МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

АЛГЕБРА. ЧАСТЬ 2

АРЖАНЦЕВ
ИВАН ВЛАДИМИРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
ВЫПУСКНИКА МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ГЛУНЧАДЗЕ ИРАКЛИЯ ВАХТАНГОВИЧА

Лекции

Предисловие

Этот документ — конспект лекций курса «Алгебра. Часть 2», видеозаписи которого опубликованы в онлайн-лектории МГУ Teach-in. Лектор — Иван Владимирович Аржанцев, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ. Курс читается в третьем семестре обучения на мехмате только студентам отделения математики (в отличие от курса «Алгебра. Часть 1», общего для отделений математики и механики в первом семестре).

Курс состоит из трёх основных частей:

I. **Теория групп** (лекции 1–12).

II. **Теория представлений** (лекции 13–18).

III. **Кольца и поля** (лекции 18–22).

Это деление не отражено явно в разбиении документа на разделы, чтобы было удобнее сопоставлять разделы и видео лекций[1)]. Впрочем, его можно отследить по «сбросам» нумерации параграфов в тексте и оглавлении.

Конспект подготовил Ираклий Глунчадзе, выпускник мехмата 2018 года (отделение математики). В сущности, это второе издание: первая версия была создана по лекциям, прочитанным И. В. Аржанцевым в осеннем семестре 2013/14 учебного года. К осеннему семестру 2021/22 учебного года, когда записывались видео для курса на Teach-in, эти лекции не претерпели значительных изменений, поэтому и конспект не потребовал существенной переработки.

Для вёрстки использовалась издательская система LaTeX 2_ε с подключённым, помимо прочих, пакетом XY-pic.

[1)] Части не включают в себя лекции целиком: переход от части II к части III происходит прямо в ходе лекции 18. Поэтому, чтобы добавить в текст заголовки, соответствующие частям, пришлось бы разбивать лекции. Но тогда документ было бы неудобно использовать как сопровождающий *конспект*.

Лекция 1

Группы. Введение

§ 1. Основные определения

Определение. *Группой* называется множество G с бинарной операцией $G \times G \to G$ (стандартное обозначение: $(a, b) \mapsto ab$), удовлетворяющей следующим требованиям:

1. ассоциативность: $(ab)\,c = a\,(bc) \quad \forall\, a, b, c \in G$;
2. наличие нейтрального элемента: $\exists\, e \in G : ea = ae = a \ \forall\, a \in G$;
3. наличие обратного элемента: $\forall\, a \in G \ \exists\, a^{-1} \in G : aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Если бинарная операция обладает из перечисленного только ассоциативностью, то G называется *полугруппой*. Полугруппа с нейтральным элементом называется *моноидом*.

Определение. Группа называется *коммутативной*, или *абелевой*, если $ab = ba \ \forall\, a, b \in G$.

Для коммутативных групп используются аддитивные обозначения: вместо G пишут A, вместо ab пишут $a + b$, вместо e пишут 0, вместо a^{-1} — $-a$.

Определение. Подмножество H группы G называется её *подгруппой*, если $H \neq \varnothing$ и $ab^{-1} \in$ $\in H \,\forall\, a, b \in H$[2)].

Определение. *Гомоморфизмом* групп G_1 и G_2 называется отображение $\varphi : G_1 \to G_2$, такое что $\forall\, a, b \in G_1 \ \varphi(ab) = \varphi(a)\,\varphi(b)$.

Замечание.

1. Проверим, что гомоморфизм «сохраняет» нейтральный элемент:

   - С одной стороны, $\varphi(e_1 e_1) = \varphi(e_1)$ по определению нейтрального элемента.
   - С другой стороны, $\varphi(e_1 e_1) = \varphi(e_1)\,\varphi(e_1)$ по определению гомоморфизма.

   Если теперь домножить (с любой стороны) обе части получившегося равенства $\varphi(e_1) = \varphi(e_1)\,\varphi(e_1)$ на $\varphi(e_1)^{-1}$, получим $e_2 = \varphi(e_1)$.
2. Аналогично для обратного элемента: $\varphi(aa^{-1}) = \varphi(a)\,\varphi(a^{-1})$ по определению гомоморфизма, $\varphi(aa^{-1}) = \varphi(e_1) = e_2$ по определению обратного элемента $\Rightarrow \varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

Определение. *Изоморфизмом* групп называется их биективный гомоморфизм. Если между G_1 и G_2 существует изоморфизм, то говорят, что они *изоморфны*, что обозначается так: $G_1 \cong$ $\cong G_2$.

[2)] Вместо этих двух условий можно написать три других: $e \in H$, $ab \in H \,\forall\, a, b \in H$ и $a^{-1} \in H \,\forall\, a \in H$. Доказательство равносильности этих наборов условий остаётся читателю в качестве упражнения.

Так как изоморфизм $\varphi\colon G_1 \to G_2$ биективен, то существует обратное к нему отображение $\varphi^{-1}\colon G_2 \to G_1$. Докажем, что это отображение — гомоморфизм.

Теорема 1. $\varphi^{-1}(cd) = \varphi^{-1}(c)\,\varphi^{-1}(d)$.

□ $\varphi(\varphi^{-1}(cd)) = cd = \varphi(\varphi^{-1}(c))\,\varphi(\varphi^{-1}(d)) = \varphi(\varphi^{-1}(c)\,\varphi^{-1}(d))$.
При этом φ — биекция. ■

Определение. *Эндоморфизмом* группы называется её гомоморфизм в себя. *Автоморфизмом* группы называется её изоморфизм в себя.

Определение. Пусть $\varphi\colon G_1 \to G_2$ — гомоморфизм. Тогда его *ядром* называется множество

$$\operatorname{Ker}\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in G_1 \mid \varphi(a) = e_2\},$$

а его *образом* называется множество

$$\operatorname{Im}\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in G_2 \mid \exists\, a \in G_1\colon \varphi(a) = b\}.$$

Задача. Доказать, что $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq G_1$ и $\operatorname{Im}\varphi \subseteq G_2$ — подгруппы в своих группах.

Определение. *Порядок* группы G — это число её элементов $|G|$. Группа называется *конечной*, если $|G| < \infty$, и *бесконечной* в ином случае.

§ 2. Примеры групп

I. Числовые

1. Аддитивные:

   - $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ — бесконечные. $(\mathbb{N}, +)$ — не группа: в ней нет отрицательных чисел, являющихся обратных к положительным[3)], а в российской традиции к натуральным числам не относится и нейтральный элемент 0.
   - $(\mathbb{Z}_n, +)$ — конечная. Здесь $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$, где *класс вычетов*

     $$\overline{a} = \{\ldots, a-2n, a-n, a, a+n, a+2n, \ldots\}$$

     — все целые числа, которые имеют остаток a от деления на n.

2. Мультипликативные:

   - $(\mathbb{Z}^\times, \times)$ [4)] $= \{\pm 1\}$.
   - если F — поле, то $(\mathbb{F}^\times, \times) = F \setminus \{0\}$ — группа. В частности, $(\mathbb{Q}^\times \setminus \{0\}, \times)$ — группа.
   - $(\mathbb{Z}_n^\times, \times) = \{\overline{k} \mid (k, n) = 1\}$, при этом $|\mathbb{Z}_n^\times| = \varphi(n)$, где φ — функция Эйлера.
   - $(\mathbb{Z}_p^\times, \times) = \{\overline{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$, где p — простое.

[3)] Кстати, именно это рассуждение и привело к «изобретению» $\mathbb{Z}$ из $\mathbb{N}$.

[4)] Здесь и далее верхним индексом $\times$ обозначаем подмножество, составленное из всех обратимых и только обратимых элементов множества.

II. Подстановки

1. $\mathbf{S}_n$ — симметрическая группа, $|\mathbf{S}_n| = n!$.
2. $\mathbf{A}_n$ — знакопеременная группа (чётные подстановки), $|\mathbf{A}_n| = \frac{n!}{2}$.
3. *Группа Клейна* $\mathbf{V}_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ коммутативна.

Задача. Доказать, что:

1. $\mathbf{S}_n$ коммутативна $\Leftrightarrow n \leqslant 2$;
2. $\mathbf{A}_n$ коммутативна $\Leftrightarrow n \leqslant 3$.

III. Матрицы

Пусть F — поле. Матрицы будем рассматривать над ним. Говоря про группы матриц, операцией подразумевают умножение.

1. $\mathbf{GL}_n(F)$ — *общая линейная группа* (матрицы с ненулевым определителем, то есть обратимые).
2. $\mathbf{SL}_n(F)$ — *специальная линейная группа* (матрицы с определителем, равным единице).
3. $\mathbf{D}_n(F)$ — группа диагональных матриц.
4. $\mathbf{B}_n(F)$ — группа верхнетреугольных матриц.
5. $\mathbf{U}_n(F)$ — группа *унитреугольных матриц*, то есть верхнетреугольных матриц, у которых на главной диагонали стоят единицы.
6. $\mathbf{O}_n(F) = \{A \mid AA^T = E\} = \{A \mid (Av, Aw) = (v, w) \ \ \forall\, v, w \in F^n\}$, где $(\cdot\,,\cdot)$ — стандартная невырожденная билинейная форма, $(v, w) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$, — *ортогональная группа* (у всех ортогональных матриц определитель по модулю равен единице).
7. $\mathbf{SO}_n(F)$ — *специальная ортогональная группа* (подгруппа ортогональной группы, составленная из матриц, определитель которых равен единице).
8. $\mathbf{U}_n(\mathbb{C}) = \left\{A \mid A\overline{A}^T = E\right\}$[5] — *унитарная группа*.
9. $\mathbf{SU}_n(\mathbb{C})$ — *специальная унитарная группа* (подгруппа унитарной группы, составленная из матриц, определитель которых равен единице).
10. $\mathbf{Sp}_{2n}(F) = \{A \mid AJA^T = J\}$, где J — блочнодиагональная матрица, состоящая из блоков $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, в каноническом виде, — *симплектическая группа*.

Задача. Вычислить порядки $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$, $\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$, $\mathbf{D}_n(\mathbb{Z}_p)$, $\mathbf{B}_n(\mathbb{Z}_p)$, $\mathbf{U}_n(\mathbb{Z}_p)$, где p — простое.

Задача. Доказать, что если $A \in \mathbf{Sp}_{2n}(F)$, то $\det A = 1$.

[5] $\overline{A}^T = A^*$.

IV. Аффинные преобразования

Полагаем $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. $\mathrm{Aff}_n(F) = \{x \mapsto Ax + b \mid A \in \mathbf{GL}_n(F), b \in F^n\}$ — *группа аффинных преобразований*.
2. *Группа движений* — группа аффинных преобразований, у которых A ортогональна.
3. $\mathrm{Sym}(M) = \{f$ — движение $\mid f(M) = M\}$ — *группа симметрий* множества $M \subseteq \mathbb{R}^n$.
4. $\mathrm{Sym}^+(M) = \{f \in \mathrm{Sym}(M) \mid f$ сохраняет ориентацию$\}$[6] — *группа вращений* множества $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

Задача. Доказать, что:

1. группа симметрий правильного тетраэдра изоморфна $\mathbf{S}_4$;
2. группа вращений правильного тетраэдра изоморфна $\mathbf{A}_4$;
3. группа вращений куба изоморфна $\mathbf{S}_4$.

Определение. *Группой диэдра* $\mathbf{D}_n$ называется группа симметрий правильного n-угольника.

Замечание. При любом n $|\mathbf{D}_n| = 2n$: это число складывается из n поворотов и n осевых симметрий. Но $\mathbf{D}_n$ при чётных и нечётных n устроены по-разному. Например, у правильного пятиугольника все оси симметрии проходят через вершину и середины противолежащего ребра. Но у правильного шестиугольника есть оси симметрии, проходящие через противоположные вершины, и оси симметрии, проходящие через середины противоположных сторон.

V. Группа кватернионов

Определение. *Группой кватернионов* называется множество $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ с операцией умножения, заданной следующим образом: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k, ji = -k$ («по кругу»).

§ 3. Циклические группы

Пусть G — группа, а g — её элемент.

Определение. *Циклической подгруппой* в G, порождённой g, называется подгруппа

$$\langle g \rangle = \{g^n, n \in \mathbb{Z}\} = \left\{\ldots, g^{-2}, g^{-1}, g^0 = e, g^1 = g, g^2, \ldots\right\}.$$

Пример. $G = (\mathbb{Z}, +)$, $g = 2 \Rightarrow \langle g \rangle = 2\mathbb{Z}$ — чётные числа.

Определение. *Порядок элемента* $g \in G$ — это наименьшее $n \in \mathbb{N}$, такое что $g^n = e$, если такое существует, или ∞, если такого не существует. Порядок элемента g обозначается как $\mathrm{ord}(g)$.

Лемма 1. $\mathrm{ord}(g) = |\langle g \rangle|$.

[6] Сохранение ориентации равносильно тому, что $\det A = 1$.

□ Пусть $n = \text{ord}\,(g)$ — конечное число. Тогда $e, g, \ldots, g^{n-1}$ попарно различны, так как если $\exists\, m, k : m > k, g^m = g^k$, то $g^{m-k} = e$, а $m - k < n$, что ведёт к противоречию. Таким образом, $e, g, \ldots, g^{n-1} \in \langle g \rangle$.
Возьмём некоторое $m \in \mathbb{Z}$. Тогда, по теореме о делении с остатком, $m = nq + r$, где $0 \leqslant r \leqslant n - 1 \Rightarrow g^m = (g^n)^q g^r = e^q g^r = g^r$. Значит, кроме уже перечисленных элементов, в $\langle g \rangle$ ничего нового добавить нельзя $\Rightarrow |\langle g \rangle| = n$.
Если же $\text{ord}\,(g) = \infty$, то $g^m \neq g^k \ \forall\, k, m : k \neq m \Rightarrow |\langle g \rangle| = \infty$. ■

Определение. Группа G называется *циклической*, если существует такой элемент $g \in G$, что $\langle g \rangle = G$. Такой g называется *порождающим*, или *образующим элементом*.

Пример. $G = (\mathbb{Z}, +) \Rightarrow$ порождающие элементы $g = \pm 1$. Больше порождающих в этой группе нет.

Предложение 1.

1. *Если G — бесконечная циклическая группа, то $G \cong (\mathbb{Z}, +)$.*
2. *Если G — конечная циклическая группа, то $G \cong (\mathbb{Z}_n, +)$.*

□ Строим соответствующие изоморфизмы:

1. $g^m \mapsto m$;
2. $g^m \mapsto \overline{r}$, где $m = nq + r$, $0 \leqslant r \leqslant n - 1$, $n = |G|$.

■

Задача. Доказать, что $\text{ord}\left(g^k\right) = \frac{n}{(n,k)}$, где $n = \text{ord}\,(g)$.

Предложение 2. *Имеется биекция между целыми неотрицательными числами и подгруппами в $\mathbb{Z}$:*

$$d \leftrightarrow d\mathbb{Z}.$$

□ Очевидно, что $d\mathbb{Z}$ — подгруппа и что $d\mathbb{Z} = d'\mathbb{Z} \Leftrightarrow d = d'$.
Докажем, что других подгрупп нет. Если произвольная подгруппа $H = \{0\}$, кладём $d = 0$, иначе кладём d равным наименьшему натуральному элементу H. Тогда $d\mathbb{Z} \subseteq H$.
Пусть $m \in H$. Тогда $m = qd + r \Rightarrow r = m - qd \in H$. При этом $r \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant r \leqslant d - 1$, то есть либо $r = 0$, либо $r \in \mathbb{N}$. Но мы выбирали d минимальным натуральным элементом $H \Rightarrow r = 0 \Rightarrow H \subseteq d\mathbb{Z} \Rightarrow H = d\mathbb{Z}$. ■

В начале следующей лекции мы докажем предложение о существовании биекции между натуральными делителями n и подгруппами в $\mathbb{Z}_n$. Из этого будет следовать, что подгруппа циклической группы — циклическая.

Лекция 2

Группы. Смежные классы и теорема Лагранжа

§ 3. Циклические группы (продолжение)

Предложение 3. *Пусть $n \geqslant 2$. Тогда имеется биекция между натуральными делителями n и подгруппами в $\mathbb{Z}_n$:*

$$d \leftrightarrow \langle \overline{d} \rangle = d\mathbb{Z}_n.$$

В частности, $|d\mathbb{Z}_n| = \frac{n}{d}$.

□ Очевидно, что $d\mathbb{Z}_n$ — подгруппа $\mathbb{Z}_n \ \forall\, d$.
Если $d \mid n$, то $d\mathbb{Z}_n = \left\{\overline{0}, \overline{d}, \overline{2d}, \ldots, \overline{(k-1)\,d}\right\}$, где $k = \frac{n}{d}$. Таким образом, если $d\mathbb{Z}_n = d'\mathbb{Z}_n$, то $d = d'$.
Пусть $H \subseteq \mathbb{Z}_n$ — произвольная подгруппа. Если $H = \{0\}$, то кладём $d = n$. Иначе пусть d соответствует $\overline{d}$ — наименьшему ненулевому вычету в H. Так как H — подгруппа $\mathbb{Z}_n$, то $d\mathbb{Z}_n \subseteq H$. Пусть $c = (d, n)$. По лемме о линейном представлении НОД, $\exists\, u, v \in \mathbb{Z} :\ c = du + nv \Rightarrow$ $\Rightarrow \overline{c} \in H$. Но c — делитель d, а мы выбирали $\overline{d}$ наименьшим вычетом. Значит, $c = d \Rightarrow d \mid n$.
Пусть $\overline{m} \in H, m = dq + r, 0 \leqslant r \leqslant d-1$. Тогда $\overline{r} = \overline{m} - \overline{d} \cdot \overline{q} \in H \Rightarrow \overline{r} = \overline{0} \Rightarrow H = d\mathbb{Z}_n$. ■

Следствие. Подгруппа циклической группы — циклическая.

Задача. Привести пример коммутативной счётной нециклической группы.

I. Приложения к криптографии

Пусть G — конечная группа, $g \in G$ — элемент большого порядка. Тогда для $h \in \langle g \rangle$ требуется найти такое $k \in \mathbb{N}$, что $h = g^k$. Такая задача называется *задачей дискретного логарифмирования*. Она очень трудоёмкая, и современные алгоритмы её решения по сложности близки к полному перебору. С другой стороны, обратная задача — это задача возведения в степень, и она, наоборот, решается быстро. Например, при вычислении g^{100} можно обойтись лишь двумя операциями умножения и 6 операциями возведения в квадрат:

$$g^{100} = \left(\left(\left(\left((g^2 \cdot g)^2\right)^2\right)^2 \cdot g\right)^2\right)^2$$

На этих двух соображениях основан *протокол Диффи — Хеллмана* обмена ключами, описанный в 1976 году. Публично известны некоторая группа G и элемент $g \in G$. Участники обмена Алиса и Боб выбирают некоторые натуральные числа, каждый своё: Алиса — a, Боб — b. После этого они публикуют получившиеся элементы g^a и g^b (но не a и b, они остаются тайными). Чтобы обменяться ключами, Алиса возводит элемент g^b, опубликованный Бобом,

в «свою» степень a, а Боб, наоборот, возводит элемент Алисы g^a в «свою» степень b. Полученное равенство $\left(g^b\right)^a = (g^a)^b = g^{ab}$ даёт Алисе и Бобу элемент из G, который есть только у них двоих и которого нет ни у кого другого. А задача вычисления, например, a по g^a — это и есть та самая задача дискретного логарифмирования, которую «взломать» пока не удалось.
Выше произошёл только обмен ключами. А секретно обмениваться информацией с использованием тех же G, g, g^a и g^b Алиса и Боб могут по *криптосистеме Эль-Гамаля*, описанной в 1985 году. Пусть Боб хочет отправить Алисе сообщение $h \in G$ (полагаем, что сообщения — тоже элементы G; на практике это дело техники). Он выбирает для сообщения $k \in \mathbb{N}$ и публикует пару $\left(g^k, h\left(g^a\right)^k\right)$ — *маску*. Теперь Алиса может узнать h, то есть *снять маску*, благодаря следующему равенству: $h = \left(hg^{ak}\right)\left(g^k\right)^{-a}$. Никто, кроме Алисы, этого сделать не может, ведь a знает только она.

§ 4. Смежные классы. Теорема Лагранжа

Пусть G — группа, $H \subseteq G$ — подгруппа.

Определение. *Левым смежным классом* элемента $g \in G$ по подгруппе H называется множество $gH \stackrel{\text{def}}{=} \{gh \mid h \in H\}$.

Замечание. g и g' лежат в одном смежном классе $\Leftrightarrow g^{-1}g' \in H$.

Определение. *Правым смежным классом* элемента $g \in G$ по подгруппе H называется множество $Hg \stackrel{\text{def}}{=} \{hg \mid h \in H\}$.

Замечание.

1. $\forall\, g, g' \in G$ либо $gH = g'H$, либо $gH \cap g'H = \varnothing$;
2. $\forall\, g \in G\ \ |gH| = |H|$.

Определение. *Индекс подгруппы* H в группе G — это число левых смежных классов по этой подгруппе. Для конечных групп G индекс H обозначается как $[G : H]$. Разбиение группы на правые смежные классы может быть устроено по-другому, но их всё равно будет столько же, сколько и левых.

Теорема (Лагранжа). Пусть G — конечная группа, $H \subseteq G$ — подгруппа. Тогда $|G| = |H| \cdot \cdot [G : H]$.

Доказательство этого результата приводилось в первой части курса, на лекции 23.

Следствие 1. $|H| \ \big|\ |G|$.

Следствие 2. $\forall\, g \in G\ \ \mathrm{ord}\,(g) \mid |G|$.

□ $\mathrm{ord}\,(g) = |\langle g \rangle|$, дальше пользуемся теоремой Лагранжа. ■

Следствие 3. $\forall\, g \in G\ g^{|G|} = e$.

Следствие 4 (малая теорема Ферма). *Пусть p — простое, $\overline{a} \in \mathbb{Z}_p$, $\overline{a} \neq \overline{0}$. Тогда $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$.*

Следствие 5. *Пусть p — простое, $|G| = p$. Тогда $G \cong \mathbb{Z}_p$.*

□ $\forall\, g \neq e\ 1 \neq |\langle g \rangle| \mid p \Rightarrow |\langle g \rangle| = p \Rightarrow \langle g \rangle = G$. ■

Задача. Доказать, что в произвольной бесконечной группе G число левых смежных классов по её произвольной подгруппе H равно числу правых смежных классов по H[7)].

Пример. Пусть $G = \mathbf{S}_n$, $H = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & * & \dots & * \end{smallmatrix}\right)\right\}$, $g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & j_1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & 1 & \dots & * \end{smallmatrix}\right)$. Тогда $gH = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & * & \dots & * \end{smallmatrix}\right)\right\}$, то есть все матрицы такого вида: их $(n-1)!$ — ровно столько же, сколько и всевозможных произведений g и элементов H. А $Hg = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & j_1 & \dots & n \\ * & \dots & 1 & \dots & * \end{smallmatrix}\right)\right\}$.

Задача. Привести пример конечной группы G и натурального делителя d числа $|G|$, для которых в G не существует подгруппы порядка d.

§ 5. Нормальные подгруппы и теорема о гомоморфизме

Гомоморфный образ группы
(Путь к победе коммунизма)
Изоморфен факторгруппе
По ядру гомоморфизма.

Неизвестный автор

Определение. Подгруппа $H \subseteq G$ называется *нормальной*, если $\forall\, g \in G\ gH = Hg$.

Пример.

1. Если G абелева, то любая её подгруппа нормальна.
2. $G = \mathbf{S}_n \Rightarrow H = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & * & \dots & * \end{smallmatrix}\right)\right\}$ — ненормальная подгруппа.
3. Если G — любая группа, $H \subseteq G$ — подгруппа, $[G : H] = 2$, то H нормальна.

   □

   - $g \in H \Rightarrow gH = Hg = H$;
   - $g \notin H \Rightarrow gH = Hg = G \setminus H$.

   ■

Замечание. $H \subseteq G$ нормальна $\Leftrightarrow gHg^{-1} = H\ \forall\, g \in G$. Другими словами, подгруппа нормальна тогда и только тогда, когда она устойчива относительно всех сопряжений. Из этого следует, что для проверки нормальности подгруппы достаточно проверить выполнение условия $gHg^{-1} \subseteq H$. Действительно, домножив это включение на g^{-1} слева и на g справа, получим, что $H \subseteq g^{-1}Hg\ \forall\, g \in G$. Подставив теперь вместо g g^{-1}, получим и обратное имеющемуся включение.

Пример. $\mathbf{SL}_n$ — нормальная подгруппа $\mathbf{GL}_n$.

□ Пусть $A \in \mathbf{SL}_n$. Тогда $\det(BAB^{-1}) = \det B \det A \det B^{-1} = 1$. ■

[7)] Для конечной группы это ясно: достаточно повторить доказательство теоремы Лагранжа для правых смежных классов.

Лемма 2. *Если $\varphi : G_1 \to G_2$ — гомоморфизм, то* $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq G_1$ *— нормальная подгруппа в* G_1.

□ Проверяем, что $\forall\, h \in \operatorname{Ker}\varphi,\ \forall\, g \in G_1\ ghg^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi$. Действительно,

$$\varphi\left(ghg^{-1}\right) = \varphi(g)\,\varphi(h)\,\varphi\left(g^{-1}\right) = \varphi(g)\,e_2\varphi\left(g^{-1}\right) = \varphi(g)\,\varphi(g)^{-1} = e_2.$$

■

Задача. Привести пример гомоморфизма $\varphi : G_1 \to G_2$, для которого $\operatorname{Im}\varphi \subseteq G_2$ — ненормальная подгруппа.

Определение. Пусть G — группа, $H \subseteq G$ — нормальная подгруппа. Обозначим через ${}^{G}\!/_{H}$ (читается «G по H») множество левых смежных классов: ${}^{G}\!/_{H} = \{gH \mid g \in G\}$. Операцию умножения на ней зададим так: $(gH)\,(g'H) = (gg')\,H = gg'H$. С такой операцией ${}^{G}\!/_{H}$ называется *факторгруппой*.

Видно, что элементы факторгруппы — подмножества G. Также видно, что определённая нами операция умножения обладает необходимыми свойствами:

- ассоциативностью: $((gH)\,(g'H))\,(g''H) = (gH)\,((g'H)\,(g''H)) = gg'g''H$;
- нейтральным элементом $eH = H$;
- обратным элементом $g^{-1}H$ для gH.

Но корректно ли определена операция умножения? Это могло бы быть неверно, если бы мы не потребовали от H нормальности.

Теорема 2. Умножение в факторгруппе определено корректно, то есть если $g_1, g_2, g_1', g_2' \in G$, $g_1'H = g_1H$, $g_2'H = g_2H$, то $(g_1'H)\,(g_2'H) = g_1'g_2'H = g_1g_2H$.

□ Так как $g_1'H = g_1H$, то существует такой $h_1 \in H$, что $g_1' = g_1h_1$. Аналогично $g_2' = g_2h_2$. Нужно проверить, что $(g_1g_2)^{-1}\,g_1'g_2' \in H$. Действительно,

$$\begin{aligned}(g_1g_2)^{-1}\,g_1'g_2' &= (g_1g_2)^{-1}\,(g_1h_1)\,(g_2h_2) = \\ &= g_2^{-1}g_1^{-1}g_1h_1g_2h_2 = \\ &= g_2^{-1}h_1g_2h_2.\end{aligned}$$

Последний множитель, h_2, не влияет на принадлежность произведения к H, так как сам к нему принадлежит. Выходит, нужно, чтобы $g_2^{-1}h_1g_2 \in H$. Но нормальность H, которая требуется по определению факторгруппы, равносильна выполнению этого условия для любых $g_2 \in G$ и $h_1 \in H$ (см. замечание выше). ■

Также нужно проверить корректность определения обратного элемента.

Теорема 3. Обратный элемент в факторгруппе определено корректно, то есть $\forall\, g \in G,\ \forall\, h \in$ $\in H\ g^{-1}H = (gh)^{-1}\,H$.

□ $g^{-1}H = (gh)^{-1}\,H \Leftrightarrow (g^{-1})^{-1}\,(gh)^{-1} \in H \Leftrightarrow gh^{-1}g^{-1} \in H$, в силу нормальности H. ■

Замечание. Для любой нормальной подгруппы $H \subseteq G$ отображение $\varphi : G \to {}^{G}\!/_{H}$, $g \mapsto gH$, является гомоморфизмом.

□ $\varphi(gg') = gg'H$, $\varphi(g)\varphi(g') = (gH)(g'H) = gg'H \Rightarrow \varphi(gg') = \varphi(g)\varphi(g')$. ■

Видно, что $\operatorname{Ker}\pi = H$. Отсюда можно сделать вывод, что любая нормальная подгруппа реализуется как ядро какого-то гомоморфизма.

На следующей лекции мы докажем важный результат в теории групп — теорему о гомоморфизме.

Лекция 3

Группы автоморфизмов

§ 5. Нормальные подгруппы и теорема о гомоморфизме (продолжение)

Теорема (о гомоморфизме). Пусть $\varphi : G_1 \to G_2$ — гомоморфизм. Тогда $\operatorname{Im}\varphi \cong {}^{G_1}\!/_{\operatorname{Ker}\varphi}$.

□ Определим отображение $\pi\colon {}^{G_1}\!/_{\operatorname{Ker}\varphi} \to \operatorname{Im}\varphi$ следующим образом:

$$\pi\left(g \operatorname{Ker}\varphi\right) = \varphi\left(g\right).$$

Проверим, что π — изоморфизм.

- Корректность: если $h \in \operatorname{Ker}\varphi$, то $\varphi\left(gh\right) = \varphi\left(g\right)\varphi\left(h\right) = \varphi\left(g\right)e_2 = \varphi\left(g\right)$, где e_2 — нейтральный элемент G_2. Таким образом, образ не зависит от выбора представителя в смежном классе.
- Сюръективность очевидна.
- Инъективность: $\varphi\left(g\right) = \pi\left(g \operatorname{Ker}\varphi\right) = \pi\left(g' \operatorname{Ker}\varphi\right) = \varphi\left(g'\right) \Leftrightarrow \varphi\left(g^{-1}g'\right) = e_2 \Leftrightarrow g \operatorname{Ker}\varphi = g' \operatorname{Ker}\varphi$.
- Гомоморфность: $\pi\left(\left(g \operatorname{Ker}\varphi\right)\left(g' \operatorname{Ker}\varphi\right)\right) = \pi\left(gg' \operatorname{Ker}\varphi\right) = \varphi\left(gg'\right) = \varphi\left(g\right)\varphi\left(g'\right) = \pi\left(g \operatorname{Ker}\varphi\right) \cdot \pi\left(g' \operatorname{Ker}\varphi\right)$.

