МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. СЕМИНАРЫ

ПРЖИЯЛКОВСКИЙ
ВИКТОР ВЛАДИМИРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ПОДКЛЕТНОВУ АННУ АЛЕКСАНДРОВНУ

Содержание

Семинар 1. Разложение на неприводимые компоненты

Примеры

Прямая как алгебраическое аффинное многообразие – это множество точек. Пусть существует поле k и множество элементов поля $\{k\}$. На ней есть топология.

Приводимое алгебраическое многообразие – это такое многообразие V, которое представимо в виде суммы двух алгебраических многообразий, отличных от V, то есть если

$$V = V_1 + V_2,$$

где

$$V_1 \subset V,$$

$$V_2 \subset V.$$

Рассмотрим прямую $\mathbb{A}^1 = U_1 \cup U_2$

U_1, U_2 – одномерные аффинные многообразия.

U_1 задается каким-то идеалом. В частности, в идеале лежит какая-то функция f: $f \in IU_1$.

Также U_2 задается идеалом, в котором лежит функция g: $g \in IU_2$.

По определению, на всем множестве U_1 функция f равна нулю. И на всем множестве U_2 функция g равна нулю. Значит, на объединении этих множеств становится равной нулю функция $f \cdot g$. Причем, $f \cdot g$ – некий многочлен от одной переменной. Такой многочлен имеет конечное число корней. Следовательно, аффинная прямая неприводима тогда и только тогда, когда поле бесконечно.

Задача 1, пункт 1

Рассмотрим идеал $J = (xy, xz, yz) \subset K[x, y, z]$

1) а) найти $V(J)$
   б) неприводимо ли $V(J)$?
   в) найти $I\big(V(J)\big)$
   г) может ли J быть порожденным двумя элементами?

Решение:

$V(J)$ – координатные оси:

$$\{x = y = 0\} \cup \{x = z = 0\} \cup \{y = z = 0\}$$

Очевидно, что алгебраические множества $\{x = y = 0\}, \{x = z = 0\}, \{y = z = 0\}$ собственные. Значит, $V(J)$ приводима и множества $\{x = y = 0\}, \{x = z = 0\}, \{y = z = 0\}$ являются тремя компонентами.

Теперь найдем многочлены, идеалы которых обращаются во всех этих множествах в ноль.

$$f = \sum a_{ijk} x^i y^j z^k$$

$$f(0,0,z) \equiv 0$$

$$\sum a_{ijk} x^i y^j z^k = xyg_1 + yzg_2 + xzg_3$$

J не может быть порожденным двумя элементами, так как из трёх линейно независимых многочленов xy, xz, yz нельзя получить линейную комбинацию двух.

Задача 1, пункт 2

Пусть

$$J' = (xy, (x \cdot y)z)$$

2) а) найти $V(J')$
   б) неприводимо ли $V(J')$?
   в) найти $I\big(V(J')\big)$
   г) может ли J' быть порожденным двумя элементами?

Все элементы этого идеала становятся равными нулю на множестве:

$$\{x = y = 0\}$$

$$\{x = z = 0\}$$

$$\{z = y = 0\}$$

Получаем, что

$$V(J') = V(J)$$

Будем обозначать радикал идеала J' как $\sqrt{J'}$.

$$\sqrt{J'} = J$$

Остальные вопросы оставляем в качестве упражнения.

Лемма Гаусса

Определение. Элемент a кольца A называется неприводимым, если из равенства $bc = a$ следует, что b или c – обратимы.

Определение. A – факториальное, если любой элемент a в этом кольце представляется в виде $a = b_1 q_1 \dots q_n$, b – обратимое, $q_1 \dots q_n$ – неприводимые и разложение единственно с точностью до перестановок и умножения на обратимый элемент.

Обратимый элемент обычно называется единицей кольца.

Мы будем часто называть неприводимый элемент простым элементом.

Простой элемент – это такой элемент, главный идеал которого является простым.

Примеры факториальных колец: кольцо целых чисел, кольцо многочленов.

Определение. Элемент $A[x]$ (A – факториально) называется примитивным, если все его коэффициенты $a = a_n x^n + \dots + a_0$ не имеют общего простого делителя.

Лемма Гаусса. Пусть A – факториальное и K – поле частных A. Пусть многочлен $f \in A[x]$ делится на примитивный многочлен g в $A[x]$ тогда и только тогда, когда он делится на него в $K[x]$.

Задание на дом

1) Доказать лемму Гаусса
2) Вывести из нее следующее: если A – факториальное, то $A[x]$ тоже факториальное.
3) С помощью леммы Гаусса показать, что если f, g – неприводимые некратные многочлены в $k[x, y]$, то $V(f, g)$ - конечно.
4) Показать с помощью третьего пункта, что алгебраическое множество на $\mathbb{A}^2$ – это объединение конечного числа кривых и точек.

Напомним определение кривой: кривая – это множество $\{f = 0\}$, где f – многочлен от двух переменных.

Семинар 2. Разложение на неприводимые компоненты

Задача 1 из домашнего задания

1. Доказать лемму Гаусса

Лемма Гаусса. Пусть A – факториальное и K – поле частных A. Пусть многочлен $f \in A[x]$ делится на примитивный многочлен g в $A[x]$ тогда и только тогда, когда он делится на него в $K[x]$.

$$f = gh \subset A[x] \Leftrightarrow f = gh \subset K[x]$$

Доказательство:

- Так как $A[x] \subset K[x]$, то очевидно, что
$$f = gh \subset A[x] \Rightarrow f = gh \subset K[x]$$
- Теперь докажем, что
$$f = gh \subset A[x] \Leftarrow f = gh \subset K[x]$$
Докажем, что если простой элемент p кольца A является общим делителем коэффициентов $g(x)h(x)$, то он делит либо все коэффициенты $g(x)$, либо все коэффициенты $h(x)$.
Пусть
$$h(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$$
Допустим, что p не делит в совокупности ни коэффициенты $g(x)$, ни $h(x)$. Тогда существуют наименьшие i, j для которых $p \nmid a_i$ и $p \nmid b_j$.
Коэффициент при элементе степени $i + j$ многочлена $g(x)h(x)$ имеет вид:
$$\sum_{k<i} a_k b_{i+j-k} + a_i b_j + \sum_{l<j} a_{i+j-l} b_l$$
В соответствии с выбором i, j элемент p делит все слагаемые в этой сумме, за исключением a_ib_j, который он не делит в силу своей простоты и факториальности A. Стало быть, он не делит и всю сумму, которая является одним из коэффициентов многочлена, и мы приходим к противоречию. Непосредственным следствием этого пункта является то, что если $g(x), h(x)$ примитивны, то их произведение $g(x)h(x)$ — тоже примитивный многочлен.
Пусть теперь $h(x) = h_1(x)h_2(x)$ – факторизация в кольце $K[x]$. Домножив каждый из $h_1(x), h_2(x)$ на общее кратное знаменателей их коэффициентов, получим, что
$$ah_1(x) = f_1(x) \in A[x]$$
$$bh_2(x) = f_2(x) \in A[x]$$
$$abh(x) = g_1(x)g_2(x)$$
Каждый из простых делителей ab делит все коэффициенты $g_1(x)g_2(x)$, а значит и все коэффициенты одного из многочленов-сомножителей. Разделив на этот

делитель и повторив процесс конечное число раз, получим факторизацию в кольце $A[x]$.

Задача 2 из домашнего задания

2. Вывести из леммы Гаусса следующее: если A – факториальное, то $A[x]$ тоже факториальное.

Доказательство.

Так как кольцо главных идеалов $A[x]$ факториально, всякий многочлен $f \in K[x]$ раскладывается в $A[x]$ в произведение неприводимых множителей $f_\nu \in A[x]$. Записывая их в редуцированном виде и сокращая числовую дробь, получаем равенство

$$f = \frac{a}{b}\prod f_{\nu,red},$$

в котором $f_{\nu,red} \in K[x]$ — многочлены, неприводимые в $A[x]$ (и, тем более, в $K[x]$), а $a, b \in K$ взаимно просты. Поскольку

$$cont\left(\prod f_{\nu,red}\right) = 1,$$

это равенство даёт редуцированное представление для $f = cont(f) \cdot f_{red}$. В силу его единственности:

$$b = 1$$

$$f = a\prod f_{\nu,red}$$

с точностью до умножения на обратимые константы из K. Раскладывая $a \in K$ в произведение неприводимых констант, получаем разложение f в произведение неприводимых множителей в кольце $K[x]$.

Докажем единственность такого разложения. Пусть в $K[x]$ выполняется равенство

$$a_1a_2 \dots a_k \cdot p_1p_2 \dots p_s = b_1b_2 \dots b_m \cdot q_1q_2 \dots q_r,$$

в котором $a_\alpha, b_\beta \in K$ — неприводимые константы, а $p_\mu, q_\nu \in K[x]$ — неприводимые многочлены. Поскольку неприводимые многочлены имеют содержание 1, сравнивая содержание обеих частей, приходим к равенству в K:

$$a_1a_2 \dots a_k = b_1b_2 \dots b_m$$

В силу факториальности K, имеем $k = m$ и (после надлежащей перенумерации сомножителей) $a_i = s_ib_i$, где s_i обратимы. Следовательно, с точностью до умножения на обратимую константу из K в кольце многочленов $K[x]$ выполняется равенство

$$p_1 p_2 \dots p_s = q_1 q_2 \dots q_r$$

В силу факториальности $A[x]$ и неприводимости p_i и q_i также и в $A[x]$, мы заключаем, что $r = s$ и (после надлежащей перенумерации сомножителей) $p_i = q_i$с точностью до постоянного множителя из A. Из единственности редуцированного представления вытекает, что эти постоянные множители являются обратимыми константами из K.

Задача 3 из домашнего задания

3. С помощью леммы Гаусса показать, что если f, g – неприводимые некратные многочлены в $k[x, y]$, то $V(f, g)$ - конечно.

Доказательство:

$$f, g \in A[x]$$

f, g – взаимно простые. Это значит, что в $K[x]$:

$$1 = af + bg,$$

здесь a, b – рациональные функции от x.

Умножим это выражение на c и получим:

$$c = a_0 f + b_0 g$$

$$c \in K[y]$$

Тогда

$$\{y : \exists x : g(x, y) = f(x, y) = 0\}$$

Про то, как могут быть устроены алгебраические многообразия на плоскости (задача 4 из домашнего задания)

4. Показать с помощью третьего пункта, что алгебраическое множество на $\mathbb{A}^2$ – это объединение конечного числа кривых и точек.

Доказательство:

Идея доказательства: рассмотрим последовательно уравнения, задающие подмножество. $V(f)$ есть объединение конечного числа неприводимых кривых. Пересекая далее каждую из них с нулями многочленов, получим либо конечное число точек, либо ее саму.

$$I = (f_1, \dots, f_m)$$

Пусть c – наименьший общий делитель f_i. В таком случае:

$$f_i = c\widetilde{f_i}$$

Пусть $I' = \left(\widetilde{f_1} \dots \widetilde{f_m}\right), J = (c)$. Тогда

$$I = I'J$$

$$\widetilde{f_i} = \prod_j \widetilde{p_{ij}}$$

Задача

Рассмотрим $f: \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^3$, $t \longrightarrow (t^1, t^2, t^3)$. Докажем, что образ этого отображения является алгебраическим многообразием.

<u>Доказательство:</u>

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = y \\ y^3 = z^2 \end{array}\right.$$

Этими уравнениями мы задали все точки такого вида.

Покажем, что отображение $f: \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^3$ является изоморфизмом.

$g = x$ – обратное к $f = (t^1, t^2, t^3)$.

Задача

Рассмотрим $f = (t^2, t^3)$. Его образ: $X = \{x^3 = y^2\}$.

1) Как описать $K[x] = K[x, y]$?
   Это множество многочленов вида $\{P(x) + Q(x) \cdot y\}$
   Рассмотрим для примера:
   $$(P_1(x) + Q_1(x) \cdot y)(P_2(x) + Q_2(x) \cdot y)$$
   $$= (P_1(x)P_2(x) + Q_1(x)Q_2(x) \cdot x^3) + y\big(Q_1(x)P_2(x) + Q_2(x)P_1(x)\big)$$
   Докажем, что это отображение биективное и не является изоморфизмом.
   Пусть g – обратный к f.
   $$g = P(x) + Q(x) \cdot y$$
   Значит
   $$f \cdot g = ((P + yQ)^2, (P + yQ)^3)$$
   $$(P + yQ)^2 = x$$
   $$(P + yQ)^3 = y$$
   Раскроем квадрат:

$$(P + yQ)^2 = P^2 + x^3Q^2 + 2yP(x)Q(x)$$

Из второго слагаемого следует, что либо $P = 0$, либо $Q = 0$.

Если $P = 0$, то $x = x^3 \cdot ...$, чего быть не может. Если $Q = 0$, то $x = P^2$, чего тоже быть не может. Получается, что это отображение не является изоморфизмом.

Домашнее задание

Задача. $f: \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^3$, $t \longrightarrow (t^1, t^2, t^3)$. Задайте $f(\mathbb{A}^1) = X$ уравнениями степени не больше 2.

Задача. Пусть $X = \{y^2 = x^2 + x^3\}$, $f: \mathbb{A}^1 \to X$ – отображение, задающееся как $f(t) = \left(t^2 - 1, t(t^2 - 1)\right)$. Доказать, что $f^*: K[X] \to K[\mathbb{A}^1] = K[t]$. Образ – кольцо многочленов g, таких что $g(1) = g(-1)$.

Семинар 3. Отображения. Топология Зарисского

Разбор задач из домашнего задания

Задача. Пусть $X = \{y^2 = x^2 + x^3\}$, $f: \mathbb{A}^1 \to X$ – отображение, задающееся как $f(t) = \big(t^2 - 1, t(t^2 - 1)\big)$. Доказать, что $f^*: K[X] \to K[\mathbb{A}^1] = K[t]$. Образ – кольцо многочленов g, таких что $g(1) = g(-1)$.

