



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

ДЕМИДОВ
СЕРГЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
АНДРЕЕВУ АННУ СЕРГЕЕВНУ



Оглавление

Лекция 1. Матрица СКМ.....	7
Кварки. Калибровочные группы	7
Лагранжиан взаимодействия	8
Диагонализация юкавовских взаимодействий.....	10
Матрица СКМ. Стандартная параметризация	11
Свойства матрицы СКМ.....	12
Лекция 2. Значения СКМ-матрицы. FCNC процессы.....	15
Эксперименты для определения значений матрицы СКМ.....	15
FCNC процессы.....	20
Подход эффективной теории поля	21
Новая физика.....	24
Лекция 3. Ренормгруппа и перенормировка локальных операторов	25
Лагранжиан взаимодействия	25
Ренормгруппа.....	26
Перенормировка локальных операторов	29
Задачи	31
Примеры.....	31
Лекция 4. Распад каонов	34
Расчет 1-петлевой поправки для распада каона	34
Перенормировка операторов в 1-петлевом случае	36
Физика распада каонов	40
Лекция 5. Операторы, изменяющие странность на 1	43
Повторение материала прошлой лекции.....	43
Операторы, изменяющие странность на 1	45
Численные оценки констант связи	51
Оценка ширины распада каона $K \rightarrow \pi - \pi^0$	52

Лекция 6. Оценка ширины распада каона $K \rightarrow \pi - \pi^0$. CP-нарушение. Смешивание нейтральных каонов.....	53
Киральная теория и голдстоуновские бозоны	53
Оценка оператора O_4	54
Вычисление матричных элементов.....	57
Численная оценка времени жизни распада каона $K \rightarrow \pi - \pi^0$	59
CP-нарушения в кварковом секторе стандартной модели	59
Смешивание нейтральных каонов.....	60
Лекция 7. Классификация CP-нарушений.....	63
Собственные вектора и собственные значения гамильтониана.....	63
Эволюция	65
Классификация нарушающих эффектов	66
Лекция 8. Матричный элемент теоретико-полевого гамильтониана между состояниями мезона и антимезона	70
Предположения.....	70
Эффективный лагранжиан и амплитуда	71
Оценки для слагаемых лагранжиана.....	74
Вычисление матричного элемента.....	75
Лекция 9. Матричный элемент теоретико-полевого гамильтониана между состояниями мезона и антимезона. Часть 2. Применение к V-мезонам.....	77
Вычисление матричного элемента (продолжение).....	77
$Im\Gamma_{12} = 0$. Объяснение	79
Оценки для V_0 мезона.....	80
Лекция 10. Сравнение систем нейтральных каонов, V_d и V_s мезонов и CP-нарушения в них.....	85
Оценки для V-мезонов	85
Сравнение нейтральных каонов, d- и s-мезонов.....	86
CP-нарушение в смешивании в системе V-мезонов.....	87

Прямое CP-нарушение.....	89
Лекция 11. CP-нарушения в системах нейтральных каонов и В-мезонов	93
Прямое CP-нарушение.....	93
CP-нарушение в интерференции.....	95
Распад $B^0 \rightarrow J\psi K_S^0$	96
Распад $B^0 \rightarrow J\psi K_S^0$	98
Измерения	99
Лекция 12. Глубокое неупругое рассеяние.....	101
CP-нарушения в интерференции. Измерения	101
Глубоко неупругое рассеяние.....	104
Рассеяние лептона на мюоне	105
Рассеяние лептона на адроне.....	108
Лекция 13. Структурные функции. Партонная модель.....	110
Сечения лептонного рассеяния на мюоне и адроне	110
Структурные функции	111
Рассеяние нейтрино на адроне	112
Скейлинг Бьеркена.....	113
Партонная модель	114
Лекция 14. Рассеяние лептонов на протоне и изосинглетной мишени. Аннигиляция e^+e^- в адроне в партонной модели	118
Рассеяние электрона на протоне	118
Рассеяние нейтрино на протоне	119
Общие свойства партонных функций распределения	120
Рассеяние нейтрино на изосинглетной мишени	122
e^+e^- аннигиляция в адронах.....	122
Поправки e^+e^- аннигиляции в адроне. Реальные поправки	125

Лекция 15. Аннигиляция e^+e^- в адронах. Излучение в начальном состоянии127

Поправки e^+e^- аннигиляции в адроне. Виртуальные поправки	127
Вероятность рождения глюонов.....	129
Адронный джет	130
Излучение в начальном состоянии.....	132

Лекция 16. Излучение в начальном состоянии. Уравнения DGLAP и Альтарелли-Паризи.....135

Излучение в начальном состоянии.....	135
Многократное излучение в начальном состоянии.....	138
DGLAP	139
Уравнения Альтарелли-Паризи.....	140

Лекция 1

Матрица СКМ

Кварки. Калибровочные группы

Курс посвящен феноменологии элементарных частиц и состоит из двух частей, которые можно слушать независимо. В первой части мы будем изучать флейверную физику, процессы с нарушением флейвера в нейтральных токах и процессы с CP-нарушениями. Вторая часть посвящена глубоко неупругому рассеянию лептонов на адронах и описанию рассеяния адронов на адронах. Поговорим о партонной модели и партонных функциях распределения. Разберем уравнения Альтарелли-Паризи и все, что с этим связано.

Начнем с физики флейверов. Вспомним, как устроено взаимодействие кварков в стандартной модели. Есть 6 типов кварков, часть из них являются дублетами, часть – синглетами (левые кварки объединены в дублеты, правые кварки синглетны по электрослабому взаимодействию $SU(2)$). Дублетные кварки:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L.$$

Калибровочные группы в стандартной модели:

$$SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)_Y,$$

$SU(3)$ – цветовая, $SU(2)_L$ – левая, $U(1)$ – гиперзарядовая. Кварки по фундаментальному представлению преобразуются относительно группы $SU(2)_L$, также у них есть определенный гиперзаряд для дублетов:

$$Y = +\frac{1}{3}.$$

Связь заряда с гиперзарядом и изоспином:

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}.$$

Для верхних кварков: $Q = +\frac{2}{3}, I_3 = \frac{1}{2}$; для нижних кварков: $Q = -\frac{1}{3}, I_3 = -\frac{1}{2}$.

