МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ

ТИМАШЕВ
ДМИТРИЙ АНДРЕЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

Содержание

Лекция 1

Предмет теории инвариантов

Понятие инварианта возникает в математике практически всегда, когда мы пытаемся классифицировать какие-то математические объекты. Инварианты нужны для того, чтобы различать объекты, неэквивалентные между собой. Эквивалентность на множестве тех или иных объектов очень часто задается с помощью действия какой-нибудь группы на множестве этих объектов. Именно такую ситуацию мы и будем рассматривать.

Определение 1. Пусть задано действие группы G на множестве X (будем обозначать $G \curvearrowright X$). Элементы x и y множества X называются эквивалентными относительно действия группы G (обозначается $x \underset{G}{\sim} y$), если существует элемент $g \in G$ такой, что $y = g \cdot x$.

Легко проверить, что это действительно будет отношением эквивалетности. Оно разбивает X на классы эквивалетности, которые являются орбитами действия группы G, то есть множествами $G \cdot x = \{y = g \cdot x \mid g \in G\}$.

Прежде чем говорить об инвариантах, поставим перед собой естественную задачу. Задача классификации тех или иных объектов с точностью до эквивалентности, заданной действием группы, сводится к задаче описания орбит.

Задача описания орбит

В задаче описания орбит естественным образом выделяются подзадачи:

а) Для любой пары $x, y \in X$ необходимо уметь определять, эквивалентны ли x и y, то есть лежат ли они в одной орбите?

б) Для описания орбит необходимо чем-то запараметризовать орбиты, то есть каждой орбите сопоставить значение какого-то параметра. Область значений параметра еще называют факторпространством, поэтому параметризация орбит — это то же самое, что построение факторпространства (обозначается X/G).

в) Во всех орбитах нужно выбрать канонических представителей. Это также называют приведением к нормальной форме.

Пример. Рассмотрим действие $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ сопряжениями. В этом случае задача описания орбит — это задача приведения матрицы к жордановой нормальной форме.

Пример. Рассмотрим действие $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_2$ на пространстве квадратичных форм от n переменных, то есть однородных многочленов второй степени от переменных $x_1, \ldots, x_n$, линейными заменами переменных. В этом случае ответ на пункт а) нам даёт закон инерции для квадратичных форм, он же даёт и ответ на пункт б), так как орбиты параметризуются сигнатурами. Канонический представитель из пункта в) — нормальный вид вещественной квадратичной формы.

В решении задач а), б) и в) помогает понятие инварианта.

Определение 2. Инвариант — это отображение $f : X \to Y$, которое постоянно на орбитах, то есть $f(x) = f(g \cdot x)$ для любых $x \in X,\ g \in G$.

Основное свойство инвариантов заключается в том, что если $f(x_1) \neq f(x_2)$, то точки x_1 и x_2 заведомо не эквивалентны, $x_1 \underset{G}{\nsim} x_2$. Частным случаем инварианта является инвариантная функция.

Определение 3. Инвариантной функцией называется инвариантное отображение $f :\ X \to \mathbb{K}$, где $\mathbb{K}$ — фиксированное поле.

Обычно рассматривают не все функции на X, а только те, которые можно считать "хорошими" в том или ином смысле. Например, на X может быть задана какая-то дополнительная структура — геометрическая, топологическая и так далее. Мы также хотим, чтобы свойство функций быть "хорошими" сохранялось при алгебраических операциях. Иными словами, мы хотим, чтобы множество "хороших" функций образовывало алгебру. Так, обозначим $\mathcal{F}(X)$ алгебру "хороших" функций. Инвариантные функции образуют в $\mathcal{F}(X)$ подалгебру, которую мы обозначим $\mathcal{F}(X)^G$. В связи с этим возникает вторая задача — задача описания инвариантных функций.

Задача описания инвариантных функций

В этой задаче, как и прежде, можно выделить подзадачи:

г) Нахождение полной системы инвариантов. Полная система инвариантов — это набор таких функций $f_1, \dots, f_N$, которые полностью различают орбиты, то есть $x \underset{G}{\sim} y \ \Leftrightarrow\ f_i(x) = f_i(y)$ для всех $i \in 1, \dots, N$. Нахождение такой системы решает задачи а) и б). Факторпространством будет множество наборов значений инвариантов полной системы: $X/G = \{(f_1(x), \dots, f_N(x)) \mid x \in X\}$. Полная система инвариантов не всегда существует.

д) Нахождение базисных инвариантов. Если не удаётся решить задачу г), то можно попытаться найти такой набор инвариантов $f_1, \dots, f_m$, через который можно выразить все остальные инварианты. То есть, любой инвариант $f \in \mathcal{F}(X)^G$ выражается как $F(f_1, \dots, f_m)$. Класс функций, которому принадлежит F, уточняется в каждом отдельном случае.

Базисный набор инвариантов может уже не различать орбиты полностью. Орбиты, которые нельзя различить никакими инвариантами, объединятся в классы. В таком случае наборы значений базисных инвариантов не образуют факторпространство. Тогда говорят, что для X определено "грубое" факторпространство $X//G = \{(f_1(x), \dots, f_m(x) \mid x \in X\} \subset \mathbb{K}^m$.

е) Нахождение соотношений между базисными инвариантами. Если нам удалось найти систему базисных инвариантов, мы можем попытаться найти соотношения между ними, то есть функциональные зависимости вида $F(f_1, \dots, f_m) = 0$. Вновь, как и в пункте д), вид этой зависимости может зависеть от конкретной ситуации, но в любом случае она задает уравнение на точки факторпространства, а значит нахождение соотношений — это то же самое, что задание $X//G$ системой уравнений.

Таким образом, предмет теории инвариантов состоит в том, чтобы исследовать две поставленные задачи — задачу описания орбит и задачу описания инвариантных функций.

Классическая теория инвариантов

Пусть $X = V$ — векторное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim V = n$. Действие $G \curvearrowright V$ задается линейным представлением группы G в векторном пространстве V, то есть гомоморфизмом $G \to \mathrm{GL}(V)$. На векторном пространстве естественно рассматривать в качестве алгебры "хороших" функций алгебру многочленов от координат на этом векторном пространстве. Обозначим $\mathcal{F}(V) = \mathbb{K}[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$, где $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ — система координат на V. Заметим, что свойство функции быть многочленом от координат не зависит от выбора системы координат, поэтому эту алгебру функций разумно обозначать так, чтобы система координат в обозначении не участвовала. Мы будем обозначать её как $\mathbb{K}[V]$. Исследуем две поставленных задачи в этой ситуации.

Пример. Вновь рассмотрим действие $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ сопряжениями.