Решение:

1) $K[x] = \{Q(x) + yP(x) | y^2 = x^2 + x^3\}$
   Напомним, что
   $$(P_1(x) + Q_1(x) \cdot y)(P_2(x) + Q_2(x) \cdot y) = (P_1(x)P_2(x) + Q_1(x)Q_2(x) \cdot x^3) + y\big(Q_1(x)P_2(x) + Q_2(x)P_1(x)\big)$$
   Пусть
   $$M = \{g \in K[T], g(-1) = g(1)\}$$
   $$f^*(K[x]) = M$$

2) Пусть $\alpha \in K[x]$
   $$\alpha = Q(x) + yP(x)$$
   $$f^* \cdot \alpha = \alpha\big(f(t)\big)$$
   $$\alpha\big(f(t)\big) = Q(t^2 - 1) + t(t^2 - 1)P(t^2 - 1)$$
   Убедимся, что $f^*(\alpha) \in M$.
   Действительно,
   $$f^*(\alpha)(1) = Q(0)$$
   $$Q(0) = f^*(\alpha)(-1)$$
   Итого,
   $$f^*(\alpha)(1) = f^*(\alpha)(-1)$$

3) Докажем, что f^* - сюръекция.
   Пусть $h \in M$
   $$h = (t^2 - 1)h' + \nu,$$
   где $\nu \in K$, $h' \in K[t]$.
   $$\nu = h(1)$$
   Достаточно доказать, что для любого $k = 0,1,2, \ldots$ существуют P, Q, такие что
   $$(t^2 - 1)t^k = Q(t^2 - 1) + t(t^2 - 1)P(t^2 - 1)$$
   для любого $\nu \in K$ существуют P, Q, такие что
   $$\nu = Q(t^2 - 1) + t(t^2 - 1)P(t^2 - 1)$$
   Из системы
   $$\begin{cases} (t^2 - 1)t^k = Q(t^2 - 1) + t(t^2 - 1)P(t^2 - 1) \\ \nu = Q(t^2 - 1) + t(t^2 - 1)P(t^2 - 1) \end{cases}$$
   следует, что f^* - сюръекция.

Докажем, что выполняется

$$\nu = Q(t^2-1) + t(t^2-1)P(t^2-1)$$

Это равенство выполняется при

$$P = 0$$
$$Q = \nu$$

Докажем, что выполняется

$$(t^2-1)t^k = Q(t^2-1) + t(t^2-1)P(t^2-1)$$

Рассмотрим сначала четные k. Тогда это равенство выполняется при

$$P = 0$$
$$Q = x(x+1)^{\frac{k}{2}}$$

Теперь рассмотрим нечетные k. Равенство выполняется при

$$Q = 0$$
$$P = (x+1)^{\frac{k-1}{2}}$$

4) Теперь докажем, что f^* - инъекция.
Имеется в виду, что

$$f^*(F+g) = f^*(F) + f^*(g)$$

Это эквивалентно тому, что

$$f^*(F) = 0 \Rightarrow F = 0$$
$$f^*(F) = Q(t^2-1) + t(t^2-1)P(t^2-1)$$
$$Q(t^2-1) + t(t^2-1)P(t^2-1) \equiv 0 \ \forall t$$

<u>Задача.</u> $f: \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^3$, $t \longrightarrow (t^1, t^2, t^3)$. Задайте $f(\mathbb{A}^1) = X$ уравнениями степени не больше 2.

<u>Решение:</u>

$$\begin{cases} x^2 = y \\ x^3 = z \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ xy = z \end{cases}$$

<u>Задача.</u> $f: \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^d$, $t \longrightarrow (t^1, t^2, t^3, \dots, t^d)$. Задайте $f(\mathbb{A}^1) = X$ уравнениями степени не больше 2.

<u>Решение:</u>

Обозначим:

$$t = z_1$$
$$\vdots$$
$$t = z_d$$

Можно задать как:

$$\begin{cases} z_1^2 = z_2 \\ z_1 z_2 = z_3 \\ z_1 z_3 = z_4 \\ \vdots \\ z_1 z_{d-1} = z_d \end{cases}$$

Задача. Пусть кривая задана уравнениями:

$$X = \begin{cases} z_1^2 = z_2 \\ z_1 z_2 = z_3 \\ z_1 z_3 = z_4 \\ \vdots \\ z_1 z_{d-1} = z_d \end{cases}$$

Рассмотрим $d + 1$ точку на кривой X. Доказать, что эти точки не лежат в гиперплоскости.

Решение:

Выпишем матрицу из векторов:

$$\begin{pmatrix} t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^d \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ t_{d+1} & & \cdots & t_{d+1}^\alpha \end{pmatrix}$$

Перепишем её через определитель Вандермонда:

$$\begin{pmatrix} t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^d \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ t_{d+1} & & \cdots & t_{d+1}^\alpha \end{pmatrix} = t_1 \dots t_d \begin{pmatrix} 1 & \cdots & t_1^{d-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & t_{d+1}^{d-1} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & t_1^{d-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & t_{d+1}^{d-1} \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & t_1^{d-1} & t_1^d \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & \cdots & t_{d+1}^{d-1} & t_{d+1}^d \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{vmatrix} A & \begin{matrix} t_1^d \\ \vdots \\ t_{d+1}^d \end{matrix} \end{vmatrix}$$

A' - определитель Вандермольда.

$$A' = \prod_{j<i} (t_i - t_j)$$

$$\prod_{j<i}(t_i - t_j) \neq 0$$

Такая кривая X (она называется нормальная рациональная кривая) – единственная кривая в пространстве, такая что никакие $d+1$ точка не лежат в $d-1$-мерном пространстве.

Задача (отображения)

Задача. Пусть есть кольцо $S = K[x, y]$. $S_{(d)} \subset S = K[x, y]$ порождено однородными многочленами степени кратной d.

1) Показать, что $S_{(d)}$ – координатное кольцо некоторого многообразия X (оно порождено $d+1$ элементом).
2) Доказать, что X – образ $\mathbb{A}^2$ при некотором отображении.

Решение:

1) Назовем эти $d+1$ элементы: $z_0, \dots, z_d$. Мы обозначили порождающие за z_i:
$$x^{d-i}y^i \to z_i$$
Кольцо $S_{(d)}$ – это фактор кольца $K[z_0 \dots z_d]$ по идеалу Г.
$(x_0, y_0) \to (x_0^d, x_0^{d-1}y_0, \dots, y_0^d)$ – это отображение попадет в X (то есть его образ лежит в X). Заметим, что это отображение не является изоморфизмом в общем случае.
Как задать идеал X?
$$z_i z_k = x^{2d-i-k}y^{i+k}$$
$$x^{2d-i-k}y^{i+k} = z_{i-1}z_{k+1}$$
Обозначим:
$$Z_{ik} = z_i z_k - z_{i-1}z_{k+1}$$
Упражнение (на дом).
1) Показать, что они задают X.
2) Показать, что достаточно $z_{i,i}, i = 1, \dots, d-1$.

Свойства топологии Зарисского

1) Любое алгебраическое многообразие – компактно.
Пусть
$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$
Рассмотрим:
$$U_1$$
$$U_2 \colon U_2 \backslash U_1 \neq 0$$
$$U_3 \colon U_3 \backslash \{U_1 \cup U_2\} \neq 0$$
$$X \backslash (\bigcup U_i)$$

2) Пусть X и Y – топологические пространства по Зарисскому. Рассмотрим их произведение $X \times Y$ – топологию произведения.
   Назовём базой множество типа $U \times V$, где U, V – открытые. Произведение замкнутых – это предбаза. База и предбаза не совпадают.
   Рассмотрим пример: пусть $Y = X = \mathbb{A}'$.
   Тогда $\mathbb{A} \times \mathbb{A}'$ - это либо точки, либо прямые и их всевозможные пересечения. Но не все замкнутые множества на $\mathbb{A}'$ такие. Например, диагональ $(x = y)$.

Домашнее задание

1) <u>Задача.</u> Доказать, что топология на X – Хаусдорфова тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta \subset X \times X$ является замкнутым множеством в топологии произведения.
2) <u>Задача.</u> Пусть $K[x]$ – кольцо такое, что $x = (y^2 = x^3 + x^2)$. Цело ли оно над своим полем частных?

Семинар 4. Проекции

Разбор задач из домашнего задания

1) Задача. Доказать, что топология на X – Хаусдорфова тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta \subset X \times X$ является замкнутым множеством в топологии произведения.

Доказательство:

- Сначала докажем, что из того, что топология на X – Хаусдорфова следует то, что диагональ $\Delta \subset X \times X$ является замкнутым множеством в топологии произведения. Возьмем такие u_x и u_y (рис. 4.1), чтобы выполнялось:
$$u_x \cap u_y = \emptyset$$
Это означает, что $u_x \times u_y$ не пересекает диагональ.

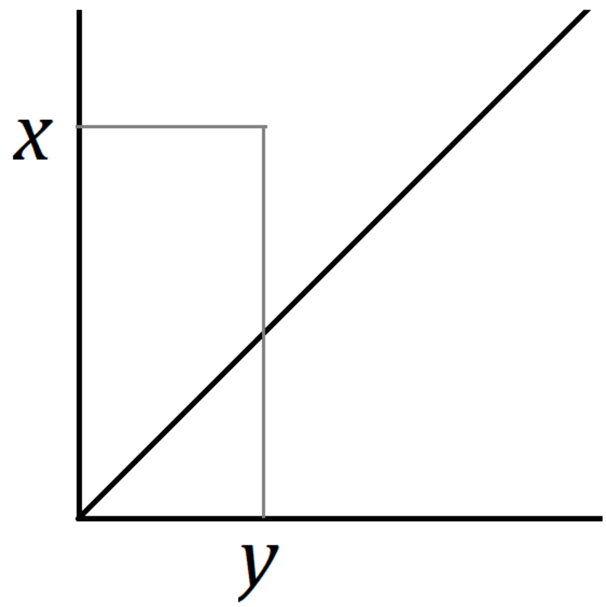

Рисунок 4.1

- Теперь докажем, что из того, что диагональ $\Delta \subset X \times X$ является замкнутым множеством в топологии произведения следует то, что топология на X – Хаусдорфова.
Пусть
$$D = \{(x, x)\}$$
$$x_\lambda x \backslash D = \bigcup_\lambda u_\lambda \times v_\lambda$$
$$(x, y) \in u_\lambda \times v_\lambda$$

$$\lambda \in u_\lambda$$
$$y \in v_\lambda$$
$$u_\lambda \cap v_\lambda = \emptyset$$

2) Задача. Пусть $K[x]$ – кольцо такое, что

$$x = (y^2 = x^3 + x^2)$$

Цело ли оно над своим полем частных?

Решение:

$$V = \{y^2 = x^3 + x^2\}$$

Рассмотрим

$$\frac{1}{x} \in K[V]$$
$$K[V] = \{P + Qy, \qquad P, Q \in K[x] | y^2 = x^3 + x^2\}$$
$$\frac{1}{x^n} + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \dots + \frac{a}{x} + a_0 = 0,$$

где $a_i \in K[V]$.

Перейдем к другому виду многочлена:

$$\frac{1 + x\tilde{P} + y\tilde{Q}}{X^n} = 0,$$

где $\tilde{P}, \tilde{Q} \in K[x]$.

Тогда

$$1 + x\tilde{P} + y\tilde{Q} = 0,$$

что невозможно.

Получается, что в данной задаче кольцо $K[x]$ не цело над своим полем частных.

Задача на рациональные отображения

Докажем, что функция, регулярная в каждой точке замкнутого множества регулярна.

$$\forall x \in V \ \exists \frac{f_x(x)}{g_x(x)}, g(x) \neq 0$$

Известно, что у каждого x есть отображение $\frac{f_x(x)}{g_x(x)}$.Рассмотрим множество I всевозможных знаменателей таких функций для всех x.

Пусть J – это идеал, порожденный I:

$$J = (I)$$

Пусть J порожден функциями $g_1, \dots, g_m$.

$$\varphi = \frac{f_1}{g_1} = \dots = \frac{f_m}{g_m}$$

Тогда у этих функций нет общих нулей.

$$1 = \sum \alpha_i g_i$$

Домножим это выражение на φ:

$$\varphi = \sum \alpha_i \varphi_i g_i$$

$$\frac{\sum \alpha_i f_i}{\sum \alpha_i g_i} = \varphi$$

$$\sum \alpha_i f_i = \left(\sum \alpha_i g_i\right) \varphi$$

$$\left(\sum \alpha_i g_i\right) \varphi = \sum \alpha_i (g_i \varphi)$$

Примеры проекций

Задача. Пусть $P = (a_1, \dots, a_n)$ – точка, $L = \{b_1 z_1 + \dots + b_n z_n + c = 0\}$ – гиперплоскость. Проведем из точки P через точку A прямую, падающую на гиперплоскость (рисунок 4.2). Показать, что проекция – рациональное отображение и посмотреть, где оно определено.

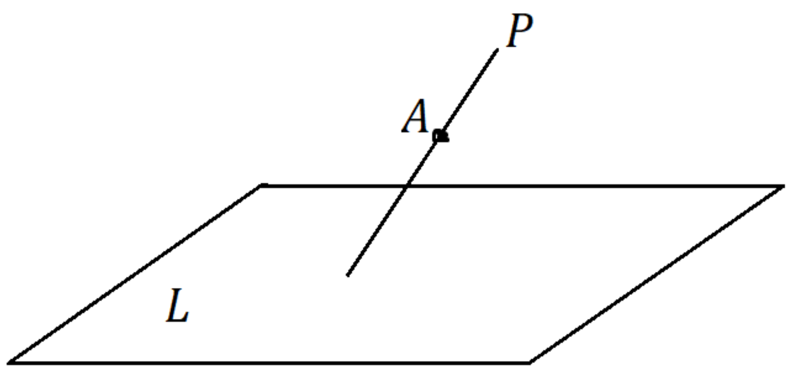

Рисунок 4.2

Решение:

Пусть A имеет координаты:

$$A = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\overrightarrow{PA} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + t(x_1 - a_1) \\ \vdots \\ a_n + t(x_n - a_n) \end{pmatrix}$$

Точка пересечения:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i\big(a_i + t(x_i - a_i)\big) + c = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} b_i(x_i - a_i)\right) t + \sum_{i=1}^{n} b_i a_i + c = 0$$

$$t = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i a_i + c}{\sum_{i=1}^{n} b_i(x_i - a_i)}$$

$$z_i = a_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i a_i + c}{\sum_{i=1}^{n} b_i(x_i - a_i)}(x_i - a_i)$$

Это выражение не определено там, где знаменатель равен нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i - \sum_{i=1}^{n} b_i a_i = 0$$

Задача про кубику

Задача. Дана кубика V

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

Доказать, что она рациональна, то есть

$$K(V) = K(u, v)$$

Решение:

(Сейчас решение этой задачи обсудим геометрически. Домашнее задание: проделать решение алгебраически).