Есть и синглеты. Все правые кварки являются синглетами относительно группы $SU(2)_L$:

$$U_i = \{u_R, c_R, t_R\}, \quad Y = +\frac{4}{3};$$

$$D_i = \{d_R, s_R, b_R\}, \quad Y = -\frac{2}{3}.$$

Вспомним массы кварков. Они потребуются для дальнейших оценок:

$$m_t \approx 172 \text{ ГэВ}, \quad m_b \approx 4.5 \text{ ГэВ}, \quad m_c \approx 1.4 \text{ ГэВ},$$

$$m_s \approx 80 - 120 \text{ МэВ}, \quad m_d \approx 5 - 7 \text{ МэВ}, \quad m_u \approx 3 - 5 \text{ МэВ}.$$

Лагранжиан взаимодействия

Соответствующая часть лагранжиана стандартной модели, которая описывает взаимодействие кварков между собой и с другими частицами, выглядит следующим образом:

$$\mathcal{L} = i\bar{Q}_n \gamma^\mu D_\mu Q_n + i\bar{U}_n \gamma^\mu D_\mu U_n + i\bar{D}_n \gamma^\mu D_\mu D_n - (Y_{mn}^d \bar{Q}_m H D_n + Y_{mn}^u \bar{Q}_m \tilde{H} U_n + h.c.),$$

n – номер поколения;

$D_\mu = \partial_\mu - ig_3 t^a A_\mu^a - ig \frac{\tau^i}{2} V_\mu^i - ig' \frac{Y}{2} B_\mu$ – ковариантная производная (второе слагаемое есть только для дублетов), τ^i – матрицы Паули, V_μ^i – калибровочные поля группы $SU(2)_L$;

$\tilde{H}_\alpha = i\sigma_{\alpha\beta}^2 H_\beta^*$ – необходим для сохранения калибровочной инвариантности, $\alpha = 1, 2$.

$Y_{mn}^d \bar{Q}_m H D_n$, $Y_{mn}^u \bar{Q}_m \tilde{H} U_n$ – калибровочно инвариантны относительно группы $SU(3)$, синглеты относительно группы $SU(2)$, синглеты относительно $U(1)$. Чтобы это показать необходимо определить заряды поля Хиггса:

$$Y_H = +1, \quad Y_{\tilde{H}} = -1.$$

В отсутствие юкавовских взаимодействий (последние 2 слагаемых) есть большая группа флейверных симметрий, которые перемешивают различные флейверы. При преобразовании

$$Q \rightarrow U_Q Q$$

кинетическое слагаемое будет инвариантно. Аналогично для двух других кинетических слагаемых:

$$U \rightarrow U_u U, \quad D \rightarrow U_D D,$$

$U_Q, U_u, U_D: U^\dagger U = 1$ – унитарные матрицы.

Рассмотрим случай наличия юкавовских взаимодействий (включаем спонтанное нарушение симметрии, бозон Хиггса приобретает ненулевое вакуумное среднее). Будем работать в унитарной калибровке:

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h(x)) \end{pmatrix}$$

$v = 246$ ГэВ – вакуумное среднее поле Хиггса, $h(x)$ – поле физического бозона Хиггса. При подстановке в юкавовские слагаемые получим следующий лагранжиан:

$$\mathcal{L}_{\text{юкав}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} Y_{mn}^d \bar{d}_{Lm} d_{Rn} (v + h(x)) - \frac{1}{\sqrt{2}} Y_{mn}^u \bar{u}_{Lm} u_{Rn} (v + h) + h.,$$

$$d_{R_1} = d_R; \quad d_{R_2} = s_R; \quad d_{R_3} = b_R;$$

$$u_{R_1} = u_R; \quad u_{R_2} = c_R; \quad u_{R_3} = t_R.$$

Из-за произвольности Y происходит перемешивание флейверов.

Что происходит с калибровочными взаимодействиями? Есть глюонные взаимодействия (диагональные по флейверу). С другими калибровочными полями, которые соответствуют калибровочным группам $SU(2)$ и $U(1)$ вводятся линейные комбинации, которые соответствуют массовым состояниям. Вводится поля фотонов:

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g' V_\mu^3 + g B_\mu), \quad m_\gamma = 0,$$

Поле Z-бозона:

$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g V_\mu^3 - g' B_\mu), \quad m_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} v.$$

Поле W-бозона:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (V_\mu^1 \mp i V_\mu^2), \quad m_W = \frac{g}{2} v.$$

В ковариантных производных эти поля входят в виде матрицы 2×2 :

$$\begin{pmatrix} A - Z & W \\ W & A - Z \end{pmatrix}.$$

То, что стоит по диагонали, не будет перемешивать верхние и нижние кварки, соответствующие взаимодействия не зависят от типа флейвера. Поля вне диагонали (W) перемешивают между собой нижние и верхние кварки. Если оставим только поля W, то в ковариантную производную возникнет вклад (за счет умножения на первую матрицу Паули):

$$\frac{g}{2} \begin{pmatrix} 0 & V_\mu^1 - i V_\mu^2 \\ V_\mu^1 + i V_\mu^2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & 0 \end{pmatrix}.$$

Если подставить эту часть ковариантной производной в лагранжиан, то мы увидим, что лагранжиан взаимодействия с W-бозонами будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{L}_W = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_{Lm} \gamma^\mu W_\mu^+ d_{Lm} + h. c.$$

В кварковом базисе, который называется флейверным, калибровочные взаимодействия диагональны. Соответственно взаимодействия с W -бозоном не перемешивают поколения, но это слагаемое перемешивает верхние и нижние кварки. Что касается диагональных слагаемых производной, то для них не перемешиваются ни поколения, ни верхние и нижние кварки, то есть на древесном уровне они не приводят к изменению флейвера.