Итак, ψ — корректно определённый биективный гомоморфизм, то есть изоморфизм. ■

Таким образом, если $H \subseteq G$ — нормальная подгруппа и мы хотим понять, что собой представляет ${}^{G}\!/_{H}$, то для этих целей хорошо бы найти гомоморфизм $\varphi : G \to G_2$, где G_2 — какая-то известная группа, а $\operatorname{Ker}\varphi = H$. Тогда ${}^{G}\!/_{H} \cong \operatorname{Im}\varphi$, по теореме о гомоморфизме.

Пример. (Во всех примерах мы хотим описать, что такое ${}^{G}\!/_{H}$.)

1. Для $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = (\mathbb{Z}, +)$ гомоморфизм определим как $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{\times}$, $a \mapsto e^{2\pi i a} = \cos\left(2\pi a\right) + i\sin\left(2\pi a\right)$. Это комплексное число равно 1 тогда и только тогда, когда $a \in \mathbb{Z}$, то есть $\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{Z}$. Итак, $\operatorname{Im}\varphi = S^1 \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ — единичная окружность на комплексной плоскости с центром в начале координат $\Rightarrow {}^{G}\!/_{H} \cong S^1$. Для $G = (\mathbb{R}^2, +)$, $H = (\mathbb{Z}^2, +)$ гомоморфизм определим как $\varphi : (a, b) \mapsto \left(e^{2\pi i a}, e^{2\pi i b}\right)$. Тогда $\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{Z}^2$, $\operatorname{Im}\varphi = S^1 \times S^1$ — тор.
2. Для $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = (n\mathbb{Z}, +)$ построим гомоморфизм $\varphi : G \to \mathbb{Z}_n$, $m \mapsto m \pmod n = \overline{m} \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi = n\mathbb{Z} \Rightarrow {}^{G}\!/_{H} \cong \mathbb{Z}_n$.
3. Для $G = \mathbf{GL}_n\left(K\right)$, $H = \mathbf{SL}_n\left(K\right)$, где K — поле, построим гомоморфизм $\varphi : \mathbf{GL}_n\left(K\right) \to K^{\times}$, $A \mapsto \det A \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \mathbf{SL}_n\left(K\right)$.

$$\forall\, a \neq 0 \;\exists \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi = F^{\times} \Rightarrow {}^{G}\!/_{H} \cong F^{\times}.$$

§ 6. Группы автоморфизмов

Пусть G — группа, $\operatorname{Aut}(G)$ — множество её автоморфизмов. Оно несёт каноническую структуру группы, на ней можно задать следующую операцию:

$$\varphi, \varphi' \in \operatorname{Aut}(G) \Rightarrow \varphi \circ \varphi' \in \operatorname{Aut}(G).$$

Необходимые свойства: ассоциативность верна для композиции любых отображений, в том числе и автоморфизмов; нейтральный элемент — тождественное отображение; обратный элемент — φ^{-1} (доказывалось в теореме § 1).

Предложение 4.

1. $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$;
2. $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_n^{\times}$.

□ Пусть $G = \langle g \rangle$. Тогда любой гомоморфизм $\varphi : G \to G_2$ однозначно определяется образом образующего элемента $\varphi(g) \in G_2$. В самом деле, $\varphi(g^m) = \varphi(g)^m \;\forall\, m \in \mathbb{Z}$.
Пусть $\varphi : G \to G$ — изоморфизм. Тогда, из его сюръективности, $\exists\, k\colon \varphi(g) = g^k$, и это порождающий элемент G.

1. У $\mathbb{Z}$ всего два порождающих. Для каждого из них есть гомоморфизм:

   - $\varphi_1 : 1 \mapsto 1$ ($\varphi_1 = \mathrm{id}$);
   - $\varphi_2 : 1 \mapsto -1$ ($\varphi_2 = -\mathrm{id}$).

   Это автоморфизмы $\Rightarrow |\operatorname{Aut}(\mathbb{Z})| = 2 \Rightarrow$ по следствию 5 из теоремы Лагранжа, $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}) \cong \cong \mathbb{Z}_2$.

2. В $\mathbb{Z}_n$ порождающие — это $\overline{k}\colon\ (k, n) = 1$.

   Построим $\varphi_{\overline{k}}\colon \overline{1} \mapsto \overline{k},\ \overline{m} \mapsto \overline{km}$. Это отображение из множества в само себя сюръективно, то есть и биективно. Значит, это автоморфизм.

   Проверим, что отображение $\overline{k} \mapsto \varphi_{\overline{k}}$ сохраняет операцию. Действительно,

   $$\varphi_{\overline{s}}(\varphi_{\overline{k}}(\overline{m})) = \overline{skm} = \varphi_{\overline{sk}}(\overline{m}).$$

   Значит, $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_n^{\times}$.

■

Задача. Привести пример $n \in \mathbb{N}$, для которого $\mathbb{Z}_n^\times$ не является циклической группой.

Определение. Пусть G — произвольная группа, $g \in G$. *Внутренним автоморфизмом* группы G, определяемым g, называется отображение $i_g : G \to G,\ a \mapsto gag^{-1}$.

Проверим, что это автоморфизм:

$$i_g(ab) = gabg^{-1} = gag^{-1}gbg^{-1} = i_g(a)\, i_g(b);$$

обратный к нему существует, это $i_{g^{-1}}$.

Множество всех внутренних автоморфизмов группы G обозначается как $\operatorname{Int}(G)$.

Лемма 3.

1. $\operatorname{Int}(G) \subseteq \operatorname{Aut}(G)$ — *нормальная подгруппа.*
2. *Отображение* $i\colon G \to \operatorname{Int}(G)$, $g \mapsto i_g$, *является гомоморфизмом групп.*

□

1. Поскольку $\operatorname{Int}(G) = \operatorname{Im} i \subseteq \operatorname{Aut}(G)$, то это подгруппа.

   Для проверки нормальности возьмём произвольные $\varphi \in \operatorname{Aut}(G)$ и $i_g \in \operatorname{Int}(G)$ и сопряжём их:

   $(\varphi i_g \varphi^{-1})(a) = (\varphi i_g)(\varphi^{-1}(a)) = \varphi(g\varphi^{-1}(a)\, g^{-1}) = \varphi(g)\, a\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)\, a\varphi(g)^{-1} = i_{\varphi(g)}(a)$.

   Таким образом, $\varphi i_g \varphi^{-1} \in \operatorname{Int}(G) \Rightarrow \operatorname{Int}(G) \subseteq \operatorname{Aut}(G)$ — нормальная подгруппа.
2. $i_{gh}(a) = gha(gh)^{-1} = ghah^{-1}g^{-1} = g(hah^{-1})g^{-1} = i_g(i_h(a)) = (i_g \circ i_h)(a)$, то есть операция сохраняется.

■

Определение. *Центром группы* G называется множество $Z(G) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid gg' = g'g \,\forall\, g' \in G\}$ всех элементов группы, коммутирующих со всеми элементами группы.

Ясно, что G абелева $\Leftrightarrow G = Z(G)$.

Лемма 4.

1. $Z(G) \subseteq G$ — *нормальная подгруппа.*
2. $\operatorname{Ker} i = Z(G)$.

□ Доказывать будем только пункт 2, так как пункт 1 из него следует.

2. Проверим, что $i_g(a) = a\ \forall a \in G$:

   $g \in Z(G) \Leftrightarrow ga = ag \,\forall\, a \in G \Leftrightarrow gag^{-1} = a\ \forall a \in G \Leftrightarrow i_g(a) = a \,\forall\, a \in G$.

■

В частности, $\operatorname{Int}(G) = \{e\} \Leftrightarrow G$ абелева.

Предложение 5. *Для любой группы* G $\operatorname{Int}(G) \cong {}^{G}\!/_{Z(G)}$.

□ Расмотрим гомоморфизм $i\colon G \to \operatorname{Aut}(G)$, $g \mapsto i_g$. Тогда $\operatorname{Im} i = \operatorname{Int}(G)$, $\operatorname{Ker} i = Z(G)$, по лемме 4. По теореме о гомоморфизме, $\operatorname{Im} i = \operatorname{Int}(G) \cong {}^{G}\!/_{\operatorname{Ker} i} = {}^{G}\!/_{Z(G)}$. ■

Пример.

1. $Z(\mathbf{S}_n) = \begin{cases} \mathbf{S}_n, & n \leqslant 2, \\ \{e\}, & n \geqslant 3. \end{cases}$

   $Z(\mathbf{A}_n) = \begin{cases} \mathbf{A}_n, & n \leqslant 3, \\ \{e\}, & n \geqslant 4. \end{cases}$
2. $Z(\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})) = \{\lambda E \mid \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \neq 0\} = \{\lambda E \mid \lambda \in \mathbb{C}^\times\}$.
3. $Z(\mathbf{D}_n) = \begin{cases} \{e, R_\pi\}, & n = 2k, \\ \{e\}, & n = 2k+1 \end{cases}$ (R_π — поворот на π).
4. $Z(Q_8) = \{\pm 1\}$.

Задача. Найти все группы G, для которых $\operatorname{Aut}(G)$ тривиальна (то есть $\operatorname{Aut}(G) = \{e\}$).

§ 7. Классы сопряжённости

Определение. Пусть G — группа. Элементы $a, b \in G$ называются *сопряжёнными*, если $\exists\, g \in G\colon a = gbg^{-1}$.

Обозначение. $a \sim b$.

Определение. *Классом сопряжённости* элемента $a \in G$ называется множество

$$C_G(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in G \mid a \sim b\}.$$

Лемма 5.

1. *Отношение сопряжённости есть отношение эквивалентности.*
2. $C_G(a) = \{a\} \Leftrightarrow a \in Z(G)$.

□

1. Отношение сопряжённости обладает следующими свойствами:
   - Рефлексивность: $a = eae^{-1} \Rightarrow a \sim a$.
   - Симметричность: $a = gbg^{-1} \Leftrightarrow b = g^{-1}ag$.
   - Транзитивность: $(a = gbg^{-1},\ b = hch^{-1} \Rightarrow a = ghch^{-1}g^{-1} = ghc(gh)^{-1}) \Rightarrow (a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c)$.

Таким образом, это отношение эквивалентности.

2. $C_G(a) = \{a\} \Leftrightarrow gag^{-1} = a \,\forall\, g \in G \Leftrightarrow a \in Z(G)$.

■

Лемма 6. $b \in C_G(a) \Rightarrow \operatorname{ord}(b) = \operatorname{ord}(a)$[8)].

□ Пусть $b = gag^{-1}$, $a^n = e$. Тогда $b^n = (gag^{-1})^n = ga^n g^{-1} = gg^{-1} = e$ и наоборот (из симметричности сопряжённости) $\Rightarrow$ минимальные показатели совпадают. ■

Определение. *Централизатором* элемента $a \in G$ называется множество

$$Z_G(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid ga = ag\}.$$

Ясно, что $Z_G(a) \subseteq G$ — подгруппа, но не обязательно нормальная.

Предложение 6. *Пусть G — конечная группа, $a \in G$. Тогда $|C_G(a)| = \frac{|G|}{|Z_G(a)|}$. В частности, $|C_G(a)| \,\big|\, |G|$.*

□ Пусть ${}^{G}\!/_{Z_G(a)}$ — множество левых смежных классов (это не факторгруппа! $Z_G(a)$ не обязательно нормальна). Достаточно установить биекцию ${}^{G}\!/_{Z_G(a)} \to C_G(a)$.
Определим отображение ${}^{G}\!/_{Z_G(a)} \to C_G(a)$, $gZ_G(a) \mapsto gag^{-1}$. Проверим:

1. корректность: $h \in Z_G(a) \Rightarrow ghZ_G(a) \mapsto (gh)\,a\,(gh)^{-1} = ghah^{-1}g^{-1} = gahh^{-1}g^{-1} = gag^{-1} \hookleftarrow gZ_G(a)$;
2. сюръективность: по определению;
3. инъективность: $gag^{-1} = g'a(g')^{-1} \Leftrightarrow ag^{-1}g' = g^{-1}g'a \Leftrightarrow g^{-1}g' \in Z_G(a) \Leftrightarrow g' \in gZ_G(a)$.

■

[8)] Обратное неверно.

Лекция 4

Классы сопряжённости в группах. Прямые произведения групп

§ 7. Классы сопряжённости (продолжение)

Пример.

1. $G = \mathbf{S}_n$.

   Определение. *Циклической структурой* подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_n$ назовём неупорядоченное разбиение n: $n = k_1 + \ldots + k_s$, где $k_1, \ldots, k_s$ — длины независимых циклов σ.

   Пример. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (134)(25)(6) \in \mathbf{S}_6 \Rightarrow$ циклическая структура σ имеет вид $6 = 3 + 2 + 1$.

   Предложение 7. $C_{\mathbf{S}_n}(\sigma) = \{\sigma' \in \mathbf{S}_n \mid$ *циклические структуры* σ' *и* σ *совпадают*$\}$.

   □ Пусть $\sigma = (i_1 \ldots i_{k_1}) \ldots (j_1 \ldots j_{k_s})$ — разложение σ в независимые циклы,

   $$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix}.$$

   Тогда рассмотрим $\tau\sigma\tau^{-1}$: $\tau(i_r) \overset{\tau^{-1}}{\longmapsto} i_r \overset{\sigma}{\longmapsto} i_p \overset{\tau}{\longmapsto} \tau(i_p)$, где $r, p \in \{1, \ldots, k_1\}$, $p \equiv r + 1 \pmod{k_1} \Rightarrow \tau(i_1 \ldots i_{k_1})\tau^{-1} = (\tau(i_1) \ldots \tau(i_{k_1})) \Rightarrow$ циклическая структура сохраняется, и за счёт выбора τ можем получить таким образом любую подстановку той же циклической структуры. ■

   Следствие. $Z(\mathbf{S}_n) = \begin{cases} \mathbf{S}_n, & n \leqslant 2, \\ \{e\}, & n \geqslant 3. \end{cases}$

   □ При $n \geqslant 3$ любой класс сопряжённости, кроме $n = 1 + \ldots + 1$, содержит не менее двух элементов. ■

   Задача. Описать классы сопряжённости в $\mathbf{A}_5$.

2. $G = \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Из линейной алгебры известно, что две матрицы сопряжены тогда и только тогда, когда они задают один и тот же линейный оператор в разных базисах. Значит, $C_{\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})}(A) = \{B \mid J(B) = J(A)\}$, где $J(\cdot)$ — жорданова нормальная форма матрицы.

   Задача. Описать классы сопряжённости в $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$.

3. $G = \mathbf{D}_n$ — группа диэдра; $|\mathbf{D}_n| = 2n$.

   Предложение 8. *Классы сопряжённости в* $\mathbf{D}_n$ *описываются следующим образом:*

   - $n = 2k$:

Число элементов	1	2	2	$\cdots$	2	k	k
Представители	e	$R(\pi)$	$R\left(\frac{\pi}{k}\right)$	$\cdots$	$R\left(\frac{(k-1)\pi}{k}\right)$	S_1	S_2

   - $n = 2k+1$:

Число элементов	1	2	$\cdots$	2	$2k+1$
Представители	e	$R\left(\frac{2\pi}{2k+1}\right)$	$\cdots$	$R\left(\frac{2\pi k}{2k+1}\right)$	S

   □ Заметим, что $Z(R(\varphi)) \supset \{\text{повороты}\} \Rightarrow |Z(R(\varphi))| \geqslant n \Rightarrow |C(R(\varphi))| \leqslant \frac{2n}{n} = 2$.

   Для симметрий: $|Z(S)| \geqslant 2 \Rightarrow$ повороты $\sim$ только повороты ($|C(S)| \leqslant n$), симметрии $\sim$ $\sim$ только симметрии.

   Остаётся заметить, что $R(\varphi) S_v R(-\varphi) = S_{R(\varphi)v}$, $SR(\varphi) S = R(-\varphi)$. ■

4. **Задача.** Доказать, что классы сопряжённости в Q_8 — $\{\pm 1\}$, $\{\pm i\}$, $\{\pm j\}$, $\{\pm k\}$.

§ 8. Прямое произведение групп

I. Конструкция внешнего прямого произведения

Пусть $G_1, \ldots, G_k$ — произвольные группы. Определим на $G_1 \times \ldots \times G_k = \{(g_1, \ldots, g_k) \mid g_i \in G_i\}$ группоовую операцию $(g_1, \ldots, g_k)(g'_1, \ldots, g'_k) \stackrel{\text{def}}{=} (g_1 g'_1, \ldots, g_k g'_k)$ (именно в этом порядке). Это корректно определённая бинарная операция, её ассоциативность очевидна, нейтральный элемент $e = (e_1, \ldots, e_k)$ и обратный к $g = (g_1, \ldots, g_k)$ элемент $g^{-1} = \left(g_1^{-1}, \ldots, g_k^{-1}\right)$ предъявляются непосредственно. Значит, мы определили группу.
Если $G_1, \ldots, G_k$ конечны, то $|G_1 \times \ldots \times G_k| = |G_1| \cdot \ldots \cdot |G_k|$.
Заметим, что каждая G_i изоморфна подгруппе $\{(e_1, \ldots, e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_k) \mid g_i \in G_i\} \subseteq G_1 \times \times \ldots \times G_k$ (соответствующий изоморфизм — $g_i \stackrel{\varphi}{\longmapsto} (e_1, \ldots, e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_k)$), и эта подгруппа нормальна.
Задача. Доказать, что $Z(G_1 \times \ldots \times G_k) = Z(G_1) \times \ldots \times Z(G_k)$.

Замечание. Пусть $\{G_i \mid i \in I\}$ — произвольное (то есть не обязательно конечное) семейство групп. Тогда аналогично определяется их *прямое произведение* $\prod\limits_{i \in I} G_i = \{(g_i, i \in I)\}$.

Прямая сумма $\bigoplus\limits_{i \in I} G_i \subseteq \prod\limits_{i \in I} G_i$ — подгруппа, состоящая из наборов, в которых лишь конечное число элементов отлично от нейтральных e_i. Если $|I| < \infty$, то $\bigoplus\limits_{i \in I} G_i = \prod\limits_{i \in I} G_i$.
В дальнейшем будем работать с конечными семействами групп (то есть $|I| < \infty$), значок произведения $\prod$ будем использовать в общих случаях, а значок суммы $\bigoplus$ — для абелевых групп.

II. Внутреннее прямое произведение как свойство группы

Пусть G — произвольная группа, $H_1, \ldots, H_k \subseteq G$ — подгруппы.

Определение. Группа G называется *прямым произведением* $H_1, \ldots, H_k$, если:

1. $h_i h_j = h_j h_i \,\forall\, h_i \in H_i,\ h_j \in H_j$ при $i \neq j$;
2. $\forall\, g \in G\, \exists!$ запись вида $g = h_1 \ldots h_k$, где $h_i \in H_i$.

Предложение 9. *Пусть $H_1 \times \ldots \times H_k$ понимается как внешнее произведение групп, а G — их внутреннее произведение. Тогда отображение $H_1 \times \ldots \times H_k \to G$, $(h_1, \ldots, h_k) \mapsto h_1 \ldots h_k$, является изоморфизмом групп.*

Замечание. Сразу оговоримся, что в бесконечном случае предложение не имеет смысла, так как не определено бесконечное произведение $h_1 h_2 h_3 \ldots$

□ Отображение биективно. Это следует из определения прямого произведения, точнее, из его второго пункта.
Проверим сохранение операции:

$$\begin{array}{ccccc} (h_1, \ldots, h_k) & \cdot & (h'_1, \ldots, h'_k) & = & (h_1 h'_1, \ldots, h_k h'_k) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ h_1 \ldots h_k & \cdot & h'_1 \ldots h'_k & \overset{?}{=} & h_1 h'_1 \ldots h_k h'_k \end{array}$$

По условию, h'_i коммутирует с h_j при $i \neq j$. Тогда, путём перестановок соседних множителей поставив в левом произведении h'_1 после h_1, h'_2 после h_2 и так далее, получим требуемое. ■

Следствие. Если G — прямое произведение подгрупп $H_1, \ldots, H_k$, то $H_1, \ldots, H_k$ нормальны в G.

Лемма 7. *Если $H_1,\ H_2 \triangleleft G$, $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, то $h_1 h_2 = h_2 h_1 \,\forall\, h_1 \in H_1,\ h_2 \in H_2$.*

□ $\underbrace{h_1 \overbrace{h_2 h_1^{-1}}^{\in H_1} h_2^{-1}}_{\in H_2} \in H_1 \cap H_2 = \{e\} \Rightarrow h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1} = e \Rightarrow h_1 h_2 = h_2 h_1$. ■

Предложение 10. *Группа G является прямым произведением подгрупп $H_1,\ H_2 \Leftrightarrow$ выполняются следующие условия:*

1. *H_1 и H_2 нормальны;*
2. *$H_1 \cap H_2 = \{e\}$;*
3. *$G = H_1 H_2$, то есть $\forall\, g \in G\, \exists\, h_1 \in H_1,\ h_2 \in H_2$: $g = h_1 h_2$.*

□

- $\boxed{\Rightarrow}$

  1. Из последнего следствия.

2. Пусть $H_1 \cap H_2 \neq \{e\}$, то есть $\exists\, h \neq e$: $h \in H_1 \cap H_2$. Тогда, с одной стороны, $h = he$, где $h \in H_1$, $e \in H_2$, а с другой, $h = eh$, где $e \in H_1$, $h \in H_2$, что противоречит единственности разложения.
3. По определению прямого произведения.

- $\boxed{\Leftarrow}$

  По лемме 7, из условий 1 и 2 следует, что $h_1h_2 = h_2h_1 \,\forall\, h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$.

  Если $h_1h_2 = h_1'h_2'$, то $h_1'^{-1}h_1 = h_2'h_2^{-1} \in H_1 \cap H_2 = \{e\} \Rightarrow h_1'^{-1}h_1 = h_2'h_2^{-1} = e \Rightarrow h_1' = h_1$, $h_2' = h_2 \Rightarrow$ разложение единственно.

■

Замечание. Если в предложении 10 рассматривать, например, три подгруппы, то обобщение условий 1 и 3 очевидно, но записать условие 2 в виде $H_1 \cap H_2 = H_2 \cap H_3 = H_3 \cap H_1 = \{e\}$ будет неправильно. Например, если $G = \mathbb{R}^2$, H_1 и H_2 — координатные оси в $\mathbb{R}^2$, а H_3 — диагональ между ними, то пересечение любых двух H_i тривиально (и всех трёх тоже), но их сумма — не прямая.

Пример.

1. $\mathbf{V}_4 = \langle (12)\,(34) \rangle \times \langle (13)\,(24) \rangle \subseteq \mathbf{S}_4$.
2. $\mathbb{C}^\times = \mathbb{R}^\times_{>0} \times S^1$, $z = |z|\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$.
3. $\mathbf{D}_n(F) = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix} \right\} \cong \underbrace{F^\times \times \ldots \times F^\times}_{n}$.

Задача. Привести пример сюръективного гомоморфизма $\varphi\colon G_1 \twoheadrightarrow G_2$[9]: $G_1 \ncong \operatorname{Ker}\varphi \times G_2$.

Предложение 11 (факторизация по сомножителям). *Пусть $G_1, \ldots, G_k$ — группы, H_i — нормальная подгруппа в G_i $\forall\, i \in \{1, \ldots, k\}$. Тогда:*

1. $H_1 \times \ldots \times H_k \triangleleft G_1 \times \ldots \times G_k$;
2. $^{G_1 \times \ldots \times G_k}\!/_{H_1 \times \ldots \times H_k} \cong {}^{G_1}\!/_{H_1} \times \ldots \times {}^{G_k}\!/_{H_k}$.

□

1. То, что это подгруппа, и её нормальность проверяется непосредственно.
2. Установим изоморфизм: $(g_1, \ldots, g_k)\,(H_1 \times \ldots \times H_k) \leftrightarrow (g_1H_1, \ldots, g_kH_k)$. То, что это изоморфизм (а именно его корректность, биективность и сохранение операции), проверяется, опять же, непосредственно.

[9] Здесь двойная стрелка $\twoheadrightarrow$ обозначает сюръективность отображения.

■

Пример. Если $G = G_1 \times G_2$, то $G/G_1 \cong G_2$.

Пример. $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}/\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1 \times S^1$, что изоморфно тору.

Задача. Верно ли, что диагональ $\Delta G \stackrel{\text{def}}{=} \{(g, g) \mid g \in G\} \subseteq G \times G$ — нормальная подгруппа?

Замечание. Не любая (нормальная) подгруппа в $G_1 \times G_2$ имеет вид $H_1 \times H_2$, где $H_1 \subseteq G_1$, $H_2 \subseteq G_2$ — (нормальные) подгруппы.

Задача. Привести пример, соответствующий замечанию.

На следующей лекции мы докажем предложение о разложении конечной циклической группы.

Лекция 5

Свободные абелевы группы

§ 8. Прямое произведение групп (продолжение)

Предложение 12. *Пусть* $n,\ m,\ k \in \mathbb{N},\ n = mk$. *Тогда* $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_k$[10] $\Leftrightarrow (m,k) = 1$.

□

- $\boxed{\Leftarrow}$

  Рассмотрим $(\overline{1},\overline{1})$, где первая единица из $\mathbb{Z}_m$, а вторая — из $\mathbb{Z}_k$. $\exists\, s$ (например, $s = mk$): $s\,(\overline{1},\overline{1}) = (\overline{0},\overline{0}) \Rightarrow m \mid s,\ k \mid s \Rightarrow n = mk \mid s \Rightarrow \operatorname{ord}(\overline{1},\overline{1}) = n \Rightarrow \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_k$ циклическая.

- $\boxed{\Rightarrow}$

  Пусть, от противного, $(m,k) = d > 1$. Тогда $\forall\ (\overline{r},\overline{q}) \in \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_k$ имеем $\frac{n}{d}(\overline{r},\overline{q}) = (\overline{0},\overline{0})$, так как $m \mid \frac{n}{d},\ k \mid \frac{n}{d} \Rightarrow \operatorname{ord}(\overline{r},\overline{q}) \leqslant \frac{n}{d} < n \Rightarrow$ группа не циклическая (нет элементов порядка n). Противоречие.

■

Пример. $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4 \ncong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \cong \mathbf{V}_4$.

§ 9. Свободные абелевы группы

Пусть A — произвольная абелева группа.

Определение. *Подгруппой кручения*, или *периодической частью* (англ. *torsion subgroup*) группы A называется множество $T(A) = \{a \in A \mid \operatorname{ord}(a) < \infty\}$.

Пример. Если $|A| < \infty$, то $T(A) = A$.

Лемма 8. $T(A)$ — *подгруппа в* A.

□ Если $n = \operatorname{ord}(a)$, $m = \operatorname{ord}(b)$, то $nm(a+b) = 0 \Rightarrow \operatorname{ord}(a+b) < \infty$. ■

Замечание. В неабелевой группе элементы конечного порядка не всегда образуют подгруппу.

Задача. Привести пример, соответствующий замечанию.

Определение. Группа A называется *группой без кручения*, если $T(A) = \{0\}$.

Пример. $A = (\mathbb{Z}, +)$.

Для элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$ и $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$ можно определить *линейную комбинацию* $k_1a_1 + + \ldots + k_na_n \in A$. Если $k_i < 0$, то $k_ia_i \overset{\text{def}}{=} (-k_i)(-a_i)$.

Определение. Группа A называется *конечнопорождённой*, если $\exists\, a_1, \ldots, a_n \in A$: $\forall\, a \in A\ a = = k_1a_1 + \ldots + k_na_n$ для некоторых $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$. Такой набор элементов $\{a_1, \ldots, a_n\}$ называется *системой порождающих*, или *образующих*.

[10] Группы здесь заведомо абелевы.

Пример.

1. Любая конечная абелева группа A конечнопорождена.
2. Решётка $\mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n} = \{(c_1, \ldots, c_n) \mid c_i \in \mathbb{Z}\}$. Её системой порождающих будет

$$\{e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)\}.$$

Задача. Доказать, что группы $(\mathbb{Q}, +)$ и $(\mathbb{Q}^\times, \times)$ не конечнопорождены (хотя и счётны, а нетрудно видеть, что любая конечнопорождённая группа счётна).

Определение. Система порождающих $\{a_1, \ldots, a_n\}$ группы A называется *базисом* в A, если $\forall\, a \in A$ запись $a = k_1 a_1 + \ldots + k_n a_n$ единственна.

Определение. Группа A, обладающая базисом, называется *свободной*.

Пример.

1. Если $T(A) \neq \{0\}$, то A не свободна. В самом деле, если $0 \neq a \in T(A)$, $\operatorname{ord}(a) = m$, то $a = k_1 a_1 + \ldots + k_n a_n$. Тогда, с одной стороны, $0 = 0a_1 + \ldots + 0a_n$, с другой, $0 = mk_1 a_1 + \ldots + mk_n a_n\,(= ma) \Rightarrow$ противоречие с единственностью представления. В частности, свободные группы бесконечны.
2. $\mathbb{Z}^n$ свободна, её базис $\{e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)\}$ называется *стандартным*.
3. Элементы $a_1 = 2$ и $a_2 = 3$ порождают $(\mathbb{Z}, +)$, но из них нельзя составить базис. Например, 0 можно представить двумя разными способами: $0 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3$. При этом базис у этой группы существует, и при этом из этой системы порождающих нельзя ничего удалить так, чтобы получился базис.

Задача. Приведите пример бесконечной конечнопорождённой, но не свободной абелевой группы.

Предложение 13. *Все базисы свободной абелевой группы A содержат одно и то же число элементов.*

□ Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — базисы в A, $m > n$. Выразим элементы второго базиса через элементы первого: $e'_i = \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ji} e_j$, $C = (c_{ji}) \in \operatorname{Mat}_{n,m}(\mathbb{Z})$.

По основной лемме о линейной зависимости, применённой над полем $\mathbb{Q}$, столбцы C линейно зависимы $\Rightarrow\ \exists\, \lambda_i = \frac{p_i}{q_i} \in \mathbb{Q}$, не все равные нулю, такие что $\sum\limits_i \frac{p_i}{q_i} c_{ji} = 0\, \forall\, j$. Тогда $\sum\limits_i \frac{p_i}{q_i} e'_i = \sum\limits_i \frac{p_i}{q_i} \sum\limits_j c_{ji} e_j = \sum\limits_j \left(\sum\limits_i \frac{p_i}{q_i} c_{ji} \right) e_j = \sum\limits_j 0 e_j = 0$. Домножив это равенство на $d = [q_1, \ldots, q_m]$, получим $\sum\limits_j \left(\sum\limits_i d_i c_{ji} \right) e_j = 0$, где $d_i = \frac{p_i}{q_i} \cdot [q_1, \ldots, q_m] \in \mathbb{Z}$. Так как не все d_i равны нулю, получаем противоречие с тем, что $\{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — базис в A. ■

Определение. Число элементов в базисе A называется *рангом* A, который обозначается $\operatorname{rk} A$. $\operatorname{rk}\{0\} \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

Пример. $\operatorname{rk}\mathbb{Z}^n = n$.