Кубика рациональна – это тоже самое, что и кубика бирационально эквивалентна плоскости.

Найдем две непересекающиеся (скрещивающиеся) прямые l_1 и l_2, которые целиком лежат на кубике. Выделим некоторую точку P, которая не лежит ни на одной из этих прямых и сопоставим ей прямую l_P, пересекающую две другие (рисунок 4.3).

l_P проходит через P, l_1, l_2.

Покажем, что таким образом можно сопоставить каждой точке единственную прямую.

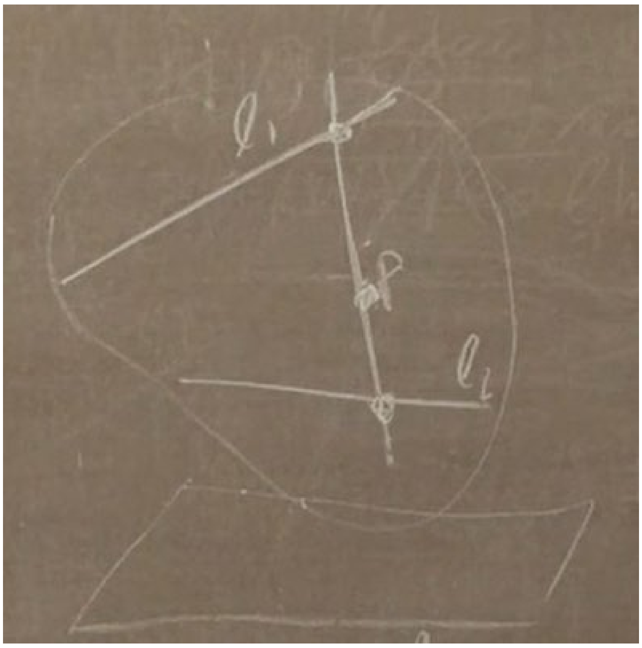

Рисунок 4.3

Домашнее задание

1) Задача. Выяснить, когда в $\mathbb{A}^n$ можно проектировать из аффинного пространства в аффинное пространство. И написать уравнение проекции.

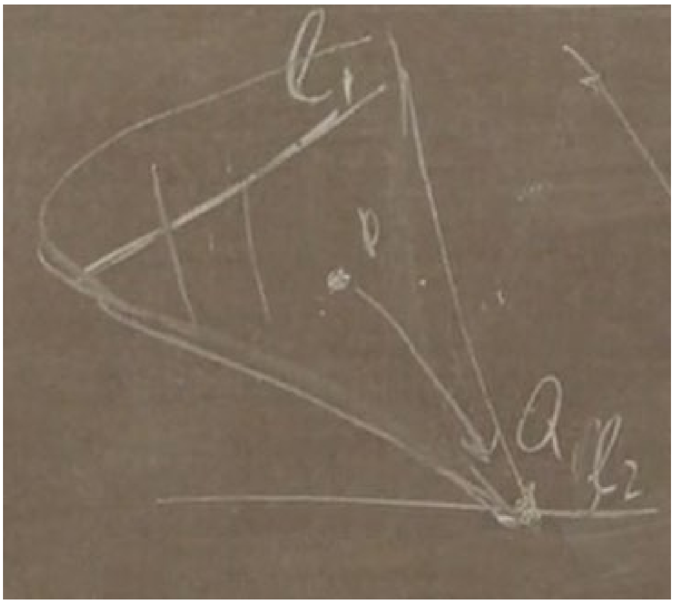

Рисунок 4.4

2) Задача. Дана кубика V

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

Доказать, что она рациональна, то есть

$$K(V) = K(u, v)$$

Показать, что таким способом, как изложено выше для этой задачи, можно построить рациональное отображение.

Семинар 5. Задача про рациональность кубической поверхности

Теорема 1

Теорема. Неприводимые аффинные многообразия V и W бирационально изоморфны тогда и только тогда, когда $k(V) \cong k(W)$.

Определение. $\varphi: V \dashrightarrow W$ – бирациональный изоморфизм, если $\exists\ \psi: W \dashrightarrow V$ такой что,

$$\varphi_0\psi = \omega_W$$

$$\psi_0\varphi = \omega_V$$

Пусть отображение $\varphi: V \dashrightarrow W$ – доминантно.

$$\varphi = \left(\frac{f_1}{g_1}, \dots, \frac{f_m}{g_m}\right)$$

Тогда можно рассмотреть такое подмножество:

$$D(g_1 \cdot \dots \cdot g_m) \subset V$$

Это множество биективно в каком-то аффинном многообразии.

Теорема 2

Теорема. Пусть отображение φ: $V \dashrightarrow W$ – доминантно, $\varphi^*: k(W) \leftrightarrow k(V)$. Тогда $[k(V): k(W)] = \#$ преобразование у общей точки.

$$k(V) \leftrightsquigarrow k(W)$$

$$T_1, \dots, T_N \longmapsto h_1(S), \dots, h_N(S)$$

$$g_1(T), \dots, g_M(T) \longleftarrow S_1, \dots, S_M$$

$$g_i(h_1, \dots, h_N) = T_i$$

Пример.

$$t \longmapsto (t^2, t^3)$$

$$\mathbb{A}^1 \longrightarrow V \subset \mathbb{A}^2$$

$$V: x^3 = y^2$$

Доказать, что у этого отображения есть обратное.

Способ 1:

$$\frac{y}{x} \longleftarrow (x, y)$$

Способ 2:

$$k[V] = {}^{k[x,y]}\Big/_{x^3 = y^2}$$

Утверждение. $\mathrm{t}r \deg k(V) = 0$ тогда и только тогда, когда V – точка.

Задача про рациональность кубической поверхности

Задача. Дана кубика V

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

Доказать, что она рациональна, то есть

$$K(V) = K(u, v)$$

Решение:

Кубика рациональна – это тоже самое, что и кубика бирационально эквивалентна плоскости.

Найдем две непересекающиеся (скрещивающиеся) прямые l_1 и l_2, которые целиком лежат на кубике. Выделим некоторую точку P, которая не лежит ни на одной из этих прямых и сопоставим ей прямую l_P, пересекающую две другие (рисунок 5.1).

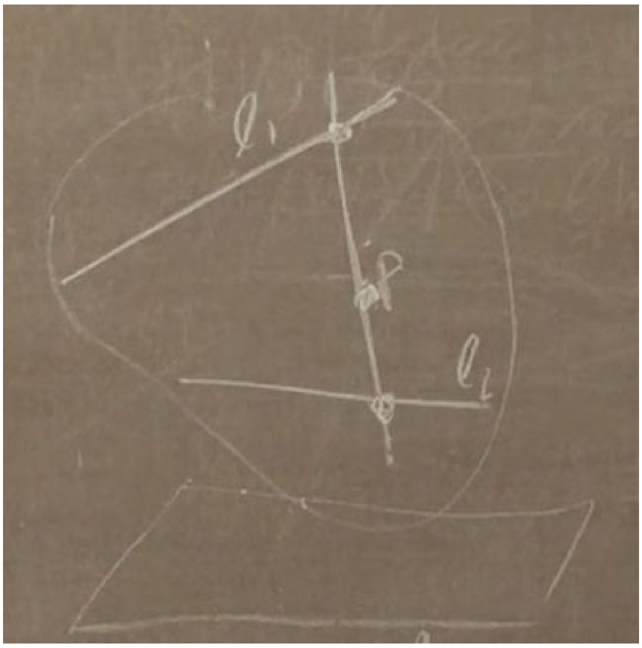

Рисунок 5.1

Пусть первая прямая:

$$L_1 = \{x + y = 0, z = 1\}$$

Вторая прямая:

$$L_2 = \{x + \varepsilon y = 0, z = \varepsilon\}$$

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x + \varepsilon y)(x + \varepsilon^2 y)$$

Пусть

$$P = (P_1, P_2, P_3)$$

Тогда прямая L:

$$L = \begin{pmatrix} P_1 + tv_1 \\ P_2 + tv_2 \\ P_3 + tv_3 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим пересечение $L \cap L_1$:

$$\begin{cases} P_1 + P_2 + t(v_1 + v_2) = 0 \\ P_3 + tv_3 = 1 \end{cases}$$

Тогда

$$t = -\frac{P_1 + P_2}{v_1 + v_2}$$

С другой стороны,

$$t = \frac{1 - P_3}{v_3}$$

Получаем, что

$$(P_3 - 1)(v_1 + v_2) = v_3(P_1 + P_2)$$

Рассмотрим пересечение $L \cap L_2$:

$$\begin{cases} P_1 + tv_1 + \varepsilon P_2 + \varepsilon t v_2 = 0 \\ P_3 + v_3 t = \varepsilon \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{\varepsilon - P_3}{v_3} = -\frac{P_1 + \varepsilon P_2}{v_1 + \varepsilon v_2}$$

В итоге получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}(P_3 - \varepsilon)(v_1 + \varepsilon v_2) = v_3(P_1 + \varepsilon P_2) \\ (P_3 - 1)(v_1 + v_2) = v_3(P_1 + P_2)\end{cases}$$

$$P_1 + \varepsilon P_2 \neq 0$$

$$P_1 + P_2 \neq 0$$

$$\frac{P_3 - \varepsilon}{P_1 + \varepsilon P_2}(v_1 + \varepsilon v_2) = \frac{P_3 - 1}{P_1 + P_2}(v_1 + v_2)$$

$$\left(\frac{P_3 - \varepsilon}{P_1 + \varepsilon P_2} - \frac{P_3 - 1}{P_1 + P_2}\right) v_1 = \left(\frac{P_3 - 1}{P_1 + P_2} + \varepsilon \frac{P_3 - \varepsilon}{P_1 + \varepsilon P_2}\right) v_2$$

Мы хотим найти точку $z = 0$:

$$P_3 + t v_3 = 0$$

$$t = -\frac{P_3}{v_3}$$

Утверждение 1

Утверждение. $\dim V = 0$ тогда и только тогда, когда V – объединение (конечного количества) точек.

Доказательство:

Считаем, что V неприводимо.

$$tr \deg k(V) = 0$$

Следовательно, $k(V)$ алгебраично над k. Значит $k(V) \cong k$. Следовательно, V – объединение.

Утверждение 2

Утверждение. $\dim V = n, \dim W = m \ \Rightarrow \ \dim V \times W = n + m$

Доказательство:

Пусть

$$V \supset V_1 \supset \cdots \supset V_n$$

$$V_n = dot$$

$$W \supset W_1 \supset \cdots \supset W_m$$

$$W_n = dot$$

Тогда

$$V \times W \supset V_1 \times W \supset \cdots \supset V_n \times W = dot \times W \supset dot \times W_1 \supset \cdots \supset dot \times W_m$$

Значит, существует цепочка длины $n + m$. Следовательно,

$$\dim V \times W \geq n + m$$

$k(V \times W)$ порождено $T_1, \dots, T_N, S_1, \dots, S_M$. Следовательно, все алгебраично над подполем, а значит

$$\dim V \times W \leq n + m$$

Определение. 1. Многообразие V рационально, если оно бирационально аффинному пространству.

2. V унирационально, если существует доминантное рациональное отображение $\mathbb{A}^n \dashrightarrow V$.

Семинар 6. Разбор задач из контрольной работы

Задача 1

Задача. Докажите, что фактор нетерова кольца нетеров.

Решение:

Пусть A – нетерово кольцо, I – идеал. Рассмотрим $A/_I \supseteq J$.

$\pi^{-1}(J)$ – идеал в A, следовательно $\exists\ a_1, \dots, a_n$, такие что

$$\pi^{-1}(J) = (a_1, \dots, a_n)$$

Следовательно,

$$J = \pi\big((a_1, \dots, a_n)\big)$$

Задача 2

Задача. Докажите, что кольцо главных идеалов нетерово.

Решение:

Пусть A – кольцо главных идеалов. Нужно доказать, что оно нетерово. Предположим противное. Рассмотрим цепочку идеалов такую, что

$$P_0 \subsetneq P_1 \dots$$

Рассмотрим объединение идеалов:

$$\bigcup P_i = I$$

Тогда, если $a \in \bigcup P_i$, то $a \in P_j$.

Пусть $I = (f)$. Тогда

$$\exists j: f \in P_j$$

Это значит, что $P_j = P_{j+1}$. Получили противоречие.

Задача 3

Задача (вариант 1). Пусть $J = (x^2 + y^2 - 1, y - 1)$. Найдите функцию из $I\big(V(J)\big)\backslash J$.

Решение:

$$V(J) = \{(0,1)\}$$

$$I\big(V(J)\big) = (x, y-1)$$

$V(I)$ – это точка с кратностью два. Действительно, например, если мы из образующей x^2+y^2-1 вычтем $(y-1)(y+1)$. Тогда $J=(x^2, y-1)$, откуда видно, что $V(I)$ – это точка с кратностью два.

Задача (вариант 2). Пусть

$$f = x^2 - y^2$$

$$g = x^3 + xy^2 - y^3 - x^2y - x + y$$

Найдите неприводимые компоненты $V(f,g)$.

Решение:

$$f = (x-y)(x+y)$$

$$g = x(x^2+y^2) - y(y^2+x^2) - (x-y) = (x^2+y^2-1)(x-y)$$

Видим, что у f и g общий множитель $(x-y)$.