Диагонализация юкавовских взаимодействий

Записав массовые слагаемые, мы увидели, что в общем случае они не являются диагональными, поскольку юкавовские константы в общем случае недиагональны. Для дальнейших вычислений следует диагонализировать массовые слагаемые. Это можно сделать следующими преобразованиями:

$$d_{Lm} = U_{mn}^{dL} \tilde{d}_{Ln},$$

d – флейверный базис, \tilde{d} – поля в таком базисе, в котором массовые слагаемые диагональны.

$$d_{Rm} = U_{mn}^{dR} \tilde{d}_{Rn},$$

$$u_{Lm} = U_{mn}^{uL} \tilde{u}_{Lm},$$

$$u_{Rm} = U_{mn}^{uR} \tilde{u}_{Rm}.$$

Можно делать отдельно преобразования для правых и левых, причем с разными унитарными матрицами. Дело в том, что кинетический член для фермионов разбивается на два независимых слагаемых для правых и для левых фермионов:

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L + i\bar{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R, \quad 1 = P_R + P_L.$$

Другими словами, кинетический член для фермионов не перемешивает левые и правые фермионы, поэтому можно делать независимые преобразования для правых и левых кварков. При таких преобразованиях полевые кинетические слагаемые не изменятся, а юкавовские константы поменяются:

$$Y_{mn}^d \bar{d}_{Lm} d_{Rn} = (U^{dL\dagger} Y^d U^{dR})_{pp} \bar{\tilde{d}}_{Lp} \tilde{d}_{Rp},$$

$$Y_{mn}^d = U_{mp}^{dL} Y_p^d U_{pn}^{dR*}, \quad m_p^d = \frac{1}{\sqrt{2}} Y_p^d v.$$

Аналогичного потребуем и для верхних кварков:

$$Y_{mn}^u = U_{mp}^{uL} Y_p^u U_{pn}^{uR*}, \quad m_p^u = \frac{1}{\sqrt{2}} Y_p^u v.$$

Таким образом, мы диагонализовали юкавовские взаимодействия.

Матрица СКМ. Стандартная параметризация

Где еще сыграет преобразование полей от флейверного базиса к массовому? Если вспомнить про то, что взаимодействие с фотоном и Z-бозоном были диагональны во флейверном базисе и не перемешивали поколения, то после унитарных преобразований они также не будут перемешиваться, поскольку векторные взаимодействия не перемешивают левые и правые кварки. Для W-бозона ситуация хитрее.

$$\mathcal{L}_W = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_{Lm} \gamma^\mu W_\mu^+ d_{Lm} + h.c. = \frac{g}{\sqrt{2}} \tilde{u}_{Lm} \gamma^\mu W_\mu^+ V_{mn} \tilde{d}_{Ln},$$

$$V = U^{uL\dagger} U^{dL}, \quad V^\dagger V = 1.$$

Это единственный след, который приводит к изменению флейвера (причем с изменением заряда), по крайней мере, на древесном уровне в лагранжиане стандартной модели. Говорят, что в стандартной модели нет нарушения флейвера в нейтральных токах. Зато есть нарушение флейвера в заряженных токах на древесном уровне.

Итак, мы ввели **матрицу СКМ** (*Кабиббо — Кобаяси — Маскавы*), притом она унитарна. Единственное слагаемое, содержащее СКМ-матрицу ответственно за изменение флейвера в стандартной модели на древесном уровне.

Матрица содержит 9 параметров: 3 угла, 6 комплексных фаз. В дальнейшем при переходе от флейверного базиса к массовому – от полей u, d к \tilde{u}, \tilde{d} , будем опускать тильды при работе в массовом базисе. Матрица входит в комбинацию:

$$\bar{u}_{Lm} V_{mn} d_{Ln}.$$

Помимо уже выполненных преобразований, в лагранжиане остается возможность сделать фазовые смещения полей без изменения их флейвера:

$$u_{Lm} \rightarrow e^{i\alpha_m} u_{Lm}.$$

Возможны шесть таких вращений, из них только пять являются независимыми (одна из комбинаций этих вращений тривиальна). С помощью независимых вращений можно устранить 5 комплексных фаз из 6. Другими словами, пять комплексных фаз из 6 не являются физическими. Таким образом, в матрице смешивания всего 4 физических параметра – три угла $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ и одна фаза δ .

Используется несколько различных параметризаций. Стандартная параметризация имеет следующий вид:

$$V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix},$$

$$\cos \theta_{ij} = c_{ij}, \quad \sin \theta_{ij} = s_{ij}.$$

Экспериментальные значения:

$$s_{12} \approx 0.2272, \quad s_{23} \approx 0.0422, \quad s_{13} \approx 0.004, \quad \delta \sim 57^\circ.$$

Распишем матрицу СКМ, введем стандартные обозначения:

$$V = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.974 & 0.227 & 4 \cdot 10^{-3} \\ 0.227 & 0.973 & 4 \cdot 10^{-2} \\ 8 \cdot 10^{-3} & 4 \cdot 10^{-2} & 0.999 \end{pmatrix}.$$

Численные значения полезны для оценок и следующего наблюдения: введем параметр малости $\varepsilon \approx 0.227$, можно обнаружить иерархию:

$$V \sim \begin{pmatrix} \varepsilon^0 & \varepsilon^1 & \varepsilon^3 \\ \varepsilon^1 & \varepsilon^0 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & \varepsilon^0 \end{pmatrix}.$$

Эта иерархия отличает матрицу СКМ от матрицы смешивания в нейтринном секторе. Наличие иерархии позволит упростить сложную стандартную параметризацию.