Лемма 9. *Свободная абелева группа A ранга n изоморфна $\mathbb{Z}^n$.*

□ Если $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в A, то $a = k_1e_1 + \ldots + k_ne_n \leftrightarrow (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$. Для этого отображения простым образом проверяются корректность, биективность и сохранение операции. ■

Предложение 14. *Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в A, $e'_1 = \sum\limits_i c_{i1}e_i$, $\ldots$, $e'_n = \sum\limits_i c_{in}e_i$, $c_{ij} \in \mathbb{Z}$, $C = (c_{ij}) \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{Z})$. Тогда $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ — базис в $A \Leftrightarrow \det C = \pm 1$.*

□ $\begin{pmatrix} e'_1 & \cdots & e'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{pmatrix} C$.

Заметим, что $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ является базисом $\Leftrightarrow \{e_1, \ldots, e_n\}$ выражается через $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ (линейная независимость $e'_1, \ldots, e'_n$ вытекает из основной леммы о линейной зависимости) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists\, B = (b_{ij}) \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{Z})$: $\begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e'_1 & \cdots & e'_n \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{pmatrix} CB \Leftrightarrow CB = E$ (из единственности представления $\{e_1, \ldots, e_n\}$) $\Leftrightarrow C^{-1}$ существует и целочисленна.

Если $\det C = \pm 1$, то $C^{-1} = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$, где C_{ij} — алгебраическое дополнение к $C \Rightarrow$ $\Rightarrow C^{-1}$ целочисленна.

Обратно, пусть $\det C = d \neq \pm 1$. Тогда $1 = \det E = \det(CC^{-1}) = (\det C)(\det C^{-1}) = d \det C^{-1} \Rightarrow$ $\Rightarrow \det C^{-1} = \frac{1}{d} \notin \mathbb{Z}$. ■

Пример. $A = \mathbb{Z}^2$, $e'_1 = 2e_1 + 3e_2$, $e'_2 = e_1 + e_2 \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\det C = -1 \Rightarrow \{e'_1, e'_2\}$ — базис.

Теорема 4. Всякая подгруппа B свободной абелевой группы A ранга n является свободной абелевой группой ранга $\leqslant n$.

□ Доказываем индукцией по n.

1. $n = 0 \Rightarrow$ очевидно.
2. Пусть $n > 0$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в A. Рассмотрим подгруппу $A_1 = \{k_1e_1 + \ldots + k_{n-1}e_{n-1}\}$. Это свободная подгруппа группы A, и она имеет ранг $n - 1$. По предположению индукции, $B_1 = B \cap A_1$ ($\operatorname{rk} A_1 = n - 1$) свободна и имеет ранг $m \leqslant n - 1$.

   Пусть теперь $\{f_1, \ldots, f_m\}$ — базис в B_1. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : B \to \mathbb{Z}, k_1e_1 + \ldots + k_ne_n \mapsto k_n$.

   - Если $\operatorname{Im}\varphi = \{0\}$, то $B \subseteq A_1 \Leftrightarrow B = B_1$. Значит, как и B_1, B свободна и имеет ранг $\leqslant n - 1$

- Если $\operatorname{Im}\varphi \neq \{0\}$, то $\operatorname{Im}\varphi = d\mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$.

  Рассмотрим вектор $f_{m+1} \in B$ с последней координатой d и произвольный $b \in B$. Так как $\operatorname{Im}\varphi = d\mathbb{Z}$, то $b = k_1e_1 + \ldots + dse_n$. Тогда последняя, n-я координата $b - sf_{m+1}$ будет нулевой, поэтому $\varphi(b - sf_{m+1}) = 0$. Значит, $b - sf_{m+1} \in B_1$, то есть $b - sf_{m+1} = s_1f_1 + \ldots + s_mf_m \Rightarrow b = s_1f_1 + \ldots + s_mf_m + sf_{m+1}$. Доказано существование представления произвольного $b \in B$ в базисе $\{f_1, \ldots, f_{m+1}\}$.

  Если у b есть другое представление в этом базисе, например $b = s'_1f_1 + \ldots + s'_{m+1}f_{m+1}$, то, с одной стороны, $\varphi(b) = sd$ (поскольку $\operatorname{Im}\varphi = d\mathbb{Z}$); с другой стороны, $\varphi(b) = s'_{m+1}d$ (из второго представления b: у $f_1, \ldots, f_m$ последние координаты равны нулю, у f_{m+1} — d, в представлении она умножилась на s'_{m+1}). Значит, $s = s'_{m+1}$. Отсюда $b - sf_{m+1} = s_1f_1 + \ldots + s_mf_m = s'_1f_1 + \ldots + s'_mf_m$. Но так как $b - sf_{m+1} \in B_1$, а $\{f_1, \ldots, f_m\}$ — базис в B_1, то представление $b - sf_{m+1}$ через эти векторы единственно $\Rightarrow s_1 = s'_1, \ldots, s_m = s'_m$. Доказана единственность представления произвольного $b \in B$ в базисе $\{f_1, \ldots, f_{m+1}\}$.

■

Замечание. Если для конечного векторного пространства $U \subseteq V$, $\dim U = \dim V \Rightarrow U = V$, то для свободной абелевой группы $B \subseteq A$, $\operatorname{rk} B = \operatorname{rk} A \not\Rightarrow B = A$. Например, если $A = \mathbb{Z}$, $B = 2\mathbb{Z}$, то $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B = 1$, но $A \neq B$.

В дальнейшем нашей целью станет описать подгруппы в $\mathbb{Z}^n$. Например, понятно, что все подгруппы в $\mathbb{Z}$ имеют вид $d\mathbb{Z}$. Можно по аналогии предположить, что все подгруппы в $\mathbb{Z}^n$ имеют вид $d_1\mathbb{Z} \oplus d_2\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus d_n\mathbb{Z}$. Но на самом деле это неверно, и к этому легко построить контрпример. Следующая лекция начнётся с построения такого контрпримера.

Лекция 6

Свободные абелевы группы (продолжение)

§ 9. Свободные абелевы группы (продолжение)

В качестве контрпримера к гипотезе о том, что все подгруппы в $\mathbb{Z}^n$ имеют вид $d_1\mathbb{Z} \oplus d_2\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus d_n\mathbb{Z}$, рассмотрим $\mathbb{Z}^2$, а в ней — подгруппу $B = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ (диагональ). Если бы она имела вид $d_1\mathbb{Z} \oplus d_2\mathbb{Z}$, то, с одной стороны, $d_1 = d_2 = 1$, поскольку первой и второй координатой элемента в B может быть любое целое число; с другой стороны, не любая пара (a, b) принадлежит к этой подгруппе.

Определение. *Целочисленными элементарными преобразованиями строк прямоугольных*[11] *целочисленных матриц* будем называть:

1. прибавление к строке другой, умноженной на целое число;
2. перестановка двух строк;
3. умножение строки на ± 1 (из соображений обратимости разрешены только эти два числа).

Для столбцов аналогично.

Определение. Матрица $C = (c_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n,m}(F)$ называется *диагональной*, если $c_{ij} = 0 \, \forall \, i \neq j$.

Обозначение. $c_{ii} = u_i$, $i \in \{1, \ldots, p = \min\{m, n\}\} \Rightarrow C = \mathrm{diag}(u_1, \ldots, u_p)$.

Предложение 15. *Любую целочисленную матрицу целочисленными элементарными преобразованиями её строк и столбцов можно привести к виду* $\mathrm{diag}(u_1, \ldots, u_p)$*, где* $u_i \geqslant 0 \ \forall \, i \in \in \{1, \ldots, p\}$, $u_i \,\vdots\, u_{i+1} \, \forall \, i \in \{1, \ldots, p-1\}$.

□ Пусть $C \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{Z})$. Если $C = 0$, то всё верно.
Пусть $C \neq 0$.

Шаг 1. Хотим, чтобы $c_{11} > 0$. Этого можно добиться, переставив некоторые строки и столбцы и при необходимости в конце умножив первую строку на -1.

Шаг 2. Хотим, чтобы все c_{1i} и все c_{j1} делились на c_{11}. Для этого будем уменьшать c_{11}, но так, чтобы оно оставалось положительным.

Сначала передвигаемся по первой строке матрицы. Если $c_{11} \nmid c_{1i}$ для некоторого $i \in \in \{2, \ldots, m\}$, то, по теореме о делении с остатком, $c_{1i} = c_{11}q + r$, где $0 < r < c_{11}$. Вычтя из i-го столбца первый q раз, получим r на месте c_{1i}. Поменяв теперь местами i-й и первый

[11] Любая матрица прямоугольная, но здесь мы подчёркиваем, что речь идёт не только о квадратных матрицах.

столбцы, получим r на месте c_{11} и c_{11} на месте c_{1i}. Поскольку значение в левом верхнему углу (бывшее c_{11}) уменьшается и остаётся положительным, то процесс надо будет повторить конечное число раз, и мы добьёмся того, что $c_{11} \mid c_{i1} \, \forall \, i \in \{2, \ldots, n\}$. Совершая теперь то же самое со столбцом, получим, что $c_{11} \mid c_{j1} \, \forall \, j \in \{2, \ldots, n\}$.

После этого все c_{1i} и все c_{j1} можно обнулить нужным количеством вычитаний первого столбца или строки из остальных.

Шаг 3. Перейдём теперь к элементам других строк и столбцов. Пусть $\exists \, i \in \{2, \ldots, n\}$, $j \in \in \{2, \ldots, m\}$: $c_{11} \nmid c_{ij}$. Прибавим i-ю строку к первой: c_{11} не изменится, а вместо нуля на j-м месте появится c_{ij}. Повторив шаг 2, мы за конечное число действий добьёмся того, что $\forall \, i, j c_{11} \mid c_{ij}$.

Таким образом, получится матрица вида

$$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & c_{11}C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Шаг 4. Применим к матрице $c_{11}C_1$ принцип математической индукции и получим

$$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots \end{pmatrix}$$

■

Пример. Применяя целочисленные элементарные преобразования строк и столбцов, матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ можно привести к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, как в предложении выше.

Теорема (о согласованных базисах). Пусть A — свободная группа ранга n и $B \subseteq A$ — подгруппа ранга $m \leqslant n$. Тогда существует базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в A и такие $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{N}$, что $\{u_1 e_1, \ldots, u_m e_m\}$ — базис в B и $u_i \mid u_{i+1} \, \forall \, i \in \{1, \ldots, m-1\}$.

□ Пусть $\{\widetilde{e_1}, \ldots, \widetilde{e_n}\}$ — базис в A, $\left\{\widetilde{f_1}, \ldots, \widetilde{f_m}\right\}$ — базис в B. Тогда

$$\begin{pmatrix} \widetilde{f_1} & \cdots & \widetilde{f_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{e_1} & \cdots & \widetilde{e_n} \end{pmatrix} C,$$

где $C \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{Z})$, $\operatorname{rk} C = m$.
Введём элементарные преобразования над базисом:

1. прибавление к одному базисному вектору другого, умноженного на целое число (но не самого себя!);
2. перестановка двух базисных векторов;
3. умножение базисного вектора на ± 1.

Ясно, что такие преобразования оставляют базис базисом. Что при них происходит с C? Преобразования базиса B есть в точности элементарные преобразования столбцов C, а преобразования базиса A есть в точности элементарные преобразования строк C. Таким образом, мы можем, по предложению 15, привести C к виду $\operatorname{diag}(u_1, \ldots, u_m)$, где $u_i \in \mathbb{N}$ ($u_i \neq 0$, так как $\operatorname{rk} C = m$) и $u_i \mid u_{i+1}$. Значит, в новых базисах $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\{f_1, \ldots, f_m\}$ мы имеем $f_1 = u_1 e_1, \ldots, f_m = u_m e_m$. ■

Пример. Пусть $A = \mathbb{Z}^2$, $B = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Тогда у A есть базис $e_1 = (1, 1)$, $e_2 = (1, 2)$. Согласованный с ним базис в B состоит из одного вектора e_1 ($u_1 = 1$).

Определение. Числа $u_1, \ldots, u_m$ называются *инвариантными множителями* подгруппы $B \subseteq A$.

Рассмотрим факторгруппу ${}^{A}\!/_{B}$: ${}^{A}\!/_{B} = {}^{\langle e_1\rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_n\rangle}\!/_{\langle f_1\rangle \oplus \ldots \oplus \langle f_m\rangle} \cong {}^{\langle e_1\rangle}\!/_{\langle u_1 e_1\rangle} \oplus \ldots \oplus {}^{\langle e_m\rangle}\!/_{\langle u_m e_m\rangle} \oplus {}^{\langle e_{m+1}\rangle}\!/_{\langle 0\rangle} \oplus \oplus \ldots \oplus {}^{\langle e_n\rangle}\!/_{\langle 0\rangle} \cong {}^{\mathbb{Z}}\!/_{u_1\mathbb{Z}} \oplus \ldots \oplus {}^{\mathbb{Z}}\!/_{u_m\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^{n-m} \oplus \mathbb{Z}_{u_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{u_m}$, по предложению 11 о факторизации по сомножителям. Тем самым доказано

Предложение 16. *Факторгруппа свободной абелевой группы по произвольной подгруппе изоморфна* $\mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{u_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{u_m}$, *где* $u_i \in \mathbb{N}$, $u_i \mid u_{i+1}$, $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Следствие. Если $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$, то $u_1 u_2 \ldots u_n = \left|{}^{A}\!/_{B}\right| = [A : B]$. В частности, это произведение не зависит от выбора согласованных базисов.

Предложение 17 (универсальное свойство свободных абелевых групп). *Пусть* A *— свободная абелева группа с базисом* $\{e_1, \ldots, e_n\}$, D *— произвольная абелева группа,* $d_1, \ldots, d_n \in D$ *— произвольные элементы. Тогда* $\exists!$ *гомоморфизм* $\varphi\colon A \to D$, $\varphi(e_i) = d_i \, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$.

□ $\forall\, a \in A \; a = k_1 e_1 + \ldots + k_n e_n$. Тогда положим $\varphi(a) = k_1 \varphi(e_1) + \ldots + k_n \varphi(e_n)$. Это гомоморфизм, что проверяется очевидным образом. ■

Следствие. Для любой конечнопорождённой абелевой группы D существует сюръективный гомоморфизм $\varphi\colon A \twoheadrightarrow D$ из некоторой свободной абелевой группы A.

□ Пусть $d_1, \ldots, d_n$ — порождающие элементы группы D. Тогда положим $A = \mathbb{Z}^n$ и определим φ условием $\varphi(e_i) = d_i$, где $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — стандартный базис в $\mathbb{Z}^n$. Тогда φ сюръективен, так как $d_1, \ldots, d_n$ — порождающие. ■

Последнее следствие позволяет описать все конечнопорождённые абелевы группы.

Теорема 5. Любая конечнопорождённая абелева группа изоморфна $\mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{u_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{u_m}$, где $u_i \in \mathbb{N}$, $u_i \mid u_{i+1}$, $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

□ Пусть D — конечнопорождённая абелева группа, $\varphi\colon A \twoheadrightarrow D$ — сюръективный гомоморфизм. Тогда, по теореме о гомоморфизме, $D \cong {}^{A}\!/_{B}$, где $B = \operatorname{Ker} \varphi$. По предложению 16, факторгруппа свободной абелевой группы имеет требуемый вид. ■

Разберёмся с конечными абелевыми группами. Так как для $r > 0$ $\mathbb{Z}^r$ — бесконечная группа, она не может быть «слагаемым» конечной группы. Отсюда вытекает следующая классификация конечных абелевых групп:

Следствие. Если A — конечная абелева группа, то

$$A \cong \mathbb{Z}_{u_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{u_m}.$$

Определение. Пусть p — простое. Группа A называется *p-примарной*, если $|A| = p^k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. A называется *примарной*, если она p-примарна для некоторого p.

Теорема 6. Любая конечная абелева группа A изоморфна прямой сумме примарных циклических групп:

$$A \cong \mathbb{Z}_{p_1^{k_{11}}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{k_{1r_1}}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_s^{k_{sr_s}}}; \qquad (*)$$

такое разложение единственно с точностью до порядка слагаемых.

Эту теорему мы докажем на следующей лекции.

Лекция 7

Структура абелевых групп. Порождающие элементы

§ 10. Структура абелевых групп[12)]

Докажем теорему § 9.

□ Из теоремы § 9 мы знаем, что

$$A \cong \mathbb{Z}_{u_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{u_m}. \qquad (**)$$

Можно считать, что $u_i \geqslant 2$. Если $u_i = p_{i_1}^{k_{i_1}} \ldots p_{i_{q_i}}^{k_{i_{q_i}}}$, то $\mathbb{Z}_{u_i} \cong \mathbb{Z}_{p_{i_1}^{k_{i_1}}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_{i_{q_i}}^{k_{i_{q_i}}}} \Rightarrow A$ разлагается в прямую сумму примарных циклических групп.
Теперь докажем единственность разложения. Определим подгруппу кручения:

$$\mathrm{Tor}_p(A) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{a \in A \mid \exists\, k \in \mathbb{N}\colon p^k a = 0\right\} = \left\{a \in A \mid \exists\, s\colon \operatorname{ord}(a) = p^s\right\}.$$

В разложении (*) $\mathrm{Tor}_{p_1}(A) \cong \mathbb{Z}_{p_1^{k_{11}}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{k_{1r_1}}} \Rightarrow A = \mathrm{Tor}_{p_1}(A) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Tor}_{p_s}(A)$. Остаётся доказать, что разложение $\mathrm{Tor}_p(A)$ в прямую сумму циклических подгрупп однозначно.
Далее считаем, что $A = \mathrm{Tor}_p(A)$ и $|A| = p^k$, где $k = k_1 + \ldots + k_r$. Будем вести индукцию по k.

1. $k = 0 \Rightarrow |A| = p^0 = 1 \Rightarrow A = \{0\}$, разложение однозначно.
2. Пусть $k \geqslant 1$. Рассмотрим подгруппу $pA = \{pa \mid a \in A\} \subseteq A$. Тогда $pA \cong p\mathbb{Z}_{p^{k_1}} \oplus \ldots \oplus p\mathbb{Z}_{p^{k_r}} \cong \mathbb{Z}_{p^{k_1-1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^{k_r-1}}$. В частности, если $k_i = 1$, то соответствующее слагаемое исчезает. По предположению индукции, применённому к pA, числа $k_1 - 1, \ldots, k_s - 1$ определены однозначно при $k_i \geqslant 2$, а число единиц ($k_j = 1$) восстанавливается как $k - \sum\limits_{k_i \geqslant 2} k_i$.

■

Замечание. Сами циклические слагаемые в разложении (*) определены неоднозначно.

Пример. $\mathbf{V}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$;
$\mathbf{V}_4 = \langle(12)(34)\rangle \oplus \langle(13)(24)\rangle = \langle(12)(34)\rangle \oplus \langle(14)(23)\rangle$.
Инвариантность инвариантных множителей — как их восстановить по разложению (*)?

[12)] Хотя из контекста лекций понятно, что изучение структуры абелевых групп началось уже на предыдущей лекции, параграф был впервые «объявлен» лектором (зафиксирован на доске с номером и названием) в начале этой лекции. Темы этого и предыдущего параграфа, о свободных абелевых группах, плавно переходят одна в другую, и выбрать границу между ними затруднительно. Поэтому наборщик не решился формально начать параграф раньше, чем лектор.

Пример. Рассмотрим группу A, для которой разложение $(*)$ имеет вид

$$A = \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5.$$

Восстановим для неё инвариантные множители $u_1, \ldots, u_m : u_1 \mid u_2, u_2 \mid u_3, \ldots$ Для этого можно объединять те слагаемые разложения, которые соответствуют взаимно простым числам, то есть степеням разных простых чисел. Последний инвариантный множитель, u_m, должен делиться на все предыдущие множители, поэтому в него надо взять самую большую степень каждого простого числа: $u_m = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$. Повторяем эту же процедуру для предыдущих множителей с оставшимися слагаемыми разложения: $u_{m-1} = 4 \cdot 3 = 12$, $u_{m-2} = 4$. На этом слагаемые закончились, и получилось, что

$$A = \mathbb{Z}_{360=u_3} \oplus \mathbb{Z}_{12=u_2} \oplus \mathbb{Z}_{4=u_1}.$$

По группе A инвариантные множители восстановились однозначно.

Задача. Перечислить с точностью до изоморфизма все абелевы группы порядка 36.

Решение. $36 = 2^2 \cdot 3^2$.

- $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_9 \cong \mathbb{Z}_{36}$;
- $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_9 \cong \mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}_2$;
- $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$;
- $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.

■

Задача.[обратная теорема Лагранжа] Пусть A — абелева группа, $|A| = n$, $d \mid n$. Тогда $\exists$ подгруппа $B \subseteq A$: $|B| = d$.

Определение. *Экспонентой*, или *показателем* конечной группы G (не обязательно абелевой) называется наименьшее общее кратное порядков её элементов.

Обозначение. $\exp(G)$.

Пример.

1. $\exp(\mathbb{Z}_n) = n$;
2. $\exp(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) = 2$;
3. $\exp(\mathbf{S}_3) = 6$.

Лемма 10.

1. $\forall\, g \in G\ g^{\exp(G)} = e$;
2. $\exp(G) \mid |G|$.

□

1. $\forall\, g \in G$ $\operatorname{ord}(g) \mid \exp(G)$, по определению экспоненты $\Rightarrow g^{\exp(G)} = e$.
2. По теореме Лагранжа, $\forall\, g \in G$ $\operatorname{ord}(g) \mid |G| \Rightarrow \exp(G) = \text{НОК}(\operatorname{ord}(g),\, g \in G) \mid |G|$.

■

Предложение 18. *Пусть A — конечная абелева группа. Тогда её экспонента равна её последнему инвариантному множителю.*

□ По теореме § 9, $A \cong \mathbb{Z}_{u_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{u_m}$, где $u_i \mid u_{i+1}\, \forall\, i \in \{1, \ldots, m-1\}$. Тогда $\forall\, a \in A$: $a = (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m})$ $\operatorname{ord}(a) = \text{НОК}(\operatorname{ord}(\overline{a_i}),\, i \in \{1, \ldots, m\})$. Так как $\operatorname{ord}(\overline{a_i}) \mid |\mathbb{Z}_{u_i}| = u_i$, а u_m делится на все u_i, то $\operatorname{ord}(a)$ является делителем u_m. Таким образом, $\exp(A) \mid u_m$. С другой стороны, $\operatorname{ord}(\overline{0}, \ldots, \overline{0}, \overline{1}) = u_m \Rightarrow \exp(A) = u_m$. ■

Следствие.

1. В конечной абелевой группе A существует элемент a: $\operatorname{ord}(a) = \exp(A)$.
2. A — циклическая $\Leftrightarrow |A| = \exp(A)$.

□

2. По предложению 12, $A \cong \mathbb{Z}_{u_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{u_m}$ — циклическая $\Leftrightarrow$ все u_i взаимно просты. Но это инвариантные множители, они делят друг друга. Значит, для взаимной простоты их может быть не больше одного. Таким образом, $|A| = u_m = \exp(A)$.

■

Предложение 19. *Любая конечная подгруппа мультипликативной группы поля является циклической.*

□ Пусть F — поле, $F^\times = F \setminus \{0\}$ — мультипликативная группа поля, $A \subseteq F^\times$ — конечная подгруппа, $m = \exp(A)$. Тогда, по лемме 10, $a^m = 1\, \forall\, a \in A$. Но уравнение $x^m - 1 = 0$ имеет над полем $\leqslant m$ корней, по теореме Безу $\Rightarrow |A| \leqslant m$. С другой стороны, $m \mid |A|$, по той же лемме $\Rightarrow m = |A| \Leftrightarrow A$ — циклическая, по следствию из предложения 18. ■

Следствие. Если поле F конечно, то $F^\times$ — циклическая.

Теорема 7. Пусть A — конечнопорождённая абелева группа. Тогда разложение $A \cong \mathbb{Z}^r \oplus \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{k_{11}}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_s^{k_{sr_s}}}$ единственно с точностью до порядка слагаемых.

□ Существование такого разложения уже доказано, осталось доказать единственность. Заметим, что $\operatorname{Tor}(A) = \mathbb{Z}_{p_1^{k_{11}}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_s^{k_{sr_s}}} \Rightarrow$ конечные циклические слагаемые определены однозначно, по теореме § 9.

Далее, $A/\operatorname{Tor}(A) \cong \mathbb{Z}^r$, по предложению 11 о факторизации по слагаемым $\Rightarrow r = \operatorname{rk}\left(A/\operatorname{Tor}(A)\right)$, но ранг абелевой группы определён корректно и от разложения не зависит. ■

Задача. Доказать, что любая подгруппа и любая факторгруппа конечнопорождённой абелевой группы конечнопорождена.

§ 11. Порождающие элементы

Пусть G — произвольная группа, $S \subseteq G$ — подмножество.

Определение. Подгруппа в G называется *порождённой подмножеством* S, если эта группа есть множество элементов вида $g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k}$, где $g_{i_p} \in S$, $\varepsilon_p \in \{\pm 1\}$.

Обозначение. $\langle S \rangle$.

Это подгруппа, так как $\left(g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k}\right)\left(g_{j_1}^{\tau_1} \dots g_{j_s}^{\tau_s}\right) \in \langle S \rangle$, $\left(g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k}\right)^{-1} = g_{i_k}^{-\varepsilon_k} \dots g_{i_1}^{-\varepsilon_1} \in \langle S \rangle$. Легко заметить, что это наименьшая подгруппа в G, содержащая S.

Пример. $S = \{a, b\} \Rightarrow \langle S \rangle = \left\{a^{k_1} b^{k_2} a^{k_3} b^{k_4} \dots \mid k_i \in \mathbb{Z}\right\}$.

Вспомним из первого курса, что группа подстановок $\mathbf{S}_n$ порождается транспозициями (ij) и даже транспозициями вида $(12), (13), \dots, (1n)$ или $(12), (23), \dots, ((n-1)\,n)$.

Задача. Доказать, что группа $\mathbf{S}_n$ порождается (12) и $(12 \dots n)$.

Предложение 20. *Группа $\mathbf{A}_n$ порождается:*

1. *парами транспозиций;*
2. *тройными циклами (то есть циклами длины 3);*
3. *парами независимых транспозиций при $n \geqslant 5$.*

□

1. $\forall\, \sigma \in \mathbf{S}_n$ $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$, где τ_i — транспозиция. Если σ чётна, то $k = 2s$. Из этого следует, что $\sigma = (\tau_1 \tau_2) \dots (\tau_{2s-1} \tau_{2s})$.
2. Выразим пары транспозиций через тройные циклы:
$$(ij)(ij) = e, \qquad (ij)(jk) = (ijk), \qquad (ij)(kl) = (ijk)(jkl).$$
3. Выразим пару зависимых транспозиций через пары независимых транспозиций:
$$(ij)(jk) = ((ij)(lm))((jk)(lm)), \qquad l, m \notin \{i, j, k\}.$$

■

Замечание. При $n = 4$ пары независимых транспозиций порождают $\mathbf{V}_4 \neq \mathbf{A}_4$.

Пример. $\mathbf{D}_n = \left\langle R\left(\frac{2\pi}{n}\right), S\right\rangle$, где S — любая симметрия. В самом деле, в $\left\langle R\left(\frac{2\pi}{n}\right), S\right\rangle$ лежат все повороты (группа поворотов — циклическая и порождается $R\left(\frac{2\pi}{n}\right)$) и как минимум ещё один элемент, то есть её порядок $\geqslant n+1$ и при этом делит $2n$. Значит, по теореме Лагранжа, порядок равен $2n$ и $\left\langle R\left(\frac{2\pi}{n}\right), S\right\rangle = \mathbf{D}_n$.

Задача. Найти минимальную систему порождающих группы Q_8.

Предложение 21. *Пусть F — поле. Тогда:*

1. *группа $\mathbf{GL}_n(F)$ порождается элементарными матрицами;*

2. *группа* $\mathbf{SL}_n(F)$ *порождается элементарными матрицами первого типа, то есть матрицами вида* $E + cE_{ij}$, $i \neq j$.

□

1. Пусть $A \in \mathbf{GL}_n(F)$. Её методом Гаусса, применяя элементарные преобразования строк, можно привести к ступенчатому виду. Но поскольку невырожденность матрицы при таких преобразованиях не меняется, то матрица будет иметь не просто ступенчатый, а верхнетреугольный вид. Дальнейшими преобразованиями можно получить диагональ, состоящую из единиц, а с её помощью — единичную матрицу. Вспомним теперь, что этим преобразованиям соответствуют некоторые элементарные матрицы $U_1, \ldots, U_k$: $U_k \ldots U_1 A = E \Rightarrow A = U_1^{-1} \ldots U_k^{-1}$, при этом известно, что обратные к элементарным матрицам — элементарные. Значит, A представима в виде произведения элементарных матриц.

2. Требуется доказать, что $A \in \mathbf{SL}_n(F)$ может быть приведена к единичной матрице с использованием элементарных преобразований строк только первого типа.

   В предыдущем пункте в приведении к ступенчатому виду, а также при переходе от матрицы с единичной диагональю к единичной матрице используются только нужные преобразования. Как можно разобраться с переходом от ступенчатого вида к матрице с единичной диагональю? Формально описывать это не будем, рассмотрим пример:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Последний диагональный элемент в любом случае будет единицей, так как $\det A = 1$.

■

Лекция 8
Коммутант

§ 12. Коммутант

Пусть G — произвольная группа.

Определение. *Коммутатором* двух элементов $x, y \in G$ называется $[x, y] \stackrel{\text{def}}{=} xyx^{-1}y^{-1} \in G$.

Легко заметить, что:

1. $[x, y] = e \Leftrightarrow x$ и y коммутируют ($xy = yx$);
2. $xy = [x, y]\, yx$, поэтому говорят, что $[x, y]$ — *корректирующий член*.

Определение. *Коммутантом*, или *производной подгруппой* группы G называется подгруппа $G' \subseteq G$ (иногда $[G, G]$), порождённая всеми коммутаторами в G.

Замечание.

1. $e = [x, x]$;
2. $[x, y]^{-1} = (xyx^{-1}y^{-1})^{-1} = yxy^{-1}x^{-1} = [y, x]$.

Отсюда соблазнительно сделать вывод, что, поскольку нейтральный элемент — коммутатор и обратный к коммутатору — коммутатор, все коммутаторы сами по себе уже образуют подгруппу в G. Но не факт, что произведение коммутаторов — коммутатор.

Задача. Привести пример группы G и элементов $x, y, z, t \in G$: $[x, y]\,[z, t]$ — не коммутатор никаких двух элементов G.

Замечание. $G' = \{e\} \Leftrightarrow G$ абелева.