Известно, что

$$V\big(I(hr, hq)\big) = V\big(I(h)\big) \cup V\big(I(r,q)\big)$$

Тогда получим ответ к задаче (на рисунке 6.1 отмечено красным):

$$V_1 \colon x - y = 0$$

$$V_2 \colon \{x+y=0\} \cap \{x^2+y^2-1\}$$

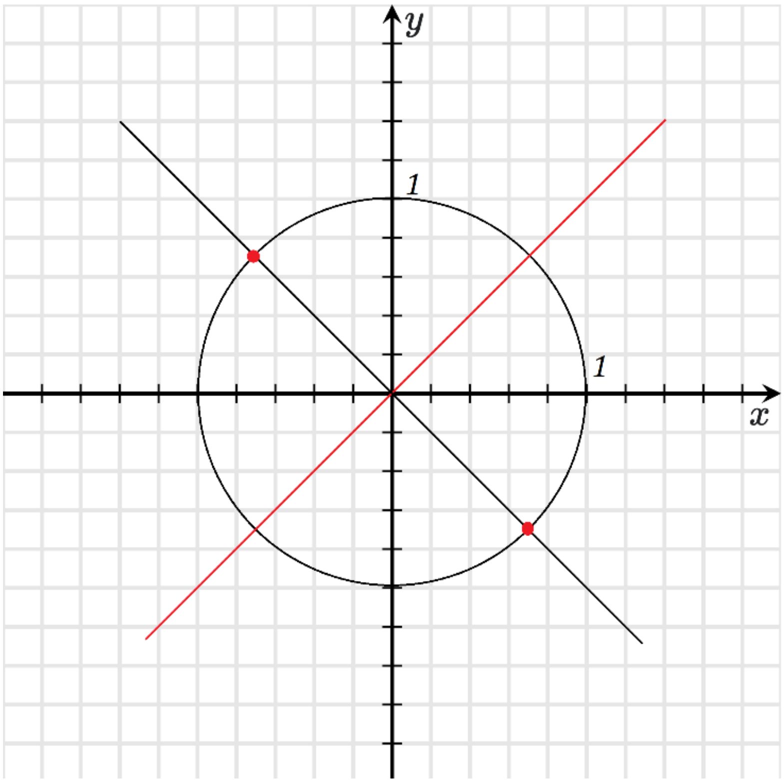

Рисунок 6.1

Задача 4

Задача. Пусть X – многообразие объединения точек $(1,0),(0,1),(0,0)$. Задайте $I(X)$ наименьшим числом образующих.

Решение:

$$\begin{cases} y(y-1)=0 \\ x^2+y^2-x-y+xy=0 \end{cases}$$

Меньшим числом задать нельзя, так как если уравнение будет одно, то мы получим либо пустое множество, либо некоторые поверхности.

Другой вариант решения:

Решим эту задачу геометрически. На плоскости отмечаем три заданные нам точки (рисунок 6.2). Нам нужно найти две прямые, содержащие эти точки. Наиболее простой случай – сами координатные оси. Так же можно взять любые другие две прямые (например, синие), то есть зададим идеал $\big(xy,(x-y)(x+y-1)\big)$.

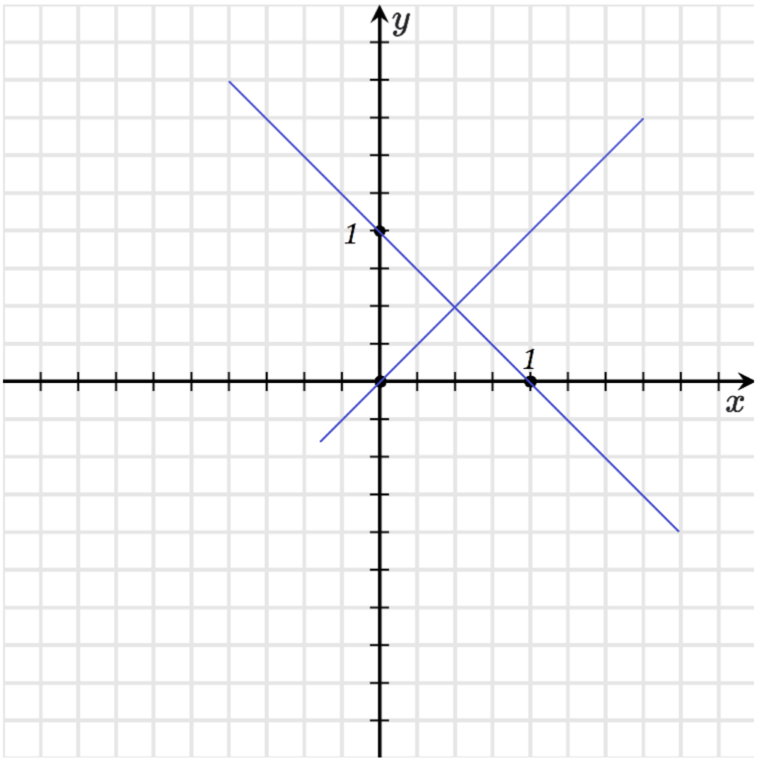

Рисунок 6.2

Этот идеал нерадикален.

Задача 5

Задача. Пусть $X = \{Z_1Z_2 = Z_3Z_4\}$ – квадрика. Доказать, что X бирационально эквивалентна $\mathbb{A}^3$, а именно взять точку $P = (1,0,0,0), P \in X$ и спроектировать на плоскость $Z_1 = 0$.

Решение:

Пусть $x \in X,\ x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

Зададим прямую

$$l = \begin{pmatrix} 1 + t(x_1 - 1) \\ 0 + tx_2 \\ 0 + tx_3 \\ 0 + tx_4 \end{pmatrix}$$

Эта прямая по условию задачи должна пересечь плоскость $Z_1 = 0$: $l \cap (Z_1 = 0)$.

Отсюда следует, что

$$1 + t(x_1 - 1) = 0$$

$$t = -\frac{1}{x_1 - 1}$$

Тогда получаем:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \to \left(0, \frac{x_2}{1 - x_1}, \frac{x_3}{1 - x_1}, \frac{x_4}{1 - x_1}\right)$$

Итого, $X \dashrightarrow \mathbb{A}^3$ с помощью функции f, где f:

$$f = \left(0, \frac{z_2}{1 - z_1}, \frac{z_3}{1 - z_1}, \frac{z_4}{1 - z_1}\right)$$

Теперь проделаем тоже самое в обратную сторону.

Возьмем точку с координатами $(0, v_1, v_2, v_3)$ и зададим прямую

$$l = \begin{pmatrix} 1 - t \\ 0 + tv_1 \\ 0 + tv_2 \\ 0 + tv_3 \end{pmatrix}$$

Тогда имеем:

$$(1 - t)v_1 t = v_3 t v_2 t$$

$$v_1 t - v_1 t^2 = v_2 v_3 t^2$$

$$v_1 - v_1 t = v_2 v_3 t$$

$$v_1 = (v_1 + v_2 v_3)t$$

$$t = \frac{v_1}{(v_1 + v_2 v_3)}$$

Тогда получаем:

$$(0, v_1, v_2, v_3) \to \left(1 - \frac{v_1}{v_1 + v_2 v_3}, \frac{v_1^2}{v_1 + v_2 v_3}, \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2 v_3}, \frac{v_1 v_3}{v_1 + v_2 v_3}\right)$$

Теперь сделаем проверку. В выражении

$$f = \left(0, \frac{z_2}{1 - z_1}, \frac{z_3}{1 - z_1}, \frac{z_4}{1 - z_1}\right)$$

имеем:

$$\frac{z_2}{1 - z_1} = v_1$$

$$\frac{z_3}{1-z_1} = v_2$$

$$\frac{z_4}{1-z_1} = v_3$$

Получаем:

$$v_1 + v_2 v_3 = \frac{z_2}{(1-z_1)^2}$$

$$\frac{v_1}{v_1 + v_2 v_3} = 1 - z_1$$

$$1 - \frac{v_1}{v_1 + v_2 v_3} = z_1$$

$$\frac{v_1^2}{v_1 + v_2 v_3} = z_2$$

$$\frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2 v_3} = z_3$$

$$\frac{v_1 v_3}{v_1 + v_2 v_3} = z_4$$

В итоге:

$$(0, v_1, v_2, v_3) \to (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

Другой вариант решения:

Два многообразия бирациональны и изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их поля частных.

$$K(\mathbb{A}^3) = K(T_1, T_2, T_3)$$

Нужно доказать, что

$$K(T_1, T_2, T_3) \cong K(X)$$

Функции $\frac{z_1 z_2}{z_3}$ и Z_4 одинаковы как рациональные функции.

Теорема о неприводимой квадрике

Теорема. Неприводимая квадрика бирациональна эквивалентна аффинному пространству.

Доказательство:

Пусть X – квадрика и $P = (0, \ldots, 0)$ – точка.

Эта точка не особая по определению:

Определение. Пусть $X = (F = 0)$. P – особая точка, если

$$\frac{\partial F}{\partial z_1}(P) = \cdots = \frac{\partial F}{\partial z_n}(P) = 0$$

Доказательство (продолжение):

Пусть $F = 0$ – уравнение квадрики.

$$X \ni P = 0$$

$$F = f_0 + f_1 + f_2 = f_1 + f_2$$

Точка P – особая тогда и только тогда, когда $f_1 = 0$. В этом случае мы проектировать не можем.

Пусть P – не особая, то есть $f_1 \neq 0$.

Дальнейшее доказательство предоставляется читателю на дом.

Домашнее задание

Задача. Доказать, что если $P \in X$ (P – не особая, X - квадрика), то X бирационально эквивалентна $\mathbb{A}^n$.

Задача. Найти идеалы в $\mathbb{A}$.

Разбор задач из домашнего задания

Задача. Верно ли что в артиновом кольце конечное число идеалов?

Решение:

Пусть в кольце A конечное число максимальных идеалов $m_1, \ldots, m_k$. Рассмотрим каждый из этих идеалов как отдельное артиново кольцо с идеалами $m_{11}, \ldots, m_{1m}$ и так далее.

Пусть идеалов конечное количество. Тогда в каком-то из идеалов $m_1, \dots, m_k$ бесконечное количество идеалов. Допустим, что бесконечное количество идеалов в m_1. Значит, конечное количество идеалов содержится в каком-то из идеалов $m_{11}, \dots, m_{1m}$.

В итоге у нас получается бесконечное число убывающих идеалов. Получили противоречие.

Семинар 7. Размерность многообразий

Пример 1

(Продолжение разбора задачи с предыдущего семинара).

Рассмотрим $K[x,y]/\langle x^2, xy, y^2\rangle$. Пример бесконечного количество идеалов: $ax+by$. Пусть $J=(x^2,xy,y^2)$.

Нарисуем $V(J)$: это точка $(0,0)$. Идеал:

$$I\big(V(J)\big)=(x,y)$$

Любая прямая, проходящая через эту точку, имеет вид $ax+by$.

Прямая $x+a$ не будет проходить через эту точку. Такая прямая будет задавать тривиальный идеал.

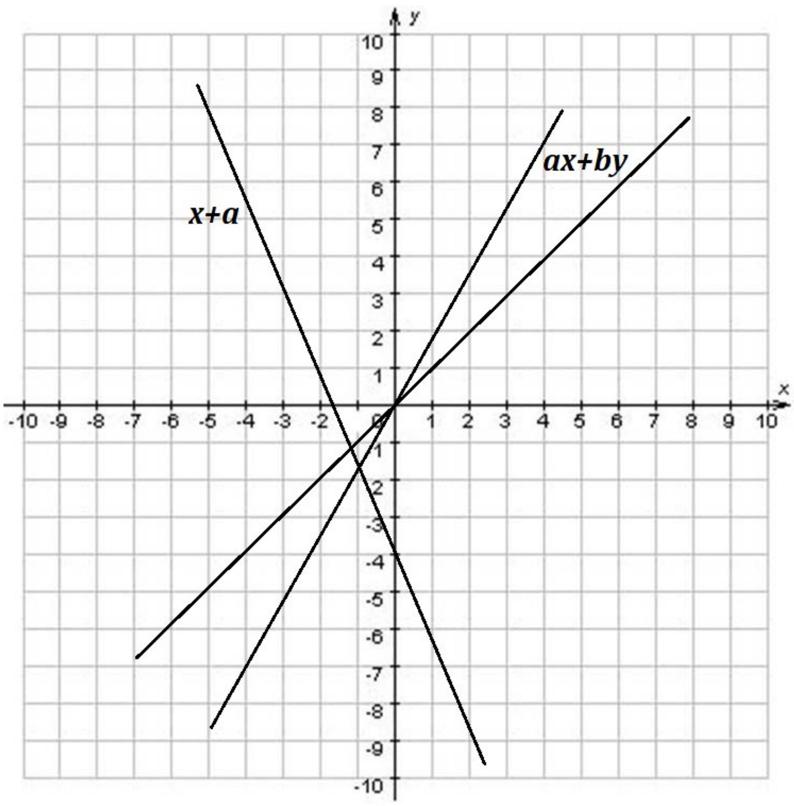

Рисунок 7.1

Вспомним рассуждения с предыдущего семинара: пусть в кольце A конечное число максимальных идеалов $m_1, \ldots, m_k$. Рассмотрим каждый из этих идеалов как отдельное артиново кольцо с идеалами $m_{11}, \ldots, m_{1m}$ и так далее. Таким образом мы получаем «цепочку» (рис. 7.2).

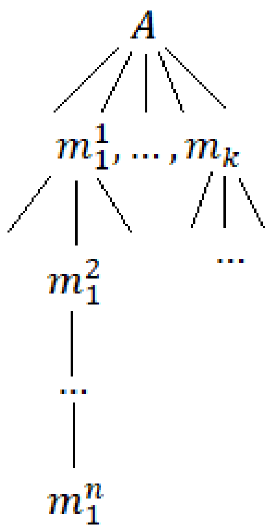

Рисунок 7.2

Пусть идеалов конечное количество. Тогда в каком-то из идеалов $m_1, \ldots, m_k$ бесконечное количество идеалов. Допустим, что бесконечное количество идеалов в m_1. Значит, конечное количество идеалов содержится в каком-то из идеалов $m_{11}, \ldots, m_{1m}$.