Домашнее задание:

- 1) Представим, что есть два поколения кварков. Покажите явным образом, что в этом случае в аналоге матрицы СКМ не будет никаких физических фаз.
- 2) В случае трех поколений появляется физическая фаза δ . Покажите, что при $\delta \neq 0$ присутствие этой фазы означает наличие CP-нарушения в лагранжиане стандартной модели.

Свойства матрицы СКМ

1. Матрица СКМ является унитарной:

$$V^+V = 1.$$

Недиагональные элементы этого равенства имеют вид:

$$\sum_k V_{ik}V_{jk}^* = 0, \quad i \neq j,$$

$$V_{ud}V_{cd}^* + V_{us}V_{cs}^* + V_{ub}V_{cb}^* = 0,$$

$$V_{cd}V_{td}^* + V_{cs}V_{ts}^* + V_{cb}V_{tb}^* = 0,$$

$$V_{ud}V_{td}^* + V_{us}V_{ts}^* + V_{ub}V_{tb}^* = 0.$$

Если вспомнить иерархию, то увидим, что первое равенство имеет следующий порядок по ε :

$$\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon^5 = 0,$$

Второе слагаемое:

$$\varepsilon^4 + \varepsilon^2 + \varepsilon^2 = 0,$$

Третье слагаемое:

$$\varepsilon^3 + \varepsilon^3 + \varepsilon^3 = 0.$$

Сумму трех комплексных чисел удобно представлять в виде вектора. Поскольку сумма трех векторов в нашем случае равняется нулю, то данные вектора образуют треугольник. Таких треугольников 6 и они называются **унитарными треугольниками**. Абсолютное значение каждого из векторов – размер соответствующей стороны. Так, в первом треугольнике две стороны очень большие, а третья мала. Второй унитарный треугольник также имеет две большие стороны и одну маленькую. Третий треугольник имеет стороны одного порядка по ε .

Унитарные треугольники часто используются для представления экспериментальных результатов. Наиболее обсуждаемый треугольник:

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0,$$

$$\varepsilon^3 + \varepsilon^3 + \varepsilon^3 = 0,$$

$$\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} + 1 + \frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} = 0.$$

В комплексной плоскости представляют в следующем виде:

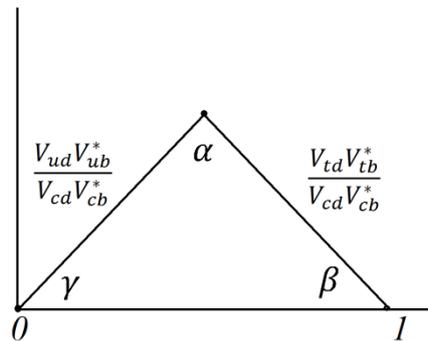


Рис. 1.1. Унитарный треугольник на комплексной плоскости.

Часто экспериментальные данные изображаются на такой плоскости.

Домашнее задание:

- 1) Покажите, что если ввести $J = Ym(V_{ud}V_{cd}^*V_{cb}V_{ub}^*)$, то J не зависит от фазовых параметризаций, инвариантна относительно фазовых преобразований.
 - 2) Покажите, что углы α, β, γ инвариантны относительно фазовых преобразований, то есть являются наблюдаемыми.
2. Иерархия элементов матрицы СКМ позволяет ввести другую параметризацию матрицы, которая более удобна для небольших выкладок и часто используется.

Параметризация Вольфенштейна:

$$s_{12} = \lambda, \quad s_{23} = A\lambda^2, \quad s_{13}e^{i\delta} = A\lambda^3(\rho + \eta),$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - \eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - \eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + O(\lambda^4).$$

Домашнее задание:

Показать, что запись матрицы СКМ в параметризации Вольфенштейна верна.

Лекция 2

Значения СКМ-матрицы. FCNC процессы

Эксперименты для определения значений матрицы СКМ

На прошлой лекции мы обсудили, как возникает нарушение флейвера в стандартной модели. На древесном уровне нарушение флейвера в нейтральных тока отсутствует, но есть нарушение в заряженных токах. Мы ввели матрицу СКМ и увидели, что в ней есть 4 параметра – 3 угла и 1 фаза. Обсудим, из каких экспериментов извлекаются значения элементы матрицы СКМ.

$$V = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}.$$

- 1) V_{ud} измеряется из обычного β –распада в ядрах. Тривиальный пример – распад нейтрона в протон, электрон и электронное антинейтрино:

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e,$$

$n = \{udd\}, p = \{uud\}$. При данном распаде происходит переход d-кварка в u-кварк за счет обмена W-бозоном. Диаграммный вид представлен на рисунке 2.1. При изменении типа кварка есть вершина, из которой излучается W-бозон (в случае β –распада виртуальный), который распадается на электрон и электронное антинейтрино.

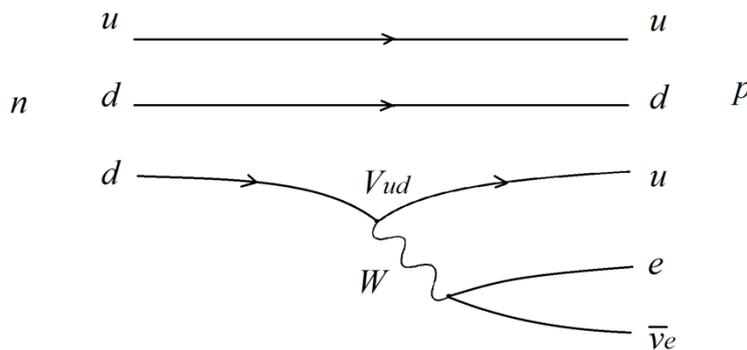


Рис. 2.1. Диаграмма β –распада.