Утверждение 1. *Полной системы инвариантов не существует.*

Доказательство. Рассмотрим $x \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. За счёт действия группы можно привести x к жордановой нормальной форме, поэтому можно считать, что

$$x = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \ \varepsilon_i = 0, 1.$$

Рассмотрим в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ семейство элементов:

$$g(t) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & t & & 0 & \\ & & t^2 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & t^{n-1} \end{pmatrix}, \ t \neq 0.$$

Подействуем элементом $g(t)$ на x, получится:

$$g(t) \cdot x \cdot g(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \frac{\varepsilon_1}{t} & & & \\ & \lambda_2 & \frac{\varepsilon_2}{t} & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \frac{\varepsilon_{n-1}}{t} \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Устремляя t к бесконечности, получаем:

$$g(t)\cdot x\cdot g(t)^{-1}\xrightarrow[t\to+\infty]{}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=y.$$

Если хотя бы одно из ε_i отлично от нуля, то x и y лежат в разных орбитах. Но с другой стороны, $\forall f\in\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n] : f(x)=f(g(t)\cdot x\cdot g(t)^{-1})=f(y)$, поскольку многочлен является непрерывной функцией, и если значение до перехода к пределу постоянное, то и в пределе оно будет тем же самым. Таким образом, орбиты $\mathrm{GL}_n\cdot x$ и $\mathrm{GL}_n\cdot y$ нельзя различить с помощью инвариантов, а значит полной системы инвариантов не существует. $\square$

Тем не менее, базисную систему инвариантов можно предъявить. Рассмотрим для $x\in\mathrm{Mat}_n$ характеристический многочлен:

$$\chi_x(t)=\det(t\cdot E-x)=t^n+f_1(x)t^{n-1}+\cdots+f_n(x),$$

где f_i — это многочлены от x_{ij}, а точнее, $f_1=-\operatorname{tr}$, $f_n=(-1)^n\det$.

Утверждение 2. *Многочлены $f_1,\ldots,f_n$ образуют базисную систему инвариантов.*

Доказательство. Рассмотрим $\mathrm{Mat}_u\supset U=\{$матрицы с простым спектром$\}$. На пространстве матриц есть естественная топология пространства $\mathbb{C}^{n^2}$, и в этой топологии множество U открыто, потому что его можно задать неравенством:

$$U=\{x\mid D(\chi_x)\neq 0\},$$

где $D(\chi_x)$ — дискриминант характеристического многочлена, который сам является многочленом от x_{ij}. Подмножество U также всюду плотно в Mat_n: любой $x\in\mathrm{Mat}_n$ можно привести к жордановой нормальной форме

$$x=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

а также можно придумать такие функции $\lambda_i(t)$, что $\lambda_i(t)\neq\lambda_j(t)$ при $i\neq j$, и $\lambda_i(t)\xrightarrow[t\to t_0]{}\lambda_i$. Построить такие функции — всё равно что построить на комплексной плоскости семейство непересекающихся кривых с концами в λ_i. Рассмотрим матрицу

$$x(t)=\begin{pmatrix}\lambda_1(t) & \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & & & \lambda_n(t)\end{pmatrix}.$$

Она принадлежит U, а также стремится к исходной матрице x при $t \to t_0$, то есть любую матрицу x можно приблизить матрицей из U, а значит U плотно в Mat_n. Заметим также, что любая орбита в U пересекает множество диагональных матриц $\mathrm{Diag}_n(\mathbb{C})$, так как всякая матрица с простым спектром диагонализуема. Мы можем рассмотреть отображение ограничения на множество Diag_n:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n] & \longrightarrow & \mathbb{C}[\mathrm{Diag}_n] \\ \cup & & \cup \\ \mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]^{\mathrm{GL}_n} & \hookrightarrow & \mathbb{C}[\mathrm{Diag}_n]^{S_n} \end{array} \qquad (1)$$

Инъективность нижнего отображения следует из того, что если многочлены совпадают на множестве Diag_n, то они совпадают и на всех орбитах, а значит и на всём U — всюду плотном множестве. Заметим, что образы $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]^{\mathrm{GL}_n}$ являются симметрическими, а значит они инвариантны относительно действия S_n. Из основной теоремы о симметрических многочленах следует, что $\mathbb{C}[\mathrm{Diag}_n]^{S_n} = \mathbb{C}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$, где σ_i — элементарные симметрические многочлены от диагональных элементов. Пусть

$$y = \begin{pmatrix} y_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & y_n \end{pmatrix} \text{— диагональная матрица.}$$

Тогда характеристический многочлен этой матрицы $\chi_y(t) = (t - y_1) \cdot \ldots \cdot (t - y_n)$, его коэффициенты по теореме Виета с точностью до знака являются элементарными симметрическими многочленами от y_i. Таким образом, при ограничении на Diag_n коэффициенты f_i характеристического многочлена превратятся в $(-1)^i \sigma_i$, а значит нижняя стрелка в (1) не только инъективна, но и сюръективна, а следовательно является изоморфизмом. Из этого следует, что $f_1, \ldots, f_n$ порождают $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]^{\mathrm{GL}_n}$, причём эти базисные инварианты алгебраически независимы. □

В этом случае грубое факторпространство $\mathrm{Mat}_n /\!/ \mathrm{GL}_n$ будет совпадать с $\mathbb{C}^n$. Множества уровня устроены таким образом:

$$\{x \mid f_1(x) = c_1, \ldots, f_n(x) = c_n\}$$

и состоят из конечного числа орбит. Обратим внимание, что такие множества задаются полиномиальной системой уравнений.

Основы алгебраической геометрии

Введем некоторые обозначения и термины. Зафиксируем поле $\mathbb{K}$, которое будем называть основным. Пока что не будем накладывать на $\mathbb{K}$ никаких ограничений, но позже они появятся. $\mathbb{A}^n$ будем обозначать n-мерное аффинное пространство над $\mathbb{K}$, координатные функции в котором будем обозначать $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Выбор системы координат позволяет отождествить $\mathbb{A}^n$ и $\mathbb{K}^n$. Через $\mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$ будем обозначать алгебру многочленов на аффинном пространстве — $\mathbb{K}[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$. Она не зависит от выбора системы координат.

Определение 4. Пусть $S \subset \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$. Аффинным алгебраическим многообразием $X = \mathbb{V}(S)$ называется множество $\{x \in \mathbb{A}^n \mid f(x) = 0,\ \forall f \in S\}$. Многочлены из S называют уравнениями, задающими X, а X называют многообразием нулей системы S.

Примеры. 1) $\mathbb{A}^n = \mathbb{V}(\varnothing)$.

2) Точка $\{z\} = \mathbb{V}(\mathbf{x}_1 - z_1, \ldots, \mathbf{x}_n - z_n)$.

3) $\varnothing = \mathbb{V}(1)$.