Пример. $G = \mathbf{S}_n \Rightarrow [\sigma, \tau] = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ — чётная $\Rightarrow G' \subseteq \mathbf{A}_n$. С другой стороны, $\mathbf{A}_n$, по предложению 20, порождается тройными циклами, которые, в свою очередь, представимы как коммутаторы: $(ijk) = (ij)\,(ik)\,(ij)\,(ik) = (ij)\,(ik)\,(ij)^{-1}\,(ik)^{-1} = [(ij)\,, (ik)] \Rightarrow \mathbf{A}_n \subseteq G' \Rightarrow \mathbf{A}_n = G'$.

Предложение 22. *Пусть G — произвольная группа. Тогда:*

1. *$G' \triangleleft G$;*
2. *G/G' абелева;*
3. *если $N \triangleleft G$, то G/N абелева $\Leftrightarrow G' \subseteq N$;*
4. *если $G' \subseteq K \subseteq G$, K — подгруппа, то $K \triangleleft G$.*

□ Доказывать будем только общие факты 3 и 4, из которых сразу следуют 2 и 1, соответственно.

3. $\forall g, h \in G\ (gN)(hN) = (hN)(gN) \Leftrightarrow (gN)(hN)(gN)^{-1}(hN)^{-1} = (ghg^{-1}h^{-1}N) = eN \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow ghg^{-1}h^{-1} \in N \Leftrightarrow N$ содержит все коммутаторы $\Leftrightarrow G' \subseteq N$.
4. Если $g \in G$, $k \in K$, то $gkg^{-1} = gkg^{-1}k^{-1}k = [g,k]\,k$. Так как $[g,k] \in K$, $k \in K$, то $gkg^{-1} \in K \Rightarrow K \triangleleft G$.

■

Лемма 11. *Пусть $\varphi\colon G_1 \to G_2$ — гомоморфизм. Тогда $\varphi(G_1') \subseteq G_2'$. Если φ сюръективен, то $\varphi(G_1') = G_2'$.*

□

$$\varphi([x,y]) = \varphi\left(xyx^{-1}y^{-1}\right) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi\left(x^{-1}\right)\varphi\left(y^{-1}\right) =$$
$$= \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1} = [\varphi(x), \varphi(y)] \in G_2'.$$

Значит, $\varphi(G_1') \subseteq G_2'$.
Если φ сюръективен и $a, b \in G_2$, то $\exists\, x, y \in G_1$: $a = \varphi(x)$, $b = \varphi(y)$. Тогда $[a,b] = [\varphi(x), \varphi(y)] =$ $= \varphi([x,y]) \in \varphi(G_1') \Rightarrow G_2' \subseteq \varphi(G_1')$. ■

Определение. Пусть G — группа. Тогда подгруппа $H \subseteq G$ называется *характеристической*, если она устойчива относительно всех автоморфизмов, то есть $\forall \varphi \in \mathrm{Aut}(G)\ \varphi(H) = H$.

Замечание. Любая характеристическая подгруппа нормальна: нормальность, по определению, — устойчивость относительно внутренних автоморфизмов.

Задача. Доказать, что подгруппа $H \subseteq G$ является характеристической $\Leftrightarrow$ $\forall \varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ $\varphi(H) \subseteq H$.

Задача. Привести пример группы G, подгруппы $H \subseteq G$ и $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, для которых $\varphi(H) \subsetneq H$.

Задача. Привести пример нормальной подгруппы, не являющейся характеристической.

Пример. $Z(G) \subseteq G$ — характеристическая подгруппа. В самом деле, надо доказать, что $\forall b \in$ $\in G$, $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, $a \in Z(G)$ $\varphi(a)\,b = b\varphi(a)$. Поскольку φ — биекция, то $\exists\, c \in G$: $b = \varphi(c) \Rightarrow$ $\Rightarrow \varphi(a)\varphi(c) = \varphi(ac) = \varphi(ca) = \varphi(c)\varphi(a) \Rightarrow \varphi(Z(G)) \subseteq Z(G)$ $\forall \varphi \in \mathrm{Aut}(G) \Rightarrow$ по задаче выше, $\varphi(Z(G)) = Z(G)$.

Предложение 23. *Коммутант группы — это её характеристическая подгруппа.*

□ Достаточно проверить, что $\forall \varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ $\varphi([x,y]) \in G'$.
$\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \in G'$. ■

Замечание. Если $H \subseteq G$ — подгруппа, то $H' \subseteq G'$.

Лемма 12. $\mathbf{A}_n' = \begin{cases} e, & n \leqslant 3, \\ \mathbf{V}_4, & n = 4, \\ \mathbf{A}_n, & n \geqslant 5. \end{cases}$

□ При $n \leqslant 3$ $\mathbf{A}_n$ абелева.
При $n = 4$ $\mathbf{V}_4 \triangleleft \mathbf{A}_4$, $\left|{}^{\mathbf{A}_4}\!/_{\mathbf{V}_4}\right| = \frac{12}{4} = 3$ — простое число $\Rightarrow$ по следствию 5 из теоремы Лагранжа, ${}^{\mathbf{A}_4}\!/_{\mathbf{V}_4} \cong \mathbb{Z}_3 \Rightarrow {}^{\mathbf{A}_4}\!/_{\mathbf{V}_4}$ — абелева $\Rightarrow \mathbf{A}_4' \subseteq \mathbf{V}_4$. С другой стороны, $\mathbf{A}_4' \neq \{e\}$, так как $\mathbf{A}_4$ не абелева. Но

$\mathbf{A}_4$ состоит из двух классов сопряжённости $\Rightarrow$ в $\mathbf{V}_4$ нет собственных подгрупп, нормальных в $\mathbf{A}_4 \Rightarrow \mathbf{A}_4' = \mathbf{V}_4$.

При $n \geqslant 5$, применяя вышеописанные рассуждения к произвольной четвёрке индексов i, j, k, l, увидим, что любая пара независимых транспозиций лежит в $\mathbf{A}_n'$. По предложению 20, такие пары порождают $\mathbf{A}_n$. Значит, $\mathbf{A}_n' = \mathbf{A}_n$. ■

Лемма 13. $\mathbf{D}_n' = \begin{cases} \left\langle R\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right\rangle, & n = 2s+1, \\ \left\langle R\left(\frac{2\pi}{s}\right)\right\rangle, & n = 2s. \end{cases}$

□ Коммутаторы вращений тривиальны.

$R(\varphi)\, S_v R(-\varphi)\, S_v = S_{R(\varphi)v} S_v = R(2\varphi)$.

$S_1 S_2 S_1 S_2 = R(2\varphi)\, R(2\varphi) = R(4\varphi)$, где φ — угол между осями симметрий.

Таким образом, $\mathbf{D}_n' = \left\{R\left(2 \cdot \frac{2\pi k}{n}\right)\right\}_{k=0}^{n-1} = \begin{cases} \left\langle R\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right\rangle, & n = 2s+1, \\ \left\langle R\left(\frac{2\pi}{s}\right)\right\rangle, & n = 2s. \end{cases}$ ■

Задача. Найти коммутант Q_8.

Лемма 14. *Пусть F — поле, $|F| \geqslant 4, n \geqslant 2$. Тогда* $\mathbf{SL}_n(F)' = \mathbf{SL}_n(F)$.

□ Пусть $n = 2$. Тогда

$$\left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c(\lambda^2 - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выберем $\lambda \notin \{-1, 0, 1\}$. Тогда $\lambda^2 - 1 \neq 0$, и за счёт выбора c получим, что все матрицы вида $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ являются коммутаторами. Аналогичное рассуждение проводится для нижнетреугольных матриц. Получается, что все элементарные матрицы первого типа лежат в коммутанте.

При $n > 2$ применим это соображение в двумерном пространстве $\langle e_i, e_j\rangle$ и получим, что матрицы вида $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & * \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, где звёздочка стоит на месте (i, j), будут коммутаторами. Получается, что все элементарные матрицы первого типа лежат в коммутанте.

По пункту 2 предложения 21, такие элементарные матрицы порождают $\mathbf{SL}_n(F) \Rightarrow \mathbf{SL}_n(F) \subseteq \subseteq \mathbf{SL}_n(F)' \Rightarrow \mathbf{SL}_n(F) = \mathbf{SL}_n(F)'$. ■

Лемма 15. *Пусть F — поле, $|F| \geqslant 4, n \geqslant 2$. Тогда* $\mathbf{GL}_n(F)' = \mathbf{SL}_n(F)$.

□ $\det[A, B] = \det(ABA^{-1}B^{-1}) = 1 \Rightarrow \mathbf{GL}_n(F)' \subseteq \mathbf{SL}_n(F)$. С другой стороны, $\mathbf{SL}_n(F)' = \mathbf{SL}_n(F) \subseteq \mathbf{GL}_n(F)'$. Значит, $\mathbf{GL}_n(F)' = \mathbf{SL}_n(F)$. ■

§ 13. Разрешимые группы

Определение. *Кратный коммутант* $G^{(k)}$ группы G определим индуктивно:

1. $G^{(1)} = G'$;
2. $G^{(k)} = \left(G^{(k-1)}\right)'$.

Удобно считать, что $G^{(0)} = G$.

Предложение 24. *Пусть G — произвольная группа, H_1 — характеристическая подгруппа в G, H_2 — характеристическая подгруппа в H_1. Тогда H_2 — характеристическая подгруппа в G.*

□ $\forall \varphi \in \mathrm{Aut}\,(G)\ \varphi(H_1) = H_1 \Rightarrow \exists \psi = \varphi\big|_{H_1} : H_1 \to H_1,\ \psi(H_2) = H_2,\ \psi \in \mathrm{Aut}\,(H_1) \Rightarrow \varphi(H_2) = \psi(H_2) = H_2$. ■

Следствие 1. *$G^{(k)} \triangleleft G$. Более того, $G^{(k)}$ — характеристическая подгруппа в G.*

Задача. Привести пример $H_2 \subseteq H_1 \subseteq G$: $H_1 \triangleleft G$, $H_2 \triangleleft H_1$, $H_2 \not\triangleleft G$.

Определение. Группа G *разрешима*, если $\exists k \in \mathbb{N}$: $G^{(k)} = \{e\}$. В этом случае $G \supset G' \supset G^{(2)} \supset \supset \ldots \supset G^{(k)} = \{e\}$, $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ абелева $\forall i \in \{0, \ldots, k-1\}$. Наименьшее такое $k \in \mathbb{N}$ называется *ступенью разрешимости* G, то есть говорят, что группа G разрешима ступени k.

Замечание. Разрешимые группы ступени 1 — абелевы группы. Разрешимые группы ступени 2 называют *метабелевыми*.

Лекция 9

Разрешимые группы. Простые группы

§ 13. Разрешимые группы (продолжение)

Пример.

0. $G = \mathbf{S}_3 \Rightarrow G' = \mathbf{A}_3 \Rightarrow G^{(2)} = \mathbf{A}_3' = \{e\} \Rightarrow G$ разрешима ступени 2.
1. $G = \mathbf{S}_4 \Rightarrow G' = \mathbf{A}_4 \Rightarrow G^{(2)} = \mathbf{A}_4' = \mathbf{V}_4 \Rightarrow G^{(3)} = \mathbf{V}_4' = \{e\} \Rightarrow G$ разрешима ступени 3.
2. $G = \mathbf{S}_n$, $n \geqslant 5 \Rightarrow G' = \mathbf{A}_n \Rightarrow G^{(k)} = \mathbf{A}_k \,\forall\, k \geqslant 2 \Rightarrow G$ неразрешима. Аналогично для $G = \mathbf{A}_n$, $n \geqslant 5$.
3. $G = \mathbf{D}_n \Rightarrow G' \subseteq R$ — группа поворотов, которая есть абелева циклическая $\Rightarrow G^{(2)} = \{e\} \Rightarrow G$ разрешима ступени 2.
4. **Задача.** Доказать, что Q_8 разрешима.
5. $G = \mathbf{GL}_n(F)$ или $G = \mathbf{SL}_n(F)$, $|F| \geqslant 4 \Rightarrow G' = \mathbf{SL}_n(F) \Rightarrow G^{(k)} = \mathbf{SL}_n(F) \,\forall\, k \geqslant 2 \Rightarrow G$ неразрешима.

Имеем $G \supseteq G' \supseteq G^{(2)} \supseteq \ldots$ Если G разрешима, то цепочка оборвётся: $G \supseteq G' \supseteq G^{(2)} \supseteq \supseteq \ldots \supseteq G^{(k)} = \{e\}$. Такая цепочка называется *производным рядом*. Также знаем, что ${}^{G^{(i)}}\!/_{G^{(i+1)}}$ абелева $\forall\, i$.

Предложение 25. *Пусть в группе G $\exists$ ряд подгрупп $G \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots \supseteq G_s = \{e\}$, $G_{i+1} \triangleleft G_i$, ${}^{G_i}\!/_{G_{i+1}}$ абелева $\forall\, i$. Тогда G разрешима.*

□ Достаточно доказать, что $G^{(i)} \subseteq G_i \,\forall\, i$. Воспользуемся индукцией по n.

1. $i = 0 \Rightarrow G^{(0)} = G = G_0$.
2. Пусть $G^{(i)} \subseteq G_i$. Проверим, что $G^{(i+1)} \subseteq G_{i+1}$. Так как, по предположению индукции, ${}^{G_i}\!/_{G_{i+1}}$ абелева, то, по пункту 3 предложения 22, $G_i' \subseteq G_{i+1}$. Но $G^{(i+1)} = \left(G^{(i)}\right)' \subseteq G_i' \subseteq \subseteq G_{i+1}$.

■

Лемма 16.

1. *Подгруппа разрешимой группы разрешима.*
2. *Факторгруппа разрешимой группы разрешима.*

□

1. Пусть $H \subseteq G$ — подгруппа. Тогда $H' \subseteq G', \ldots, H^{(i)} \subseteq G^{(i)} \,\forall\, i$. Поскольку $\exists\, k \in \mathbb{N}$: $G^{(k)} = \{e\}$, то $H^{(k)} = \{e\}$.

2. Пусть $N \triangleleft G$, $F = {}^{G}\!/_{N}$. По лемме 11, для сюръективного гомоморфизма $\varphi\colon G \twoheadrightarrow F$, $g \mapsto gN$, имеем $F' = \varphi(G'), \ldots, F^{(i)} = \varphi\left(G^{(i)}\right)\ \forall i$. Поскольку $\exists k \in \mathbb{N}\colon G^{(k)} = \{e\}$, то $F^{(k)} = \varphi\left(G^{(k)}\right) = \varphi(\{e\}) = \{eN\} \Rightarrow F$ разрешима.

■

Предложение 26. *Пусть G — группа, $N \triangleleft G$, N разрешима, $F = {}^{G}\!/_{N}$ разрешима. Тогда G разрешима.*

□ По предположению, $\exists k \in \mathbb{N}\colon \left({}^{G}\!/_{N}\right)^{(k)} = \{eN\}$.
$[gN, hN] = (gN)(hN)(gN)^{-1}(hN)^{-1} = ghg^{-1}h^{-1}N$.
Рассмотрим проекцию $\pi\colon G \to {}^{G}\!/_{N}$, $g \mapsto gN$. Тогда $\pi(G') = \left({}^{G}\!/_{N}\right)', \ldots, \pi\left(G^{(k)}\right) = \left({}^{G}\!/_{N}\right)^{(k)} =$
$= \{eN\} \Rightarrow G^{(k)} \subseteq N$.
С другой стороны, так как N разрешима, то $\exists s \in \mathbb{N}\colon N^{(s)} = \{e\} \Rightarrow \left(G^{(k)}\right)^{(s)} = G^{(k+s)} \subseteq$
$\subseteq N^{(s)} = \{e\} \Rightarrow \left(G^{(k)}\right)^{(s)} = \{e\} \Rightarrow G$ разрешима. ■

Предложение 27. *Пусть F — поле, $\mathbf{B}_n(F)$ — группа невырожденных верхнетреугольных матриц над F. Тогда $\mathbf{B}_n(F)$ разрешима.*

□ Доказательство проведём индукцией по n.

1. $n = 1 \Rightarrow \mathbf{B}_1(F) \cong F^{\times}$. Так как $F^{\times}$ абелева, то $\mathbf{B}_1(F)$ разрешима.
2. Пусть $n > 1$. Построим гомоморфизм $\varphi\colon \mathbf{B}_n(F) \to \mathbf{B}_{n-1}(F)$, где у матрицы A вычёркивается последний столбец и последняя строка. Очевидно, что он сюръективен. Тогда, по теореме о гомоморфизме, ${}^{\mathbf{B}_n(F)}\!/_{\operatorname{Ker}\varphi} \cong \mathbf{B}_{n-1}(F)$. По предположению индукции, ${}^{\mathbf{B}_n(F)}\!/_{\operatorname{Ker}\varphi}$ разрешима $\Rightarrow$ по предложению 26, достаточно доказать, что $\operatorname{Ker}\varphi$ разрешима.
$\operatorname{Ker}\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & c_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_n \end{pmatrix} \right\}$. Рассмотрим гомоморфизм $\psi\colon \operatorname{Ker}\varphi \to F^{\times}$, $C \mapsto \det C$. Тогда ${}^{\operatorname{Ker}\varphi}\!/_{\operatorname{Ker}\psi} \cong \operatorname{Im}\psi$ абелева, $\operatorname{Ker}\psi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & c_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ абелева $\Rightarrow$ по предложению 26, $\operatorname{Ker}\varphi$ разрешима $\Rightarrow \mathbf{B}_n(F)$ разрешима.

■

§ 14. Простые группы

Определение. Группа G *проста*, если в ней нет нетривиальных нормальных подгрупп[13)].

Теорема 8. Пусть G — конечная группа. Тогда $\exists$ ряд подгрупп $G \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_k = \{e\}$, такой что $H_{i+1} \lhd H_i$, ${}^{H_i}\!/_{H_{i+1}}$ проста $\forall\, i$. Такой ряд называется композиционным.

□ Доказательство снова ведём индукцией по n.

1. $|G| = 1 \Rightarrow G = \{e\}$.
2. Пусть $|G| > 1$, $H \subsetneq G$ — нормальная подгруппа наибольшего порядка.

   Лемма 17. ${}^{G}\!/_{H}$ *проста.*

   □ Пусть, от противного, $N \lhd {}^{G}\!/_{H}$ нетривиальна, $\pi\colon G \to {}^{G}\!/_{H}$. Тогда $\pi^{-1}(N) \lhd G$, $H \subsetneq \pi^{-1}(N) \neq G$ (так как N нетривиальна) $\Rightarrow$ $\pi^{-1}(N)$ — нормальная подгруппа порядка $> |H|$. Это противоречит изначальному предположению, что H имеет наибольший порядок из нормальных подгрупп G. ■

   Положим теперь $H_1 = H$. Тогда $|H_1| < |G|$ и, по предположению индукции, $\exists$ ряд $H_1 \supset \supset H_2 \supset \ldots \supset H_s = \{e\}$: $H_{i+1} \lhd H_i$, ${}^{H_i}\!/_{H_{i+1}}$ проста $\forall\, i$. Итак, получился ряд $G \supset H_1 \supset H_2 \supset \supset \ldots \supset H_s = \{e\}$: $H_{i+1} \lhd H_i$, ${}^{H_i}\!/_{H_{i+1}}$ проста $\forall\, i$.

■

Определение. Пусть $N \lhd G$, $F = {}^{G}\!/_{N}$. Тогда говорят, что G — *расширение* группы N с помощью подгруппы F.

Здесь имеем цепочку гомоморфизмов: $N \overset{i}{\hookrightarrow} G \overset{\pi}{\longrightarrow} {}^{G}\!/_{N} = F$.

Следствие 1. *Любая конечная группа G получается цепочкой расширений при помощи простых групп.*

Ставим задачей классификацию конечных групп, которая распадётся на два этапа:

1. классификация конечных простых групп;
2. классификация расширений.

Пример. Не всегда тем, что G — расширение N с помощью F, G определяется однозначно. Например, пусть $N \cong \mathbb{Z}_3$, $F \cong \mathbb{Z}_2$. Тогда:

1. $N = \mathbb{Z}_3$, $F = \mathbb{Z}_2 \Rightarrow G = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$ — абелева;
2. $N = \mathbf{A}_3 \cong \mathbb{Z}_3$, $F = {}^{\mathbf{S}_3}\!/_{\mathbf{A}_3} \cong \mathbb{Z}_2 \Rightarrow G = S_3$ — неабелева.

[13)] Тривиальные нормальные подгруппы — $\{e\}$ и G. Конечно, в этом определении можно уловить связь с определением простого числа.

Замечание. Композиционный ряд из теоремы § 14 для данной группы G не единственен, но, по теореме Жордана — Гёльдера, доказательство которой не будет приведено в этом курсе, длина всех таких рядов одинакова, и набор простых факторгрупп $\left\{ {}^{G}\!/_{H_1}, {}^{H_1}\!/_{H_2}, \ldots, {}^{H_{k-1}}\!/_{H_k} \right\}$ определён однозначно с точностью до порядка.

Лемма 18. *Абелева группа A проста $\Leftrightarrow A \cong \mathbb{Z}_p$, где p — простое.*

□ В A любая подгруппа нормальна. Простота A в этом случае означает отсутствие нетривиальных подгрупп (не только нормальных, а вообще). Но $\forall\, 0 \neq a \in A$ рассмотрим циклическую подгруппу $\langle a \rangle$. Из вышеизложенного, $\langle a \rangle = A \Rightarrow A$ — циклическая. Предложения 2 и 3 описывали все подгруппы циклических групп. Нетривиальных подгрупп нет, что равносильно тому, что $A \cong \mathbb{Z}_p$. ■

Теорема 9. Группа $\mathbf{A}_n$ проста $\forall\, n \geqslant 5$.

□ (Доказательство приводится по Винбергу[14].)
Если $\{e\} \neq N \triangleleft \mathbf{A}_n$, то N есть объединение классов сопряжённости в $\mathbf{A}_n$.

Лемма 19. *Если $\sigma \in \mathbf{A}_n$ и в разложение σ на независимые циклы входит либо цикл чётной длины, либо два цикла одинаковой нечётной длины, то*

$$C_{\mathbf{A}_n}(\sigma) = C_{\mathbf{S}_n}(\sigma) = \{\tau \in \mathbf{S}_n \mid \tau \text{ и } \sigma \text{имеют одинаковую циклическую структуру}\}.$$

□ Ясно, что $C_{\mathbf{A}_n}(\sigma) \subseteq C_{\mathbf{S}_n}(\sigma)$. Второе равенство доказывалось в предложении 7. Осталось доказать обратное включение, то есть что если τ сопряжена σ в $\mathbf{S}_n$, то они сопряжены в $\mathbf{A}_n$.
Пусть $\tau = \gamma\sigma\gamma^{-1}$, $\gamma \in \mathbf{S}_n$. Если γ чётная, то всё доказано. Пусть γ нечётная. Рассмотрим $\beta \in \mathbf{S}_n$: в первом случае β положим равной указанному циклу чётной длины, во втором если $(i_1 \ldots i_q)(j_1 \ldots j_q)$ — два независимых цикла нечётной длины q в σ, то $\beta \stackrel{\text{def}}{=} (i_1 j_1) \ldots (i_q j_q)$. Тогда β нечётна, $\beta\sigma = \sigma\beta$. Значит, $\gamma\beta \in \mathbf{A}_n$ и $(\gamma\beta)\,\sigma\,(\gamma\beta)^{-1} = \gamma\beta\sigma\beta^{-1}\gamma^{-1} = \gamma\sigma\beta\beta^{-1}\gamma^{-1} = \gamma\sigma\gamma^{-1} = \tau \Rightarrow \sigma$ и τ сопряжены в $\mathbf{A}_n$. ■

Доказательство теоремы § 14 продолжится на следующей лекции.

[14] Винберг Э. Б. Курс алгебры. 2-е изд., испр. и доп. — М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2001. — 544 с. С. 429–431.

Лекция 10

Простые группы. Действия групп

§ 14. Простые группы (продолжение)

Продолжим доказательство теоремы § 14.
Пусть $N \triangleleft \mathbf{A}_n$, $e \neq \sigma \in N$, $\operatorname{ord}(\sigma) = s = pk$, p — простое. Тогда $\sigma^k \in N, \operatorname{ord}\left(\sigma^k\right) = p$. Заменив σ на σ^k, можно считать, что $\operatorname{ord}(\sigma) = p \Rightarrow \sigma$ есть произведение независимых циклов длины p.

1. $p \geqslant 5 \Rightarrow \sigma = (i_1 \dots i_p)\,\sigma_1$, где $\sigma_1 = e$ или раскладывается в произведение других независимых циклов длины p. Тогда $\sigma' = (i_1 i_2 i_3)\,\sigma\,(i_1 i_2 i_3)^{-1} = (i_2 i_3 i_1 i_4 \dots i_p)\,\sigma_1 \in N \Rightarrow \sigma'\sigma^{-1} = = (i_1 i_2 i_4) \in N$. Пользуясь леммой 19 при $q = 1$, получаем, что все тройные циклы лежат в $N \Rightarrow N = \mathbf{A}_n$, по предложению 20.
2. $p = 3$. Если $\sigma = (i_1 i_2 i_3)$, то опять в N лежат все тройные циклы, и $N = \mathbf{A}_n$. Пусть $\sigma = = (i_1 i_2 i_3)\,(j_1 j_2 j_3)\,\sigma_1$. Тогда $\sigma' = (i_1 j_1)\,(i_2 j_2)\,\sigma\,(i_2 j_2)\,(i_1 j_1) = (i_1 i_2 j_3)\,(j_1 j_2 i_3)\,\sigma_1 \in N \Rightarrow \sigma'\sigma^{-1} = = (i_1 j_1)\,(i_3 j_3) \in N \Rightarrow$ по лемме 19, все пары независимых транспозиций лежат в $N \Rightarrow$ по предложению 20, $N = \mathbf{A}_n$.
3. $p = 2 \Rightarrow \sigma = (i_1 i_2)\,(i_3 i_4)\,\sigma_1$. Пусть $\sigma' = (i_1 i_2 i_3)\,\sigma\,(i_1 i_2 i_3)^{-1} = (i_2 i_3)\,(i_1 i_4)\,\sigma_1 \in N \Rightarrow \sigma'\sigma^{-1} = = (i_1 i_3)\,(i_2 i_4) \in N \Rightarrow$ все пары независимых транспозиций лежат в $N \Rightarrow N = \mathbf{A}_n$.

■

I. Классификация конечных простых групп

Группа $\mathbf{SL}_n(F)$, вообще говоря, не проста: $Z(\mathbf{SL}_n(F)) \supseteq \{\lambda E \mid \lambda^n = 1\}$. Оказывается, группа $\mathbf{PSL}_n(F) \stackrel{\text{def}}{=} {}^{\mathbf{SL}_n(F)}\!/_{Z(\mathbf{SL}_n(F))}$ — *специальная проективная группа* — проста, кроме случаев $n = 2$, $F = \mathbb{Z}_2$ и $F = \mathbb{Z}_3$. Таким образом, для конечных полей мы получаем много конечных простых групп.
Попытки завершить классификацию простых групп предпринимались в 1981, 1983 (Дэниелом Горенштейном) и 2004 (Майклом Ашбахером) годах. Последняя считается успешной, но только предположительно: в общей сложности работа потребовала 10 тысяч страниц текста в сотнях научных журналов и труда около сотни авторов на протяжении всей второй половины XX века. Итак, классификация конечных простых групп выглядит следующим образом:

- $\mathbb{Z}_p$, p — простое;
- $\mathbf{A}_n$, $n \geqslant 5$;
- некоторые группы матриц над конечными полями (*группы типа Ли*);
- 26 *спорадических простых групп*. Первые пять были открыты Эмилем Матьё в 1860 году и имеют порядки от 7920 до 244823040, остальные 21 — в 1965–1975 годах. Самые большие порядки из них имеют *Бэйби-Монстр* ($2^{41} \cdot 3^{13} \cdot \ldots \cdot 47$) и *Монстр* ($2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot \cdot \ldots \cdot 71$).

§ 15. Действия групп

В этом параграфе в качестве групп рассматриваются группы симметрий или группы преобразований (абстрактная теория группы появилась только в первой половине XX века).

Определение. Пусть G — абстрактная группа, X — произвольное множество. *Действием* группы G на множестве X называется гомоморфизм $\alpha\colon G \to S(X)$, где $S(X)$ — группа биекций на X.

Например, если X конечно, $|X| = n$, то $S(X) \cong \mathbf{S}_n$.
Почему мы называем это действием? Элемент $g \in G$ действует на $x \in X$: $x \mapsto \alpha(g)(x)$.
Другая, эквивалентная точка зрения: действие — это отображение $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x = gx$, удовлетворяющее условиям:

1. $ex = x \,\forall\, x \in X$;
2. $g(hx) = (gh)\,x \,\forall\, g, h \in G,\ x \in X$.

Второй пункт не влечёт за собой первый: если выбрать такое отображение, которые будет сопоставлять всем парам (g, x) одну и ту же фиксированную точку $x_0 \in X$, то второй пункт для него будет выполняться, а первый — нет.

Задача. Проверить эквивалентность таких определений действия.

Решение. Приведём наброски решения. Если $\alpha\colon G \to S(X)$, то положим $(g, x) \mapsto \alpha(g)(x)$. Обратно, если задано отображение $G \times X \to X$, то для любого фиксированного $g \in G$ отображение $\alpha_g\colon X \to X$, $x \mapsto gx$, обратимо (рассмотреть $\alpha_{g^{-1}}$) $\Rightarrow$ биекция $\Rightarrow$ гомоморфизм $\alpha\colon G \to S(X)$, $g \mapsto \alpha_g$. ■

Пример. Группа $\mathbf{S}_n$ действует на $\{1, \ldots, n\}$, $\sigma i = \sigma(i)$. Здесь $\alpha = \mathrm{id}$.

Определение. *Орбитой* точки $x \in X$ называется множество $Gx \stackrel{\text{def}}{=} \{gx \mid g \in G\} \subseteq X$.

Задача. Доказать, что для данного действия $G \times X \to X$ отношение на X «лежать в одной орбите» является отношением эквивалентности, то есть X распадается на непересекающиеся орбиты.

Определение. *Стабилизатором* (*стационарной подгруппой*, *подгруппой изотропии*) точки $x \in X$ называется множество $\mathrm{St}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid gx = x\}$.

Ясно, что $\mathrm{St}(x)$ — подгруппа в G.

Определение. Действие:

- *транзитивно*, если $\forall\, x, y \in X\ \exists\, g \in G$: $y = gx$ ($\Leftrightarrow X$ — это одна орбита);
- *свободно*, если $gx = x$ для некоторого $x \in X$ влечёт $\mathrm{St}(x) = \{e\}$ ($\Leftrightarrow g = e$);
- *эффективно*, если $gx = x \,\forall\, x \in X$ влечёт $g = e$ ($\alpha\colon G \to S(X)$ инъективно).

Ядро неэффективности действия $\mathrm{Ker}\,\alpha = \{g \in G \mid gx = x \,\forall\, x \in X\} \lhd G$.