Лагранжиан взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_L \gamma^\mu W_\mu^+ d_L V_{ud}.$$

Так, амплитуда и как следствие ширина этого распада будут пропорциональны $|V_{ud}|$.

- 2) Модули следующей группы элементов $V_{us}, V_{ub}, V_{cd}, V_{cs}, V_{cb}$ извлекается из полуплептонных распадов мезонов:

$$M \rightarrow M'lv.$$

В качестве примера рассмотрим распад:

$$B^- \rightarrow \pi^0 + e + \bar{\nu}_e,$$

$$b\bar{u} \rightarrow \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}} + e + \bar{\nu}_e$$

Диаграмма распада представлена на рисунке 2.2. В вершине будет аналогичный член взаимодействия. В рассмотренном случае в вершине будет стоять элемент V_{ub} .

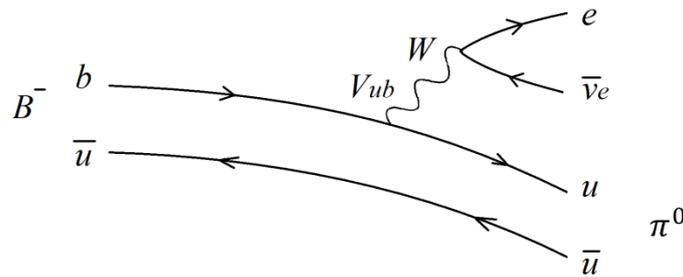


Рис. 2.2. Диаграмма распада $B^- \rightarrow \pi^0 + e + \bar{\nu}_e$.

Лагранжиан взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_L \gamma^\mu W_\mu^+ b_L V_{ub} + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma^\mu W_\mu^+ e_L + h.c.$$

Второе слагаемое описывает вторую вершину – взаимодействие W-бозона с лептонами.

Чтобы определить амплитуду этого процесса, рассмотрим поддиаграмму, связанную с обменом W-бозоном (рис. 2.3). Если записать правила фейнмана, соответствующие этой диаграмме, соответствующие внутренним линиям и вершинам, то войдут следующие элементы:

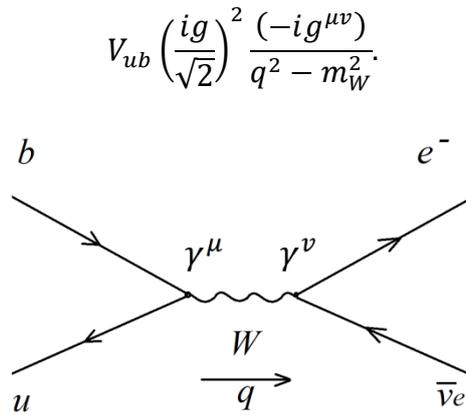


Рис. 2.3. Поддиаграмма с обменом W-бозоном.

Хотим изучить эту диаграмму для полуплептонного распада B-мезона:

$$m_b \approx 5 \text{ ГэВ} \Rightarrow q \approx 4 - 5 \text{ ГэВ},$$

$$m_W \approx 80 \text{ ГэВ} \Rightarrow$$

$$m_b \ll m_W \Rightarrow$$

Можно перейти к пропагатору независящему от q , что будет соответствовать точечному взаимодействию. Константа взаимодействия в таком случае будет иметь следующий вид:

$$V_{ub} \left(\frac{ig}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{(-ig^{\mu\nu})}{q^2 - m_W^2} \rightarrow -i \frac{g^2}{2m_W^2} V_{ub} g^{\mu\nu} -$$

Приближение Ферми. Соответствующая кинетическая теория, описывающая точечное взаимодействие, которое можно изобразить диаграммой, представленной на рисунке 2.4.

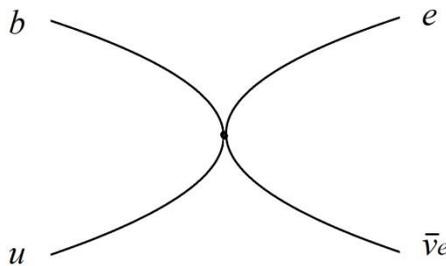


Рис. 2.4. Диаграмма точечного взаимодействия.

Для описания всех таких взаимодействий вводится постоянная Ферми:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}.$$

Эффективный лагранжиан в приближении Ферми:

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = -2\sqrt{2}G_F V_{ub} (\bar{u}_L \gamma^\mu b_L) (\bar{e}_L \gamma_\mu \nu_{eL}) + h. c.$$

Для получения амплитуды необходимо посчитать следующий матричный элемент:

$$iM = -i2\sqrt{2}G_F V_{ub} \langle e^- \nu_e \pi^0 | (\bar{u}_L \gamma^\mu b_L) (\bar{e}_L \gamma_\mu \nu_{eL}) | B^- \rangle$$

Разобьем амплитуду на произведение двух частей – лептонную и кварковую.

$$iM = -i2\sqrt{2}G_F V_{ub} \langle e^- \nu_e | \bar{e}_L \gamma_\mu \nu_{eL} | 0 \rangle \langle \pi^0 | \bar{u}_L \gamma^\mu b_L | B^- \rangle.$$

Первый элемент легко вычисляется и выражается через спинорные решения. Рассчитать второй элемент из первых принципов не представляется сейчас возможным. Обратим внимание на то, что $\bar{u}_L \gamma^\mu b_L$ – ток, его можно записать в виде $V - A$, где V – векторная часть, а A – аксиальная. π^0, B^- – псевдо скалярные мезоны, то есть вклад во второй матричный элемент дает только векторный ток V . Для оценки времени жизни и ширины этого распада используют различные модели, часто параметризуют:

$$\langle p' | V^\mu | p \rangle = f_+(q^2)(p + p')^\mu + f_-(q^2)q^\mu$$

p' – импульс π^0 , p – импульс B^- , $q = p - p'$;

$f_+(q^2), f_-(q^2)$ – формфакторы.

