{BE}{sin\frac{\alpha}{2}}$. (1)

Рассмотрим ΔBEC: $\frac{EC}{sin\frac{\alpha}{3}} = \frac{BE}{\sin(\pi-\alpha)}$. (2)

Поделим (1) на (2). Получим: $\frac{DE\cdot sin\frac{\alpha}{3}}{EC\cdot sin\frac{\alpha}{6}} = \frac{sin\alpha}{sin\frac{\alpha}{2}}$. Следовательно, $\frac{DE}{EC}\cdot 2cos\frac{\alpha}{6} = 2cos\frac{\alpha}{2}$. Т.о., $\frac{DE}{EC} = \frac{cos\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha}{6}}$.

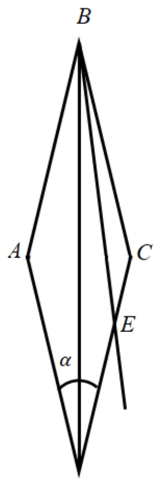


Рис.44 Рисунок к задаче 11

Задача 12

В квадрате *ABCD* через середину *M* стороны *AB* проведена прямая, пересекающая противоположную сторону *CD* в точке *T*. В каком отношении прямая *MT* делит площадь квадрата, если острый угол *AMT* равен α?

$$S_{MBCN} = \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2}a\cdot tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\cdot ctg\alpha$$

$$S_{MADN} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}\cdot ctg\alpha$$

Тогда искомое отношение: $\frac{1+ctg\alpha}{1-ctg\alpha} = ctg\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

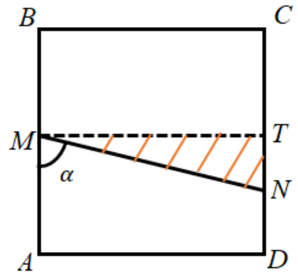


Рис.45 Рисунок к задаче 12

Задача 13

Высота равнобедренной трапеции равна h, а угол между ее диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α. Найти среднюю линию трапеции.

$$x = \frac{BC + AD}{2}$$

$\Delta ABD = \Delta ACD$ (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $AC = BD$.

$$PO = \frac{BC}{2} \cdot tg\frac{\alpha}{2}$$

$$OM = \frac{AD}{2} \cdot tg\frac{\alpha}{2}$$

Складываем два последних равенства, получаем:

$$h = x \cdot tg\frac{\alpha}{2}$$

Следовательно: $x = h \cdot\ ctg\frac{\alpha}{2}$.

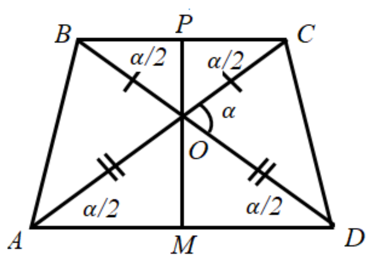


Рис.46 Рисунок к задаче 13

Задача 14

Найти угол треугольника, если стороны, заключающие этот угол, равны a и b, а биссектриса этого угла равна c.

По теореме косинусов $DC^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\frac{\alpha}{2}$.

Аналогично $AD^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\frac{\alpha}{2}$.

По свойству биссектрисы, $\frac{AD^2}{DC^2} = \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{a^2}{b^2}$.

В итоге получаем $cos\frac{\alpha}{2} = \frac{c(b+a)}{2ab}$. Следовательно, $\alpha = 2arccos\frac{c(b+a)}{2ab}$.

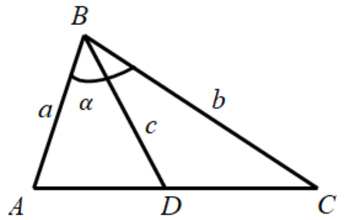


Рис.47 Рисунок к задаче 14

Задача 15

В квадрат *ABCD* вписан равнобедренный треугольник *AEF*. Точка *E* лежит на стороне *BC*, точка *F* – на стороне *CD* и *AE* = *AF*, $tg\angle AEF = 3$. Найти $cos\angle FAD$.

$$\angle EAF = \pi - 2\alpha$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - (\pi - 2\alpha)\right) = \alpha - \frac{\pi}{4}$$

$$cosx = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = cos\alpha\frac{1}{\sqrt{2}} + sin\alpha\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}cos\alpha(1 + tg\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

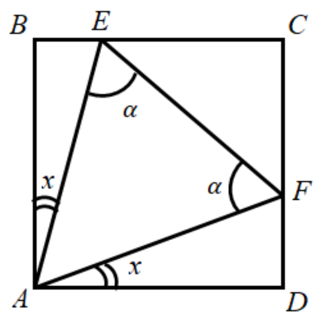


Рис.48 Рисунок к задаче 15

Задача 16

В остроугольном треугольнике ABC высота $AD = a$, высота $CE = b$, острый угол между AD и CE равен α. Найти AC.

$$\angle DOC = \frac{\pi}{2} - \angle DCO = \angle EBC$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot b}{2} = \frac{BC \cdot a}{2} = \frac{AB \cdot BC \cdot sin\alpha}{2}$$

Следовательно, $AB = \frac{a}{sin\alpha}; BC = \frac{b}{sin\alpha}$

$$AC = \sqrt{\left(\frac{a}{sin\alpha}\right)^2 + \left(\frac{b}{sin\alpha}\right)^2 - 2cos\alpha\left(\frac{a}{sin\alpha} \cdot \frac{b}{sin\alpha}\right)} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2cos\alpha \cdot ab}}{sin\alpha}$$

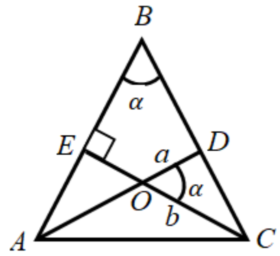


Рис.49 Рисунок к задаче 16

Задача 17

Острый угол прямоугольного треугольника равен α. Найти отношение радиуса вписанной в треугольник окружности к радиусу описанной окружности. При каком значении α это отношение будет наибольшим?

$$(a + r) + (b + r) = c$$

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

$$R = \frac{c}{2}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 1 = sin\alpha + cos\alpha - 1 = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - 1$$

Это отношение будет наибольшим, когда синус равен единице, т.е. при $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

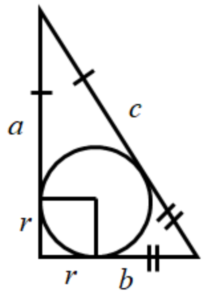


Рис.50 Рисунок к задаче 17

Задача 18

Дуга AB сектора AOB содержит α радиан. Через точку B и середину C радиуса OA проведена прямая. В каком отношении эта прямая делит площадь сектора?

$$S_{OMB} = \frac{1}{2} OM \cdot OB \cdot sin\alpha = \frac{1}{4} R^2 sin\alpha$$

$$S_{AMB} = S_{OAB} - S_{OMB} = \frac{\alpha}{2\pi}\pi R^2 - \frac{1}{4} R^2 sin\alpha$$

$$\frac{S_{OMB}}{S_{AMB}} = \frac{sin\alpha}{2\alpha - sin\alpha}$$

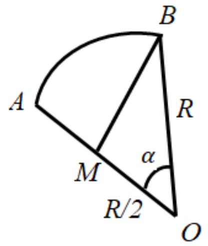


Рис.51 Рисунок к задаче 18

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД
ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