Обозначение. G действует на $X \Leftrightarrow G : X$ или $G \curvearrowright X$.

Замечание. От действия $G \curvearrowright X$ можно перейти к действию ${}^{G}\!/_{\operatorname{Ker}\alpha} \curvearrowright X : (g \operatorname{Ker}\alpha) = gx$, которое будет эффективным.

Пример.

1. $G = \mathbf{SO}_n(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^n = X$, $(A, v) \mapsto Av$. Орбиты этого движения в случае $n = 2$ — концентрические окружности с центром в начале координат (а также сама точка начала координат, считающаяся окружностью с нулевым радиусом). В общем случае это сферы с центром в начале координат, а также сама точка начала координат.

   Стабилизатор ненулевого вектора $\operatorname{St}(v) \cong \mathbf{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$ — все специальные ортогональные преобразования в ортогональной плоскости к v. Если же $v = 0$, то $\operatorname{St}(v) = \mathbf{SO}_n(\mathbb{R})$.

   Действие не транзитивно (длина сохраняется), не свободно (хотя при $n = 2$ очень к этому близко), эффективно.

Лекция 11

Действия групп

§ 15. Действия групп (продолжение)

2. $G = \mathbf{S}_n \curvearrowright \{1, \ldots, n\} = X$, $i \mapsto \sigma(i)$.

   Действие транзитивно.

   $\mathrm{St}(i) \cong \mathbf{S}_{n-1} \Rightarrow$ действие не свободно при $n \geqslant 3$.

   Действие эффективно.

3. $\sigma \in \mathbf{S}_n$, $G = \langle \sigma \rangle \curvearrowright \{1, \ldots, n\} = X$.

   Орбиты соответствуют независимым циклам в разложении σ.

   Действие транзитивно $\Leftrightarrow \sigma$ — цикл длины n.

   Задача. Когда это действие свободно?

4. $G = \mathbf{GL}_n(F)$ или $\mathbf{SL}_n(F)$ $(n \geqslant 2) \curvearrowright F^n = X$, $(A, v) \mapsto Av$.

   Орбиты (для $\mathbf{SL}_n(F)$ — при $n > 1$): $F^n \setminus \{0\}$ и $\{0\}$.

   Задача. Доказать, что:

   . $G = \mathbf{B}_n(F) = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix} \right\} \curvearrowright F^n = X$ имеет $n+1$ орбиту;

   . $G = \mathbf{D}_n(F) = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix} \right\} \curvearrowright F^n = X$ имеет 2^n орбит.

   В обоих случаях описать орбиты.

5. $G = \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) = X$, $(g, M) \mapsto gMg^{-1}$.

   Орбиты — матрицы одного оператора в разных базисах: $GM = \{M' \mid J(M') = J(M)\}$, где $J(M)$ — жорданова нормальная форма M.

$\mathrm{St}(M) = Z_{\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})}(M)$ [15] $= \{g \mid gM = Mg\}$.

6. $G = \mathbf{GL}_n(F) \curvearrowright \mathrm{Mat}_n(F) = X$, $(g, M) \mapsto gMg^T$.

   Орбиты GM — матрицы одной билинейной формы.

   Если $F = \mathbb{C}$, а $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ заменить на $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})$ — пространство симметрических матриц, то в этой ситуации орбит будет $n+1$, и орбита будет определяться рангом соответствующей симметрической билинейной формы: вспомним, что матрица симметрической билинейной формы имеет канонический вид

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \\ 0 & \cdots & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \end{pmatrix},$$

   где количество единиц r есть ранг формы, и эту матрицу и можем принять представителем орбиты.

Три важных действия $G \curvearrowright G$:

1. левые сдвиги: $(g, x) \mapsto gx$;
2. правые сдвиги: $(g, x) \mapsto xg^{-1}$ [16];
3. сопряжения: $(g, x) \mapsto gxg^{-1}$.

Действия 1 и 2 транзитивны: $x \overset{g=yx^{-1}}{\longmapsto} y$ для действия 1, аналогично для действия 2.
Действия 1 и 2 свободны: $\mathrm{St}(x) = \{g \in G \mid gx = x\} = \{e\}$.
Действия 1 и 2 эффективны.
Орбиты действия 3 — классы сопряжённости $C_G(x)$, стабилизатор $\mathrm{St}(x) = Z_G(x)$ — централизатор.
Пусть G нетривиальна. Тогда действие 3 не транзитивно, не свободно, не эффективно: $\mathrm{Ker}\,\alpha = \bigcap\limits_{x \in X} \mathrm{St}(x) = Z(G)$.

Теорема (Кэли). Любая конечная группа изоморфна некоторой подгруппе группы $\mathbf{S}_n$, где n — порядок группы.

□ Рассмотрим $G \curvearrowright G$ левыми сдвигами. Оно определяет гомоморфизм $\alpha\colon G \to S(G) \cong \mathbf{S}_n$. Действие свободно $\Rightarrow$ эффективно $\Rightarrow$ α инъективно $\Rightarrow$ по теореме о гомоморфизме, $G \cong \alpha(G) \subseteq \mathbf{S}_n$. ■

[15] Здесь централизатор немного не в том смысле, в котором мы его понимаем, поскольку M не обязательно лежит в $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Но суть остаётся прежней.

[16] Есть аксиома из определения действия, что $g_2(g_1 x) = (g_2 g_1)x$. В этом случае $xg_1^{-1}g_2^{-1} = x(g_2 g_1)^{-1}$.

Несложно такой изоморфизм построить и вручную: $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, $g \mapsto \sigma \Rightarrow G = \{gg_1, gg_2, \ldots, gg_n\} = \{g_{\sigma(1)}, g_{\sigma(2)}, \ldots, g_{\sigma(n)}\} \Rightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Определение. Подгруппы H_1, $H_2 \subseteq G$ *сопряжены*, если $\exists\, g \in G$: $gH_1g^{-1} = H_2$.

Лемма 20. *Пусть $G \curvearrowright X$, $x, y \in X$ лежат в одной G-орбите. Тогда $\mathrm{St}(x)$ и $\mathrm{St}(y)$ сопряжены.*

□ По условию, $\exists\, g \in G$: $gx = y$. Тогда $h = \mathrm{St}(y) \Leftrightarrow hy = y \Leftrightarrow h(gx) = gx \Leftrightarrow g^{-1}hgx = x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g^{-1}hg \in \mathrm{St}(x) \Leftrightarrow \mathrm{St}(x) = g^{-1}\,\mathrm{St}(y)\,g \Leftrightarrow \mathrm{St}(y) = g\,\mathrm{St}(x)\,g^{-1}$. ■

Замечание. Обратное утверждение к лемме 20 неверно.

Определение. Пусть $G_1 \curvearrowright X_1$, $G_2 \curvearrowright X_2$ — два действия. Они называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi\colon G_1 \to G_2$ и биекция $f\colon X_1 \to X_2$, такие что одно действие переходит в другое, то есть $f(gx) = \varphi(g)\,f(x)\ \forall\, x \in X_1, g \in G_1$:

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & gx \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ f(x) & \longrightarrow & \varphi(g)\,f(x) \end{array}$$

Пусть G — группа, $H \subseteq G$ — подгруппа. Тогда G действует на G/H (множество левых смежных классов, а не факторгруппа: H не обязательно нормальна):

$$G \times G/H \to G/H, \quad (g, xH) \mapsto gxH.$$

Это действие транзитивно: $xH \overset{g=yx^{-1}}{\longmapsto} yH$.

Замечание. Иногда G/H называют *однородным пространством* группы G.

Предложение 28. *Пусть группа G транзитивно действует на X, $x_0 \in X$, $H = \mathrm{St}(x_0)$. Тогда действие $G \curvearrowright X$ изоморфно $G \curvearrowright G/H$.*

□ Положим $\varphi = \mathrm{id}$, $f\colon X \to G/H$, $gx_0 \mapsto gH$. Так как действие транзитивно, то можно считать, что $X = Gx_0$.
Проверим, корректно ли определено f, ведь в выражении $x = gx_0$ элемент g определён неоднозначно. На месте g может стоять gh, где $h \in H$. Но $f(ghx_0) = ghH = gH = f(gx_0)$.
Сюръективность f следует из транзитивности действия.
Проверим теперь инъективность: $g_1H = g_2H \Leftrightarrow g_1^{-1}g_2 \in H \Leftrightarrow g_1^{-1}g_2x_0 = x_0 \Leftrightarrow g_2x_0 = g_1x_0$.
Остаётся понять, что отображение переводит одно действие в другое: $f(g_1x) = f(g_1gx_0) =$ $= g_1gH = g_1f(x)$. ■

Замечание. Любые два транзитивных свободных действия группы G изоморфны, так как в терминах предыдущей теоремы $H = \{e\}$. В частности, действие правыми сдвигами изоморфно действию левыми сдвигами.

Задача. Явно построить изоморфизм между действиями левыми сдвигами и правыми сдвигами.

Предложение 29. *Пусть G — конечная группа, $G \curvearrowright X$. Тогда $\forall x \in X\ |Gx| = \frac{|G|}{|\mathrm{St}(x)|}$.*

□ Группа G действует на орбите Gx транзитивно. Значит, по предложению 28, есть биекция $f\colon Gx \leftarrow {}^{G}\!/_{\mathrm{St}(x)} \Rightarrow |Gx| = \left|{}^{G}\!/_{\mathrm{St}(x)}\right| = \frac{|G|}{|\mathrm{St}(x)|}$, из доказательства теоремы Лагранжа. ■

Пример. Предложение 6 говорило, что $|C_G(a)| = \frac{|G|}{|Z_G(a)|}$. Это как раз частный случай предложения 29.

Теорема (формула Бернсайда). Пусть G — конечная группа, X — конечное множество, $G \curvearrowright X$. Тогда число орбит этого действия равно $\frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}|X^g|$, где $X^g \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid gx = x\}$.

□ Рассмотрим $M = \{(g,x) \mid gx = x\}$. Тогда $|M| = \sum\limits_{g\in G}|X^g|$. С другой стороны, если зафиксировать x, то $|M| = \sum\limits_{x\in X}|\mathrm{St}(x)| = \sum\limits_{x\in X}\frac{|G|}{|Gx|} = |G|\sum\limits_{x\in X}\frac{1}{|Gx|}$. Нетрудно заметить, что для каждой орбиты обратная величина к её порядку войдёт в сумму столько раз, сколько элементов в орбите, то есть сумма просто будет равна числу орбит. Приравняв две полученные мощности M, получим требуемое. ■

Пример. У действия сопряжениями число классов сопряжённости равно $\frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}|Z_G(g)|$.

§ 16. p-группы

Определение. Пусть p — простое число. Конечная группа G называется *p-группой*, если $|G| = p^k$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Пример.

1. $|\mathbf{D}_4| = 2^3 \Rightarrow \mathbf{D}_4$ — 2-группа.
2. $|Q_8| = 2^3 \Rightarrow Q_8$ — 2-группа.

Теорема 10.

1. Нетривиальная p-группа имеет нетривиальный центр.
2. Любая p-группа разрешима.

□

1. $|G| = p^k$, $G = \bigsqcup C_G(g) \Rightarrow |G| = \sum|C_G(g)|$. Но $|C_G(g)| = \frac{|G|}{|Z_G(g)|} = p^l$, $l \leqslant k$. При этом $|C_G(g)| = 1 \Leftrightarrow g \in Z(G)$. Поэтому $p^k = |G| = |Z(G)| + \sum\limits_{l_i>0} p^{l_i} \Rightarrow p \,\big|\, |Z(G)| \Rightarrow |Z(G)| \neq$ $\neq 1 \Rightarrow Z(G) \neq \{e\}$.
2. Индукцией по k.
   . При $k = 0$ $|G| = 1 \Rightarrow G = \{e\} \Rightarrow G$ разрешима.
   . Пусть $k > 0$. Тогда $Z(G) \neq \{e\}$, $Z(G) \triangleleft G \Rightarrow \left|{}^{G}\!/_{Z(G)}\right| = p^l < p^k$. По предположению индукции, ${}^{G}\!/_{Z(G)}$ разрешима. А сам $Z(G)$ абелев, в частности, разрешим. По предложению 26, G разрешима.

■

На следующей лекции мы докажем теорему о том, что любая группа порядка p^2 абелева.

Лекция 12

Теоремы Силова

§ 16. p-группы (продолжение)

Лемма 21. *Пусть G — некоммутативная группа. Тогда ${}^{G}\!/_{Z(G)}$ — не циклическая.*

□ Пусть ${}^{G}\!/_{Z(G)}$ — циклическая. Тогда $\exists\, a \in G$: ${}^{G}\!/_{Z(G)} = \langle aZ(G)\rangle$. Отсюда $\forall\, g \in G\ g = a^k z$, где $k \in \mathbb{Z}$, $z \in Z(G)$. Но $\left(a^{k_1} z_1\right)\left(a^{k_2} z_2\right) = a^{k_1+k_2} z_1 z_2 = \left(a^{k_2} z_2\right)\left(a^{k_1} z_1\right)$, поскольку $z_1, z_2 \in Z(G)$, и их можно переставлять как угодно. Получаем противоречие с некоммутативностью группы. ■

Теорема 11. Группа порядка p^2 абелева.

□ Пусть $|G| = p^2$. Каким может быть $|Z(G)|$?

1. $|Z(G)| = 1 \Rightarrow$ противоречие с пунктом 1 теоремы § 16.
2. $|Z(G)| = p \Rightarrow \left|{}^{G}\!/_{Z(G)}\right| = p \Rightarrow$ по следствию из теоремы Лагранжа, ${}^{G}\!/_{Z(G)}$ — циклическая $\Rightarrow$ противоречие с леммой 21.
3. $|Z(G)| = p^2 \Rightarrow G = Z(G) \Rightarrow G$ абелева.

■

Следствие. Если $|G| = p^2$, то либо $G \cong \mathbb{Z}_{p^2}$, либо $G \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$.

Пример. Приведём пример некоммутативной подгруппы порядка p^3. Пусть $G = \mathbf{U}_n(\mathbb{Z}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $* \in \mathbb{Z}_p$. Тогда, например, при $n = 3$ $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$ — искомая некоммутативная подгруппа.

Задача. Чему будет изоморфна такая подгруппа при $p = 2$: $\mathbf{D}_4$, Q_8 или чему-то новому?

§ 17. Теоремы Силова

Петер Людвиг Мейделль Сюлов (более известен как *Силов*) — норвежский математик, профессор университета Осло. Свои теоремы опубликовал в 1872 году.

Определение. Пусть G — конечная группа, p — простое число. Тогда $|G| = p^k m$, где $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $(m, p) = 1$. *Силовской p-подгруппой в G* называется подгруппа H_p порядка p^k.

Пример. $G = \mathbf{S}_4 \Rightarrow |G| = 24 = 2^3 \cdot 3$

- $p = 2 \Rightarrow |H_p| = 8 \Rightarrow H_p \cong \mathbf{D}_4$.
- $p = 3 \Rightarrow |H_p| = 3$. Например, $H_p = \langle (123) \rangle$.

- $p \geqslant 5 \Rightarrow |H_p| = 1 \Rightarrow H_p = \{e\}$.

Теорема (первая теорема Силова). В любой конечной группе G для любого простого p силовская p-подгруппа существует.

□ Доказательство проведём индукцией по порядку группы. Будем считать, что $k \geqslant 1$ (иначе $H_p = \{e\}$).
Случай 1: $G = A$ — абелева. Тогда $H_p = \mathrm{Tor}_p(A)$.
Случай 2: в G существует неодноэлементный класс сопряжённости $C_G(g)$, и $(|C_G(g)|, p) = 1$. Тогда условие $|G| = |C_G(g)|\,|Z_G(g)|$ влечёт, что $p^k \,\big|\, |Z_G(g)|$. Но поскольку $|Z_G(g)| < |G|$, из неодноэлементности класса сопряжённости $C_G(g)$, то, по предположению индукции, $\forall p$ в $Z_G(g)$ существует силовская p-подгруппа H_p. При этом, так как $p^k \,\big|\, |Z_G(g)|$ и на большие степени p $|Z_G(g)|$ делиться не может, то $|H_p| = p^k$. Тогда H_p — силовская p-подгруппа в G.
Случай 3: $\forall\, C_G(g)$: $|C_G(g)| \neq 1$ $p \,\big|\, |C_G(g)|$. Тогда $|G| = |Z(G)| + ps$, где $s \in \mathbb{N}$. Отсюда $p \,\big|\, |Z(G)|$. Если $|Z(G)| = p^l r$, где $l \geqslant 1$, $(r, p) = 1$, то, по предположению индукции, в $Z(G)$ существует силовская p-подгруппа H_1: $|H_1| = p^l$. Эта подгруппа центральна $\Rightarrow H_1 \triangleleft G \Rightarrow \left|{}^{G}\!/_{H_1}\right| = p^{k-l}m < p^k m = |G| \Rightarrow$ по предположению индукции, в ${}^{G}\!/_{H_1}$ существует силовская p-подгруппа H_2: $|H_2| = p^{k-l}$.
Пусть $\pi\colon G \to {}^{G}\!/_{H_1}$ — гомоморфизм проекции. Тогда $\pi^{-1}(H_2) = H$ — подгруппа, порядок которой равен числу смежных классов, умноженному на количество элементов в этих смежных классах, то есть $|H| = |H_2|\,|H_1| = p^{k-l}p^l = p^k \Rightarrow H = H_p$ — силовская p-подгруппа в G. ■

Замечание. Первая теорема Силова — это частичное обращение теоремы Лагранжа.

Теорема (вторая теорема Силова).

1. Любая p-подгруппа в G содержится в некоторой силовской p-подгруппе.
2. Все силовские p-подгруппы в G сопряжены.

□

1. Пусть $H \subseteq G$ — силовская p-подгруппа, $H_1 \subseteq G$ — p-подгруппа. Рассмотрим действие $H_1 \curvearrowright {}^{G}\!/_{H}$ умножениями слева. Число элементов любой нетривиальной H_1-орбиты делится на p, а $\left|{}^{G}\!/_{H}\right| = m$, где $|G| = p^k m$, $(m, p) = 1$. Получается, существует тривиальная H_1-орбита, то есть неподвижная точка данного движения, то есть $\exists\, gH \in {}^{G}\!/_{H}$: $h_1 gH = gH\ \forall\, h_1 \in H_1 \Leftrightarrow g^{-1}h_1 g \in H\ \forall\, h_1 \in H_1 \Leftrightarrow H_1 \subseteq gHg^{-1}$. Но $|gHg^{-1}| = |H| = p^k \Rightarrow gHg^{-1}$ — тоже силовская.
2. Будем теперь считать, что H_1 — тоже силовская. Вышеприведённые рассуждения показывают, что $\exists\, g \in G$: $H_1 \subseteq gHg^{-1}$. Но $|H_1| = p^k \Rightarrow H_1 = gHg^{-1}$.

■

Следствие. Пусть $H \subseteq G$ — силовская p-подгруппа. Тогда $H \triangleleft G \Leftrightarrow H$ — единственная силовская p-подгруппа.

Определение. Пусть G — группа, $H \subseteq G$ — подгруппа. *Нормализатором* подгруппы H в G называется множество $N_G(H) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$. При этом $H \triangleleft N_G(H)$.

Теорема (третья теорема Силова). Если за n_p обозначить число силовских p-подгрупп в G, то $n_p \equiv 1 \pmod p$ и $n_p \mid m$, где m — индекс силовской p-подгруппы ($|G| = p^k m$, $(m, p) = 1$).

□ Рассмотрим действие $G \curvearrowright M$, где M — множество всех силовских p-подгрупп, сопряжениями: $(g, H) \mapsto gHg^{-1}$. По второй теореме Силова, это действие транзитивно. Значит, $n_p = \frac{|G|}{|\mathrm{St}(H)|} = \frac{|G|}{|N_G(H)|}$. Но $H \subseteq N_G(H) \Rightarrow p^k \mid |N_G(H)| \Rightarrow n_p = \frac{p^k m}{p^k r} \mid m$.
Зафиксируем некоторую силовскую p-подгруппу $H_0 \subseteq G$ и ограничим $G \curvearrowright M$ на H_0, то есть $H_0 \times M \to M$, $(h_0, H) \mapsto h_0 H h_0^{-1}$. Это действие имеет неподвижную точку H_0. Покажем, что других неподвижных точек нет. Если $h_0 H h_0^{-1} = H \,\forall\, h_0 \in H_0$, то есть H — неподвижная точка, то $H_0 \subseteq N_G(H)$. Но и $H \subseteq N_G(H)$. Применяя вторую теорему Силова к $N_G(H)$, получаем, что H и H_0 сопряжены и в G, и в $N_G(H)$. Но $H \triangleleft N_G(H)$, а нормальная подгруппа сопряжена только самой себе $\Rightarrow H_0 = H$. Длина любой неодноточечной H_0-орбиты в M делится на $p \Rightarrow n_p = |M| = 1 + ps \equiv 1 \pmod p$. ■

Следствие 1. *Группа G порядка pq, где p, q — простые, $p > q$, разрешима ступени $\leqslant 2$.*

□ Пусть $H \subseteq G$ — силовская p-подгруппа. Поскольку $n_p \equiv 1 \pmod p$, $n_p \mid q$, то $n_p = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow H \triangleleft G$. Но $|H| = p \Rightarrow H \cong \mathbb{Z}_p$; $\left|{}^{G}\!/_{H}\right| = q \Rightarrow {}^{G}\!/_{H} \cong \mathbb{Z}_q \Rightarrow G$ разрешима ступени $\leqslant 2$. ■

Задача. Доказать, что все группы порядка < 60 разрешимы[17].

Задача. Доказать, что любая группа порядка 15 — циклическая.

[17] Дальше, конечно, хуже: группа $\mathbf{A}_5$ имеет порядок 60, проста и неразрешима.

Лекция 13

Основные понятия теории представлений

§ 1. Основные понятия

Зафиксируем поле F, векторное пространство V над F и группу G.

Определение. *Представлением* группы G в пространстве V называется гомоморфизм $\rho\colon G \to \to \mathbf{GL}(V)$. Число $n = \dim V$ называется *размерностью* представления, а V — *пространством* представления. $\{\rho(g) \mid g \in G\} \subseteq \mathbf{GL}(V)$ — подгруппа, изоморфная ${}^{G}\!/_{\operatorname{Ker}\rho}$, — называется подгруппой *операторов* представления.

Представление $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$ определяет действие $G \times V \to V$, $(g, v) \mapsto \rho(g)\, v$. Таким образом, представления — это линейные действия.

Пример. Для любой группы G существует *тривиальное* представление $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$, $\rho(g) = E \ \forall g \in G$.

Определение. Представление $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$ называется *точным*, если $\operatorname{Ker}\rho = \{e\}$ ($\Leftrightarrow$ соответствующее действие эффективно).

Определение. Представления $\rho_1\colon G \to \mathbf{GL}(V)$ и $\rho_2\colon G \to \mathbf{GL}(W)$, где V и W — пространства над одним полем F, называются *эквивалентными*, или *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi\colon V \to W$, такой что $\varphi(\rho_1(g)\, v) = \rho_2(g)\, \varphi(v)$:

$$\begin{array}{ccc} v & \xrightarrow{\rho_1(g)} & \rho_1(g)\, v \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ \varphi(v) & \xrightarrow{\rho_2(g)} & \rho_2(g)\, \varphi(v) \end{array} \qquad \forall v \in V,\ g \in G.$$

Отсюда автоматически $\dim V = \dim W$.

Попробуем всё то же самое описать на матричном языке. Зафиксируем базис $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq V$. Он определяет отождествления $V \leftrightarrow F^n$ ($v = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \leftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$) и $\mathbf{GL}(V) \leftrightarrow \leftrightarrow \mathbf{GL}_n(F)$. Тогда для представления $\rho\colon \mathbf{GL}_n(F)\ \rho(g)$ — невырожденная матрица размера $n \times n$ над F $\forall g \in G$.

В определении эквивалентности представлений есть изоморфизм $\varphi\colon V \cong F^n \to W \cong F^n$. Он задаётся невырожденной матрицей S размера $n \times n$ над F, и условие $\varphi(\rho_1(g)\, v) = \rho_2(g)\, \varphi(v)$ перепишется как $S(\rho_1(g)\, v) = \rho_2(g)\,(Sv) \Leftrightarrow \rho_1(g)\, v = S^{-1}\rho_2(g)\, Sv \,\forall g \in G, v \in V \Leftrightarrow \rho_1(g) = = S^{-1}\rho_2(g)\, S \,\forall g \in G \Leftrightarrow \rho_2(g) = S\rho_1(g)\, S^{-1} \,\forall g \in G$. Итак, представления ρ_1 и ρ_2 эквивалентны $\Leftrightarrow \forall g \in G$ матрицы $\rho_1(g)$ и $\rho_2(g)$ — матрицы одного оператора в базисах, соответственно, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$, где $e'_i = Se_i$:

$$\{\rho_1(g) \mid g \in G\} \xleftrightarrow[\text{с помощью } S]{\text{сопряжение}} \{\rho_2(g) \mid g \in G\}.$$

В частности, $\operatorname{tr} S^{-1}AS = \operatorname{tr} A$, $\det S^{-1}AS = \det A \Rightarrow$ числа $\operatorname{tr} \rho(g)$ и $\det \rho(g)$ не меняются, если заменить представления на эквивалентные.

Определение. *Инвариантным подпространством* представления $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$ называется подпространство $U \subseteq V$, такое что $\rho(g)\,U \subseteq U \,\forall\, g \in G$.

Пример. Одномерное подпространство $U = \langle v \rangle$ инвариантно $\Leftrightarrow$ v — общий собственный вектор для всех операторов представления.

Определение. Если $U \subseteq V$ — инвариантное подпространство, то определено *подпредставление* $\rho\big|_U(g) : G \to \mathbf{GL}(U)$, $g \mapsto \rho(g)\big|_U$.

На матричном языке: если $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — такой базис в V, что $\{e_1, \ldots, e_k\}$ — базис в U, то $\forall\, g \in G\ \rho(g) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$, $\rho\big|_U(g) = A \in \mathbf{GL}_k(F)$.

У любого представления есть *тривиальные* инвариантные подпространства $U = \{0\}$ и $U = V$.

Определение. Представление $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$ называется *неприводимым*, если у него нет нетривиальных инвариантных подпространств.

Пример. Любое одномерное представление неприводимо.

§ 2. Примеры представлений

1. $G = (\mathbb{Z}, +)$. Представление $\rho\colon G \to \mathbf{GL}_n(F)$ однозначно определено матрицей $A = \rho(1) \in \in \mathbf{GL}_n(F)$, при этом A можно выбирать любой. Тогда $\rho(k) = A^k$. Два таких представления ρ и ρ' эквивалентны $\Leftrightarrow$ $A = \rho(1)$ и $A' = \rho'(1)$ сопряжены.
2. $G = (\mathbb{Z}_n, +)$. Представление $\rho\colon G \to \mathbf{GL}_n(F)$ однозначно определено матрицей $A = = \rho\left(\overline{1}\right) \in \mathbf{GL}_n(F)$, но теперь подходят только такие A, что $A^n = E$.
3. Пусть G — конечная группа, F — поле. Построим векторное пространство V_G с базисом $\{e_g \mid g \in G\}$ над полем F. Размерность такого пространства $\dim V_G = |G|$. Определим *регулярное* представление группы G $\rho = r\colon G \to \mathbf{GL}(V_G)$, $\rho(g)(e_h) = e_{gh}\,\forall\, g, h \in G$. Проверка того, что это гомоморфизм, то есть что $\rho(g_1)\,\rho(g_2) = \rho(g_1 g_2)$, очевидна.

   Инвариантная прямая $U = \left\langle \sum\limits_{g \in G} e_g \right\rangle$.

   Инвариантная гиперплоскость $W = \left\{ \sum\limits_{g \in G} x_g e_g \mid \sum\limits_{g \in G} x_g = 0 \right\}$.

   Предложение 1. *Регулярное представление точно.*

   □ Если $\rho(g) = E$, то $\rho(g)\,e_h = e_{gh} = e_h\,\forall\, g, h \in G \Rightarrow g = e$. ■

   Следствие. Любая конечная группа G реализуется как подгруппа в $\mathbf{GL}_n(F)$ для любого поля F, $n = |G|$. Образ G в $\mathbf{GL}_n(F)$ запишется $(0,1)$-матрицами (то есть матрицами только из нулей и единиц).

4. $G = \mathbf{S}_n$. Определим *мономиальное* представление $\rho\colon \mathbf{S}_n \to \mathbf{GL}_n(F)$ формулой $\rho(\sigma)(e_i) = e_{\sigma(i)}\ \forall\, \sigma \in \mathbf{S}_n, i \in \{1, \ldots, n\}$. Например, при $n = 2$ $g = e \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $g = (12) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$; при $n = 3$ $g = (132) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

   Инвариантная прямая $U = \langle e_1 + \ldots + e_n \rangle$.

   Инвариантная гиперплоскость $W = \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \mid \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$.

   Определение. Подпредставление мономиального представления группы $\mathbf{S}_n$ в гиперплоскости W назовём *каноническим* представлением $\mathbf{S}_n$: $\rho\colon \mathbf{S}_n \to \mathbf{GL}_{n-1}(F)$.

   Напомним, что характеристикой поля называется число

$$\operatorname{char} F = \begin{cases} p, & \exists\, p : \underbrace{1 + \ldots + 1}_{p} = 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

   Известно, что если характеристика поля положительна, то это простое число.

   Теорема 1. Пусть $n \geqslant 3$. Тогда каноническое представление неприводимо $\Leftrightarrow (\operatorname{char} F, n) = 1$ или $\operatorname{char} F = 0$.

   □

   - $\boxed{\Rightarrow}$

     Пусть $\operatorname{char} F = p$, $(p, n) \neq 1$. Тогда $p \mid n \Rightarrow \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n} = 0$. Из этого следует, что прямая $U = \langle e_1 + \ldots + e_n \rangle \subseteq W$. С другой стороны, $\dim W \geqslant 2 \Rightarrow U$ — нетривиальное инвариантное подпространство $\Rightarrow$ представление приводимо.

   - $\boxed{\Leftarrow}$

     Пусть $p \nmid n$ или $\operatorname{char} F = 0$. Предположим, что $0 \neq w \in W$ лежит в инвариантном подпространстве $W_1 \subseteq W$. Надо доказать, что $W_1 = W$. Пусть $0 \neq v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Так как $v \in W$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \exists\, k \neq l$: $x_k \neq x_l$ (иначе $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = n x_1 = 0$, $n \neq 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow v = 0$). Тогда вектор $\rho((kl))\, v - v = (x_l - x_k)\, e_k + (x_k - x_l)\, e_l \in W_1$. Домножим на $(x_l - x_k)^{-1}$ (так как $x_l \neq x_k$) $\Rightarrow e_k - e_l \in W_1 \Rightarrow$ для подстановки σ: $\sigma(k) = 1$, $\sigma(l) = i$ $\rho(\sigma)(e_k - e_l) = e_1 - e_i \in W_1\ \forall\, i \in \{2, \ldots, n\}$.