При описании других процессов возникают матричные элементы другого типа.

Домашнее задание:

Используя параметризацию, вычислить квадрат матричного элемента и убедиться, что вклад с f_- подавлен по массе электрона.

- 3) Что касается матричных элементов, связанных с t -кварком (V_{td}, V_{ts}, V_{tb}), то с помощью изучения полуплептонных распадов их измерить нельзя, поскольку нет мезонов из t -кварков. t -кварк мало живет и быстро распадается. Проведем оценку.

Лагранжиан взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{t}_L \gamma^\mu W_\mu^+ b_L V_{ub} + h.c.$$

Из этого лагранжиана взаимодействия следует диаграмма, представленная на рисунке 2.5. Используя эту диаграмму, можно оценить ширину t-кварка. Наивная оценка:

$$\Gamma_t \sim \frac{g^2 |V_{ub}|^2 m_t}{4\pi}$$

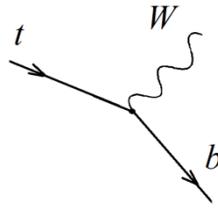


Рис. 2.5. Диаграмма распада t-кварка.

Эта оценка не совсем верна, поскольку у W-бозона есть масса, она возникает после того как мы распишем спонтанное нарушение электрослабой симметрии с помощью механизма Хиггса. Из-за того, что W-бозон массивный, у него есть 3 поляризации – две поперечные, которые действительно описываются приведенной оценкой, и одна продольная, возникающая только у массивных частиц, ее вклад не описывается наивной оценкой, в вершине будет стоять константа юкавовских взаимодействий y_t , и эта часть распада будет усилена.

Домашнее задание:

Выведите полную формулу для ширины распада t-кварка, рассчитайте из нее время жизни.

Время жизни t-кварка из наивной оценки:

$$\tau \sim 10^{-25} \text{ с} -$$

малая величина, меньше характерного времени для сильных взаимодействий ($\sim 10^{-22} - 10^{-23}$ с). Это объясняет, почему t-кварк не образует адроны – он быстрее распадается, чем адронизуется.

Так, V_{td}, V_{ts}, V_{tb} извлекают из других измерений, в частности из изучения осцилляций мезонов.

- 4) Об измерении фазы δ , отвечающей за CP-нарушения поговорим отдельно.

FCNC процессы

Перейдем к обсуждению FCNC процессов – процессов с изменением флейверов в нейтральных токах (изменение типа кварка без изменения заряда за счет обмена фотоном Z , H -бозонами). При диагонализации матрицы кварков вакуумное среднее поля Хиггса входит в комбинации с самим физическим полем. Поэтому диагонализуя массовый член, мы диагоналируем взаимодействие с полем Хиггса, то есть такое взаимодействие не приводит к изменению флейвера. На древесном уровне в стандартной модели такие процессы отсутствуют. Однако есть петлевые поправки – старшие поправки теории возмущений. Легко видеть, что на петлевом уровне такие процессы присутствуют.

Приведем примеры.

- 1) Переход между $K^0(d\bar{s})$ – мезоном и его античастицей $\bar{K}^0(s\bar{d})$ изображен на рисунке 2.6. Кварк типа d перешел в s -кварк, а кварк типа \bar{s} перешел в кварк \bar{d} . Произошло изменение типа кварка без изменения заряда.

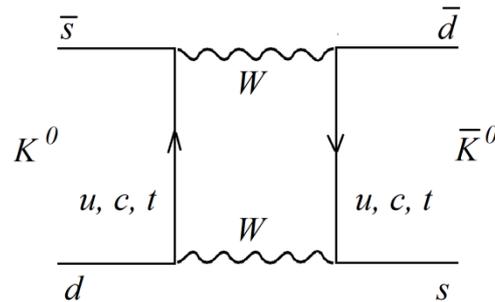


Рис. 2.6. Переход между $K^0(d\bar{s})$ – мезоном и его античастицей $\bar{K}^0(s\bar{d})$.

Квантовые числа в начальном состоянии: $I_3 = -\frac{1}{2}, S = 1$.

В конечном состоянии: $I_3 = +\frac{1}{2}, S = -1$.

Произошло изменение изоспина на 1 и странности на 2.

- 2) Рассмотрим другой пример. Пусть начальное состояние будет таким же $K^0(d\bar{s})$, но будем рассматривать взаимодействие не с кварками, а с лептонами. В конечном состоянии $\nu_e, \bar{\nu}_e$ (рис. 2.7). Мы видим, что в конечном состоянии кварков вообще нет. Произошло изменение флейвера без изменения заряда.

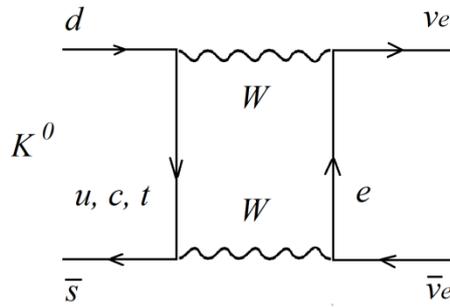


Рис. 2.7. Преобразование $K^0(d\bar{s})$ в $\nu_e, \bar{\nu}_e$.

Квантовые числа в начальном состоянии: $I_3 = -\frac{1}{2}, S = 1$.

В конечном состоянии: $I_3 = 0, S = 0$.

Подход эффективной теории поля

Итак, мы увидели, что на петлевом уровне стандартной модели возможны процессы с нарушением флейвера в нейтральных токах. Возникает вопрос: как сильно они подавлены по сравнению с древесными процессами? Очевидным образом они подавлены петлевым фактором:

$$\frac{g'^2}{16\pi^2}$$

Это большой фактор. Но оказывается, что подавлены такие процессы еще сильнее по сравнению с этим наивным подавлением.