Предложение 1. *1) Пусть $X_i \subseteq \mathbb{A}^n$, $i \in I$ — семейство аффинных многообразий. Тогда $X = \bigcap\limits_{i\in I} X_i$ — тоже аффинное многообразие.*

2) Пусть $X_1, \ldots, X_s \subseteq \mathbb{A}^n$ — конечный набор аффинных многообразий. Тогда $X = X_1 \cup \ldots \cup X_s$ — тоже аффинное многообразие.

Доказательство. 1) $X_i = \mathbb{V}(S_i)$. Тогда $X = \mathbb{V}(\bigcup\limits_{i\in I} S_i)$.

2) Достаточно доказать для $s = 2$. Пусть $X_1 = \mathbb{V}(S_1)$, $X_2 = \mathbb{V}(S_2)$. Тогда $X = X_1 \cup X_2 = \mathbb{V}(S_1 \cdot S_2)$, потому как

$$x \notin X_1 \cup X_2 \ \Leftrightarrow\ x \notin X_1,\ x \notin X_2 \ \Leftrightarrow\ \exists f_1 \in S_1 : f_1(x) \neq 0,\ \exists f_2 \in S_2 : f_2(x) \neq 0,$$

что равносильно тому, что $f_1 \cdot f_2 \neq 0$.

□

Замечание. Если основное поле $\mathbb{K}$ конечно, то любое подмножество $\mathbb{A}^n$ является аффинным многообразием и любая функция $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{K}$ является многочленом.

Далее считаем $\mathbb{K}$ бесконечным.

Пусть $X = \mathbb{V}(S) \subseteq \mathbb{A}^n$, $S \subseteq \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$. Породим множеством S идеал I:

$$I = (S) = \{f_1 g_1 + \ldots + f_m g_m \mid f_i \in S,\ g_i \in \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]\} \lhd \mathbb{K}[\mathbb{A}^n].$$

Тогда можно заметить, что $X = \mathbb{V}(I)$, а значит системы уравнений можно задавать идеалами. Возможна ситуация, когда разные идеалы задают одинаковые многообразия. Чуть позже мы поймём, когда два идеала задают разные многообразия.

Теорема 1 (Гильберта о базисе идеала). *Любой идеал $I \lhd \mathbb{K}[\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n]$ конечно порождён.*

Следствие 1. *Всякое аффинное многообразие может быть задано конечной системой уравнений.*

Доказательство теоремы о базисе. Докажем теорему индукцией по n.

База $n = 1$. $\mathbb{K}[\mathbf{x}_1]$ — кольцо главных идеалов $\Rightarrow I$ порождён одним элементом.

Шаг. $\mathbb{K}[\mathbb{A}^n] = \mathbb{K}[\mathbb{A}^{n-1}][\mathbf{x}_n]$. Докажем от противного: пусть идеал I не конечно порождён. Выберем $f_1 \in I$ такой, что $\deg f_1 = \min = m_1$, где степень берётся по переменной $\mathbf{x}_n$. Так как I не конечно порождён, многочлен f_1 его не порождает.

Выберем $f_2 \in I\backslash(f_1)$, $\deg f_2 = \min = m_2 \geq m_1$. Продолжаем эту процедуру: на k-ом шаге выбираем $f_k \in I\backslash(f_1, \ldots, f_{k-1})$, $\deg f_k = min = m_k \geq m_{k-1}$. Представим найденные многочлены в следующем виде:

$$f_k = p_k \cdot \mathbf{x}_n^{m_k} + \text{члены младших степеней},\ p_k \in \mathbb{K}[\mathbb{A}^{n-1}].$$

Заметим, что $p_k \notin (p_1, \ldots, p_{k-1})$, потому что иначе $p_k = p_1 q_1 + \ldots + p_{k-1} q_{k-1}$, где $q_i \in \mathbb{K}[\mathbb{A}^{n-1}]$, а значит $f_k - \sum_{i<k} f_i q_i \, \mathbf{x}_n^{m_k - m_i}$ — многочлен из $I\backslash(f_1, \ldots, f_{k-1})$ меньшей чем f_k степени по $\mathbf{x}_n$, что противоречит выбору f_k. Это означает, что мы можем построить идеал $J = (p_1, p_2, \ldots) \lhd \mathbb{K}[\mathbb{A}^{n-1}]$, который не конечно порождён, так как иначе можно было бы выбрать конечное число порождающих из множества $\{p_i\}$. Противоречие. $\square$

Лекция 2

Нётеровы кольца

Далее, если не оговорено иное, под кольцом (алгеброй) всегда будем понимать ассоциативное коммутативное кольцо (алгебру над $\mathbb{K}$) с единицей.

Определение 5. Кольцо (алгебра) A называется нётеровым, если выполняются следующие эквивалентные условия:

1) Любой идеал $I \lhd A$ конечно порождён;

2) Любая возрастающая цепочка идеалов $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \lhd A$ стабилизируется, т.е. существует такой номер k, что $I_k = I_{k+1} = \ldots$;

Доказательство эквивалентности 1) и 2):
1) ⇒ 2). Рассмотрим $I = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k \lhd A$. Из 1) следует, что I конечно порождён, т.е. $I = (a_1, \ldots, a_m)$, $a_i \in I_{k_i}$. Возьмём $k = \max\{k_1, \ldots, k_m\}$. Тогда $a_1, \ldots, a_m \in I_k$. Отсюда вытекает, что $I = I_k = I_{k+1} = \ldots$, то есть цепочка стабилизируется.
2) ⇒ 1). Будем рассуждать от противного. Если $I \lhd A$ не конечно порождён, то в нём существует такая последовательность элементов $a_1, a_2, \ldots \in I$, что a_{k+1} не принадлежит $(a_1, \ldots, a_k)$ для любого k. Обозначив $I_k = (a_1, \ldots, a_k)$, видим, что цепочка $I_1 \subset I_2 \subset \ldots$ не стабилизируется. Противоречие. □

Утверждение 3. *Нётеровы кольца (алгебры) обладают следующими свойствами:*

1) *Если A нётерово, $I \lhd A$, то A/I нётерово.*

   Доказательство. Если $J \lhd A/I$, то его прообраз $\pi^{-1}(J) \lhd A$, где $\pi : A \to A/I$ — каноническая проекция. В силу нётеровости A, $\pi^{-1}(J) = (a_1, \ldots, a_m)$, а следовательно, $J = (\pi(a_1), \ldots, \pi(a_m))$. □

2) *Если A нётерово, то кольцо многочленов $A[x]$ нётерово.*

   Доказательство. Фактически, это было доказано в индуктивном шаге доказательства теоремы Гильберта о базисе идеала. □

3) *Все конечно порождённые алгебры нётеровы.*

   Доказательство. Следует из свойства 1) и того, что $\mathbb{K}[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$ нётерово. □

Абстрактное аффинное многообразие

Определение 6. Пусть $X \subseteq \mathbb{A}^n, Y \subseteq \mathbb{A}^m$ — два аффинных алгебраических многообразия. Отображение $\varphi : X \to Y$ называется морфизмом, если в координатах оно задается набором многочленов, то есть $\varphi(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, где $f_i \in \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$. Морфизм $\varphi : X \to Y$ называется изоморфизмом, если существует обратное отображение $\varphi^{-1} : Y \to X$, которое тоже является морфизмом.