В итоге у нас получается бесконечное число убывающих идеалов. Получили противоречие.

Мы хотим придумать такую цепочку, чтобы в какой-то момент идеалы, которые порождают элементы этой цепочки становились одинаковыми.

Домашнее задание

Задача. Привести пример артинового кольца с бесконечным числом вложенных «идеалов». Каждый «идеал» является идеалом в кольце, которое образует предыдущий идеал.

Разбор задач из домашнего задания

Задача. Доказать, что если $P \in X$ (P – не особая, X - квадрика), то X бирационально эквивалентна $\mathbb{A}^n$.

Решение:

Напомним определение особой точки.

Определение. Пусть $X = (F = 0)$. P – особая точка, если

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(P) = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n}(P) = v(P) = 0$$

Пусть $P = 0$. Тогда

$$F = f_0 + f_1 + \dots + f_n,$$

где f_i – однородная компонента степени i.

Если $P = 0$, то $f_0 = 0$.

$$v(0) = 0 \Leftrightarrow f_1 = 0$$

То есть точка особая, когда у F нет линейной части.

Прямая, проходящая через ноль, имеет вид $(tz_1, \dots, tz_n)$. Подставим эти координаты в выражение для F:

$$F = f_0 + tf_1(z_1, \dots, z_n) + t^2 f_2(z_1, \dots, z_n) + \dots + t^n f_n(z_1, \dots, z_n)$$

Получается, что кратность касания два, то есть:

$$f_0 = 0$$

$$f_1(z_1, \dots, z_n) = 0$$

Таким образом, мы приходим еще к одному определению особой точки.

Определение. Гладкая точка – это такая точка, размерность касательного пространства которой равна размерности многообразия.

Определение. Особая точка – это такая точка, размерность касательного пространства которой больше размерности многообразия.

На дом задавалась задача, в которой $F = f_1 + f_2$. Если $f_1 = 0$, то многообразие является конусом.

Пусть $X = (F = 0)$. Считаем, что квадрика неприводимая и не является двойной плоскостью.

Может ли быть, что все точки на квадрике являются особыми? Оказывается, что может, при условии, что поле конечное.

Будем считать, что мы работаем над бесконечным, алгебраически замкнутым полем. В этом случае все точки не могут быть особыми.

Какое максимальное количество особых точек может быть на квадрике? Рассмотрим, для примера, квадрику

$$x^2 - xy + y^2 + 1 = 0$$

В этом случае, существует прямая, на которой все частные производные зануляются, то есть вся прямая состоит их особых точек.

<u>Упражнение.</u> Как можно построить n-мерную квадрику, у которой размерность особого множества $n-2$?

<u>Решение:</u>

Пусть $X = (x^2 + y^2 + z^2 = 0) \in \mathbb{A}^3$. Тогда $\dim X = 2$.

Обозначим $\dim X = m$. Тогда

$$\dim sing(X) < m - 1$$

Мы привели двухмерный пример квадрики.

Попробуем построить наименьшим количеством изменений двумерной квадрики $X = (x^2 + y^2 + z^2 = 0)$ m-мерную.

Пусть $m = 3$. Например, можем заменить x на $x + t$:

$$X = ((x + t)^2 + y^2 + z^2 = 0) \in \mathbb{A}^4$$

На самом деле мы можем написать просто:

$$X = (x^2 + y^2 + z^2 = 0) \in \mathbb{A}^4$$

Вернемся к решению задачи из домашнего задания: доказать, что если $P \in X$ (P – не особая, X - квадрика), то X бирационально эквивалентна $\mathbb{A}^n$.

$$F = f_1 + f_2$$

$$f_1 \neq 0$$

Рассмотрим вектор $(tz_1, \dots, tz_n)$. Сначала будем проектировать из квадрики на плоскость $\widetilde{Z_n} = 1$. Тогда $tz_n = 1$. Следовательно,

$$t = \frac{1}{z_n}$$

Делаем подстановку:

$$\left(\frac{z_1}{z_n}, \frac{z_2}{z_n}, \dots, 1\right)$$

По определению, такими функциями мы задаем проекцию. Очевидно, что образ лежит в плоскости $\widetilde{Z_n} = 1$.

Теперь проделаем это в обратную сторону. Возьмём $(v_1, \dots, v_{n-1}, 1)$. Эта прямая проходит через точку v_0 и, таким образом, получаем прямую $(tv_1, \dots, tv_{n-1}, t)$.

Найдем точку пересечения.

$$tf_1(v_1, \dots, v_{n-1}, 1) + t^2 f_2(v_1, \dots, v_{n-1}, 1) = 0$$

Тогда

$$t = -\frac{f_1(v_1, \dots, v_{n-1}, 1)}{f_2(v_1, \dots, v_{n-1}, 1)}$$

Обозначим:

$$g(v_1, \dots, v_{n-1}) = -\frac{f_1(v_1, \dots, v_{n-1}, 1)}{f_2(v_1, \dots, v_{n-1}, 1)}$$

Получаем, что

$$(v_1, \dots, v_{n-1}, 1) \mapsto (gv_1, \dots, gv_n, g)$$

Проверим это подстановкой:

$$g(v_1, \dots, v_{n-1}) = -\frac{f_1\left(\frac{z_1}{z_n}, \dots, \frac{z_{n-1}}{z_n}, 1\right)}{f_2\left(\frac{z_1}{z_n}, \dots, \frac{z_{n-1}}{z_n}, 1\right)}$$

$$(f_1 + f_2)(z_1, \dots, z_n) = 0$$

Домножим на z_n:

$$-\frac{\frac{1}{z_n}\, f_1(z_1, \dots, z_n)}{\frac{1}{z_n^2} f_2(z_1, \dots, z_n)} = -\frac{z_n\, f_1(z_1, \dots, z_n)}{f_2(z_1, \dots, z_n)}$$

$$-\frac{z_n\, f_1(z_1, \dots, z_n)}{f_2(z_1, \dots, z_n)} = z_n$$

Получаем, что $g = z_n$.

Домашнее задание

Задача. Доказать, что размерность многообразия над $\mathbb{C}$ – это максимальная длина цепочки простых идеалов в локализации по максимальному идеалу.

Семинар 8. Простые идеалы

Разбор задач из домашнего задания

Задача. Привести пример артинового кольца с бесконечным числом вложенных «идеалов». Каждый «идеал» является идеалом в кольце, которое образует предыдущий идеал.

Решение:

Пусть A – артиново кольцо.

$$A \supset m_1 \supset m_2$$

Пусть

$$A = {K[x,y]}\Big/{(x^2, xy, y^2)}$$

Рассмотрим в нем какой-нибудь идеал, например, $m_1 = (x)$. Возьмем элемент $2x$ (очевидно, что он лежит в этом кольце). Заметим, что он будет идеалом $(2x)$ и не будет совпадать с m_1. Продолжим цепочку дальше: $(4x), (8x), (16x), \dots$

Таким образом, мы получили пример артинового кольца с бесконечным числом вложенных идеалов.

Задача. Доказать, что размерность многообразия над $\mathbb{C}$ – это максимальная длина цепочки простых идеалов в локализации по максимальному идеалу.

Решение:

Размерность – максимальная длина вложенных простых идеалов в локализации по максимальному идеалу.

Напомним, что максимальная длина вложенных простых идеалов – это максимальная длина вложенных неприводимых множеств, а максимальный идеал – это точка.

Пусть мы имеем некоторое многообразие (на рисунке 8.1 отмечено красным). В этом многообразии есть какая-то точка. Мы знаем, что размерность этого многообразия можно эквивалентно представить как максимальную длину цепочки строго вложенных неприводимых многообразий, содержащих выделенную точку.

Можно выбрать такую цепочку многообразий, чтобы все они содержали выбранную нами точку.

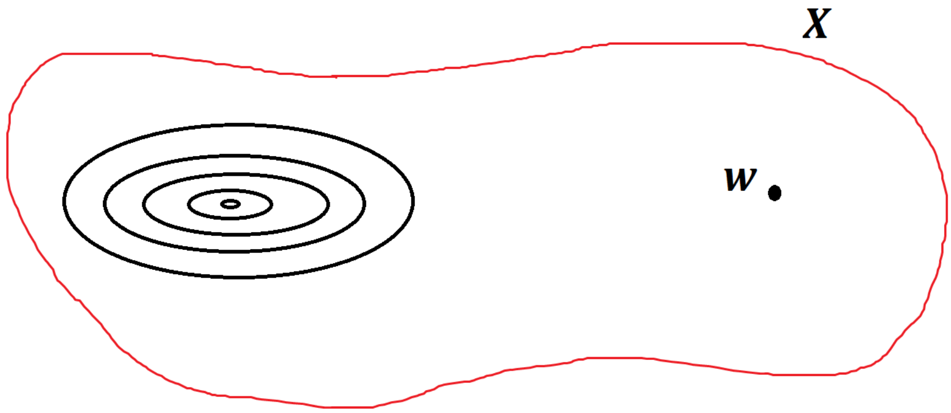

Рисунок 8.1

Рассмотрим многообразие X. Пусть $\dim X = n$.

Рассмотрим максимальную цепочку вложенных неприводимых многообразий, содержащих эту точку. Мы хотим доказать, что максимальная длина такой цепочки будет n.

Больше, чем n длина цепочки не может быть, так как $\dim X = n$.

Рассмотрим

$$f \in K[V], f(w) = 0$$

$$f \not\equiv 0 \text{ на } V$$

Пусть

$$v_1 = \{f = 0\} \cap V$$

$$w \in v_1$$

Далее,

$$v_2 = \{g = 0\} \cap v_1$$

$g = 0$ в w и $g \neq v_1$.

И так далее.

Лемма о простых идеалах

Лемма. Пусть S – мультипликативное множество. $S = A/m$. Простые идеалы в $S^{-1}A$ находятся в однозначном соответствии с простыми идеалами в A, не пересекающими S.

Отметим, что простые идеалы, не пересекающие S – это простые идеалы, не лежащие в S.

Доказательство:

В одну сторону это очевидно, потому что если есть гомоморфизм колец, то прообраз простого идеала является простым.

Пусть $P \subset A$ – прост. Это значит, что A/p – область целостности. Локализуем это по нашему множеству S.

$$S^{-1}A/_{S^{-1}p} \cong \bar{S}^{-1}A/p,$$

где $\bar{S}$ – это образ S в A/p.

Заметим, что $\bar{S}^{-1}A/p$ лежит в поле частных A/p. A/p – область целостности, а значит $\bar{S}^{-1}A/p$ тоже область целостности.

Пример

Рассмотрим семимерное пространство $\mathbb{A}^7(x, y, z, t, u, v, w)$. Пусть $X \subset \mathbb{A}^7$ и

$$X = \begin{cases} x = ut \\ y = vt \\ w(t+z) = 1 \end{cases}$$

Многообразие X отображается на три координаты:

$$X \to \mathbb{A}^3(x, y, z)$$

Выясним, какие размерности у прообразов точек.

Рассмотрим три случая:

1) $x = y = 0, z \neq 0$
2) $x \neq 0$ или $y \neq 0$
3) $x = y = z = 0$

Найдем прообразы и их размерности во всех трех случаях:

1) Пусть $t = 0$. Тогда $w = \frac{1}{z}$, u и v – произвольные. Получаем, что изоморфно $\mathbb{A}^2$.

Пусть $t \neq 0$. Тогда

$$u = v = 0,$$
$$w = \frac{1}{t+z}, t \neq -z$$

Получаем, что t – это аффинная прямая без двух точек, то есть $\mathbb{A}^2\backslash\{0, -z\}$.

2) Пусть $x \neq 0$. Выразим через t остальные параметры:

$$u = \frac{x}{t}$$
$$v = \frac{y}{t}$$
$$w = \frac{1}{t+z}, t \neq -z$$

Получаем прообраз: $\mathbb{A}^1\backslash\{0, -z\}$.

3) Так как $z = 0$, то $t \neq 0$. Получаем:

$$u = v = 0$$
$$w = \frac{1}{t}$$

Получаем прообраз: : $\mathbb{A}^1\backslash\{0\}$.

Графически это изображено на рисунке 8.2.

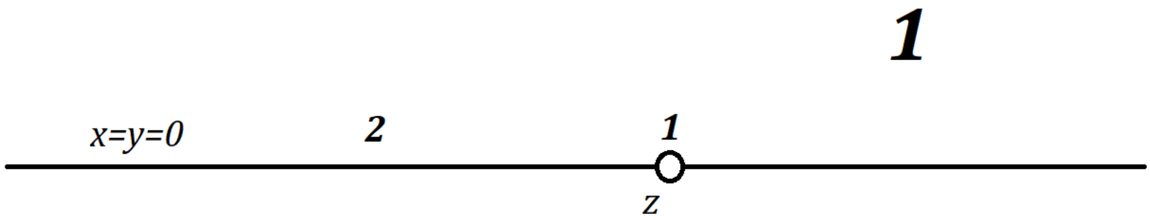

Рисунок 8.2

Задача

Рассмотрим $\mathbb{A}(x, y, z, t, u, v)$. Пусть $X' \subset \mathbb{A}$ и

$$X = \begin{cases} x = ut \\ y = vt \end{cases}$$

Введем плоскость:

$$H = \{t + z = 0\}$$

Если есть аффинное пространство $\mathbb{A}(x, y, z, t)$ и оно отображается в пространство $\mathbb{A}(x, y, z)$:

$$\mathbb{A}(x, y, z, t) \to \mathbb{A}(x, y, z)$$

Возьмем прямую в слое $x = y = t = 0$. Многообразие X' отличается от $\mathbb{A}(x, y, z, t) \to \mathbb{A}(x, y, z)$ тем, что у нас вместо этой прямой будет плоскость (рисунок 8.3).