В качестве примера рассмотрим еще один процесс с нарушением флейвера в нейтральных токах:

$$b \rightarrow s\gamma.$$

Одна из возможных диаграмм, описывающих этот процесс, представлена на рисунке 2.8.

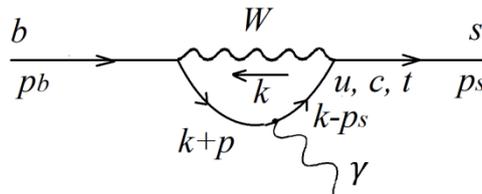


Рис. 2.8. Диаграмма распада $b \rightarrow s\gamma$.

Амплитуда этого процесса:

$$\begin{aligned}
 A(p_b, p_s) &= \\
 &= \bar{u}(p_s) \sum_{q=u,c,t} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\rho P_L \frac{\hat{k} - \hat{p}_s + m_q}{(k - p_s)^2 - m_q^2} \gamma^\mu \frac{\hat{k} + p_b + m_q}{(k + p_b)^2 - m_q^2} \gamma^\sigma P_L u(p_b) \frac{1}{k^2 - m_W^2} \left(g^{\rho\sigma} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{k^\rho k^\sigma}{m_W^2} \right) (-i) i^2 i^3 \left(\frac{g}{\sqrt{2}} \right)^2 e Q_q \varepsilon_\mu(p_b - p_s) V_{qs}^* V_{qb},
 \end{aligned}$$

Если импульсы p_b, p_s маленькие по сравнению с петлевым импульсом, по которому берем интеграл, то мы можем разложить амплитуду в ряд по этим импульсам:

$$A(p_b, p_s) = \sum P_b^m P_s^n A_{m,n}.$$

Расписав таким образом амплитуду, можно вместо лагранжиана стандартной модели ввести некоторые эффективные вершины. Соответствующие взаимодействия будут локальными. Можно ввести эффективный лагранжиан взаимодействия, который после применений правил Фейнмана приведет к амплитуде. Такой подход называется *подходом эффективной теории поля*.

Если просуммируем все такие диаграммы по всем импульсам и всем петлям, то получим эффективное действие, которое на древесном уровне будет давать все амплитуды. Для их расчета в исходном лагранжиане необходимо было бы учесть все возможные петли.

В эффективный лагранжиан будут входить три поля – поля b - и s -кварков и фотона: A_μ, b, \bar{s} . Член взаимодействия $\bar{s} \gamma^\mu b A_\mu$ не является калибровочно-инвариантным, поэтому не может возникать в эффективном лагранжиане. Незапрещенным слагаемым является:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \Rightarrow F_{\mu\nu} \bar{s} \sigma^{\mu\nu} b.$$

Техническая проблема заключается в том, что в исходной диаграмме b - и s -кварки взаимодействовали с W -бозоном, а значит они левые. Но если подставить левые поля в незапрещенное слагаемое, то легко видеть, что оно обращается в ноль:

$$F_{\mu\nu} \bar{s}_L \sigma^{\mu\nu} b_L = 0.$$

Это не верно. Чтобы получить ненулевой ответ, одно из этих полей должно стать правым. Для этого можем использовать массовое слагаемое:

$$m \bar{q} q = m(\bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L).$$

b-кварк тяжелее s-кварка, то амплитуда будет больше, если переведем кварк b в правый кварк.

$$\# \frac{eg^2}{16\pi^2} \frac{m_b}{m_W^2} F_{\mu\nu} \bar{s}_L \sigma^{\mu\nu} b_R.$$

Рассмотрим наименьший порядок по импульсам в эффективном лагранжиане:

$$F_{\mu\nu} \bar{s} \sigma^{\mu\nu} P_R b \frac{eg^2}{16\pi^2} \frac{m_b}{m_W^2} \sum_{q=u,c,t} V_{qb} V_{qs}^* f\left(\frac{m_q^2}{m_W^2}\right) = \left[\sum_{q=u,c,t} V_{qb} V_{qs}^* f\left(\frac{m_q^2}{m_W^2}\right) = F \right] =$$

$$= F_{\mu\nu} \bar{s} \sigma^{\mu\nu} P_R b \frac{eg^2}{16\pi^2} \frac{m_b}{m_W^2} F.$$

а) Предположим, что все кварки очень легкие: $m_q \ll m_W$. Тогда f можно разложить в ряд:

$$f\left(\frac{m_q^2}{m_W^2}\right) \approx f(0) + f'(0) \frac{m_q^2}{m_W^2} + O\left(\frac{m_q^4}{m_W^4}\right) \Rightarrow$$

$$F = \sum_{q=u,c,t} V_{qb} V_{qs}^* \left(f(0) + f'(0) \frac{m_q^2}{m_W^2} + \dots \right) = \left\| \sum_{q=u,c,t} V_{qb} V_{qs}^* = 0, \quad f(0) = const \right\| \approx$$

$$\approx \sum_{q=u,c,t} V_{qb} V_{qs}^* \frac{m_q^2}{m_W^2} f'(0) = ||V_{tb} V_{ts}^* = -V_{ub} V_{us}^* - V_{cb} V_{cs}^*|| =$$

$$= V_{ub} V_{us}^* \frac{m_u^2 - m_t^2}{m_W^2} + V_{cb} V_{cs}^* \frac{m_c^2 - m_t^2}{m_W^2} \sim -V_{ub} V_{us}^* \frac{m_t^2}{m_W^2} - V_{cb} V_{cs}^* \frac{m_t^2}{m_W^2}$$

$$V_{ub} V_{us}^* \sim \varepsilon^4, \quad V_{cb} V_{cs}^* \sim \varepsilon^2 \Rightarrow$$

Ответ для F параметрически подавлен как ε^2 и отношение $\frac{m_t^2}{m_W^2}$. Петлевой результат для петлевой части FCNC процесса помимо маленького петлевого фактора содержит дополнительное подавление, связанное с элементами матрицы СКМ – **ГИМ механизм**. Этот процесс объясняет, почему процессы с нарушением флейвера в нейтральных токах подавлены сильнее чем просто петлевое подавление.