До этого момента мы рассматривали аффинные многообразия, по определению вложенные в аффинное пространство.

Определение 7. Абстрактное аффинное многообразие — это аффинное многообразие, рассматриваемое с точностью до изоморфизма.

Примеры. 1) Пусть $X = \mathbb{A}^1, Y = \{(y_1, y_2) \mid y_1^2 = y_2\}$. Рассмотрим морфизм:

$$\varphi : X \to Y,$$

$$\varphi(x) = (x, x^2).$$

Это отображение является изоморфизмом. Обратным отображением будет проекция:

$$\varphi^{-1} : Y \to X,$$

$$\varphi^{-1}(y_1, y_2) = y_1.$$

2) Пусть $X = \mathbb{A}^1, Y = \{(y_1, y_2) \mid y_1^3 = y_2^2\}$ — полукубическая парабола. Аналогично рассмотрим морфизм:

$$\varphi : X \to Y,$$

$$\varphi(x) = (x^2, x^3).$$

Этот морфизм биективен, так как существует обратное отображение:

$$\varphi^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y_2}{y_1}, & y_1 \neq 0 \\ 0, & y_1 = 0 \end{cases}.$$

Но φ не является изоморфизмом, так как иначе φ^{-1} задавалось бы многочленом от координат точки y:

$$\varphi^{-1} = f : Y \to \mathbb{A}^1,$$

$$f \in \mathbb{K}[\mathbb{A}^2],$$

причём $f(x^2, x^3) = x$. Но такого многочлена не существует, поскольку после подстановки, $f(x^2, x^3)$ как многочлен от одной переменной x не будет содержать одночлены степени 1. Это само по себе не означает, что аффинная прямая и полукубическая парабола не изоморфны, но на самом деле это так, и чуть позже мы поймём, почему.

Алгебраическая геометрия исследует в первую очередь внутренние свойства многообразий, то есть такое свойства, которые не меняются при изоморфизме. Попытаемся понять, чем характеризуются абстрактные аффинные многообразия вне зависимости от вложения.

Определение 8. Многочлен на аффинном многообразии $X \subseteq \mathbb{A}^n$ — функция на X, полученная ограничением многочлена от $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. Ясно, что такие функции образуют алгебру. Назовём её алгеброй многочленов на аффинном многообразии X и обозначим $\mathbb{K}[X]$. Её также называют координатной алгеброй X.

Существует естественный гомоморфизм ограничения: $\mathbb{K}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \overset{\rho}{\twoheadrightarrow} \mathbb{K}[X]$. Ядро этого гомоморфизма образует идеал в $\mathbb{K}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$, который мы обозначим $\mathbb{I}(X)$ и будем называть идеалом (нулей) многообразия X. Он состоит из всех многочленов, обращающихся в 0 на многообразии X. Поскольку алгебра многочленов от независимых переменных порождается этими самыми независимыми переменными, алгебра $\mathbb{K}[X]$ порождается ограничениями координатных функций на многообразие X. Будем обозначать эти ограниченные координатные функции $x_1, \dots, x_n$, то есть $x_i = \mathbf{x}_i\,|_X$. Эти функции уже не являются алгебраически независимыми: между ними есть соотношения, которые берутся как раз из идеала $\mathbb{I}(X)$. По теореме о гомоморфизме алгебр, имеем:

$$\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{K}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] / \mathbb{I}(X).$$

Если многообразие X задано системой уравнений, то есть $X = \mathbb{V}(S),\ S \subset \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$, то выполнено включение $S \subseteq \mathbb{I}(X)$. Обратное включение также верно: если $\mathbb{I}(X) = (S)$, то $X = \mathbb{V}(S)$. Идеал $\mathbb{I}(X)$ — наибольший из идеалов, задающих многообразие X.

Принцип двойственности

Утверждение 4 (Принцип двойственности)**.** *В $\mathbb{K}[X]$ заложена вся информация об X как абстрактном аффинном алгебраическом многообразии.*

1) *Точки X как множества: каждой точке $z \in X$ можно сопоставить гомоморфизм $\chi_z : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$, $\chi_z(f) = f(z)$.*

   Обратно: если есть какой-то гомоморфизм $\chi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$, то он обязательно имеет вид χ_z. Восстановить координаты такой точки z можно, подставив в χ координатные функции, то есть $z = (z_1, \dots, z_n),\ z_i = \chi(x_i)$.

2) *Морфизмы: пусть $\varphi : X \to Y$ — морфизм, тогда по нему можно построить гомоморфизм алгебр $\varphi^* : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$, $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$.*

   Обратно: если имеется гомоморфизм координатных алгебр $\theta : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$, то он имеет вид φ^*. Определяется φ так: $\varphi(x) = (f_1, \dots, f_m)$, где $f_i = \theta(y_i)$.

3) *Функториальность:*

$$X \xrightarrow{\ \varphi\ } Y \xrightarrow{\ \psi\ } Z\ ,\ \ (\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^*.$$

   В частности, из этого следует, что φ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда φ^* является изоморфизмом алгебр.

Замечание. Таким образом, мы построили контравариантный функтор, который осуществляет двойственность между категорией аффинных алгебраических многообразий и некоторой полной подкатегорией конечнопорождённых алгебр. Обратный функтор ставит каждой конечнопорождённой алгебре A в соответствие некое аффинное многообразие, которое называется спектром A и обозначается $\operatorname{Spec} A$. Спектр алгебры A по определению — это множество гомоморфизмов из A в $\mathbb{K}$.

Предложение 2. *1) Если $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ — конечно порождённая алгебра, $A = \mathbb{K}[\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n]/I$, то $\operatorname{Spec} A$ может быть отождествлён с $\mathbb{V}(I) \subseteq \mathbb{A}^n$.*

2) Если $A = \mathbb{K}[X]$, то $\operatorname{Spec} A$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством X.

Доказательство. 1) Задать $\chi : A \to \mathbb{K}$ — это всё равно что задать гомоморфизм из $\mathbb{K}[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$ в основное поле $\mathbb{K}$, ядром которого будет I. То есть должна коммутировать следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\chi"] & \mathbb{K} \\
\mathbb{K}[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n] \arrow[u, "\mathrm{Ker} = I"'] \arrow[ur, bend right] &
\end{tikzcd}$$

Такой гомоморфизм χ совпадает с χ_z, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{V}(I)$, поскольку I должен отображаться в 0. Таким образом, задать точку спектра — всё равно что задать точку многообразия $\mathbb{V}(I)$.