     Заметим, что если $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 0$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i = \sum\limits_{i=2}^{n} (-y_i)(e_1 - e_i) \Rightarrow W$ порождается векторами $e_1 - e_2$, $e_1 - e_3$, $\ldots$, $e_1 - e_n \Rightarrow W = W_1 \Rightarrow$ нет нетривиальных инвариантных подпространств.

   ■

Лекция 14

Полная приводимость представления

§ 2. Примеры представлений (продолжение)

5. *Знаковое представление* группы $\mathbf{S}_n$, $n \geqslant 2$: $\rho = \operatorname{sgn}\colon \mathbf{S}_n \to \mathbf{GL}_1(F) \cong F^\times$,
$$\rho(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \text{ чётная}, \\ -1, & \sigma \text{ нечётная}. \end{cases}$$
Представление по построению одномерно и, как следствие, неприводимо; оно тривиально (то есть $\operatorname{Im}\rho = \{1\}$) $\Leftrightarrow \operatorname{char} F = 2$.
6. Пусть $G \subseteq \mathbf{GL}_n(F)$ — подгруппа. В этом случае у неё есть *тавтологическое представление* $\rho\colon G \to \mathbf{GL}_n(F)$, $\rho(g) = g\ \forall g \in G$. Представление точно. Также есть *дуальное (двойственное) представление* $\rho\colon G \to \mathbf{GL}_n(F)$, $\rho(g) = (g^{-1})^T$[18].
7. Представление $\mathbf{D}_n \to \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$, $g \mapsto$ матрица преобразования $\mathbb{R}^2$, отвечающего симметрии правильного n-угольника. Например, $R(\alpha) \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

§ 3. Полная приводимость

Определение. Пусть $\rho_1\colon G \to \mathbf{GL}(V_1)$, $\rho_2\colon G \to \mathbf{GL}(V_2)$ — представления над одним и тем же полем F. *Прямой суммой представлений* ρ_1 и ρ_2 называется представление $\rho_1 \oplus \rho_2\colon G \to \to \mathbf{GL}(V_1 \oplus V_2)$,
$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g) = \left(\begin{array}{c|c} \rho_1(g) & 0 \\ \hline 0 & \rho_2(g) \end{array}\right),$$
или $(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(v_1, v_2) = (\rho_1(g)v_1, \rho_2(g)v_2)$. При этом $\dim(\rho_1 \oplus \rho_2) = \dim\rho_1 + \dim\rho_2$.

Пример. Представление ρ изоморфно прямой сумме одномерных представлений тогда и только тогда, когда в подходящем базисе все операторы представления диагональны, то есть $\rho(g) = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix}$ $\forall g \in G$. $V = \langle e_1\rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_n\rangle$ — инвариантное подпространство. В этом случае операторы представления попарно коммутируют.

[18] Если взять просто $\rho(g) = g^{-1}$ или $\rho(g) = g^T$, то это не будет гомоморфизмом, так как множители меняются местами; при указанной композиции такая смена мест происходит дважды.

Определение. Представление $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$ называется *вполне приводимым*, если оно изоморфно прямой сумме неприводимых представлений: $\rho \cong \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_k$.

Пример.

1. Неприводимое представление вполне приводимо.
2. ρ тривиально $\Leftrightarrow \rho = \mathrm{id} \oplus \ldots \oplus \mathrm{id}$, где $\mathrm{id}\colon G \to \mathbf{GL}_1(R)$, $g \mapsto 1 \Leftrightarrow \rho$ вполне приводимо.
3. $\rho\colon (\mathbb{Z}, +) \to \mathbf{GL}_2(F)$, $k \mapsto \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k$.

   Инвариантные подпространства нетривиальны $\Leftrightarrow$ это прямые.

   Поскольку представление циклическое, то инвариантные подпространства достаточно искать относительно $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y & = \lambda x \\ y & = \lambda y \end{cases}.$$

   Тогда либо $y = 0 \Rightarrow \lambda = 1$, либо $\lambda = 1 \Rightarrow y = 0$. Таким образом, в любом случае $\lambda = 1 \Rightarrow$ инвариантная прямая одна — $\langle e_1 \rangle \Rightarrow$ представление приводимо, но не вполне приводимо, так как если бы оно распалось в прямую сумму неприводимых, то эти неприводимые были бы одномерными, но одномерное инвариантное пространство только одно.
4. $\rho\colon (\mathbb{Z}_p, +) \to \mathbf{GL}_2(F)$, $\overline{k} \mapsto \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}^k$, p — простое. Пусть $\mathrm{char}\, F = p$. Тогда $\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{p} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \Rightarrow \rho$ определено корректно.

   Повторяя рассуждения предыдущего примера, увидим, что инвариантная прямая только одна $\Rightarrow \rho$ не является ни неприводимым, ни вполне приводимым.

Теорема (Машке). Пусть G — конечная группа, F — поле, $\mathrm{char}\, F = 0$ или $\mathrm{char}\, F = p$, где $p \nmid |G|$. Тогда все представления группы G над полем F вполне приводимы.

□ Пусть $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$ — представление над полем F. Будем вести индукцию по $\dim V$.

1. $\dim V = 1 \Rightarrow \rho$ неприводимо как одномерное представление $\Rightarrow \rho$ вполне приводимо.
2. Пусть $\dim V > 1$. Если ρ неприводимо, то оно вполне приводимо. Пусть ρ приводимо, $U \subsetneq V$ — нетривиальное инвариантное подпространство.

   Шаг 1. Покажем, что существует инвариантное подпространство $W \subseteq V$: $V = U \oplus W$ (W называется в таком случае *дополнительным инвариантным подпространством*).

Пусть $W' \subseteq V$ — некоторое дополнительное к U подпространство, то есть $V = U \oplus W'$[19]. Рассмотрим оператор проекции $P' \colon V \to W'$, $P'(u+w') = w' \, \forall u \in U, w' \in W'$. Тогда $\operatorname{Ker} P' = U$, $(P')^2 = P'$, $\forall v \in V \; v - P'v \in U$.

«Усредним» оператор проекции на группе G: $P = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} \rho(g) P' \rho(g)^{-1}$[20]. Тогда:

- P коммутирует со всеми операторами представления: $\rho(h) P = P \rho(h) \, \forall h \in G$. Действительно:

$$\begin{aligned} \rho(h) P \rho(h)^{-1} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(h) \rho(g) P' \rho(g)^{-1} \rho(h)^{-1} = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(hg) P' \rho(hg)^{-1} = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) P' \rho(g)^{-1} = P. \end{aligned}$$

- $W = \operatorname{Im} P$ инвариантно. Действительно, $\rho(g) w = \rho(g) P(v) = P(\rho(g) v) \in \operatorname{Im} P = W \, \forall w \in W$.
- $U \subseteq \operatorname{Ker} P$. Действительно, $Pu = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} \rho(g) P' \underbrace{\rho(g)^{-1} u}_{\in U} = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} \rho(g) \underbrace{P'u'}_{=0} = 0 \, \forall u \in U$.
- $\operatorname{Ker} P \subseteq U$, $P^2 = P$. Действительно, $\forall v \in V \; v - Pv = v - \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} \rho(g) P' \rho(g)^{-1} v = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} \rho(g) \left(\rho(g)^{-1} v - P' \rho(g)^{-1} v \right) \in U$. Далее, $P \underbrace{(v - Pv)}_{\in U} = 0 = Pv - P^2 v \Rightarrow Pv = P^2 v \, \forall v \in V \Rightarrow P^2 = P$. Наконец, $\forall v \in \operatorname{Ker} P \; v - Pv = v - 0 = v \in U \Rightarrow \operatorname{Ker} P \subseteq U$.
- $V = U + W$. Действительно, $\forall v \in V \; v = \underbrace{v - Pv}_{\in U} + \underbrace{Pv}_{\in W}$.
- $V = U \oplus W$. Действительно, $\forall v \in U \cap W \, \exists v_0 \in V$: $v = Pv_0 \Rightarrow 0 = Pv = PPv_0 = P^2 v_0 = Pv_0 = v \Rightarrow U \cap W = \{0\} \Rightarrow V = U \oplus W$.

Шаг 2. Поскольку $\dim U, \dim W < \dim V$, то, по предположению индукции, $\rho\big|_U = \rho_1 \oplus \oplus \ldots \oplus \rho_k$, $\rho\big|_W = \rho_{k+1} \oplus \ldots \oplus \rho_n \Rightarrow \rho = \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_k \oplus \rho_{k+1} \oplus \ldots \oplus \rho_n$.

■

§ 4. Инвариантные формы

Над полями $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ шаг 1 теоремы Машке можно провести иначе.

[19] Такое подпространство существует: например, можно взять базис U, дополнить его до базиса V и за W' взять линейную оболочку добавленных базисных векторов.

[20] Использовано предположение, что $\operatorname{char} F = 0$ или $\operatorname{char} F = p$, где $p \nmid |G|$.

Теорема 2. Пусть $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$ — представление конечной группы над полем $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Тогда на пространстве V существует положительно определённая билинейная симметрическая (положительно определённая эрмитова) форма $(\cdot\,,\cdot)$, для которой $(\rho(h)\,v_1, \rho(h)\,v_2) = (v_1, v_2)\ \forall\, h \in G, v_1, v_2 \in V$.

□ Пусть $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ — произвольное скалярное произведение на V. Положим новое скалярное произведение «усреднением» старого: $(v_1, v_2) = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}\langle\rho(g)\,v_1, \rho(g)\,v_2\rangle\ \forall\, v_1, v_2 \in V$. Тогда:

- $(\cdot\,,\cdot)$ — симметрическая билинейная (эрмитова) форма.
- $(\cdot\,,\cdot)$ положительно определена. Действительно, $(v, v) = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}\langle\rho(g)\,v, \rho(g)\,v\rangle > 0$.
- $(\cdot\,,\cdot)$ инвариантно. Действительно:

$$\begin{aligned}(\rho(h)\,v_1, \rho(g)\,v_2) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle\rho(g)\,\rho(h)\,v_1, \rho(g)\,\rho(h)\,v_2\rangle = \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle\rho(gh)\,v_1, \rho(gh)\,v_2\rangle = \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle\rho(g)\,v_1, \rho(g)\,v_2\rangle = (v_1, v_2)\,.\end{aligned}$$

■

Лекция 15

Одномерные представления групп. Представления абелевых групп

§ 4. Полная приводимость (продолжение)

Теперь можно предъявить другое обоснование шага 1 в доказательстве теоремы Машке. Нужно найти инвариантное дополнение W инвариантного подпространства U в пространстве V. Положим

$$W = U^{\perp} \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid (v, u) = 0 \,\forall\, u \in U\}.$$

То, что это дополнение, известно из курса линейной алгебры: $V = U \oplus U^{\perp}$. Остаётся проверить инвариантность $U^{\perp}$. Если $v \in U^{\perp}$, $g \in G$, то $\forall\, u \in U\ (\rho(g)\, v, u) = (\rho(g^{-1})\, \rho(g)\, v, \rho(g^{-1})\, u) = (v, \rho(g^{-1})\, u) = 0 \Rightarrow \rho(g)\, v \in U^{\perp}$.

Замечание. Пусть G — конечная группа, $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$ — представление. Мы доказали, что над $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) в подходящем базисе все операторы представления записываются ортогональными (унитарными) матрицами, то есть $AA^T = E$ ($A\overline{A}^T = E$).

Задача. Доказать (над $\mathbb{C}$), что если $\mathcal{A}^m = \mathcal{E}$, $m \in \mathbb{N}$, то $\mathcal{A}$ диагонализируем.

Наша дальнейшая цель — классифицировать неприводимые представления (в основном над $\mathbb{C}$) данной конечной группы.

§ 5. Одномерные представления

Пусть G — произвольная группа, F — произвольное поле, $\rho\colon G \to \mathbf{GL}_1(F) \cong F^{\times}$ — одномерное представление.

Лемма 1. *Коммутант G лежит в* $\operatorname{Ker}\rho$.

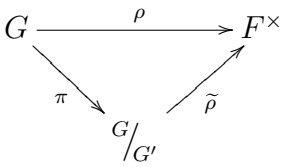
□ Поскольку группа $F^{\times}$ коммутативна, имеем

$$\rho\left(ghg^{-1}h^{-1}\right) = \rho(g)\,\rho(h)\,\rho\left(g^{-1}\right)\rho\left(h^{-1}\right) = \\ = \rho(g)\,\rho\left(g^{-1}\right)\rho(h)\,\rho\left(h^{-1}\right) = 1.$$

Отсюда $[g, h] \in \operatorname{Ker}\rho\, \forall\, g, h \in G \Rightarrow G' \subseteq \operatorname{Ker}\rho$. ■

Тем самым представление $\rho\colon G \to F^{\times}$ определяет представление $\widetilde{\rho}\colon {}^{G}\!/_{G'} \to F^{\times}$, $\widetilde{\rho}(gG') \stackrel{\text{def}}{=} \rho(g)$. Обратно, любое представление $\widetilde{\rho}\colon {}^{G}\!/_{G'} \to F^{\times}$ определяет представление $\rho\colon G \to F^{\times}$, $\rho = \widetilde{\rho} \circ \pi$, где π — естественная проекция: $\pi\colon G \to {}^{G}\!/_{G'}$; то есть $\rho(g) = \widetilde{\rho}(gG')$. Тем самым доказана

Теорема 3. Диаграмма



определяет биекцию между одномерными представлениями G и одномерными представлениями ${}^{G}\!/_{G'}$.
${}^{G}\!/_{G'}$ — абелева группа, поэтому теперь рассматриваем только их.
Пусть далее G конечна. Тогда ${}^{G}\!/_{G'}$ — конечная абелева группа $\Rightarrow {}^{G}\!/_{G'} \cong \mathbb{Z}_{u_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{u_m}$.

Замечание. Одномерные представления эквивалентны $\Leftrightarrow$ они совпадают: $S\rho'(g)\,S^{-1} = \rho(g)$ $\forall\, g \in G$.

Предложение 2.

1. *Одномерное комплексное представление группы $\mathbb{Z}_u$ имеет вид $\rho_\varepsilon\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}^\times$, $\overline{k} \mapsto \varepsilon^k$, $\varepsilon^n = 1$*[21)].
2. *Конечная абелева группа A имеет ровно $|A|$ одномерных комплексных представлений.*

□

1. $\rho\colon \mathbb{Z}_u \to \mathbb{C}^\times \Rightarrow \rho\left(\overline{1}\right) = \varepsilon$, $\varepsilon^n = 1 \Rightarrow \rho\left(\overline{k}\right) = \varepsilon^k \Rightarrow \rho = \rho_\varepsilon$.

   Обратно, любой ε: $\varepsilon^n = 1$ определяет представление ρ_ε. Разные ε дают неэквивалентные представления.
2. Мы знаем, что $A \cong \mathbb{Z}_{u_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{u_m}$. Пусть $\rho\colon A \to \mathbb{C}^\times$. Тогда $\rho\big|_{\{0\} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{u_i} \oplus \ldots \oplus \{0\}} : \mathbb{Z}_{u_i} \to$ $\to \mathbb{C}^\times$ имеет вид ρ_{ε_i}, $\varepsilon_i^{u_i} = 1 \Rightarrow \rho\left(\left(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_m}\right)\right) = \rho\left(\left(\overline{k_1}, \overline{0}, \ldots, \overline{0}\right) + \ldots + \left(\overline{0}, \overline{0}, \ldots, \overline{k_m}\right)\right) =$ $= \rho\left(\left(\overline{k_1}, \overline{0}, \ldots, \overline{0}\right)\right) \ldots \rho\left(\left(\overline{0}, \ldots, \overline{k_m}\right)\right) = \varepsilon_1^{k_1} \ldots \varepsilon_m^{k_m}$. Таких представлений столько же, сколько способов выбрать набор из ε — $u_1 \ldots u_m = |A|$.

■

Следствие. Пусть G — конечная группа. Тогда число её одномерных представлений равно $\left|{}^{G}\!/_{G'}\right|$.

Пример.

1. Опишем одномерные комплексные представления группы диэдра $\mathbf{D}_4$. Поскольку $|\mathbf{D}_4| = 8$, а $\mathbf{D}_4' = \{e, R(\pi)\}$, то $\left|{}^{\mathbf{D}_4}\!/_{\mathbf{D}_4'}\right| = 4 \Rightarrow {}^{\mathbf{D}_4}\!/_{\mathbf{D}_4'} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ или ${}^{\mathbf{D}_4}\!/_{\mathbf{D}_4'} \cong \mathbb{Z}_4$. Но $\mathbf{D}_4$ можно породить двумя «соседними» симметриями, которые имеют порядок 2, и $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, в отличие от $\mathbb{Z}_4$, тоже порождается элементами порядка 2. Значит, ${}^{\mathbf{D}_4}\!/_{\mathbf{D}_4'} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

   Получаем четыре одномерных представления:

	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4
S_1	1	1	-1	-1
S_2	1	-1	1	-1

[21)] Видно, что таких представлений n штук, как корней n-й степени из единицы.

2. $G = \mathbf{A}_4 \Rightarrow {}^{\mathbf{A}_4}\!/_{\mathbf{A}_4'} \cong \mathbb{Z}_3$ и порождается $(123)\,\mathbf{A}_4'$. Тут три одномерных представления:

	ρ_1	ρ_2	ρ_3
(123)	1	ε	ε^2

   Здесь $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

3. $G = \mathbf{A}_5 \Rightarrow {}^{\mathbf{A}_5}\!/_{\mathbf{A}_5'} = \{e\} \Rightarrow$ любое одномерное представление тривиально.

Задача. Чему равно число одномерных вещественных представлений:

1. группы $\mathbb{Z}_4$;
2. произвольной конечной абелевой группы A?

§ 6. Представления абелевых групп

Основное поле — $\mathbb{C}$.

Теорема 4. Неприводимое комплексное представление абелевой группы одномерно.

□ *Шаг 1.* Пусть $\{\mathcal{A}_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ — набор линейных операторов в комплексном векторном пространстве V, $\dim V < \infty$, и $\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_j\mathcal{A}_i \ \forall\, i, j \in \mathcal{I}$. Тогда у них существует общий собственный вектор, то есть $0 \neq v \in V$: $\mathcal{A}_i v = \lambda_i v$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Доказывается это индукцией по размерности пространства:

1. Если $\dim V = 1$, то всё ясно.
2. Пусть $\dim V > 1$. Если все $\mathcal{A}_i$ скалярны, то любой вектор будет собственным для всех $\mathcal{A}_i$. Пусть $\mathcal{A}_1$ нескалярен, λ_1 — его собственное значение, $V_{\lambda_1} = \{v \in V \mid \mathcal{A}_1 v = \lambda_1 v\}$. Тогда $\{0\} \neq V_{\lambda_1} \neq V$. Проверим, что V_{λ_1} инвариантно относительно всех $\mathcal{A}_i$. Пусть $v \in V_{\lambda_1}$. Тогда $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_i v = \mathcal{A}_i\mathcal{A}_1 v = \mathcal{A}_i\lambda_1 v = \lambda_1\,(\mathcal{A}_i v) \Rightarrow \mathcal{A}_i v \in V_{\lambda_1}$. Поскольку $\dim V_{\lambda_1} < \dim V$, то, по предположению индукции, операторы $\mathcal{A}_i$ имеют общий собственный вектор в V_{λ_1}.

Шаг 2. Пусть $\rho\colon A \to \mathbf{GL}\,(V)$ — неприводимое комплексное представление абелевой группы A. Тогда операторы $\rho\,(a)$, $a \in A$, коммутируют $\Rightarrow$ они имеют общий собственный вектор $v \in V$. Тогда $U = \langle v \rangle$ — инвариантное подпространство для представления $\rho \Rightarrow V = U$, в силу неприводимости $\rho \Rightarrow \dim V = 1$. ■

Следствие. Любое комплексное представление конечной абелевой группы эквивалентно прямой сумме одномерных.

□ По теореме Машке, представление эквивалентно прямой сумме неприводимых, а по теореме § 6, неприводимые одномерны. ■

Пример.

1. Если абелева группа бесконечна, то утверждение следствия неверно. Контрпример:

$$\rho\colon \mathbb{Z} \to \mathbf{GL}_2\,(\mathbb{C}),\ k \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k.$$

2. Утверждение следствия также неверно над $\mathbb{R}$. Контрпример: $\rho\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$,

$$\overline{k} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{3} & \sin\frac{2\pi k}{3} \\ -\sin\frac{2\pi k}{3} & \cos\frac{2\pi k}{3} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ недиагонализируема над $\mathbb{R}$.

Задача. Сколько с точностью до эквивалентности двумерных комплексных представлений у группы $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$?

Задача. Пусть $\{\mathcal{A}_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ — линейные операторы в комплексном векторном пространстве V, $\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_j\mathcal{A}_i \ \forall\, i, j \in \mathcal{I}$. Предположим, что все операторы $\mathcal{A}_i$ диагонализируемы. Доказать, что существует базис, в котором все $\mathcal{A}_i$ записываются диагональными матрицами.

Задача. Пусть все неприводимые комплексные представления конечной группы G одномерны. Доказать, что G абелева.

Следующая цель — описать неприводимые неодномерные комплексные представления конечных групп, например $\mathbf{S}_3$ или $\mathbf{S}_4$.

Лекция 16

Лемма Шура и усреднение отображений. Характеры представлений

§ 7. Лемма Шура и усреднение отображений

Пусть $\rho_1 \colon G \to \mathbf{GL}(V)$, $\rho_2 \colon G \to \mathbf{GL}(W)$ — представления группы G над полем F.

Определение. Линейное отображение $\varphi \colon V \to W$ называется *гомоморфизмом представлений* ρ_1 и ρ_2, если $\varphi(\rho_1(g)\, v) = \rho_2(g)\, \varphi(v)\ \ \forall\, g \in G,\ v \in V$:

$$\begin{array}{ccc} v & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(v) \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_1(g)} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_2(g)} \\ \rho_1(g)\, v & \xrightarrow{\varphi} & v'. \end{array}$$

Теорема (лемма Шура). Пусть представления ρ_1 и ρ_2 неприводимы, φ — гомоморфизм ρ_1 и ρ_2. Тогда:

1. если $\rho_1 \not\cong \rho_2$, то $\varphi = 0$;
2. если $\rho_1 \cong \rho_2$, то либо $\varphi = 0$, либо φ — изоморфизм представлений;
3. если $F = \mathbb{C}$, $V = W$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, то $\varphi = \lambda \mathcal{E}$, где $\lambda \in \mathbb{C}$.

□ Заметим, что $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq V$ и $\operatorname{Im}\varphi \subseteq W$ — инвариантные подпространства.
Из неприводимости ρ_1 следует, что возможны только два случая.
Случай 1. $\operatorname{Ker}\varphi = V \Rightarrow \varphi = 0$.
Случай 2. $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$. Поскольку $\dim V = \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi$, то если $\operatorname{Im}\varphi = \{0\}$, то $\dim V = 0 \Rightarrow V = \{0\} \Rightarrow \varphi \equiv 0$; если же $\operatorname{Im}\varphi \neq 0$, то, из неприводимости ρ_2, $\operatorname{Im}\varphi = W \Rightarrow \varphi \colon V \to W$ — изоморфизм пространств (инъективен в силу тривиальности ядра, сюръективен в силу равенства образа W) $\Rightarrow \varphi$ — изоморфзизм представлений. Таким образом, доказаны пункты 1 и 2.
Докажем пункт 3. Можно считать, что $\varphi \neq 0$. Тогда φ — изоморфизм, по пункту 2, и это линейный оператор $\varphi \colon V \to V$, который имеет ненулевой собственный вектор $v_0 \in V$ с ненулевым собственным значением $\lambda \in \mathbb{C}$ (это следует из невырожденности изоморфизма φ), то есть $\varphi(v_0) = \lambda v_0$. Тем самым подпространство собственных векторов $V_\lambda = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\} \neq \{0\}$. Проверим, что оно инвариантно. Действительно, $\varphi(\rho(g)\, v) = \rho(g)\, \varphi(v) = \rho(g)\, \lambda v = \lambda \rho(g)\, v\ \ \forall\, g \in G,\ v \in V_\lambda$. Поскольку ρ неприводимо, $V_\lambda \neq \{0\}$, то $V_\lambda = V \Rightarrow \varphi = \lambda \mathcal{E}$. ■

Пункт 3 можно переформулировать следующим образом: если линейный оператор $\mathcal{A}$ коммутирует со всеми операторами неприводимого представления и $F = \mathbb{C}$, то $\mathcal{A}$ скалярен: $\mathcal{A} = \lambda\mathcal{E}$.

Задача. Показать на примере, что при $F = \mathbb{R}$ это неверно.

Следствие. Пусть $\rho_1 \colon G \to \mathbf{GL}(V)$ и $\rho_2 \colon G \to \mathbf{GL}(W)$ — два неприводимых комплексных представления конечной группы G, $\varphi \colon V \to W$ — произвольное линейное отображение. Тогда для *усреднения* $\widetilde{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} \rho_2(g)\, \varphi \rho_1(g^{-1})$ имеем:

1. если $\rho_1 \not\cong \rho_2$, то $\widetilde{\varphi} = 0$;
2. если $V = W$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, то $\widetilde{\varphi} = \frac{\operatorname{tr}\varphi}{\dim V}\mathcal{E}$.

□ Проверим, что $\rho_2(h)\,\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}\rho_1(h)$. В самом деле,

$$\begin{aligned}\rho_2(h)\,\widetilde{\varphi}\rho_1\left(h^{-1}\right) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_2(h)\,\rho_2(g)\,\varphi\rho_1\left(g^{-1}\right)\rho_1\left(h^{-1}\right) = \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_2(hg)\,\varphi\rho_1(hg)^{-1} = \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_2(g)\,\varphi\rho_1\left(g^{-1}\right) = \widetilde{\varphi}.\end{aligned}$$

Тогда из леммы Шура следует пункт 1.
Для пункта 2 из леммы Шура получаем $\widetilde{\varphi} = \lambda\mathcal{E}$,

$$\lambda \dim V = \operatorname{tr}\lambda\mathcal{E} = \operatorname{tr}\widetilde{\varphi} = \operatorname{tr}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\,\varphi\rho\left(g^{-1}\right)\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\operatorname{tr}\left(\rho(g)\,\varphi\rho\left(g^{-1}\right)\right).$$

Напомним, что $\operatorname{tr}AB = \operatorname{tr}BA \Rightarrow trCAC^{-1} = \operatorname{tr}A \Rightarrow \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}\operatorname{tr}\left(\rho(g)\,\varphi\rho\left(g^{-1}\right)\right) = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}\operatorname{tr}\varphi =$ $= \operatorname{tr}\varphi \Rightarrow \lambda = \frac{\operatorname{tr}\varphi}{\dim V}$. ■

То же утверждение рассмотрим в матричном виде. Пусть $\{e_i\}$ — базис V, $\{f_j\}$ — базис W, $\rho_1(g) = (a_{ij}(g))$, $\rho_2(g) = (b_{ij}(g))$, $\varphi = (\varphi_{ij})$. Тогда $\widetilde{\varphi} = (\widetilde{\varphi_{ij}})$,

$$\widetilde{\varphi_{ij}} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{i',j'} b_{ii'}(g)\,\varphi_{i'j'}a_{j'j}\left(g^{-1}\right). \qquad (*)$$

Возьмём $\varphi = E_{i_0j_0} = \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}$, где единица стоит на i_0-й строке в j_0-м столбце, а на всех остальных местах — нули. Тогда:

1. при $\rho_1 \not\cong \rho_2$ подставим φ в (∗) и воспользуемся пунктом 1 следствия, чтобы получить следующее *соотношение 1*:

$$\widetilde{\varphi_{ij}} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} b_{ii_0}(g)\, a_{j_0 j}\left(g^{-1}\right) = 0 \qquad \forall\, i, i_0, j, j_0; \tag{C1}$$

2. при $V = W$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ $\operatorname{tr}\varphi = \sum\limits_i \varphi_{ii} = \sum\limits_{i,j} \delta_{ij}\varphi_{ij}$ и $\widetilde{\varphi} = \frac{\operatorname{tr}\varphi}{\dim V}\mathcal{E}$, откуда $\widetilde{\varphi_{ij}} = \delta_{ij}\frac{\operatorname{tr}\varphi}{\dim V} = \frac{\delta_{ij}}{\dim V}\sum\limits_{i',j'} \delta_{i'j'}\varphi_{i'j'}$. Сравнивая (∗) и (C1), получаем:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{i',j'} b_{ii'}(g)\,\varphi_{i'j'}a_{j'j}\left(g^{-1}\right) = \frac{1}{\dim V}\sum_{i',j'}\delta_{ij}\delta_{i'j'}\varphi_{i'j'}.$$

Снова рассматривая $\varphi = E_{i_0 j_0}$, получаем *соотношение 2*:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} b_{ii_0}(g)\, a_{j_0 j}\left(g^{-1}\right) = \frac{\delta_{ij}\delta_{i_0 j_0}}{\dim V}. \tag{C2}$$

§ 8. Характеры представлений

Пусть $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$ — представление группы G над полем F.

Определение. *Характером представления* ρ называется функция $\chi_\rho\colon G \to F$, $\chi_\rho(g) = \operatorname{tr}\rho(g)$.

Всюду далее полагаем $F = \mathbb{C}$. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения $\rho(g)$ с учётом алгебраической кратности, то $\chi_\rho(g) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$. Ясно, что если заменить ρ на эквивалентное представление $C\rho C^{-1}$, то, так как при сопряжении след не меняется, не меняется и характер.

Предложение 3.

1. $\chi_\rho(e) = \dim V$;
2. $\chi_\rho(h^{-1}gh) = \chi_\rho(g)\ \ \forall\, g, h \in G$, *то есть* χ_ρ *постоянна на классах сопряжённости;*
3. *если* $\operatorname{ord}(g) < +\infty$, *то* $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$;
4. $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$.

□

1. $\chi_\rho(e) = \operatorname{tr} E = \dim V$.
2. $\chi_\rho(h^{-1}gh) = \operatorname{tr}\rho(h^{-}1)\,\rho(g)\,\rho(h) = \operatorname{tr}\rho(g) = \chi_\rho(g)$.
3. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения $\rho(g)$, то $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$ — собственные значения $\rho(g^{-1})$.

   $\lambda_i^{\operatorname{ord}(g)} = 1 \Rightarrow |\lambda_i| = 1 \Rightarrow \lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i} \Rightarrow \operatorname{tr}\rho(g^{-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1} = \sum\limits_{i=1}^{n}\overline{\lambda_i} = \overline{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i} = \overline{\operatorname{tr}\rho(g)}$.