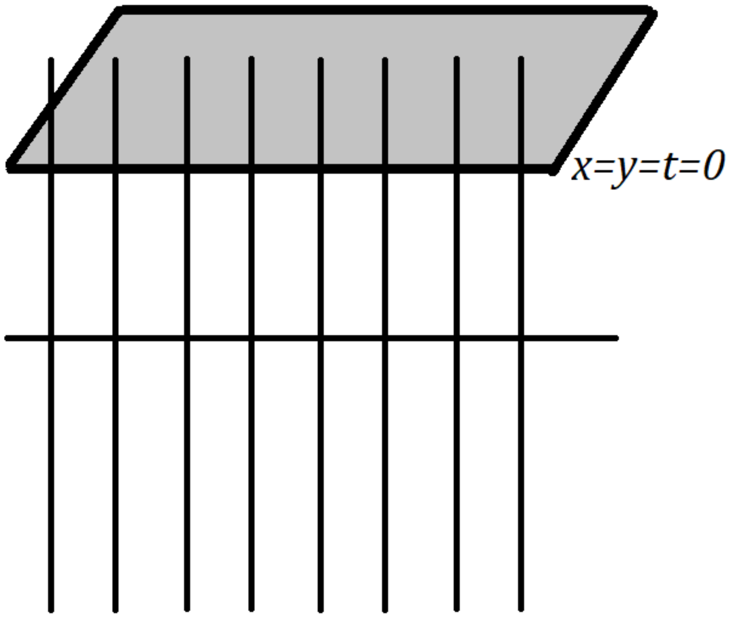

Рисунок 8.3

Домашнее задание

Задача. Пусть

$$x_i \to x_i + a_i x_n$$

$$g(x_1 + a_1 x_n, \dots, x_{n-1} + a_{n-1} x_n, x_n) \rightsquigarrow x_n^k + \cdots$$

$$|k| < N$$

Замена: $x_i \to x_i + x_n^{N^i}$

Показать, что таким образом можно получить целый многочлен.

Задача. Возьмем отображение $\{xy=1\}=V$ на x. Привести пример конечного отображения $V \to \mathbb{A}^1$.

Семинар 9. Гладкость и касательные пространства

Разбор задач из домашнего задания

Задача. Пусть

$$x_i \to x_i + a_i x_n$$

$$g(x_1 + a_1 x_n, \dots, x_{n-1} + a_{n-1} x_n, x_n) \rightsquigarrow x_n^k + \cdots$$

$$|k| < N$$

Замена: $x_i \to x_i + x_n^{N^i}$

Показать, что таким образом можно получить целый многочлен.

Решение:

Теорема. Пусть K – поле, A – конечно порожденная алгебра, такая что

$$A = K[a_1, \dots, a_n]$$

Тогда существуют элементы $y_1, \dots, y_m$ – алгебраически независимые над K – такие, что A цело над $K[y_1, \dots, y_m]$.

Доказательство:

Рассмотрим отображение

$$\theta : K[T_1, \dots, T_n] \to A$$

Если T_i алгебраически независимые, то

$$T_i \to a_i$$

Предположим, что $\ker \theta$ не пусто. Тогда существует многочлен f такой, что

$$f \in \ker \theta$$

И далее доказательство по индукции.

Таким образом можно придумать замену такую, что

$$T_i \longmapsto T_i'$$

$$T_n \longmapsto T_n$$

Пусть $f(T_1', \dots, T_{n-1}', T_n), f(T_1', \dots, T_{n-1}', T_n)$ – старшие коэффициенты при T_n.

$$f = \sum_{\overline{\alpha}} \beta_{\overline{\alpha}} T_1^{\alpha_1} \dots T_n^{\alpha_n}$$

Пусть $N > \alpha_i$. Сделаем замену

$$T_i \to T_i + T_n^{N^i}$$

$$T_n \to T_n$$

Тогда

$$f = \sum_{\overline{\alpha}} \beta_{\overline{\alpha}} \left(T_1 + T_n^{N^1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(T_{n-1} + T_n^{N^{n-1}}\right)^{\alpha_{n-1}} T_n^{\alpha_n}$$

Получается, что старшие коэффициенты многочлена выглядят как

$$T_n^{\sum N^i \alpha_i} = T_n^{(\alpha_n \dots \alpha_1)_N}$$

Таким образом, мы получили запись некоторого числа в N-ой системе исчисления, а оно единственно.

Задача. Возьмем отображение $\{xy = 1\} = V$ на x. Привести пример конечного отображения $V \to \mathbb{A}^1$.

Решение:

Обозначим гиперболу h, а прямую $x + y = 0$ как l.

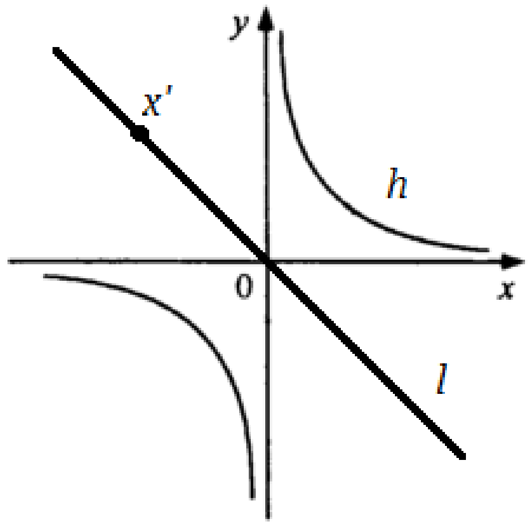

Рисунок 9.1

Пусть $x' = (x_1 - x_2)$.

Выберем t параметром, тогда

$$A = K[t, t^{-1}] = K[h]$$

$$B = K\left[t - \frac{1}{t} = a\right] = K[l]$$

Нам нужно показать, что $K[h]$ цело над $K[l]$.

Данное отображение устроено как:

$$(x, y) \to x - y$$

Получаем, что

$$K[x, y]\big/_{x = -y} \approx K[x]$$

$$K[x] \approx -K[t]$$

$$K[x, y]\big/_{xy = 1} \approx K[t, t^{-1}]$$

Заметим, что для A

$$F(y) = y^2 - ay - 1$$

$$F(t) = 0$$

Заметим, что для B

$$F(y) = y^2 + ay - 1$$

$$F(t^{-1}) = 0$$

<u>Упражнение.</u> Доказать, что A конечно порождено над B (A, B взяты из предыдущей задачи).

<u>Решение:</u>

Возьмем в качестве образующей $t, 1$. Если мы выразим t^n, t^{-n} через образующие, то мы получим и A.

$$t^{-1} = t - a$$

По этой формуле мы легко можем выразить любой многочлен через t и 1.

Задача

Задача. Пусть f – однородный многочлен степени однородности $K > 1$ от переменных $x_1, \dots, x_n$. Пусть задана гиперповерхность $X = \{f = 0\}$. Особые точки задаются уравнением

$$\{f'_{x_1} = \dots = f'_{x_n} = 0 = f\}$$

Можно ли для любого f задать особые точки меньшим числом уравнений?

Решение:

Пусть

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1+\dots+i_n=n} a_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} = 0$$

Тогда

$$\begin{cases} f'_{x_1} = \sum a_i i_1 x_1^{i_1-1} \dots x_n^{i_n} = 0 \\ \vdots \\ f'_{x_n} = \sum a_i i_n x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n-1} = 0 \end{cases}$$

Вопрос: следует ли из этой системы уравнений то, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1+\dots+i_n=n} a_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} = 0?$$

Умножим каждое уравнение на соответствующее x_i и сложим их:

$$+\begin{cases} f'_{x_1} = \sum a_i i_1 x_1^{i_1-1} \dots x_n^{i_n} = 0 \mid \cdot x_1 \\ \vdots \\ f'_{x_n} = \sum a_i i_n x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n-1} = 0 \mid \cdot x_n \end{cases}$$

Тогда получим:

$$x_1 f_{x_1} + \dots + x_n f_{x_n} = Kf$$

Касательное пространство

Определение. Касательное пространство к гладкому многообразию M в точке x — совокупность касательных векторов с введённой на ней естественной структурой векторного пространства.

Касательное пространство к M в точке x обычно обозначается T_xM или — когда очевидно, о каком многообразии идёт речь — просто T_x.

На рисунке 9.2 изображены M, T_x и касательный вектор $v \in T_x$, проходящий вдоль кривой $\gamma(t)$.

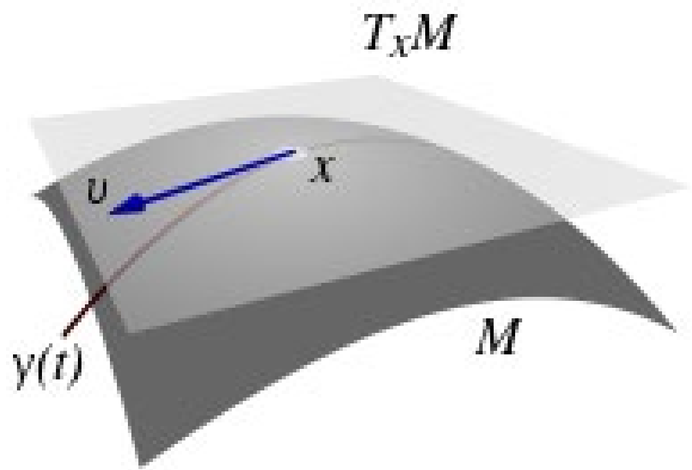

Рисунок 9.2

Инвариантно T_x задается как

$$T_x = \left({}^{m_x}\!/_{m_x^2}\right)^*$$

Точка называется особой, если размерность T_x больше, чем размерность многообразия M. Точка не является особой, если размерность T_x меньше или равна размерности многообразия M.

Рассмотрим $0 \in X \subset \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1$. Введем в $\mathbb{A}^n$ координаты $x_1, \dots, x_n$, а в $\mathbb{A}^1$ координату t.

Введем множество $\tilde{X}$:

$$\tilde{X} = \{(a, t) \colon at \in X\}$$

Заметим, что $\tilde{X}$ замкнуто.

У $\tilde{X}$ есть две проекции:

$$\tilde{X} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{A}^1$$

$$\tilde{X} \xrightarrow{\psi} \mathbb{A}^n$$

Заметим, что $\tilde{X}$ приводимо:

$$\tilde{X} = \{(a, 0)\} \cup Y,$$

где Y – замыкание $\varphi^{-1}(\mathbb{A}^1 \backslash \{0\})$.

Будем обозначать:

$$Y \xrightarrow{\varphi} \mathbb{A}^1$$

$$Y \xrightarrow{\psi} \mathbb{A}^n$$

Определение. Θ_x – касательный конус – это $\psi\big(\varphi^{-1}(0)\big)$.

Пусть

$$X = \{F_1 = \dots = F_k = 0\}$$

$$\tilde{X} = \{F(a, t) = \dots = 0\}$$

Разложим F на однородные компоненты:

$$F_i = F_i^0 + F_i^1 + \dots + F_i^{K_i}$$

$$\widetilde{F_i} = F_i^0 + tF_i^1 + t^2 F_i^2 + \dots + t^{K_i} F_i^{K_i} = 0$$

Отметим, что $F_i^0 = 0$.

Пусть s_i – степень первого ненулевого многочлена $F_i^{s_i}$. Тогда

$$\tilde{X} = \left\{0 = t^{s_i} F_i^{s_i} + t^{s_i + 1} F_i^{s_i + 1} + \cdots\right\}$$

Отсюда следует, что

$$\Theta_x = \left\{F_1^{s_1} = \dots = F_K^{s_K} = 0\right\}$$

Заметим, что x – не особая точка тогда и только тогда, когда $\Theta_x = T_x$.

Примеры

Пример. Пусть X- плоская кривая, $F(x, y) = 0$.

F^s – однородный многочлен от x, y такой, что

$$F^s = \Pi(\alpha_i x + \beta_i y)^{\gamma_i}$$

Рассмотрим кривую $F = y^2 - x^3$. Тогда уравнение касательного конуса: $y^2 = 0$.

Теперь рассмотрим кривую $F = y^2 - x^3 - x^2$. Тогда уравнение касательного конуса: $(y - x)(y + x) = 0$.

Домашнее задание

Задача. Пусть $X = \{xy = 0\}$, $\{0\} \in X$. Описать O_0 – локальное кольцо точки 0.

Семинар 10. Нормализация кривых

Разбор задач из домашнего задания

Задача. Пусть $X = \{xy = 0\}$, $\{0\} \in X$. Описать O_0 – локальное кольцо точки 0.

Решение:

Рассмотрим кольцо функций на X: $K[x]$.

Пусть

$$f \in K[x, y]$$

$$f = \sum xy \cdot g + \psi(x) + \varphi(y)$$

Тогда

$$K[x] = \{\psi(x) + \varphi(y)\}$$

Опишем O_x:

$$O_x = \left\{\frac{f}{g}\right\}, f, g \in K[X]$$

$$O_x = \frac{xf(x) + yg(y) + \alpha}{1 - \big(xv(x) + yu(y)\big)}$$

$$\frac{xf(x) + yg(y) + \alpha}{1 - \big(xv(x) + yu(y)\big)} = (xf(x) + yg(y) + \alpha)\left(1 + \sum_{k>0}\big(xv(x) + yu(y)\big)^k\right)$$

$$(xf(x) + yg(y) + \alpha)\left(1 + \sum_{k>0}\big(xv(x) + yu(y)\big)^k\right) = (xf(x) + yg(y) + \alpha)\left(1 + \sum_{k>0}\big(xv(x)\big)^k + \big(yu(y)\big)^k\right)$$

$$(xf(x) + yg(y) + \alpha)\left(1 + \sum_{k>0}\big(xv(x)\big)^k + \big(yu(y)\big)^k\right) = (xf(x) + yg(y) + \alpha)\left(-1 + \frac{1}{1 - xv} + \frac{1}{1 - yu}\right)$$

$$(xf(x) + yg(y) + \alpha)\left(-1 + \frac{1}{1 - xv} + \frac{1}{1 - yu}\right)$$
$$= \left(xf + yg + xf\sum_{k>0}\big(xv(x)\big)^k + yg\sum_{k>0}\big(yg(y)\big)^k + \alpha\sum(\dots)\right)$$

$$(xf(x) + yg(y) + \alpha)\left(-1 + \frac{1}{1 - xv} + \frac{1}{1 - yu}\right) = \left(\frac{xf + \alpha}{1 - xv}, \frac{yg + \alpha}{1 - yu}\right)$$

Теорема

Нормализация – это сюръективное регулярное конечное бирациональное отображение из нормального многообразия в данное многообразие.