2) Если $A = \mathbb{K}[X]$, то идеал I состоит из соотношений между координатными функциями на X, то есть $I = \mathbb{I}(X)$, а значит $\operatorname{Spec} A \cong \mathbb{V}(I) = X$.

□

Замечание. Вложению аффинного многообразия X в аффинное пространство $\mathbb{A}^n$ соответствует выбор системы порождающих в $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Резюмируем сказанное выше: абстрактные аффинные многообразия можно отождествить со спектрами конечно порождённых алгебр. Однако остается вопрос: при каких условиях на алгебру A она является координатной алгеброй какого-то многообразия X? Необходимые условия такие:

1) A конечно порождённая;

2) В A нет нильпотентов.

Оказывается, эти условия являются также достаточными в случае алгебраически замкнутого поля $\mathbb{K}$.

Лекция 3

Теорема Гильберта о нулях

Определение 9. Пусть A — кольцо или алгебра над $\mathbb{K}$, $I \lhd A$ — идеал. Радикалом идеала I называется множество $\sqrt{I} = \{a \in A \mid \exists k \in \mathbb{N} : a^k \in I\}$.

Упражнение 1. $\sqrt{I}$ является идеалом в A.

Определение 10. Радикалом кольца (алгебры) называется идеал $\mathrm{Rad}(A)$, состоящий из всех нильпотентов в A. Иными словами, $\mathrm{Rad}(A) = \sqrt{0}$.

Теорема 2 (Гильберта о нулях)**.** *Пусть поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто. Пусть $I \lhd \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$, $X = \mathbb{V}(I)$. Тогда $\mathbb{I}(X) = \sqrt{I}$.*

Эту теорему можно переформулировать более наглядно:

Следствие 2 (Переформулировка)**.** *Если из системы полиномиальных уравнений $f_1(x) = \ldots = f_m(x) = 0$ следует еще одно уравнение $f(x) = 0$, то существует k такое, что $f^k = f_1g_1 + \ldots + f_mg_m$ для некоторых $g_i \in \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$.*

Покажем, что условие алгебраической замкнутости поля $\mathbb{K}$ существенно.

Пример. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Рассмотрим многообразие $\mathbb{A}^2 \supset X = \{(0,0)\} = \mathbb{V}(\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2)$. Тогда $\mathbb{I}(X) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ — аннулирующий идеал состоит из всех многочленов от двух переменных без свободного члена. Однако, $\forall k : \mathbf{x}_1^k$ не делится на $\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2$.

Следствие 3. *Алгебра A является координатной алгеброй какого-то аффинного многообразия X $\Leftrightarrow$ A конечно порождена и не содержит нильпотентов.*

Доказательство. $\boxed{\Rightarrow}$ Очевидно.
$\boxed{\Leftarrow}$ Имеем $A = \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]/I$, $\mathrm{Rad}(A) = \{0\}$, а значит $\sqrt{I} = I$. Если $X = \mathbb{V}(I)$, то $A = \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]/\,\mathbb{I}(X) = \mathbb{K}[X]$. ☐

Целые и конечные расширения колец и алгебр

Пусть $A \supseteq B$ — расширение колец или алгебр.

Определение 11. Элемент $a \in A$ называется целым над подкольцом B, если он удовлетворяет уравнению целой зависимости: $a^m + b_1a^{m-1} + \ldots + b_{m-1}a + b_m = 0$, где $b_1, \ldots, b_m \in B$.

Определение 12. Расширение $A \supseteq B$ целое, если всякий элемент $a \in A$ цел над подкольцом B.

Определение 13. Расширение $A \supseteq B$ конечно, если A является конечно порождённым модулем над B, то есть $A = B \cdot a_1 + B \cdot a_2 + \ldots + B \cdot a_n$ для некоторых $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Предложение 3. *Конечное расширение является целым.*

Доказательство этого факта основано на так называемом det-трюке:

Пусть B — кольцо, $I \lhd B$, M — конечно порождённый модуль над B. Пусть задан гомоморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}_B(M, I \cdot M)$. Тогда $\varphi^n + b_1\varphi^{n-1} + \ldots + b_n \operatorname{id}_M = 0$ для некоторых $n \in \mathbb{N}, b_k \in I^k$.

Доказательство. $M = B{\cdot}m_1 + B{\cdot}m_2 + \ldots + B{\cdot}m_n$, $m_i \in M$. Тогда можно представить $\varphi(m_i) = c_{i_1}m_1 + \ldots + c_{i_n}m_n$ для некоторых $c_{ij} \in I$. Можно записать это равенство в виде матрицы (умножение на эндоморфизм слева понимается как его применение):

$$\begin{pmatrix} \varphi & & & 0 \\ & \varphi & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}.$$

Перепишем в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \varphi - c_{11}\operatorname{id} & & & \\ & \varphi - c_{22}\operatorname{id} & & -c_{ij} \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi - c_{nn}\operatorname{id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Умножим слева на транспонированную присоединённую матрицу (матрицу из алгебраических дополнений):

$$\begin{vmatrix} \varphi - c_{11}\operatorname{id} & & & \\ & \varphi - c_{22}\operatorname{id} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi - c_{nn}\operatorname{id} \end{vmatrix} \cdot m_i = 0, \forall i.$$

Получившийся определитель также является эндоморфизмом M, причём он равен $\varphi^n + b_1\varphi^{n-1} + \ldots + b_n \operatorname{id}_M = 0$, где $b_k = (-1)^k \sum$(главные k-миноры матрицы C). Отсюда следует, что $b_k \in I^k$. □

Доказельство предложения 3. Применяем det-трюк к ситуации $M = A$, $I = B$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_B(A, A), \varphi = a \cdot \operatorname{id}_M$ — умножение на фиксированный элемент $a \in A$. Имеем: $(\varphi^n + b_1\varphi^{n-1} + \ldots + b_n \operatorname{id}_A)(1) = 0$, а значит $a^n + b_1a^{n-1} + \ldots + b_n = 0$, то есть элемент $a \in A$ удовлетворяет уравнению целой зависимости. □

Мы доказали, что конечное расширение цело. Обратное, однако, верно не всегда.