4. $\operatorname{tr}\begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix} = \operatorname{tr}\rho_1(g) + \operatorname{tr}\rho_2(g)$.

■

Всюду далее G конечна. Множество всех функций $F(G) = \{f\colon G \to \mathbb{C}\}$ — конечномерное векторное пространство: $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(g) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 f_1(g) + \alpha_2 f_2(g)$, базис —

$$\left\{ \delta_h(g) = \begin{cases} 1, & h = g, \\ 0, & h \neq g \end{cases} \mid h \in G \right\}.$$

В частности, $\dim F(G) = |G|$.

Определение. Функция $f \in F(G)$ называется *центральной*, если она постоянна на классах сопряжённости, то есть $f(hgh^{-1}) = f(g)\ \forall\, g, h \in G$. Подпространство центральных функций в $F(G)$ обозначим как $F_C(G)$.

Ясно, что $\chi_\rho \in F_C(G)$.

Наша ближайшая цель — доказать, что характеры неприводимых представлений составляют базис в $F_C(G)$.

Лекция 17

Неприводимые комплексные представления конечных групп

§ 8. Характеры представлений (продолжение)

Пусть $K_1, \ldots, K_r$ — все классы сопряжённости в G. Тогда $\dim F_C(G) = r$,

$$\left\{ \widetilde{f}_i(g) = \begin{cases} 1, & g \in K_i, \\ 0, & g \notin K_i \end{cases} \mid i \in \{1, \ldots, r\} \right\}$$

— базис в $F_C(G)$.
Превратим $F(G)$ в эрмитово векторное пространство: $(f_1, f_2) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}$.

Лемма 2. $(\cdot, \cdot)$ — *невырожденная эрмитова форма.*

□ Линейность по первому аргументу очевидна.
$(f_2, f_1) = \frac{1}{|G|} f_2(g) \overline{f_1(g)} = \overline{(f_1, f_2)} \Rightarrow$ эрмитовость проверена.
Остаётся невырожденность: если f лежит в ядре, надо доказать, что она нулевая. Действительно, $(f, \delta_h) = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} f(g) \overline{\delta_h(g)} = \frac{1}{|G|} f(h) \Rightarrow f = 0$. ■

Теорема (соотношение ортогональности для характеров). Пусть ρ_1 и ρ_2 — неприводимые комплексные представления конечной группы G. Тогда $(\chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2}) = \begin{cases} 1, & \rho_1 \cong \rho_2, \\ 0, & \rho_1 \ncong \rho_2. \end{cases}$

□ В наших обозначениях $\chi_{\rho_1}(g) = \sum\limits_j a_{jj}(g)$, $\chi_{\rho_2}(g) = \sum\limits_i b_{ii}(g)$.

Пусть $\rho_1 \ncong \rho_2$. Подставляя в (C1) (используется неприводимость представлений) $i_0 = i$, $j_0 = j$ и суммируя равенства для всех i и j, получаем

$$0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i,j} b_{ii}(g) a_{jj}\left(g^{-1}\right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\sum_i b_{ii}(g) \right) \left(\sum_j a_{jj}\left(g^{-1}\right) \right) =$$
$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\rho_2}(g) \chi_{\rho_1}\left(g^{-1}\right) \overset{22)}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\rho_2}(g) \overline{\chi_{\rho_1}(g)} = (\chi_{\rho_2}, \chi_{\rho_1}).$$

Пусть $\rho_1 \cong \rho_2$. Тогда считаем, что $V = W$ и $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Аналогично в (C2) подставляя $i_0 = i$, $j_0 = j$ и суммируя равенства для всех i и j, получаем

$$1 = \frac{\sum\limits_{i,j} \delta_{ij}}{\dim V} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\sum_i b_{ii}(g) \right) \left(\sum_j a_{jj}\left(g^{-1}\right) \right) =$$
$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\rho_2}(g) \overline{\chi_{\rho_1}(G)} = (\chi_{\rho_2}, \chi_{\rho_1}).$$

■

Определение. Пусть $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$ — представление группы G, $\rho \cong \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_k$ — разложение ρ в прямую сумму неприводимых. Тогда *кратностью вхождения* неприводимого представления $\widetilde{\rho}$ в ρ называется количество ρ_i, изоморфных $\widetilde{\rho}$, то есть $|\{\rho_i \cong \widetilde{\rho} \mid i \in \{1, \ldots, k\}\}|$.

Теорема 5. Пусть G — конечная группа, $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$ — комплексное представление. Тогда:

1. Кратность вхождения $\widetilde{\rho}$ в ρ равна $(\chi_\rho, \chi_{\widetilde{\rho}})$. В частности, кратность вхождения не зависит от разложения ρ в прямую сумму неприводимых.
2. Два комплексных представления $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$ и $\rho'\colon G \to \mathbf{GL}(W)$ изоморфны $\Leftrightarrow \chi_\rho = \chi_{\rho'}$.

□

1. По теореме Машке, $\rho = \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_k \Rightarrow \chi_\rho = \chi_{\rho_1} + \ldots + \chi_{\rho_k}$. Тогда $(\chi_\rho, \chi_{\widetilde{\rho}}) = (\chi_{\rho_1}, \chi_{\widetilde{\rho}}) + \ldots + (\chi_{\rho_k}, \chi_{\widetilde{\rho}})$. Это сумма нулей и единиц, причём единицы отвечают случаю, когда $\rho_i \cong \widetilde{\rho}$. Значит, эта сумма равна кратности вхождения $\widetilde{\rho}$ в ρ.
2. - $\boxed{\Rightarrow}$
   Уже обсуждалось: характер — это, по определению, след, который при переходе к эквивалентному представлению, то есть при сопряжении, не меняется.
   - $\boxed{\Leftarrow}$
   Пусть $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$. Тогда, по пункту 1, в разложения ρ и ρ' на неприводимые входят одни и те же слагаемые с одними и теми же кратностями $\Rightarrow \rho \cong \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_k \cong \rho'$.

■

§ 9. Неприводимые комплексные представления конечных групп

Теорема 6. Число (классов эквивалентности) неприводимых комплексных представлений конечной группы G равно числу r классов сопряжённости в G.

□ Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_s$ — все (попарно неэквивалентные) неприводимые комплексные представления группы G. Тогда их характеры $\chi_{\rho_1}, \ldots, \chi_{\rho_s}$ — попарно ортогональные центральные функции на G. Они линейно независимы, и их число не превосходит $\dim F_C(G) = r$. Таким образом, $s \leqslant r$.

Лемма 3. *Пусть $f \in F_C(G)$, $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$ — неприводимое представление. Тогда линейный оператор $L_{f,\rho}\colon V \to V$, $L_{f,\rho} = \sum\limits_{h \in G} \overline{f(h)}\rho(h)$, имеет вид $\lambda\mathcal{E}$, где $\lambda = \frac{|G|}{\dim V}(\chi_\rho, f)$.*

□ Получаем

$$\rho(g) L_{f,\rho} \rho\left(g^{-1}\right) = \sum_{h \in G} \rho(g)\,\overline{f(h)}\rho(h)\,\rho\left(g^{-1}\right) = \sum_{h \in G} \overline{f(h)}\rho\left(ghg^{-1}\right) =$$
$$= \sum_{h \in G} \overline{f\left(ghg^{-1}\right)}\rho\left(ghg^{-1}\right) = \sum_{h \in G} \overline{f(h)}\rho(h) = L_{f,\rho}.$$

Отсюда $\rho(g) L_{f,\rho} = L_{f,\rho}\rho(g) \Rightarrow$ по лемме Шура, $L_{f,\rho} = \lambda\mathcal{E}$.

Вычисляем след: $\lambda \dim V = \operatorname{tr}\lambda\mathcal{E} = \operatorname{tr} L_{f,\rho} = \sum\limits_{h\in G} \overline{f(h)} \operatorname{tr}\rho(h) = |G| \left(\frac{1}{G} \sum\limits_{h\in G} \chi_\rho(h) \overline{f(h)} \right) =$
$= |G| (\chi_\rho, f) \Rightarrow \lambda = \frac{|G|}{\dim V} (\chi_\rho, f)$. ■

Лемма 4. *Характеры $\chi_{\rho_1}, \ldots, \chi_{\rho_s}$ образуют ортонормированный базис $F_C(G)$.*

□ Так как характеры образуют ортонормированную систему векторов, их можно включить в ортонормированный базис $F_C(G)$. Пусть при дополнении до базиса действительно добавляется некоторая функция $f \in F_C(G)$, то есть $(\chi_{\rho_i}, f) = 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, s\}$. Тогда, по лемме 3, $L_{f,\rho_i} = \frac{|G|}{\dim \rho_i} (\chi_{\rho_i}, f)\mathcal{E} = 0$. По теореме Машке, $\rho = m_1\rho_1 \oplus \ldots \oplus m_s\rho_s$, где $m_i \geqslant 0$ — кратности. Тогда $L_{f,\rho} = \bigoplus\limits_i m_i L_{f,\rho_i} = 0$. С другой стороны, применим это к регулярному представлению $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V_G)$, $V_G = \langle e_h \mid h \in G \rangle$, $\rho(g) e_h = e_{gh}$. Тогда $0 = L_{f,\rho}(e_e) = \sum\limits_{h\in G} \overline{f(h)} \rho(h)(e_e) = \sum\limits_{h\in G} \overline{f(h)} e_h$. Это линейная комбинация базисных векторов V_G, равная нулю $\Rightarrow \overline{f(h)} = 0 \ \forall h \in G \Rightarrow f = 0$. ■

Таким образом, по лемме 4, $s = r$. ■

Теорема 7. Пусть G — конечная группа, $\rho_1, \ldots, \rho_r$ — все её неприводимые представления, $n_i \overset{\text{def}}{=} \dim \rho_i$. Тогда:

1. Кратность вхождения представления ρ_i в регулярное представление ρ равна n_i.
2. $|G| = \sum\limits_{i=1}^{r} n_i^2$.

□

1. Вычислим характер регулярного представления ρ.

   $\chi_\rho(e) = \dim V_G = |G|$, по построению.

   $\chi_\rho(h) = 0 \ \forall h \neq e$, поскольку $\rho(h) e_g = e_{hg} \neq e_g$ (то есть любой базисный вектор перейдёт в другой базисный вектор, что сделает диагональ нулевой).

   Далее, $(\chi_\rho, \chi_{\rho_i}) = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g\in G} \chi_\rho(g) \overline{\chi_{\rho_i}(g)} = \frac{1}{|G|} |G| \overline{\chi_{\rho_i}(e)} = \overline{n_i} = n_i$, так как $n_i \in \mathbb{Z}_+$. По пункту 1 теоремы § 8, кратность вхождения равна n_i.

2. Итак, $\rho = n_1\rho_1 \oplus \ldots \oplus n_r\rho_r$, и $|G| = \dim\rho = n_1 \dim\rho_1 + \ldots + n_r \dim\rho_r = n_1 \cdot n_1 + \ldots + n_r \cdot n_r = \sum\limits_{i=1}^{r} n_i^2$.

■

Пример. $G = \mathbf{S}_3$.

Одномерных представлений $\left| {}^{\mathbf{S}_3}\!/_{\mathbf{S}_3'} \right| = 2$: id и sgn.

$|\mathbf{S}_3| = 6 = 1^2 + 1^2 + 4 = 1^2 + 1^2 + 2^2$, то есть есть ещё одно двумерное представление. Им оказывается каноническое.

Пример. $G = \mathbf{S}_4$.

Одномерных представлений $\left|{}^{\mathbf{S}_4}\!/_{\mathbf{S}_4'}\right| = 2$: id и sgn.

$|\mathbf{S}_4| = 24 = 1^2 + 1^2 + 22 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2$, то есть ещё одно двумерное и два трёхмерных представления. С их рассмотрения мы начнём следующую лекцию.

Лекция 18

Кольца и поля

§ 9. Неприводимые комплексные представления конечных групп (продолжение)

Завершим рассмотрение примера с предыдущей лекции.

Пример. $G = \mathbf{S}_4$. Мы выяснили, что у него два одномерных (id и sgn), одно двумерное и два трёхмерных представления.
Рассмотрим композицию гомоморфизма $\mathbf{S}_4 \to {}^{\mathbf{S}_4}\!/_{\mathbf{S}_4''} = {}^{\mathbf{S}_4}\!/_{\mathbf{V}_4} \cong \mathbf{S}_3$ и канонического представления $\mathbf{S}_3 \to \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$. Такая композиция даст двумерное неприводимое представление $\mathbf{S}_4$.
Остались трёхмерные. Нам известно, что группа симметрий тетраэдра и группа вращений куба изоморфны $\mathbf{S}_4$. Помещаем начало координат в середину тетраэдра (куба), записываем матрицами все симметрии (вращения) и получаем два трёхмерных вещественных, то есть и комплексных, представления. Так как мы знаем классификацию одномерных и двумерных представлений, у них у всех в ядре лежит $\mathbf{V}_4$. Но в ядре трёхмерных представлений $\mathbf{V}_4$ лежать не может, так как определяет нетривиальные симметрии тетраэдра (вращения куба). Таким образом, построенные трёхмерные представления не могут распасться в сумму неприводимых меньших размерностей, что доказывает их неприводимость. Также они неэквивалентны, так как для представления через тетраэдр определитель равен ± 1, а через куб — 1.
Каноническое представление тоже неприводимо и трёхмерное. Но оказывается, что оно изоморфно представлению через тетраэдр: из теоремы § 9 следует, что хотя бы одному из построенных трёхмерных представлений оно должно быть изоморфно, а его определитель равен ± 1.

§ 1. Кольца и поля. Основные определения и примеры

Определение. Множество R с двумя бинарными операциями «$+$» и «$\times$» называется *кольцом* $(R, +, \times)$, если:

1. $(R, +)$ — абелева группа (её нейтральный элемент будем обозначать как 0);
2. операции удовлетворяют свойству дистрибутивности:
   - $a(b + c) = ab + ac$ (дистрибутивность слева);
   - $(b + c)a = ba + ca$ (дистрибутивность справа);

   $\forall\, a, b, c \in R$.

Обычно в кольце операция умножения больше никаким условиям удовлетворять не должна. Но в этом курсе мы добавим к определению ещё два условия:

3. умножение ассоциативно: $a\,(bc) = (ab)\,c\ \forall\, a, b, c \in R$;
4. $\exists 1 \in R$: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a\ \forall\, a \in R$.

Таким образом, мы сделали $(R, \times)$ моноидом.

Определение. Кольцо R коммутативно, если $ab = ba\ \forall\, a, b \in R$.

Определение. Пусть F — поле. Тогда векторное пространство A над F называется *F-алгеброй*, или просто *алгеброй*, если на A задано билинейное отображение $A \times A \to A$, $(a, b) \mapsto ab$, такое что $(A, +, \times)$ — кольцо.

Формулировка определений *подкольца* и *подалгебры* остаётся слушателю курса в качестве упражнения.

Пример.

1. $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n$ — кольца.
2. Если F — поле, то F — кольцо и алгебра, $F[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо (многочленов), $\mathrm{Mat}_n(F)$ — некоммутативная F-алгебра.
3. Если F — поле, то функции $f\colon M \to F$, где M — произвольное множество, можно складывать и умножать на скаляр ($(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(m) = \lambda_1 f_1(m) + \lambda_2 f_2(m)$) и перемножать ($(f_1 f_2)(m) = f_1(m)\, f_2(m)$). Тогда $\mathcal{F}(M, F) \stackrel{\text{def}}{=} \{f\colon M \to F\}$ — коммутативная F-алгебра.
4. Если R — кольцо (алгебра), то кольцами (алгебрами) являются множества:
   - многочленов над R от одной переменной:
   $$R[x] = \left\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \mid a_i \in R, n \in \mathbb{N}\right\};$$
   - многочленов над R от нескольких переменных ($R[x_1, \ldots, x_n]$);
   - формальных степенных рядов над R ($R[[x]] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \mid a_i \in R\}$);
   - матриц над R ($\mathrm{Mat}_n(R)$) — это кольцо (алгебра) некоммутативно(-а);
   - верхнетреугольных матриц над R ($\mathbf{B}_n(R)$).

Определение. *Прямым произведением колец (алгебр)* R_1 *и* R_2 называется кольцо (алгебра)
$$R_1 \times R_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in R_1, r_2 \in R_2\}.$$

Определение.

1. *Делителем нуля* в кольце R называется $0 \neq a \in R$, такой что $\exists\, 0 \neq b \in R$: $ab = 0$ (тогда a — *левый делитель нуля*) или $ba = 0$ (тогда a — *правый делитель нуля*).
2. Элемент $a \in R$ *обратим*, если $\exists\, b \in R$: $ab = ba = 1$. Обратимые элементы образуют группу $R^\times$ — *мультипликативную группу кольца*.
3. Элемент $0 \neq a \in R$ *нильпотентен*, если $\exists\, m \in \mathbb{N}$: $a^m = 0$.

4. Элемент $a \in R$ *идемпотентен*, если $a^2 = a$. Например, 0, 1 — идемпотенты, и в поле других нет.

Определение. Пусть G — группа, F — поле, $V_G = \left\{ \sum\limits_{g \in G} \alpha_g e_g \mid \alpha_g \in F, \text{ сумма конечна} \right\}$ — векторное пространство над полем F. Положим $e_g e_h \stackrel{\text{def}}{=} e_{gh}$ и продолжим это умножение на всё пространство по билинейности. Тем самым получим *групповую алгебру* FG.

FG коммутативна $\Leftrightarrow$ G абелева.

Гипотеза Капланского: в FG нет делителей нуля $\Leftrightarrow$ G — группа без кручения, то есть в G любой ненулевой элемент имеет бесконечный порядок.

Определение. Коммутативное ассоциативное кольцо F с единицей называется *полем*, если любой его ненулевой элемент обратим.

Пример.

1. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$, где p — простое, — поля.
2. Пусть F — поле. Тогда $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f, g \in F[x], g \neq 0 \right\}$, где полагаем $\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1} \Leftrightarrow f g_1 = f_1 g$, — *поле рациональных дробей* над полем F.

Определение. *Характеристикой* $\operatorname{char} F$ поля F называется такое $p \in \mathbb{N}$, что $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{p \text{ раз}} = 0$.

Если такого p не существует, то характеристика полагается равной нулю.

Пример. $\mathbb{Z}_p(x)$ — бесконечное поле характеристики p.

§ 2. Идеалы и факторкольца

Определим для колец аналог нормальных подгрупп в теории групп.

Определение. Пусть R — кольцо. $I \subseteq R$ называется *идеалом*, если $I \subseteq (R, +)$ — подгруппа и выполняется хотя бы одно из двух условий:

1. $ca \in I \ \forall c \in R, a \in I$ (тогда I — *левый идеал*);
2. $ac \in I \ \forall c \in R, a \in I$ (тогда I — *правый идеал*).

Если выполнены оба условия, то идеал называется *двусторонним*.

Лекция 19

Идеалы и факторкольца. Часть 1

§ 2. Идеалы и факторкольца (продолжение)

Пример. Пусть $R = \mathrm{Mat}_n(F)$, где F — поле. Тогда $I = \left\{ \begin{pmatrix} * & & 0 \\ * & & \\ * & & \\ * & & \end{pmatrix} \right\}$ (звёздочки стоят в первом столбце) — левый, но не правый идеал.

Дальше рассматриваем только двусторонние идеалы, называя их просто идеалами.

Лемма 1. *Пусть I — идеал в кольце R. Тогда $I = R \Leftrightarrow I$ содержит обратимый элемент.*

□

- $\boxed{\Rightarrow}$

  $I = R \Rightarrow 1 \in I$, а 1 — обратимый элемент.

- $\boxed{\Leftarrow}$

  $a \in I$, $\exists\, b \in R : ab = ba = 1 \,\forall\, c \in R \; c \cdot 1 = c \in I \Rightarrow I = R$.

■

Следствие. В полях нет нетривиальных идеалов ($I = \{0\}$ и $I = R$).

Определение. Пусть R — коммутативное кольцо. Тогда с некоторым набором элементов $\{r_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ связан идеал $I = \{h_1 r_{i_1} + \ldots + h_k r_{i_k}\}$. То, что это идеал, очевидно; более того, это наименьший идеал, содержащий все элементы $\{r_i\}$. Если множество $\mathcal{I}$ конечно, то есть набор элементов $\{r_1, \ldots, r_k\}$ конечен, то I обозначают $(r_1, \ldots, r_k)$ и называют идеалом, *порождённым* $\{r_1, \ldots, r_k\}$.

Определение. Идеал I называется *главным*, если $\exists\, r \in I$: $I = (r) = \{hr \mid h \in R\}$.

Определение. Кольцо R называется *кольцом главных идеалов*, если любой идеал в R — главный.

Предложение 1. *Кольца $\mathbb{Z}$ и $F[x]$, где F — поле, — кольца главных идеалов.*

□ Идеал является, в частности, подгруппой, а мы знаем, что в $(\mathbb{Z}, +)$ все подгруппы имеют вид $k\mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Значит, любой идеал в $\mathbb{Z}$ имеет вид (k).

Пусть $I \subseteq F[x]$ — идеал, $f \in I$, $f \neq 0$, наименьшей степени. Тогда $(f) \subseteq I$. Обратно, $\forall\, g \in I$, по теореме о делении с остатком, $g = fq + r$, где $\deg r < \deg f$ ($\deg 0 \stackrel{\text{def}}{=} -\infty$) $\Rightarrow r = g - fq \in$ $\in I \Rightarrow r = 0 \Rightarrow I = (f)$. ■

Пример. Пусть $R = F[x,y]$, $I = (x,y) = \{a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + \ldots \mid a_{ij} \in F, a_{00} = 0\}$. Предположим, что I — главный идеал, то есть $\exists f \in I$: $I = (f)$. Тогда, по определению, $f \mid x$, $f \mid y \Rightarrow f = \text{const} \neq 0$. Любая ненулевая константа обратима $\Rightarrow$ по лемме 1, $I = F[x,y]$. Получившееся противоречие показывает, что I — неглавный идеал.

Пусть теперь кольцо R не обязательно коммутативно.

Определение. Кольцо (алгебра) называется *простым (-ой)*, если в нём (ней) нет нетривиальных двусторонних идеалов, то есть нет двусторонних идеалов, кроме $\{0\}$ и R.

Определение. *Центром кольца (алгебры)* называется $Z(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in R \mid ab = ba \ \forall b \in R\}$.

Центр кольца — подкольцо, но, как правило, не идеал. Центр кольца — идеал $\Leftrightarrow$ кольцо коммутативно (центр — идеал $\Leftrightarrow$ идеал содержит единицу $\Leftrightarrow$ идеал — всё кольцо $\Leftrightarrow$ кольцо коммутативно).

Определение. F-алгебра A называется *центральной*, если $Z(A) = \{\lambda \cdot 1 \mid \lambda \in F\}$.

Теорема 1. Пусть F — поле. Тогда $\text{Mat}_n(F)$ — центральная простая алгебра над F $\forall n \in \mathbb{N}$.

□ Из первого семестра известно, что если $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$ $\forall \mathcal{B} \in \text{Mat}_n(F)$[23], то $\mathcal{A} = \lambda\mathcal{E}$, $\lambda \in F$, что доказывает центральность.

Пусть $I \subseteq \text{Mat}_n(F)$ — двусторонний идеал, $0 \neq \mathcal{A} = \sum\limits_{i,j} a_{ij}\mathcal{E}_{ij} \in I$. Тогда $\exists k,l \in \{1,\ldots,n\}$: $a_{kl} \neq 0 \Rightarrow \mathcal{E}_{st} = a_{kl}^{-1}\mathcal{E}_{sk}\mathcal{A}\mathcal{E}_{lt} \in I$ $\forall s,t \in \{1,\ldots,n\}$. Но матричные единицы — базис $\text{Mat}_n(F)$ как векторного пространства $\Rightarrow I = \text{Mat}_n(F)$. ■

Задача. Доказать, что любая алгебра размерности n над полем F изоморфна подалгебре в $\text{Mat}_n(F)$.

Определение. Пусть $I \subseteq R$ — двусторонний идеал в кольце R. На факторгруппе по сложению R/I определим умножение: $(a+I)(b+I) \stackrel{\text{def}}{=} ab + I$. Проверим корректность такого задания умножения: если $i,j \in I$, то

$$(a+i+I)(b+j+I) = (a+i)(b+j) + I =$$
$$= ab + \underbrace{aj}_{\in I} + \underbrace{bi}_{\in I} + \underbrace{ij}_{\in I} + I = ab + I.$$

Ассоциативность и дистрибутивность очевидны, есть единица $1 + I$. Итак, задано *факторкольцо* по идеалу I.

Пример.

1. $\mathbb{Z}/(n) \cong \mathbb{Z}_n$.
2. $\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$. Действительно, если $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(x) = (x^2+1)q(x) + r(x)$, тогда $f + (x^2+1)$[24] $= r + (x^2+1)$. При этом $\deg r < \deg(x^2+1) = 2$. Перемножим теперь два некоторых класса:

[23] Все матрицы здесь обозначены буквами в особом начертании, чтобы не путать их обозначения с обозначением самой алгебры.

[24] Здесь скобки стоят уже не для обособления множителя, как в разложении выше, а для обозначения главного идеала.

$$\begin{aligned}\left(ax+b+\left(x^2+1\right)\right)\left(cx+d+\left(x^2+1\right)\right) &= acx^2+(ad+cb)\,x+bd+\left(x^2+1\right)= \\ &= ac\,(-1)+(ad+cb)\,x+bd+\left(x^2+1\right)= \\ &= (ad+cb)\,x+(bd-ac)+\left(x^2+1\right).\end{aligned}$$

При переходе от первой строки ко второй мы воспользовались тем, что факторизуем $\mathbb{R}[x]$ по (x^2+1), то есть $x^2=-1$. Но именно так перемножаются комплексные числа.

Определение. *Гомоморфизмом колец* R и S называется отображение $\varphi\colon R\to S$, являющееся гомоморфизмом абелевых групп и такое, что $\varphi(ab)=\varphi(a)\,\varphi(b)\ \forall\, a,b\in R$ и $\varphi(1)=1$.

Лемма 2. *Если φ — гомоморфизм колец, то:*

1. $\operatorname{Ker}\varphi\subseteq R$ *— двусторонний идеал.*
2. $\operatorname{Im}\varphi\subseteq R$ *— подкольцо.*

Доказательство леммы тривиально.

Пример. Если $\varphi\colon R\to S$ — гомоморфизм колец, R — поле, то φ инъективно.

□ $\operatorname{Ker}\varphi$ — идеал $\Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi=\{0\}$. ■

Теорема (о гомоморфизме). Пусть $\varphi\colon R\to S$ — гомоморфизм колец. Тогда отображение $\psi\colon \operatorname{Im}\varphi\to {}^{R}\!/_{\operatorname{Ker}\varphi}$, $b=\varphi(a)\mapsto a+\operatorname{Ker}\varphi$, является изоморфизмом колец, то есть $\operatorname{Im}\varphi\cong {}^{R}\!/_{\operatorname{Ker}\varphi}$.

□ ψ корректно определено и является изоморфизмом абелевых групп.

Остаётся проверить сохранение умножения. Пусть $b=\varphi(a)\in\operatorname{Im}\varphi$, $d=\varphi(c)\in\operatorname{Im}\varphi$. Тогда $bd=\varphi(ac)$, $\psi(bd)=ac+\operatorname{Ker}\varphi=(a+\operatorname{Ker}\varphi)\,(c+\operatorname{Ker}\varphi)=\psi(b)\,\psi(d)$. ■

Пример.

1. $\varphi\colon \mathbb{Z}[x]\to\mathbb{Z}_p[x]$, $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n\mapsto \overline{a_0}+\overline{a_1}x+\ldots+\overline{a_n}x^n\Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi=p\mathbb{Z}[x]=(p)$, $\operatorname{Im}\varphi=\mathbb{Z}_p[x]\Rightarrow \mathbb{Z}_p[x]\cong {}^{\mathbb{Z}[x]}\!/_{p\mathbb{Z}[x]}$.
2. Пусть $R=\mathcal{F}(M,F)$, где M — произвольное множество, F — поле. С каждой точкой $m\in M$ связан гомоморфизм $\varphi_m\colon R\to F$, $f\mapsto f(m)$. Тогда $\operatorname{Ker}\varphi_m=\{f\in R\mid f(m)=0\}=I_m$, $\operatorname{Im}\varphi_m=F\Rightarrow F\cong {}^{R}\!/_{I_m}$.

Предложение 2. *Пусть F — поле, $f\in F[x]$. Тогда ${}^{F[x]}\!/_{(f)}$ — поле $\Leftrightarrow$ f неприводим.*

Это предложение мы докажем на следующей лекции.

Задача. Доказать, что ${}^{F[x]}\!/_{(f)}\cong F\Leftrightarrow f$ линеен.

Лекция 20

Идеалы и факторкольца. Часть 2

§ 2. Идеалы и факторкольца (продолжение)

Докажем предложение 2.
□

- $\boxed{\Rightarrow}$

  Пусть, от противного, f приводим, то есть $f(x) = f_1(x) f_2(x)$, где $f_i \in F[x]$, $\deg f_i \geqslant 1$. Тогда классы $f_1 + I$, $f_2 + I$, где $I = (f)$, отличны от нулевых, и $(f_1 + I)(f_2 + I) = f_1 f_2 + I = f + I = 0 + I \Rightarrow$ в $F[x]/(f)$ есть делители нуля $\Rightarrow$ $F[x]/(f)$ — не поле, что противоречит условию.

- $\boxed{\Leftarrow}$

  Пусть f неприводим, $I = (f)$, $g + I$ — ненулевой класс. Тогда $f \nmid g \Rightarrow$ из неприводимости f, $(f, g) = 1 \Rightarrow$ по лемме о линейном представлении НОД, $\exists u, v \in F[x]$: $fu + gv = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow (g + I)(v + I) = gv + I = 1 - \underbrace{fu}_{\in I} + I = 1 + I \Rightarrow g + I$ обратим $\Rightarrow$ $F[x]/(f)$ — поле.

■

Задача. Доказать, что $F[x]/(x-\alpha) \cong F \ \forall \alpha \in F$.

Задача. Пусть $f_1, \ldots, f_k \in F[x]$: $(f_i, f_j) = 1 \ \forall i \neq j$. Доказать, что тогда $F[x]/(f_1 \ldots f_k) \cong F[x]/(f_1) \oplus \oplus \ldots \oplus F[x]/(f_k)$.

§ 3. Расширения полей

Пусть $F \subseteq K$ — расширение полей.

Определение. Расширение полей $F \subseteq K$ называется *конечным*, если $\dim_F K < +\infty$, то есть размерность K как векторного пространства над F конечна. В этом случае $[K : F] \stackrel{\text{def}}{=} \dim_F K$ называется *степенью расширения*.

Пример.

1. $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ — расширение степени 2.
2. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ — бесконечное расширение.