Теорема. Пусть $Y \xrightarrow{g} X$ – регулярно, $g(Y)$ − плотно в X, Y – нормально. Тогда существует отображение $Y \to X^n$ такое, что диаграмма на рисунке 10.1 коммутативна.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[dr] & X^n \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd}$$

Рисунок 10.1

Доказательство:

$$K[X] \hookrightarrow K[Y]$$

$$K(X) \hookrightarrow K(Y)$$

Рассмотрим $f \in K[X^n]$, f цел над $K[X^n]$. То есть

$$\sum a_n f^n = 0,$$

где $a_n \in K(X)$.

Следовательно, f цел над $K[Y]$, а значит $f \in K[y]$.

$$\begin{tikzcd} K[Y] & K[X^n] \arrow[l, "\psi"'] \\ & K[X] \arrow[ul] \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Рисунок 10.2

$$\varphi(f) = f$$

$$\psi(f) = f, f \in K[X]$$

$$\psi(f) = 0, f \notin K[X]$$

Пример

Рассмотрим отображение $f(x, y)$: $\mathbb{A}^2(x, y) \to \mathbb{A}(u, v, w, t)$. У любой точки образа – один прообраз, кроме одной, у которой два прообраза (рисунок 10.3).

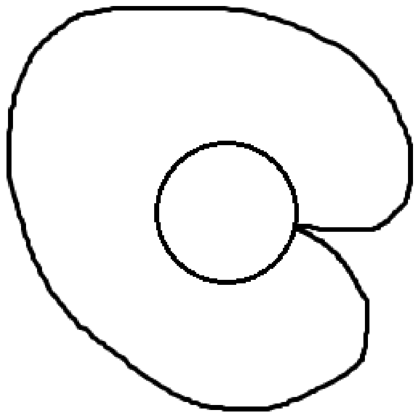

Рисунок 10.3

Это отображение не является нормальным.

Построим этот пример:

$$f(x, y) = \big(x, xy, y(y-1), y^2(y-1)\big)$$

Здесь $u = x, v = xy, w = y(y-1), t = y^2(y-1)$.

Зададим образ этого отображения:

$$X = \big(ut = vw, w^3 = t(t-w), u^2w = v(v-u)\big)$$

Выразим x и y:

1) $u \neq 0$

$$x = u$$
$$y = \frac{v}{u}$$

2) $u = 0$

$$v = 0$$

2.1) $w \neq 0$

$$x = 0$$
$$y = \frac{t}{w}$$

2.2) $w = 0$

$$u = v = w = 0$$

$(x = 0, y = a)$ – точка, у которой два прообраза.

Задача

Задача. Рассмотрим кривую $X = \{y^2 = x^3\}$. Является ли эта кривая нормальной?

Решение:

Пусть

$$K[X] = \{f(x) + yg(x)\}$$

$$K(X) = \left\{\frac{f(x) + yg(x)}{p(x) + yq(y)}\right\}$$

Цел ли элемент $t = \frac{y}{x}$?

$$K[X][t] = K[t]$$

Многообразие, у которого кольцо функций $K[t]$ – это прямая (рисунок 10.4).

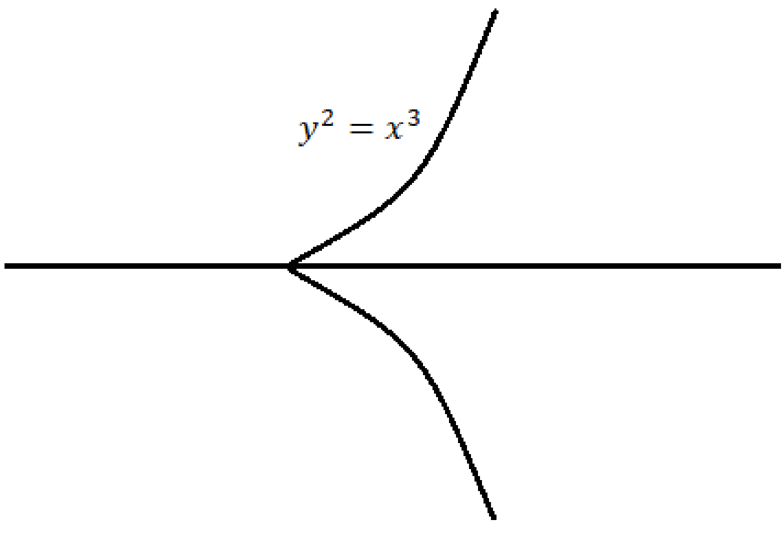

Рисунок 10.4

То есть элемент $t = \frac{y}{x}$ является целым.

С этой точки зрения мы видим, что данное отображение – нормализация.

Теорема

Теорема. Кольцо $K[X]$ целозамкнуто тогда и только тогда, когда O_x целозамкнуто для любого x.

Доказательство:

Докажем сначала в одну сторону:

Пусть $\alpha \in K(x)$, α цело над O_x. По определению:

$$\alpha_n + a_1\alpha^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

$$a_i = \frac{b_i}{c_i}, c_i(x) \neq 0$$

Пусть

$$d = c_1, \dots, c_n$$

Тогда

$$d\alpha_n + d_1\alpha^{n-1} + \dots + d_n = 0$$

Умножим это на d^{n-1}:

$$(d\alpha)^n + \dots + d_n d^{n-1} = 0$$

Отсюда следует, что

$$d\alpha \in K[X]$$

Так как $d = c_1, \dots, c_n$, то $d \neq 0$. Значит

$$\alpha = \frac{c}{d} \in O_x$$

Теперь докажем в другую сторону:

Пусть есть целый элемент над $K[X]$. Пусть во всех локальных кольцах он тоже целый. То есть это какая-то функция отношения многочленов, которая в каждой точке будет элементом O_x, то есть в каждой точке она регулярна. Следовательно, эта функция является многочленом.

Мы доказали, что многообразие нормально тогда и только тогда, когда оно нормально в каждой точке.

Семинар 11. Отображение Веронезе

Пример 1

Рассмотрим отображение

$$X \to P^n$$

$$(x_1, \dots, x_n) \to \left(\frac{f_0}{g_0}, \dots, \frac{f_m}{g_m}\right), g_0, \dots, g_m \neq 0$$

Мы можем домножить $\frac{f_0}{g_0}, \dots, \frac{f_m}{g_m}$ на знаменатели и представить это отображение в виде

$$(x_1, \dots, x_n) \to (h_0, \dots, h_m),$$

где h_i – однородные многочлены одинаковой степени.

Что можно сказать о множестве неопределенности?

Предположим, что у многочленов $h_0, \dots, h_m$ есть общий множитель. Тогда сократим $h_0, \dots, h_m$ на него. В таком случае какое-то множество неопределенности может быть, но мы видим, что оно имеет коразмерность 2 или больше.

Это показывает, что у отображения рационального проективного многообразия множество неопределенности имеет коразмерность как минимум 2.

Следствие: если X – проективная кривая, то любое рациональное отображение кривой регулярно.

Пример 2

<u>Определение.</u> Проекция $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{n-1}$ в проективном смысле:

Пусть имеется точка $P = (0, \dots, 1)$. Тогда проекция – это отображение

$$\pi(x_0, \dots, x_n) \to (x_0, \dots, x_{n-1})$$

Многочлены $x_0, \dots, x_{n-1}$ не определены там, где они все равны нулю, то есть в точке P.

Пусть имеется гиперповерхность X, заданная уравнением

$$H_{d-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) = x_n + H_d(x_0, \dots, x_{n-1}) = 0$$

Как понять, где определена проекция?

Выразим x_n:

$$x_n = -\frac{H_d}{H_{d-1}}$$

Мы видим, что проекция не везде определена, но она является бирациональным изоморфизмом x и плоскости.

Обратное отображение:

$$(y_0, \dots, y_{n-1}) \to \left(y_0, \dots, y_{n-1}, -\frac{H_d}{H_{d-1}}\right)$$

Зададим точку:

$$x_0 = \dots = x_{n-1} = 0$$

Пусть имеется проективное подпространство:

$$L = \{L_1(x_0, \dots, x_n) = \dots = L_k(x_0, \dots, x_n) = 0\}$$

Тогда проекция из $L = \left(L_1(\bar{x}) : \dots : L_k(\bar{x})\right)$.

Домашнее задание

Упражнение. Проверить геометрический смысл проекции.

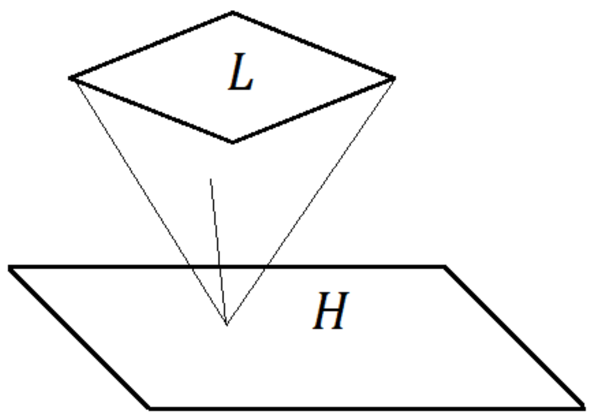

Рисунок 11.1

Теорема Безу

Теорема Безу. Пусть $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2$ – две кривые без общих компонент (без кратных компонент) степеней d_1, d_2. Тогда

$$C_1C_2 = \#P \in C_2, P \in C_2 = d_1d_2$$

Доказательство:

Докажем теорему для двух коник. Две коники в $\mathbb{P}^2$ пересекаются по 4 точкам.

Рассмотрим случай, когда каждая из коник является объединением двух прямых. В таком случае каждая прямая из первой коники пересекает прямую из второй коники ровно в одной точке (рисунок 11.2).

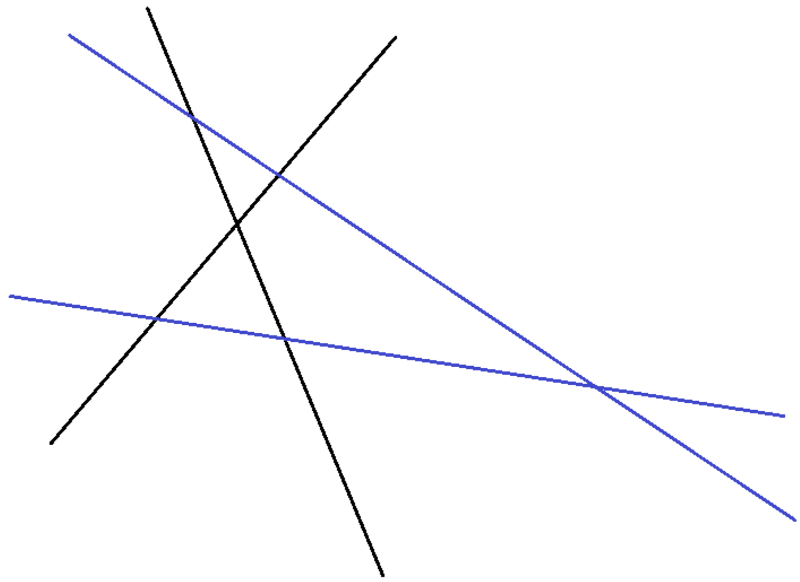

Рисунок 11.2

Теперь рассмотрим общий случай. Пусть C_1, C_2 задаются уравнениями

$$a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{m-1} z + a_m = 0$$

$$b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + n_{n-1} z + b_n = 0$$

Здесь a_i, b_i – однородные многочлены степени i.

Точки пересечения C_1, C_2 соответствуют решениям этой системы уравнений. Сформируем матрицу Сильвестра; в случае $m = 4, n = 3$ это

$$S = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Определитель $|S|$ матрицы S равен нулю тогда и только тогда, когда два уравнения имеют общее решение при заданном z. $|S|$ имеет степень mn. Тогда он может быть разложен на mn линейных множителей, поэтому имеется mn решений системы уравнений. Линейные множители соответствуют прямым, соединяющим начало координат с точками пересечения.

Упражнение

Рассмотрим $Z = \mathbb{A}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Может ли оно быть аффинным и может ли оно быть проективным?

1) Аффинное
   Пусть у нас есть гипотеза, что $K[z] = K[x, y]$.
   Пусть $Z_1 = \mathbb{A}^2 \backslash \{x = 0\}$. Тогда
   $$K[z_1] = K[y]K[x^{\pm 1}]$$
   Пусть $Z_2 = \mathbb{A}^2 \backslash \{y = 0\}$. Тогда
   $$K[z_2] = K[x]K[y^{\pm 1}]$$
   $K[z]$ лежит в пересечении колец $K[z_1]$ и $K[z_2]$. А пересечение этих колец:
   $$K[z] \subset K[z_1] \cap K[z_2] = K[x, y]$$
2) Проективное
   У проективного многообразие кольцо функций является константой. Поэтому данное многообразие не является проективным.

Домашнее задание

<u>Задача.</u> Рассмотрим $Z = \mathbb{P}^2 \backslash \{(0,0,1)\}$. Показать, что это многообразие не проективное и не аффинное.

Отображение Веронезе

Пусть имеется прямая $\mathbb{P}_1$ с координатами (x, y). Рассмотрим отображение

$$v_2: (x, y) \to (x^2, xy, y^2)$$

Обозначим $z_0 = x^2, z_1 = xy, z_2 = y^2$.

Образ этого отображения задается уравнением:

$$z_0 z_2 = z_1^2$$

Рассмотрим отображение

$$v_d: (x, y) \to (x^d, x^{d-1}y, \dots, y^d)$$

$$v_d(\mathbb{P}^1) = Y_d \subset \mathbb{P}^d$$

<u>Определение.</u> Y_d – кривая Веронезе.