Предложение 4. *Расширение колец $A \supseteq B$ конечно $\Leftrightarrow$ $A = B[a_1, \ldots, a_s]$, где a_i целы над B.*

Доказательство. $\boxed{\Rightarrow}$ Кольцо A является конечно порождённым модулем над B, то есть $A = B \cdot a_1 + \ldots + B \cdot a_s$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Для каждого i имеем $a_i^{m_i} + b_{i1}a_i^{m_i-1} + \ldots b_{i,m_i} = 0$, $b_{ij} \in B$. Домножая равенство на a_i, получаем, что $\forall m \geq m_i : a_i^m$ линейно выражается (с коэффициентами из B) через $a_i^{m-1}, \ldots, a_i^{m-m_i}$. Отсюда следует, что $a_i^m \in B \cdot a_i^{m-1} + \ldots + B \cdot a_i + B$. Тогда $A = \sum\limits_{\substack{k_1,\ldots,k_s \\ 0 \leq k_i < m_i}} B \cdot a_1^{k_1} \ldots a_s^{k_s}$, а значит расширение $A \supseteq B$ конечно. □

Следствие 4. *Для конечно порождённых алгебр понятия конечного и целого расширений совпадают.*

Предложение 5. *Сумма, разность и произведение целых элементов являются целыми.*

Доказательство. Пусть $A \supseteq B$ — расширение колец и элементы $a_1, a_2 \in A$ целы над B. По предложению 4 расширение $B[a_1, a_2] \supseteq B$ конечное. Следовательно, оно целое, и каждый его элемент цел над B, в частности, $a_1 \pm a_2$, $a_1 \cdot a_2$. □

Предложение 6. *Пусть расширения $A \supseteq B$, $B \supseteq C$ целые (конечные). Тогда расширение $A \supseteq C$ тоже целое (конечное).*

Доказательство. Пусть $a \in A$ — целый над B. Существует уравнение целой зависимости вида $a^m + b_1 a^{m-1} + \ldots + b_m = 0,\ b_i \in B$. Заметим, что a цел над $C[b_1, \ldots, b_m]$. Заменим кольцо B на $C[b_1, \ldots, b_m]$, а кольцо A — на кольцо $B[a]$. Теперь $A \supseteq B$ и $B \supseteq C$ — конечные расширения по Предложению 4. Таким образом, мы свели вопрос о транзитивности целых расширений к транзитивности конечных расширений, а это полный аналог теоремы о башне полей из курса алгебры. Чтобы предъявить конечную систему порождающих A как модуля над C, возьмём конечную систему порождающих A как модуля над B: $A = B \cdot e_1 + \ldots + B \cdot e_m$, а также конечную систему порождающих B как модуля над C: $B = C \cdot f_1 + \ldots + C \cdot f_k$. Легко видеть, что $A = \sum\limits_{i,j} C \cdot e_i f_j$, а значит $A \supseteq C$ конечно и цело, следовательно a цел над C. □

Лемма 1. *Пусть $A \supseteq B$ — целое расширение колец без делителей нуля. Тогда A является полем $\Leftrightarrow$ B является полем.*

Доказательство. $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $0 \neq b \in B$. Существует обратный к b элемент $b^{-1} \in A$. Имеет место уравнение целой зависимости: $b^{-m} + b_1 b^{1-m} + \ldots + b_{m-1} b^{-1} + b_m = 0$. Домножим это равенство на b^m и получим: $1 + b_1 b + \ldots + b_{m-1} b^{m-1} + b_m b^m = 0$, то есть $b^{-1} = -b_1 - b_2 b - \ldots - b_m b^{m-1} \in B$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $0 \neq a \in A$. Аналогично первой части доказательства, рассмотрим уравнение целой зависимости: $a^m + b_1 a^{m-1} + \ldots + b_{m-1} a + b_m = 0$. Можно считать, что $b_m \neq 0$, поскольку иначе можно сократить на a. Тогда, вынося a за скобки, имеем: $a(a^{m-1} + b_1 a^{m-2} + \ldots + b_{m-1}) + b_m$. Так как B — поле, на b_m можно делить, и $a^{-1} = -\frac{a^{m-1} + b_1 a^{m-2} + \ldots + b_{m-1}}{b_m} \in A$. □

Лемма 2 (Лемма Нётер о нормализации)**.** *Пусть $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ — конечно порождённая алгебра. Тогда существует набор алгебраически независимых переменных $t_1, \ldots, t_d \in A$ таких, что A цела над $\mathbb{K}[t_1, \ldots, t_d]$.*

Замечание. Такие $t_1, \ldots, t_d$ принято называть системой параметров.

Доказательство. Индукция по n.

База. При $n = 0$ и $d = 0$ утверждение очевидно.

Шаг. Если $x_1, \ldots, x_n$ алгебраически независимы, то они же являются системой параметров. Пусть теперь существует многочлен F такой, что $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Его можно разложить на однородные компоненты: $F = F_0 + F_1 + \ldots + F_k$. Рассмотрим старшую компоненту:

$$F_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1 + \ldots k_n = k} c_{k_1,\ldots,k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}.$$

Сделаем линейную замену порождающих: $y_i = x_i - \lambda_i x_n,\ \lambda_i \in \mathbb{K},\ i < n$. Тогда $A = \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n]$, поскольку старые порождающие выражаются через новые. Выразим теперь F_k через новые порождающие:

$$F_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1 + \ldots k_n = k} c_{k_1,\ldots,k_n} (y_1 + \lambda_1 x_n)^{k_1} \ldots (y_{n-1} + \lambda_{n-1} x_n)^{k_{n-1}} x_n^{k_n}.$$

Раскрыв скобки, получим, что:

$$F(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n) = x_n^k \cdot F_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, 1) + \text{ члены степени меньше } k \text{ по } x_n.$$

Заметим, что $F_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, 1) \neq 0$ при подходящем выборе $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$. Это следует из однородности F_k: если $F_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, 1) = 0$ на всей гиперплоскости $x_n = 1$, то он равен нулю на всем $\mathbb{K}^n$ без гиперплоскости $x_n = 0$. Но тогда он тождественно равен нулю в силу непрерывности. Значит, на этот скаляр можно делить.

Таким образом, x_n цел над подалгеброй $B = \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n]$. Это означает, что A цела над $\mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n]$. По предположению индукции в B можно выбрать систему параметров $t_1, \ldots, t_d$. Отсюда следует, что A цела над $\mathbb{K}[t_1, \ldots, t_d]$. □

Теперь мы готовы доказать теорему Гильберта о нулях.

Доказательство теоремы

Сначала сформулируем и докажем слабую теорему о нулях.

Теорема 3 (Слабая теорема о нулях)**.** *Пусть $I \lhd \mathbb{K}[\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n]$ — идеал, не совпадающий со всем кольцом. Тогда $X = \mathbb{V}(I) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Увеличим I до максимального собственного идеала в кольце многочленов. При этом многообразие нулей может только уменьшиться, так как мы добавим новые уравнения. Поэтому можно считать I максимальным собственным идеалом, а значит $A = \mathbb{K}[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]/I$ — поле, и одновременно конечно порождённая алгебра над $\mathbb{K}$. По лемме Нётер о нормализации в A существует подалгебра $B = \mathbb{K}[t_1, \ldots, t_n]$ такая, что $A \supseteq B$ — целое расширение. Согласно лемме 1, B является полем, а значит $d = 0$ и $B = \mathbb{K}$. Поскольку $A \supseteq \mathbb{K}$ — конечное расширение полей, $A = \mathbb{K}$ в силу алгебраической замкнутости $\mathbb{K}$.