Предложение 3. *Пусть $F \subseteq K \subseteq L$ — расширение полей (такую конструкцию иногда называют* башней расширений*), $F \subseteq K$, $K \subseteq L$ конечны. Тогда $F \subseteq L$ конечно, и $\dim_F L = \dim_F K \cdot \dim_K L$.*

□ Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис K над F, $\{f_1, \ldots, f_m\}$ — базис L над K. Достаточно доказать, что $\{e_i f_j\}$ — базис L над F.
$\forall\, a \in L\ a = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_m f_m$, $\alpha_i \in K$. Далее, $\alpha_i = \beta_{1i} e_1 + \ldots + \beta_{ni} e_n$, $\beta_{ji} \in F$. Отсюда $a = \left(\sum\limits_j \beta_{j1} e_j\right) f_1 + \ldots + \left(\sum\limits_j \beta_{jm} e_j\right) f_m = \sum\limits_{i,j} \beta_{ij} e_i f_j$. Таким образом, через $\{e_i f_j\}$ всё выражается, и остаётся проверить линейную независимость. Пусть $\sum\limits_{i,j} \gamma_{ij} e_i f_j = 0$, $\gamma_{ij} \in F$. Тогда $\left(\sum\limits_i \gamma_{i1} e_i\right) f_1 + \ldots + \left(\sum\limits_i \gamma_{im} e_i\right) f_m = 0 \Rightarrow \sum\limits_i \gamma_{ij} e_i = 0\ \forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \Rightarrow \gamma_{ij} = 0\ \forall\, i, j \Rightarrow \{e_i f_j\}$ линейно независимы $\Rightarrow \{e_i f_j\}$ — базис. ■

Предложение 4. *Пусть $f \in F[x]$ неприводим. Тогда $F \subseteq K = {}^{F[x]}\!/_{(f)}$ конечно и имеет степень $n = \deg f$.*

□ Любой класс из ${}^{F[x]}\!/_{(f)}$ однозначно записывается в виде $a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + I$, где $I = (f)$, $a_i \in F$. Это означает, что $1 + I, x + I, \ldots, x^{n-1} + I$ образуют базис K над F. ■

Определение. Пусть $f \in F[x]$ неприводим, $\deg f > 1$. Тогда, по теореме Безу, у f нет корней над F. С другой стороны, рассмотрим класс $\alpha = x + I \in K = {}^{F[x]}\!/_{(f)}$, $I = (f)$. Тогда $f(\alpha) = f(x) + I = 0 + I = 0$ в факторкольце $\Rightarrow \alpha$ — корень $f(x)$ над K. Такой переход от F к K называется *присоединением корня* α неприводимого многочлена f к полю F. Поле $K = {}^{F[x]}\!/_{(f)}$ — наименьшее поле, содержащее F и α, — обозначается

$$F(\alpha) = \left\{a_0 + a_1 \alpha + \ldots + a_{n-1} \alpha^{n-1} \mid a_i \in F\right\}$$

с умножением по модулю f.

Определение. Пусть $F \subseteq K$ — расширение полей. Тогда элемент $\alpha \in K$ называется *алгебраическим над F*, если $\exists\, f \in F[x]$: $f \neq 0$, $f(\alpha) = 0$. В противном случае α называется *трансцендентным*.

Пример.

1. Рассмотрим расширение полей $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Все элементы из $\mathbb{C}$ являются корнями многочленов степени $\leqslant 2$ над $\mathbb{R}$, то есть алгебраическими над $\mathbb{R}$.
2. Рассмотрим расширение полей $F \subseteq F(x)$, где $F(x)$ — поле рациональных полей. $x \in F(x)$ трансцендентен над F.

Задача. Доказать, что $\alpha \in F(x)$ — алгебраический элемент над $F \Leftrightarrow \alpha \in F$.

Определение. *Минимальным многочленом* алгебраического элемента $\alpha \in K$ над полем F, где $F \subseteq K$ — расширение полей, называется многочлен $\mu_\alpha \in F[x]$ наименьшей степени, такой что $\mu_\alpha(\alpha) = 0$.

Пример. Пусть $F = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{C}$, $\alpha = \cos\frac{2\pi}{5} + i \sin\frac{2\pi}{5}$. Тогда α — корень многочлена $x^5 - 1$. Но минимальный ли это многочлен? Нет, так как, разложив его на множители: $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$, — можно увидеть, что α — корень многочлена $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Является ли этот многочлен минимальным?

Лемма 3.

1. *μ_α неприводим над F.*
2. *$\forall h \in F[x]\ h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \mu_\alpha \mid h$. В частности, μ_α определён однозначно с точностью до умножения на ненулевое число.*

□

1. Пусть $\mu_\alpha(x) = p_1(x) p_2(x)$, $p_1, p_2 \in F[x]$. Тогда $\mu_\alpha(\alpha) = p_1(\alpha) p_2(\alpha) = 0$. Поскольку работаем в поле, в котором не может быть делителей нуля, то либо $p_1(\alpha) = 0$, либо $p_2(\alpha) = 0$. Пусть $p_1(\alpha) = 0$ (второй случай аналогично). Так как μ_α имеет минимальную степень среди всех многочленов, имеющих корнем α, то $\deg p_1 = 0 \Rightarrow \deg p_2 = \deg \mu_\alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow \mu_\alpha$ неприводим.
2. По теореме о делении с остатком, $h(x) = \mu_\alpha(x) q(x) + r(x)$, $\deg r < \deg \mu_\alpha$. Подставляем α: $h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow r(\alpha) = 0 \Leftrightarrow r = 0 \Leftrightarrow \mu_\alpha \mid h$.

■

Задача. Доказать, что $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ неприводим над Q[25].

Определение. Пусть $F \subseteq K$ — расширение полей. $\forall \alpha \in K$ обозначим через $F[\alpha]$ наименьшую подалгебру в K, содержащую F и α. Тогда

$$F[\alpha] = \{a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_m\alpha^m \mid m \in \mathbb{Z}_+, a_i \in F\}.$$

Предложение 5. *Элемент $\alpha \in K$ алгебраичен $\Leftrightarrow$ $F[\alpha]$ конечномерна. В этом случае $F[\alpha]$ является подполем, $F[\alpha] = F(\alpha) \cong {}^{F[x]}\!/_{(\mu_\alpha)}$, $\dim_F F[x] = \deg \mu_\alpha$.*

□

- $\boxed{\Leftarrow}$

  Пусть $F[\alpha]$ конечномерна. Тогда $1, \alpha, \alpha^2, \ldots$ линейно зависимы. Значит, существуют такие $m \in Z_+$ и $b_0, b_1, \ldots, b_m \in F$, не все равные нулю, что $b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_m\alpha^m = 0 \Rightarrow \alpha$ алгебраичен.

- $\boxed{\Rightarrow}$

  Пусть α алгебраичен, μ_α — его минимальный многочлен, $\deg \mu_\alpha = n$. Тогда

  $$\alpha^n = -a_{n-1}\alpha^{n-1} - \ldots - a_0,$$

  где $a_i \in F$. Индукция по k показывает, что при $k \geqslant n$ α^k выражается как линейная комбинация $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$. Значит, $\dim_F F[\alpha] \leqslant n$. Конечномерность этим уже доказана, но на самом деле понятно даже, что $\dim_F F[\alpha] = n$. Действительно, рассмотрим гомоморфизм $\varphi\colon F[x] \to K$, $f \mapsto f(\alpha)$. Его образ $\operatorname{Im}\varphi = F[\alpha]$, его ядро $\operatorname{Ker}\varphi = (\mu_\alpha)$. Тогда, по теореме о гомоморфизме, $F[\alpha] \cong {}^{F[x]}\!/_{(\mu_\alpha)} = F(\alpha)$.

[25] Отсюда будет следовать, что это минимальный многочлен для $\alpha = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$.

■

Предложение 6. *Пусть $F \subseteq K$ — расширение полей. Тогда все элементы в K, алгебраические над F, образуют подполе $\overline{F}$ — алгебраическое замыкание F в K, и $F \subseteq \overline{F} \subseteq K$.*

□ Ясно, что $F \subseteq \overline{F}$, так как элементы F — корни линейных многочленов. Надо проверить, что если $\alpha, \beta \in \overline{F}$, то $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta \in \overline{F}$ и, при $\alpha \neq 0$, $\alpha^{-1} \in \overline{F}$.
Рассмотрим расширение $F \subseteq F(\alpha) \subseteq F(\alpha)(\beta)$. Тогда $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$, $\alpha^{-1} \in F(\alpha)(\beta)$, так как $F(\alpha)(\beta)$ — поле $\Rightarrow$ $F[\alpha \pm \beta]$, $F[\alpha\beta]$, $F[\alpha^{-1}]$ — подпространства векторного пространства $F(\alpha)(\beta)$, которое конечномерно над F, по предложениям 3 и 4 $\Rightarrow$ эти подпространства конечномерны $\Rightarrow$ $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$, $\alpha^{-1} \in \overline{F}$, по предложению 5. ■

§ 4. Поле разложения многочлена

Определение. Пусть $F \subseteq K$ — расширение полей. Говорят, что K *порождается* над F элементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in K$, если для любого подполя L: $F \subseteq L \subseteq K$ условие $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in L$ влечёт $L = K$. Другими словами, $K = \left\{ \frac{f(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}{g(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)} \mid f, g \in F[x_1, \ldots, x_s], g(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \neq 0 \right\}$.

Пример. Поле $F(x)$ порождается x.

Определение. Пусть $f \in F[x]$ — произвольный многочлен. Тогда *полем разложения* f над F называется расширение $F \subseteq K$, для которого выполнены два условия:

1. f разлагается над K на линейные множители;
2. K порождается над F корнями f.

Лекция 21

Конечные поля

§ 4. Поле разложения многочлена (продолжение)

Задача. Доказать, что $\mathbb{C}$ — поле разложения x^2+1 над $\mathbb{R}$, и описать поле разложения x^2+1 над $\mathbb{Q}$.

Определение. Пусть $F \subseteq K$, $F \subseteq L$ — расширения полей. Тогда K и L *изоморфны над* F, если существует изоморфизм абстрактных полей $\varphi\colon K \to L$: $\varphi(\alpha) = \alpha \ \forall\, \alpha \in F$.

Теорема 2. Пусть F — поле, $f \in F[x]$, $\deg f \geqslant 1$. Тогда поле разложения f над F существует и единственно с точностью до изоморфизма над F.

□

- $\boxed{\exists}$

  Рассмотрим последовательность расширений $F = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots$, где K_i получается из K_{i-1} присоединением корня некоторого неприводимого делителя p_i, $\deg p_i > 1$, многочлена f над K_{i-1}. Так как число неприводимых делителей f при переходе от K_{i-1} к K_i увеличивается, но при этом не превосходит $\deg f$, то процесс закончится, и в итоге мы получим поле $K_s = K$, над которым f разлагается на линейные множители. При этом $K = F(\alpha_1)(\alpha_2)\ldots(\alpha_s)$, то есть K порождается над F корнями $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ многочлена f. Значит, K — поле разложения f над F.

- $\boxed{!}$

  Пусть $F \subseteq L$ — другое поле разложения f над F. Построим последовательность гомоморфизмов $\varphi_i\colon K_i \to L$, $i \in \{0, 1, \ldots, s\}$, такие что $\varphi_0 = \mathrm{id}$, $\varphi_i\big|_{K_{i-1}} = \varphi_{i-1}$.

Лемма 4. *Пусть $P \subseteq P(\alpha)$ — расширение поля P, полученное присоединением корня α неприводимого многочлена $h(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in P[x]$, $\varphi\colon P \to P'$ — гомоморфизм полей, P' — поле. Тогда φ продолжается до гомоморфизма $\psi\colon P(\alpha) \to P'$ ровно столькими способами, сколько корней в P' у многочлена $h^\varphi(x) = \varphi(a_0) + \varphi(a_1)x + \ldots + \varphi(a_n)x^n$.*

□ Если ψ существует, то $\psi(a_0 + a_1 x\alpha + \ldots + a_n\alpha^n) = \psi(a_0) + \psi(a_1)\psi(\alpha) + \ldots + \psi(a_n)\psi(\alpha)^n = \varphi(a_0) + \varphi(a_1)\psi(\alpha) + \ldots + \varphi(a_n)\psi(\alpha)^n = \psi(0) = 0$. Значит, $\psi(\alpha)$ — корень h^φ из P'.

Обратно, если β — корень h^φ в P', то формула $\psi(b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_{n-1}\alpha^{n-1}) = \varphi(b_0) + \varphi(b_1)\beta + \ldots + \varphi(b_{n-1})\beta^{n-1}$ корректно определяет продолжение φ на поле $P(\alpha)$. ■

Итак, продолжение $\varphi_{i-1}\colon K_{i-1} \to L$ до $\varphi_i\colon K_i \to L$ возможно, так как $\widetilde{p_i} = p_i^{\varphi_{i-1}}$ делит f в $L[x]$ и f разлагается над L на линейные множители. Значит, $p_i^{\varphi_{i-1}}$ имеет корень в L. Тогда $\varphi_s\colon K = K_s \to L$ будет искомым изоморфизмом. В самом деле, φ_s инъективен (так как это гомоморфизм полей), $\varphi_s(K) \subseteq L$ содержит все корни L, а поскольку L порождается корнями, то $\varphi_s(K) = L$, то есть φ_s — биективный гомоморфизм, то есть изоморфизм.

■

Пример. Поле разложения $x^3 - 1$ над $\mathbb{Q}$ — это поле $\left\{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$. Оно имеет над $\mathbb{Q}$ степень 2.

§ 5. Конечные поля

Определение. Поле P называется *простым*, если в P нет подполей, отличных от P.

Пример.

1. $\mathbb{Q}$ — простое поле: если $P_1 \subseteq \mathbb{Q}$ — подполе, то $1 \in P_1 \Rightarrow \mathbb{Z} \subseteq P_1 \Rightarrow \mathbb{Q} \subseteq P_1 \subseteq \mathbb{Q} \Rightarrow P_1 = \mathbb{Q}$.
2. $\mathbb{Z}_p$, где p — простое, — простое поле: если $P_1 \subseteq \mathbb{Z}_p$, то $1 \in P_1 \Rightarrow \mathbb{Z}_p \subseteq P_1 \subseteq \mathbb{Z}_p \Rightarrow P_1 = \mathbb{Z}_p$.

Предложение 7. *Пусть F — поле. Тогда в F существует и единственно простое подполе P, и если* $\operatorname{char} F = 0$*, то $P \cong \mathbb{Q}$, а если* $\operatorname{char} F = p$*, то $P \cong \mathbb{Z}_p$.*

□ Пусть P — подполе в F. Тогда $1 \in P$.
Если $\operatorname{char} F = 0$, то $\langle 1\rangle \cong \mathbb{Z}_p \subseteq P$ — подкольцо $\Rightarrow$ поле частных $P\mathbb{Z} \cong \mathbb{Q} \subseteq P$ — подполе. Если P — простое, то $P \cong \mathbb{Q}$, и это подполе лежит в любом другом подполе $\Rightarrow P$ — единственное простое подполе.
Если $\operatorname{char} F = p$, то $\langle 1\rangle \cong \mathbb{Z}_p \subseteq P$ — подполе. Если P — простое, то $P \cong \mathbb{Z}_p$, и оно единственно.
■

Замечание. $\underbrace{(1 + \ldots + 1)}_{k}\underbrace{(1 + \ldots + 1)}_{l} = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{kl}$; $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{p} = 0$.

Предложение 8. *Пусть F — конечное поле, $P \subseteq F$ — подполе. Тогда $|F| = |P|^n$, где $n = [F : P] = \dim_P F$.*

□ F конечно $\Rightarrow$ F — конечномерное векторное пространство над $P \Rightarrow \dim_P F = n < \infty$. Пусть $\{f_1, \ldots, f_n\}$ — базис F над P. Тогда $\forall\, a \in F\ \exists!\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in P$: $a = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n \Rightarrow$ $\Rightarrow |F| = |P|^n$. ■

Предложение 9. *Конечное поле F имеет порядок p^n, где p — простое, $n \in \mathbb{N}$.*

□ F конечно $\Rightarrow \operatorname{char} F = p$, p — простое $\Rightarrow$ по предложению 7, $\mathbb{Z}_p \subseteq F \Rightarrow$ по предложению 8, $|F| = |\mathbb{Z}_p|^n = p^n$, где $n = [F : \mathbb{Z}_p]$. ■

Следствие. Полей из 6 элементов не существует.

Определение. Пусть F — произвольное (возможно, бесконечное) поле, $\operatorname{char} F = p$. Тогда рассмотрим отображение $\varphi\colon F \to F$, $x \mapsto x^p$. Очевидно, что $\varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y)$. Как ни стран-

но, также $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. В самом деле, $(x+y)^p = \sum\limits_{k=0}^{p} C_p^k x^{p-k} y^k = x^p + y^p$, так как $p \mid C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}\ \forall\, k \in \{1, \ldots, p-1\}$. Поэтому φ — эндоморфизм, то есть гомоморфизм поля F в себя. Он называется *эндоморфизмом Фробениуса*. φ всегда инъективен, а если F конечно, то φ и биективен (так как инъективное отображение конечного множества в себя биективно), что делает его *автоморфизмом Фробениуса*.

Если $\varphi\colon F \to F$, то его неподвижные точки $F^\varphi = \{a \in F \mid \varphi(a) = a\}$ образуют подполе в F.

Теорема 3. Для любого простого p и натурального n поле из p^n элементов существует и единственно. Такие поля обозначают $\mathbb{F}_{p^n}$ или $\mathbb{F}_q$, где $q = p^n$, и называют *полями Галуа*. Например, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p$.

□

- $\boxed{!}$

  Пусть F — поле из $q = p^n$ элементов. Мультипликативная группа $F^\times = F \setminus \{0\}$ имеет порядок $q-1$. Тогда, по теореме Лагранжа, $a^{q-1} = 1\ \forall\, a \in F^\times \Rightarrow a^q = a\ \forall\, a \in F \Rightarrow$ все элементы F являются корнями многочлена $x^q - x \Rightarrow F$ — поле разложения $x^q - x$ над $\mathbb{Z}_p \Rightarrow$ по теореме § 4, все такие поля изоморфны над $\mathbb{Z}_p$, а значит, и просто изоморфны.

- $\boxed{\exists}$

  Пусть F — поле разложения $x^q - x$ над $\mathbb{Z}_p$. Если $f(x) = x^q - x$, то $f'(x) = qx^{q-1} - 1 = -1 \Rightarrow f$ не имеет кратных корней $\Rightarrow$ у f в поле F ровно q различных корней. Эти корни — неподвижные точки автоморфизма $\varphi^n\colon F \to F$, где φ — автоморфизм Фробениуса, $x \overset{\varphi^n}{\longmapsto} x^{p^n} = x^q$. Значит, они образуют подполе, которое совпадает с F, по определению поля разложения $\Rightarrow |F| = q$.

■

Лекция 22

Алгебры с делением

§ 5. Конечные поля (продолжение)

Следствие. Для любого простого p и натурального n существует неприводимый многочлен степени n над $\mathbb{Z}_p$.

□ Мультипликативная группа $\mathbb{F}_{p^n}$ — циклическая. Пусть α — её порождающий. Тогда $\mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{Z}_p(\alpha) \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$. Но $\mathbb{F}_{p^n} = \{0\} \cup \{\alpha^k \mid k \in \{0, 1, \ldots, p^n - 1\}\} \Rightarrow \mathbb{Z}_p(\alpha) = \mathbb{F}_{p^n}$. С другой стороны, $\mathbb{Z}_p(\alpha) \cong {}^{\mathbb{Z}_p[x]}\!/_{(\mu_\alpha)}$, и степень $\mathbb{Z}_p(\alpha)$ над $\mathbb{Z}_p$ равна $\deg \mu_\alpha$. Но степень $\mathbb{F}_{p^n}$ над $\mathbb{Z}_p$ равна $n \Rightarrow n = \deg \mu_\alpha \Rightarrow \mu_\alpha$ — неприводимый многочлен степени n над $\mathbb{Z}_p$. ■

Это следствие даёт нам общую конструкцию построения поля из p^n элементов: $\mathbb{F}_{p^n} \cong {}^{\mathbb{Z}_p[x]}\!/_{(h)}$, где h — неприводимый многочлен степени n над $\mathbb{Z}_p$.

Пример. Построим поле из четырёх элементов. Пользуясь вышеизложенной конструкцией, его можно построить как ${}^{\mathbb{Z}_2[x]}\!/_{(x^2+x+1)} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{x}, \overline{x+1}\}$, $\overline{x} = x + I = x + (x^2 + x + 1)$; например, $\overline{x}^2 = \overline{x} + \overline{1}$. Таблицы сложения и умножения в этом поле будут выглядеть так:

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{x+1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{x+1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{x+1}$	$\overline{x}$
$\overline{x}$	$\overline{x}$	$\overline{x+1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{x+1}$	$\overline{x+1}$	$\overline{x}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{x+1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{x+1}$
$\overline{x}$	$\overline{0}$	$\overline{x}$	$\overline{x+1}$	$\overline{1}$
$\overline{x+1}$	$\overline{0}$	$\overline{x+1}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$

Теорема 4. Каждое подполе в $\mathbb{F}_{p^n}$ изоморфно $\mathbb{F}_{p^d}$, где $d \mid n$, и $\forall\, d \mid n$ такое подполе существует и единственно.

□ Если $F \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$ — подполе, то, по предложению 9, $\mathbb{Z}_p \subseteq F \subseteq \mathbb{F}_{p^n} \Rightarrow |F| = p^d$, где $d = \dim_{\mathbb{Z}_p} F$. Тогда $|\mathbb{F}_{p^n}| = p^n = |F|^s$, где $s = [\mathbb{F}_{p^n} : F]$, по предложению 8. Значит, $p^n = \left(p^d\right)^s = p^{ds} \Rightarrow d \mid n$.

Далее, если $d \mid n$, то $p^n - 1 = \left(p^d\right)^s - 1^s = \left(p^d - 1\right) k \Rightarrow x^{p^n-1} - 1 = \left(x^{p^d-1}\right)^k - 1^k = \left(x^{p^d-1} - 1\right) g(x)$. Значит, $x^{p^n} - x = \left(x^{p^d} - x\right) g(x) \Rightarrow$ поле разложения $x^{p^d} - x$ над $\mathbb{Z}_p$ — подполе поля разложения $x^{p^n} - x$ над $\mathbb{Z}_p \Rightarrow \mathbb{F}_{p^d} \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$. Поскольку все элементы поля из p^d элементов удовлетворяют уравнению $x^{p^d} - x = 0$, такое подполе единственно. ■

Задача. Доказать, что $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{p^n}) = \langle\varphi\rangle$, где φ — автоморфизм Фробениуса.

Задача. Доказать, что $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}) = \{e\}$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}) = \{e\}$.

Замечание. Можно подумать, что $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{e,$ сопряжение$\}$. Но это не так. Это два единственных *непрерывных* автоморфизма, но можно доказать существование других автоморфизмов (при этом предъявить их затруднительно).

§ 6. Алгебры с делением

Определение. *Телом* называется ассоциативное кольцо с делением, в котором все ненулевые элементы обратимы. Другими словами, коммутативное тело — это поле.

Определение. *Алгеброй с делением* называется алгебра над поле F, являющаяся телом.

Задача. Доказать, что конечномерная алгебра является алгеброй с делением $\Leftrightarrow$ в ней нет делителей нуля.

Пример. $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $ji = -k$, — *алгебра кватернионов*[26]. Пусть $q = a + bi + cj + dk$ — кватернион. Тогда *сопряжённый к* q $\overline{q} = a - bi - cj - dk$. Проверяется, что:

1. $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_1} \cdot \overline{q_2}$;
2. $q\overline{q} = \overline{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \stackrel{\text{def}}{=} N(q)$ — *норма кватерниона*.

Отсюда $\forall\, q \neq 0\, \exists\, q^{-1} = \frac{\overline{q}}{N(q)}$. Значит, алгебра кватернионов — алгебра с делением.

Задача. Доказать, что уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет над $\mathbb{H}$ бесконечно много решений.

Замечание. $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$, но $\mathbb{H}$ не является алгеброй над $\mathbb{C}$, так как i и j не коммутируют.

Замечание. Матричная реализация: легко проверить, что $\mathbb{H} \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\} \subseteq$ $\subseteq \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, $a + bi + cj + dk \leftrightarrow \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}$. Эту реализацию можно записать через базисные элементы:

$$1 \leftrightarrow E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i \leftrightarrow I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j \leftrightarrow J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k \leftrightarrow K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует ассоциативность $\mathbb{H}$.

Как и для полей, для алгебры с делением определяются *алгебраические* и *трансцендентные* элементы над полем F. Для алгебраических многочленов определен *минимальный многочлен*, и если в A нет делителей нуля, минимальный многочлен неприводим над F.

Предложение 10. *Любая конечномерная алгебра с делением A над алгебраически замкнутым полем F (например, над $\mathbb{C}$) изоморфна F.*

[26] Кватернионы были открыты сэром Уильямом Гамильтоном в 1843 году.

□ Пусть $a \in A$. Тогда $1, a, a^2, \ldots$ линейно зависимы над F. Значит, a алгебраичен над F $\Rightarrow$ a — корень неприводимого многочлена над F. Но над алгебраически замкнутым полем все неприводимые многочлены имеют первую степень $\Rightarrow$ a — корень многочлена $x - \lambda \Rightarrow \alpha = \lambda \cdot 1 \Rightarrow A = F \cdot 1 \cong F$. ■

Теорема (Фробениуса). Любая конечномерная $\mathbb{R}$-алгебра с делением изоморфна либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо $\mathbb{H}$.

□

1. Пусть A — конечномерная $\mathbb{R}$-алгебра с делением. Если $A = \mathbb{R}$, то всё доказано. Иначе возьмём $a \in A \setminus \mathbb{R}$. Тогда $\mu_a(x) = x^2 + \alpha x + \beta$, причём, поскольку он неприводим, то у него нет действительных корней, то есть $\alpha^2 - 4\beta < 0$. Подставляем a: $a^2 + \alpha a + \beta = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(a + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right) = 0$. Обозначив $b \overset{\text{def}}{=} a + \frac{\alpha}{2}$, $c \overset{\text{def}}{=} \beta - \frac{\alpha^2}{4}$, получаем $b^2 + c = 0$, где $c > 0$.

   Рассмотрим $i \overset{\text{def}}{=} \frac{b}{\sqrt{c}} \Rightarrow i^2 + 1 = 0 \Rightarrow i^2 = -1 \Rightarrow \langle 1, i \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq A$ — подалгебра в A, изоморфная $\mathbb{C}$. Итак, можно считать, что $\mathbb{C} \subseteq A$.

   Однако A — не обязательно $\mathbb{C}$-алгебра, так как A и $\mathbb{C}$, вообще говоря, не коммутируют.

2. Если $A = \mathbb{C}$, то всё доказано. Иначе рассмотрим A как векторное пространство над $\mathbb{C}$, где комплексные скаляры умножаются на векторы слева (то есть умножение задаётся как $\mathbb{C} \times A \to A$, $(\lambda, a) \mapsto \lambda \cdot a$).

   Пусть $\mathcal{I} \colon A \to A$ — комплексный линейный оператор, $\mathcal{I}(a) = a \cdot i$. Тогда $\mathcal{I}^2 = -\mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — тождественный оператор. Значит, $\mathcal{I}^4 = \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{I}$ как оператор конечного порядка диагонализируем, что известно из курса линейной алгебры, и его собственные значения равны $\pm i$. Значит, всё пространство A распадается в прямую сумму двух собственных подпространств: $A = A_+ \oplus A_-$, где $A_\pm$ — подпространство векторов с собственным значением $\pm i$, то есть $\forall\, a \in A_+ \ \mathcal{I}a = a \cdot i = i \cdot a$, $\forall\, b \in A_- \ \mathcal{I}b = b \cdot i = -i \cdot b$.

   Лемма 5. $A_+ \cdot A_+ \subseteq A_+$, $A_+ \cdot A_- \subseteq A_-$, $A_- \cdot A_+ \subseteq A_-$, $A_- \cdot A_- \subseteq A_+$. *В этом случае говорят, что на A задана* градуировка по модулю 2.

   Доказательство напрямую следует из определения A_+ и A_-.

   Лемма 6. A_+ — *тело.*

   □ Ясно, что A_+ — подалгебра с единицей.

   $\forall\, a \in A_+ \colon a \neq 0 \ \exists\, a^{-1} = b \in A \Rightarrow b = b_+ + b_-$, где $b_+ \in A_+$, $b_- \in A_- \Rightarrow A_+ \ni 1 =$ $= ab = \underbrace{ab_+}_{\in A_+} + \underbrace{ab_-}_{A_-} \Rightarrow \begin{cases} ab_+ = 1, \\ ab_- = 0 \end{cases} \Rightarrow b_- = 0$, так как в алгебре нет делителей нуля $\Rightarrow b = b_+ \in A_+$. ■

Следствие. $A_+ = \mathbb{C}$.

□ A_+ — конечномерная алгебра с делением над $\mathbb{C}$. ■

3. Если $A_- = \{0\}$, то $A = A_+ = \mathbb{C}$. Иначе возьмём $a \in A \setminus \{0\} \Rightarrow \mu_a(x) = x^2 + \alpha x + \beta$, $\alpha^2 - 4\beta < 0 \Rightarrow \underbrace{a^2}_{\in A_+} + \underbrace{\alpha a}_{A_-} + \underbrace{\beta}_{\in \mathbb{C} = A_+} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + \beta = 0, \\ \alpha a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta > 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 + \beta = 0.$

Рассмотрим $j = \frac{b}{\sqrt{\beta}}$: $j^2 + 1 = 0 \Rightarrow j^2 = -1$.

Лемма 7. $A_- = \mathbb{C} \cdot j$.

□ Проиллюстрируем:

$$A_+ \underset{\cdot j}{\overset{\cdot j}{\rightleftarrows}} A_-,$$

то есть $A_- \cdot j \subseteq A_+ = \mathbb{C} \Rightarrow A_- \cdot j^2 = A_- \subseteq A_+ \cdot j = \mathbb{C} \cdot j \subseteq A_-$. ■

$A = A_+ \oplus A_-$, $A_+ = \langle 1, i \rangle_{\mathbb{R}}$, $A_- = \left\langle j, ij \overset{\text{def}}{=} k \right\rangle_{\mathbb{R}}$. Значит, $A = \langle 1, i, j, k \rangle_{\mathbb{R}}$, $i^2 = j^2 = -1$, $ij = -ji = k$. Остальные соотношения между кватернионными единицами выводятся из этих; например, $k^2 = (ij)^2 = ijij = -iijj = -(-1) \cdot (-1) = -1$. Итак, $A \cong \mathbb{H}$.

■

Теорема (Веддерберна). Всякая конечномерная алгебра с делением над конечным полем (то есть конечное тело) является полем[27)].

[27)] Теорема приводится без доказательства.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