Обозначим $x^d, x^{d-1}y, \dots, y^d$ за $z_0, \dots, z_d$ соответственно.

Образ этого отображения задается уравнением:

$$z_i z_j = z_k z_l,$$

где $i + j = k + l$.

Обозначим:

$$Z = \left(z_i z_j = z_k z_l, i + j = k + l\right)$$

Поверхность Веронезе — алгебраическая поверхность в пятимерном проективном пространстве, которая реализуется как образ вложения Веронезе.

Семинар 12. Отображение Веронезе. Грассманиан

Отображение Веронезе

Мы определили отображение Веронезе как:

$$v_d\colon (x, y) \to (x^d, x^{d-1}y, \dots, y^d)$$

$v_d(\mathbb{P}^1) -$ кривая Веронезе. Кривой Веронезе называют то, что получается из конфигураций, после того как d точек каждой конфигурации "слипнется" в одну.

Задача

Задача. Доказать, что через любые $d + 3$ точки проходит кривая Веронезе. Никакие $d + 1$ точки не лежат в гиперплоскости.

Решение.

Рассмотрим однородный многочлен G степени $d + 1$ от (x, y).

$$G = \prod_{1}^{d+1}(\mu_i x - \lambda_i y)$$

Введем обозначения:

$$L_i = \mu_i x - \lambda_i y$$

$$H_i = \frac{G}{L_i}$$

Зададим отображение:

$$(x, y) \to \big(H_1(x, y), \dots, H_{d+1}(x, y)\big)$$

Заметим, что H_i линейно независимы и образуют базис.

Получаем, что образ – кривая Виронезе.

Разделим $\big(H_1(x, y), \dots, H_{d+1}(x, y)\big)$ на G. Тогда

$$(x, y) \to \left(\frac{1}{L_1(x, y)}, \dots, \frac{1}{L_{d+1}(x, y)}\right)$$

Пусть $P_i = (\lambda_i, \mu_i)$ – корень.

Таким образом $d + 1$ корень перейдет в координатные точки, а точка $(0,1)$ перейдет в $\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_d}\right)$. Точка $(1,0)$ перейдет в $\left(\frac{1}{\mu_1}, \dots, \frac{1}{\mu_d}\right)$.

Отображение Веронезе (определение)

Пусть задано $\mathbb{P}^n$. Мы хотим определить $v_d(\mathbb{P}^n)$:

$$v_d(\mathbb{P}^n): (z_0, \dots, z_n) \to (z^{I_1}, \dots, z^{I_N})$$

Здесь введены обозначения:

$$z = (z_0, \dots, z_n)$$

$$I = (i_0, \dots, i_n)$$

$$z^I = z_0^{i_0}, \dots, z_n^{i_n}$$

I – разбиение d на $n+1$ слагаемых, $I_1, \dots, I_N$ – все разбиения.

Образ этого отображения задается уравнением:

$$z_I z_J = z_{I'} z_{J'},$$

где $I + J = I' + J'$.

Координаты в $\mathbb{P}^N$ будем обозначать z_I.

Пусть J – любое $(d-1)$ разбиение, $J_0, \dots, J_N$ – это d разбиение, получающееся увеличением i-го индекса на 1.

Получается, что для любого разбиения мы можем выбрать $n+1$ координату.

Любая точка образа лежит в какой-то аффинной карте, в которой все соответствующие координаты одновременно не равны нулю.

Определим обратное отображение следующим образом:

$$\left(z_{I_1}, \dots, z_{I_N}\right) \to \left(z_{J_1}, \dots, z_{J_N}\right)$$

Пусть $X = \{f = 0\}$, f – полином степени d:

$$\sum_I \alpha_I z_I = 0$$

Вспомним, что если I, J – идеалы, то

$$V(IJ) = V(I) \cup V(J)$$

В аффинном многообразии любой идеал задает какое-то подмножество.

В проективном случае есть один идеал, который ничего не задает (он называется несущественным) – это идеал, порожденный $(x_0, \dots, x_n)$, где $x_0, \dots, x_n$ – линейные образующие.

$$V\big((f)\big) = V\big((x_0 f, \dots, x_n f)\big)$$

Поэтому, мы можем также для проективного пространства применять формулу

$$V(IJ) = V(I) \cup V(J)$$

Пример

Рассмотрим проективное пространство и гиперповерхность в нем, заданную уравнением

$$X = (h = 0)$$

Пусть имеется рациональная функция $\frac{f}{g}$ на проективном пространстве (f, g имеют одинаковые степени). Будем рациональные функции сопоставлять линейным комбинациям гиперповерхности.

Рассмотрим группу, порожденную всеми гиперповерхностями:

$$\frac{x}{y} = (x = 0) - (y = 0)$$

Будем к гиперповерхности прибавлять нули-полюса функций $\frac{f}{g}$. Рассмотрим такие регулярные функции $\left(\frac{f}{g}\right)$, при прибавлении которых к гиперповерхности, у нее полюса исчезнут.

Грассманиан

Грассманиан $Gr(k, n)$ – это множество k – мерных подпространств в n-мерном пространстве.

Пусть w – это k-мерное подпространство. Рассмотрим в нем базис $u_1, \dots, u_k$.

$$G = Gr(k, n) = Gr(k, v)$$

Рассмотрим отображение

$$G \to \mathbb{P}(\Lambda^k V)$$

$$w \to u_1 \wedge \dots \wedge u_k$$

Это отображение определено корректно с точностью до пропорциональности.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис в V. Тогда все такие формы порождены $e_1 \wedge \dots \wedge e_m$.

$$w = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k1} & \cdots & u_{kn} \end{pmatrix}$$

Координаты – это максимальные $k \times k$ миноры.

Семинар 13. Грассманиан. Плюккеровы соотношения. 27 прямых на кубической поверхности

Грассманиан

На прошлом семинаре было дано определение грассманиана и обсуждались его свойства:

Грассманиан $Gr(k, n)$ – это множество k – мерных подпространств в n-мерном пространстве.

Пусть w – это k-мерное подпространство. Рассмотрим в нем базис $u_1, \dots, u_k$.

$$G = Gr(k, n) = Gr(k, v)$$

Рассмотрим отображение

$$G \to \mathbb{P}(\Lambda^k V)$$

$$w \to u_1 \wedge \dots \wedge u_k$$

Это отображение определено корректно с точностью до пропорциональности.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис в V. Тогда все такие формы порождены $e_1 \wedge \dots \wedge e_m$.

$$w = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k1} & \cdots & u_{kn} \end{pmatrix}$$

Координаты – это максимальные $k \times k$ миноры.

$$Gr(k, n) \subset \mathbb{P}^N$$

Сколько пар у матриц $k \times n$, у которых первый минор невырожден и матрицы с точностью до замены базиса или действия в L_k.

$$\dim Gr(k, n) = k(n-k)$$

О том, почему грассманиан является алгебраическим многообразием

Пусть

$$w \in \Lambda^k V, v \in V$$

Будем говорить, что v делит w если $w = v \wedge u$.

Пусть w – разложим:

$$w = w_1 \wedge \dots \wedge w_k$$

Вектора, делящие w – это в точности $(w_1, \dots, w_k)$.

w разложим, следовательно, размерность векторов, делящих w равна k. Более того, обратное тоже верно.

Упражнение. Доказать, что если размерность векторов, делящих w равна k, то w разложим.

Пусть имеется вектор

$$w \in \Lambda^k V, v \in V$$

Сопоставим ему отображение:

$$\varphi: V \to \Lambda^{k+1} V$$

$$v \to v \Lambda w$$

w разложим тогда и только тогда, когда

$$rh\big(\varphi(w)\big) = n - k$$

$\varphi(w)$ – линейное отображение.

Мы получили, что грассманиан является алгебраическим многообразием.

Плюккеровы соотношения

$P_{i_1,\dots,i_k}$ – коэффициент при $e_{i_1} \Lambda \dots \Lambda e_{i_k}$.

Зафиксируем два набора:

$$(i_1, \dots, i_{k-1}), (j_1, \dots, j_{k+1})$$

Каждому такому набору сопоставим квадратичные отношения, которые будет задавать грассманиан:

$$\sum_{r=1}^{k+1} (-1)^r P_{i_1,\dots,i_{k-1},i_r} P_{i_1,\dots,i_r,i_{k+1}}$$

Утверждение. Все такие соотношения задают грассманиан.

Пример

Зададим грассманиан $Gr(2,4)$:

$$(1) \quad (2,3,4)$$

$$(-1) P_{12} P_{34} + P_{13} P_{24} - P_{14} P_{23} = 0$$

$$(2) \quad (1,3,4)$$

$$(-1)P_{21}P_{34} + P_{23}P_{14} - P_{24}P_{13} = 0$$

$$(1) \quad (2,3,4)$$

$$(-1)P_{11}P_{23} + P_{12}P_{13} - P_{13}P_{12} = 0$$

Уравнение

$$(-1)P_{12}P_{34} + P_{13}P_{24} - P_{14}P_{23} = 0$$

задает не особую квадрику.

Получается, что $Gr(2,4)$ — это в точности четырехмерная не особая квадрика.

<u>Утверждение.</u> Пусть $X \subset \mathbb{P}^3$ – гиперповерхность. Тогда множество прямых, лежащих в $X - \{l \subset X\}$ – это проективное подмногообразие $G(2,4)$.

<u>Доказательство:</u>

Будем считать, что $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(V)$.

$$\dim V = 4$$

Пусть L – двумерное линейное подпространство V. Пусть x, y – базис в L, f – линейная форма:

$$f = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_4 e_4$$

Обозначим координаты:

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

Заметим, что

$$L = \{xf(y) - yf(x)\},$$

где f – всевозможные линейные формы.

Тогда, после раскрытия скобок, получим

$$xf(y) - yf(x) = \sum_{ij} \alpha_{ij} P_{ij}$$

$$P_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$$

То есть мы получили плюккеровы координаты.

Точки прямой L, имеющие плюккеровы координаты P_{ij}, подчиняются уравнению

$$xf(y) - yf(x) = \sum_{ij} \alpha_{ij} P_{ij}$$

Пусть $X = \{F = 0\}$.

$$F(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$$

$$z_i = \sum_j \alpha_{ij} P_{ij}$$

$$\deg \mathfrak{I} = d$$

$$\mathfrak{I} = \sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=d} \beta_{k_1 k_2 k_3 k_4} z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} z_4^{k_4}$$

$$\sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=d} \beta_{k_1 k_2 k_3 k_4} z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} z_4^{k_4} = \sum_{\substack{k \\ |k|:d}} \beta_k \prod_{J=1}^{4} \left(\sum_J \alpha_{ij} P_{ij} \right)^{k'_J}$$

$$\sum_{\substack{k \\ |k|:d}} \beta_k \prod_{J=1}^{4} \left(\sum_J \alpha_{ij} P_{ij} \right)^{k'_J} \equiv 0$$

Итого, получаем, что $\mathfrak{I} \equiv 0$.

27 прямых на кубической поверхности

<u>Утверждение.</u> На гладкой кубике лежит ровно 27 прямых.

<u>Лемма.</u>

1) Через точку на гладкой кубике проходит 3 или меньше прямых.
2) Если их 2 или 3, то они лежат в одной плоскости.

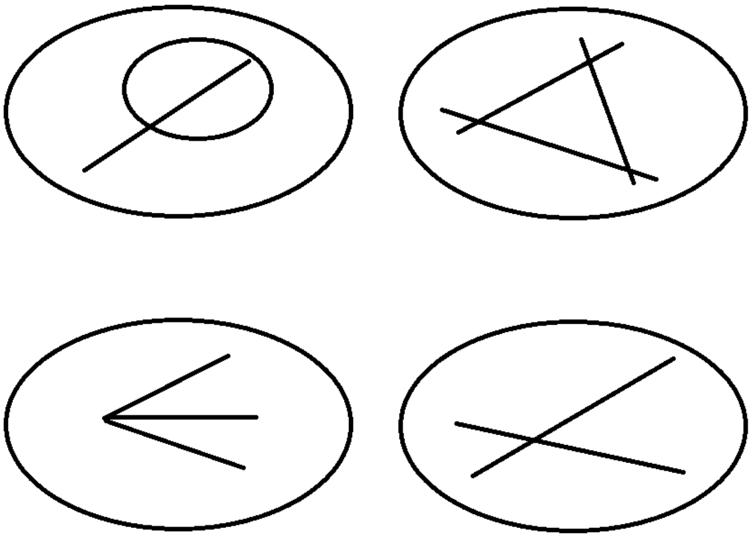

Рисунок 13.1

На рисунке 13.1 изображены возможные конфигурации для пересечения кубики с касательной плоскостью.

На лекции было доказано, что на кубической поверхности всегда лежит прямая. Рассмотрим

$$X \supset l$$

Будем через эту прямую проводить всевозможные плоскости. Все они будут пересекать нашу кубику по кривой третьего порядка, причем эта кривая третьего порядка всегда будет содержать прямую.

<u>Задача.</u> Сколько прямых проходит через прямую на кубике?

<u>Решение:</u>

Пусть (x, y, z, t) – координаты в $\mathbb{P}^3$. Зададим уравнения кубики и прямой:

$$X = \{h(x, y, z, t) = 0\}$$

$$l = \{z = t = 0\}$$

Запишем это как квадратичную форму от $(x, y, 1)$:

$$h = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f,$$

где a, b, c, d, e, f – полиномы от z, t.

Π – плоскость проходящая через l – имеет вид

$$\mu z = \lambda t$$

Можно считать, что $\mu = 1$. Тогда

$$(h = 0)|_{\Pi} = t(a(\lambda, 1)x^2 + \cdots + f(\lambda, 1)t^2)$$

Итого, существует ровно пять плоскостей, которые проходят через l, ограничение кубики на которых 3 прямых: l и еще две.

То есть мы имеем прямую l и еще пять пар прямых: $(l_1, l_1'), \ldots, (l_5, l_5{}')$. Эти пары прямых не пересекаются.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