Рассмотрим каноническую проекцию $\chi : \mathbb{K}[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n] \to A$. Этот гомоморфизм соответствует какой-то точке z аффинного пространства, причём подстановка z во все многочлены идеала даёт 0, а значит $z \in X$. □

Теперь докажем сильную теорему о нулях, то есть теорему 2.

Доказательство. Пусть $I = (f_1, \ldots, f_m)$ и $f \in \mathbb{I}(X)$. Добавим к числу переменных ещё одну: $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, t$ — координаты в $\mathbb{A}^{n+1}$. Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ \ldots \\ f_m(x) = 0 \\ f(x) \cdot t - 1 = 0. \end{cases}$$

Эта система уравнений несовместна. По слабой теореме о нулях имеем:

$$f_1(x) \cdot g_1(x,t) + \ldots + f_m(x) \cdot g_m(x,t) + (1 - f(x) \cdot t) g_{m+1}(x,t) = 1,\ \ g_i \in \mathbb{K}[\mathbb{A}^{n+1}],$$

так как идеал, порождённый $f_1, \ldots, f_m, f(x) \cdot t - 1$, совпадает со всей алгеброй многочленов. Подставим в это равенство вместо t рациональную функцию $\frac{1}{f(x)}$. Тогда, после приведения к общему знаменателю, получим:

$$\frac{f_1 h_1 + \ldots + f_m h_m}{f^k} = 1.$$

Домножая на f^k, получаем, что $f \in \sqrt{I}$. $\square$

Лекция 4

Топология на аффинных алгебраических многообразиях

Пусть основное поле $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Тогда на n-мерном аффинном пространстве имеется классическая топология, которая задаётся метрикой:

$$\rho(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \ldots + |x_n - y_n|^2}.$$

В этой топологии аффинные алгебраические многообразия замкнуты, а полиномиальные функции и морфизмы непрерывны. В случае же произвольного поля, классической топологии нет. Однако, на $\mathbb{A}^n$ можно ввести топологию, которая будет удовлетворять обоим этим свойствам — она называется топологией Зарисского.

Определение 14. Замкнутым подмножеством в топологии Зарисского называются аффинные алгебраические многообразия.

Замечание. Аксиомы топологии были проверены в предложении 1.

На алгебраическом многообразии $X \subseteq \mathbb{A}^n$ можно ввести индуцированную топологию, то есть замкнутыми подмножествами в X будут алгебраические подмногообразия в X — пересечения X с замкнутыми подмножествами в $\mathbb{A}^n$.

Предложение 7. *Топология Зарисского на аффинном многообразии X не зависит от вложения $X \hookrightarrow \mathbb{A}^n$.*

Доказательство. Замкнутые подмножества в X — алгебраические подмногообразия $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{A}^n$ — задаются идеалами $I \lhd \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$ такими, что $I \supseteq \mathbb{I}(X)$. Такие идеалы взаимно-однозначно соответствуют идеалам $J \lhd \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]/\mathbb{I}(X) = \mathbb{K}[X]$. Подмногообразие Y в таком случае задается следующим образом:

$$Y = \{x \in X \mid f(x) = 0 \ \forall f \in J\} =: \mathbb{V}(J).$$

Класс таких множеств не зависит от вложения. □

Введём для подмногообразий обозначение:

$$\mathbb{I}(Y) = \mathbb{I}_X(Y) = \{f \in \mathbb{K}[X] \mid f|_Y = 0\} \lhd \mathbb{K}[X].$$

Предложение 8. *Полиномиальные функции и морфизмы непрерывны в топологии Зарисского.*

Доказательство. Достаточно доказать вторую часть предложения, поскольку полиномиальная функция является морфизмом. Докажем, что прообразы замкнутых подмножеств замкнуты.

Пусть задан морфизм $\varphi : X \to Y \supseteq Z = \mathbb{V}(J),\ J \lhd \mathbb{K}[Y]$. Тогда:

$$x \in \varphi^{-1}(Z) \ \Leftrightarrow\ \varphi(x) \in Z \ \Leftrightarrow\ \forall f \in J : f(\varphi(x)) = \varphi^* f(x) = 0.$$

Таким образом, $\varphi^{-1}(Z) = \mathbb{V}(\varphi^* J) = \mathbb{V}(\varphi^* J \cdot \mathbb{K}[X])$ — замкнутое множество. □

Замечание. Топология Зарисского не отделима по Хаусдорфу.

Пример. Рассмотрим $\mathbb{A}^1$. Замкнутыми подмножествами являются конечные множества точек и вся прямая. Открытыми множествами являются, соответственно, дополнения к замкнутым. Ясно, что непустые открытые подмножества всегда пересекаются.

Нётеровы топологические пространства

Определение 15. Топологическое пространство X нётерово, если любая цепочка убывающих замкнутых подмножеств $X \supseteq Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \ldots \supseteq Y_k \supseteq \ldots$ стабилизируется, то есть $\exists k : Y_k = Y_{k+1} = \ldots$.

Упражнение 2. Подпространство нётерова топологического пространства также нётерово.

Упражнение 3. Объединение конечного числа нётеровых топологических пространств нётерово.

Предложение 9. *Аффинные алгебраические многообразия нётеровы в топологии Зарисского.*

Доказательство. Пусть X — аффинное многообразие. Рассмотрим цепочку подмногообразий: $X \supseteq Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \ldots$. Аннулирующие идеалы этих подмногообразий образуют, наоборот, возрастающую цепочку: $\mathbb{I}(Y_1) \subseteq \mathbb{I}(Y_2) \subseteq \ldots \lhd \mathbb{K}[X]$, причём $\mathbb{K}[X]$ нётерова, а значит в ней любая возрастающая цепочка идеалов стабилизируется. Следовательно, цепочка подмногообразий тоже стабилизируется. $\square$

Определение 16. Топологическое пространство X неприводимо, если не существует такого разложения $X = Y \cup Z$, где Y и Z замкнуты и не пусты.

Упражнение 4. Если X неприводимо, $\varphi : X \to Y$ непрерывно, то $\varphi(X)$ неприводимо.

Упражнение 5. Если $X \subseteq Y$, X неприводимо, то $\overline{X}$ неприводимо.

Упражнение 6. Если X неприводимо, $U_1, U_2 \subset X$ — открытые и непустые подмножества, то $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$.

Упражнение 7. Если X неприводимо, $U \subset X$ — открытое и непустое, то $\overline{U} = X$.

Теорема 4. *Нётерово топологическое пространство X можно представить в виде $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$, где X_i замкнуты и неприводимы, $X_i \nsubseteq \bigcup_{i\neq j} X_j$, причём единственным образом.*

Определение 17. В этом случае X_i называются неприводимыми компонентами пространства X.

Следствие 5. *Аффинные алгебраические многообразия однозначно раскладываются в объединение своих неприводимых компонент.*

Доказательство теоремы.
Существование. Докажем от противного. Пусть X нельзя разложить в конечное объединение неприводимых замкнутых подмножеств. В частности это означает, что X приводимо, то есть X можно разложить в объединение собственных замкнутых подмножеств: $X = Y_1 \cup Z_1$. Хотя бы одно из них также нельзя разложить в конечное объединение неприводимых замкнутых подмножеств. Без ограничения общности считаем, что Y_1 нельзя разложить таким образом. Аналогично предыдущему, имеем $Y_1 = Y_2 \cup Z_2$. Продолжая таким образом, получим строго вложенную цепочку замкнутых подмножеств в X, что противоречит нётеровости. Следовательно, $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$. Убирая из разложения такие X_i, что $X_i \subseteq \bigcup_{i\neq j} X_j$, получим искомое разложение.
Единственность. Пусть $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m = Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$ — два разложения на неприводимые компоненты. Тогда $\forall i : X_i = (X_i \cap Y_1) \cup \ldots \cup (X_i \cap Y_n)$. Поскольку X_i неприводимо, а все эти подмножества замкнуты, существует j такое, что $X_i = (X_i \cap Y_j) \subseteq Y_j$. Аналогично доказывается и обратное: $\forall j\ \exists k : Y_j \subseteq X_k$. Следовательно, получаем $\forall i\ \exists j, k : X_i \subseteq Y_j \subseteq X_k$. Но тогда во всех этих включениях должны быть равенства, так как $X_i \nsubseteq \bigcup_{i\neq j} X_j$. Значит, два разложения X на неприводимые компоненты совпадают. □

Предложение 10. *Аффинное алгебраическое многообразие X неприводимо $\Leftrightarrow$ в $\mathbb{K}[X]$ нет делителей нуля.*

Доказательство. Докажем от противного.
$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть в координатной алгебре есть делители нуля $f_1, f_2 \neq 0,\ f_1 \cdot f_2 = 0$. Обозначим $X_i = \mathbb{V}(f_i) \subsetneq X$ — подмногообразие нулей f_i. Тогда $X = X_1 \cup X_2$, так как в каждой точке X либо $f_1 = 0$, либо $f_2 = 0$. Противоречие.
$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $X = X_1 \cup X_2$ приводимо. Так как X_i не совпадает со всем X, в $\mathbb{I}(X_i)$ существует функция f_i, не обращающаяся тождественно в ноль на X. Тогда получим, что $f_1 \cdot f_2 = 0$ на X, а значит в $\mathbb{K}[X]$ есть делители нуля. Противоречие. □

Примеры. 1) $\mathbb{A}^n$ неприводимо.

2) Пусть $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, $p \in \mathbb{K}[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$ — неприводимый многочлен. Тогда гиперповерхность $X = \mathbb{V}(p) \subset \mathbb{A}^n$ неприводима.

   Доказательство. $\mathbb{K}[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n] \rhd \mathbb{I}(X) \ni f$. По теореме Гильберта о нулях существует k такое, что f^k делится на p. Из факториальности кольца многочленов следует, что f делится на p. Это означает, что $\mathbb{I}(X) = (p)$. Теперь, если $f_1, f_2 \in \mathbb{K}[X],\ f_1 \cdot f_2 = 0$, то в силу $f_i = \tilde{f}_i|_X,\ \tilde{f}_i \in \mathbb{K}[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$ имеем $\tilde{f}_1 \cdot \tilde{f}_2 \in (p)$, а значит, для некоторого i многочлен $\tilde{f}_i$ делится на p, то есть $f_i = 0$ в $\mathbb{K}[X]$. Следовательно, в $\mathbb{K}[X]$ нет делителей нуля. □

3) Рассмотрим на $\mathbb{A}^2$ объединение координатных осей: $X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 = 0\}$. Эта гиперповерхность приводима: $X = X_1 \cup X_2$, где $X_i = \{(x_1, x_2) \mid x_i = 0\}$. При этом X_i неприводимы, так как $X_i \cong \mathbb{A}^1$.

Задача 1. *Пусть $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто. Разложить любую гиперповерхность $X = \mathbb{V}(f) \subset \mathbb{A}^n$ на неприводимые компоненты.*

Задача 2. *Гипербола* $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1x_2 = 1\}$ *несвязна в классической топологии, но является неприводимым многообразием в топологии Зарисского.*

Задача 3. *Разложить* $X = \{x \in \mathbb{A}^3 \mid x_1^2 = x_2x_3,\ x_1^3 = x_2^2\}$ *на неприводимые компоненты.*

Главные открытые подмножества

Определение 18. Пусть X — аффинное многообразие, $h \in \mathbb{K}[X]$. Главным открытым подмножеством называется множество $X_h = \{x \in X \mid h(x) \neq 0\}$. Иными словами, это $X \setminus \mathbb{V}(h)$.

Главные открытые подмножества образуют базу топологии Зарисского. На каждом главном открытом подмножестве можно ввести структуру аффинного алгебраического многообразия:

1) Вложим X в аффинное пространство:

$$X = \mathbb{V}(f_1, \ldots, f_m) \subset \mathbb{A}^n,\ f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{K}[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n].$$

Тогда можно вложить X_h в $\mathbb{A}^{n+1}$ таким образом:

$$X_h \hookrightarrow \mathbb{A}^{n+1},$$

$$x \mapsto (x, \frac{1}{h(x)}).$$

Образ такого вложения задаётся алгебраическими уравнениями:

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ \ldots \\ f_m(x) = 0 \\ t \cdot \tilde{h}(x) - 1 = 0 \end{cases},\ \tilde{h}|_X = h.$$

2) Координатная алгебра $\mathbb{K}[X_h]$ устроена следующим образом:

$$\mathbb{K}[X_h] = \mathbb{K}[X][\frac{1}{h}] = \{f = \frac{g}{h^k} \ |g \in \mathbb{K}[X]|_{X_h},\ k \geq 0\}.$$

Таким образом, структура аффинного многообразия на главном открытом подмножестве X_h не зависит от вложения X в аффинное пространство.

3) Топология Зарисского на X_h индуцирована с X.

Доказательство. Замкнутые подмножества $X_h \supseteq Y$ задаются как $\mathbb{V}(f_1, \ldots, f_s)$, где $f_i = \frac{g_i}{h^{k_i}},\ g_i = \tilde{g}_i|_{X_h},\ \tilde{g}_i \in \mathbb{K}[X]$. Но тогда $Y = \mathbb{V}(\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_s) \cap X_h$. □

Задача 4. *Если* $\mathbb{I}(X) = (f_1, \ldots, f_m)$, *то* $\mathbb{I}(X_h) = (f_1, \ldots, f_m, t \cdot h - 1)$.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