б) Вернемся к реалистичному случаю – не все кварки сильно легче W-бозона (кроме t-кварка). Можем считать, что $f(0) = 0$.

$$\begin{aligned}
 F &= V_{ub}V_{us}^* \frac{m_u^2}{m_W^2} f'(0) + V_{cb}V_{cs}^* \frac{m_c^2}{m_W^2} f'(0) + V_{tb}V_{ts}^* f\left(\frac{m_t^2}{m_W^2}\right) \\
 &= \left| \left| f\left(\frac{m_t^2}{m_W^2}\right) = O(1), \quad f'(0) = O(1), \quad V_{ub}V_{us}^* \sim \varepsilon^4, \quad V_{cb}V_{cs}^* \sim \varepsilon^2, \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. V_{tb}V_{ts}^* \sim \varepsilon^2 \right| \right| \approx V_{tb}V_{ts}^* f\left(\frac{m_t^2}{m_W^2}\right).
 \end{aligned}$$

Новая физика

FCNC процессы интересны потому, что в стандартной модели амплитуды этих процессов сильно подавлены. Это означает, что при изучении таких процессов можно сильно ограничить модели новой физики, которые могли бы вызывать эти процессы.

Представим, что есть модель новой физики, которая приводит к дополнительному вкладу в амплитуду процесса $b \rightarrow s\gamma$. Запишем этот вклад в калибровочно-инвариантном виде:

$$\mathcal{L}_{NP} = \frac{A}{\Lambda^2} e F_{\mu\nu} \bar{Q}_{2L} H \sigma^{\mu\nu} b_R,$$

Λ – энергетический масштаб новой физики.

$$\mathcal{L}_{NP} \rightarrow \frac{Aev}{\sqrt{2}\Lambda^2} F_{\mu\nu} \bar{S}_L \sigma^{\mu\nu} b_R.$$

Пусть амплитуда процесса измерена, представим, что точность ее измерения составляет величину ε . Вклад новой физики не может превышать ε . Соответственно можем получить ограничение:

$$\begin{aligned}
 \frac{A_{NP}}{A_{SM}} &= \frac{\frac{Aev}{\sqrt{2}\Lambda^2}}{\frac{eg^2}{16\pi^2} \frac{m_b}{m_W^2} V_{tb}V_{ts}^* f\left(\frac{m_t^2}{m_W^2}\right)} < \varepsilon \Rightarrow \\
 \frac{\Lambda}{\sqrt{A}} &> \frac{30}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ ТэВ}.
 \end{aligned}$$

Чем точнее измерение, тем сильнее ограничение. 30 ТэВ – очень много (современная максимальная энергия 13-14 ТэВ). Так, из изучения редких процессов мы можем получить ограничение на энергетические масштабы новой физики, существенно превышающие энергии существующих ускорителей. Поэтому изучение редких процессов так интересно.

Лекция 3

Ренормгруппа и перенормировка локальных операторов

Лагранжиан взаимодействия

В прошлый раз мы обсудили то, где в стандартной модели происходит нарушение при взаимодействии кварков с W-бозоном, появляется матрица смешивания, СКМ-матрица, обсудили ее элементы и иерархию, увидели, что она имеет нетривиальную иерархию по сравнению с матрицей смешивания в нейтринном секторе. Обсудили, как она параметризуется. Продолжим эту тему, рассмотрим процессы с нарушением. Обычно они проявляются в распадах легких мезонов. Чтобы описывать такие распады, нужен лагранжиан при низких энергиях порядка масс этих мезонов.

Нас будут интересовать не только распады мезонов, в которых есть кварки, и распады мезонов, в конечных состояниях которых возникают лептоны и может быть важна вторая часть лагранжиана взаимодействия. Тогда лагранжиан электрослабых взаимодействий:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_{Lm} \gamma^\mu W_\mu^+ d_{Ln} V_{mn} + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{Ln} \gamma^\mu W_\mu^+ l_n + h.c.$$

Если нас интересует область очень низких энергий, то мы переходим к теории Ферми:

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = -2\sqrt{2}G_F (\bar{d}_{Lm} \gamma^\mu u_{Ln}) (\bar{u}_{Lp} \gamma_\nu d_{Lq}) V_{pq} V_{nm}^* + \text{лептонная часть}.$$

Если нас будут интересовать распады каонов (каон содержит s-кварк и d- или u-кварк в зависимости от того нейтральный или заряженный каон). Поэтому нас будут интересовать 3 самых легких кварка:

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = -2\sqrt{2}G_F (\bar{d}_L \gamma^\mu u_L) (\bar{u}_L \gamma_\mu s_L) V_{us} V_{ud}^* - 2\sqrt{2}G_F (\bar{l}_L \gamma^\mu \nu_{eL}) (\bar{u}_L \gamma_\mu s_L) V_{us} + h.c.$$

$$k \rightarrow \pi\pi \qquad \qquad \qquad \begin{matrix} k^+ \\ (\bar{s} u) \end{matrix} \rightarrow e^+ \nu_{eL}$$

Проблема с этим лагранжианом заключается в следующем: когда мы пишем эффективную теорию поля, происходит обмен W-бозоном, частицей с массой $m_W \approx 80$ ГэВ. Но мы хотим применять этот лагранжиан взаимодействия для процессов, характерное изменение импульсов в которых значительно меньше массы W-бозона. Масса каона примерно 0,5 ГэВ, соответственно переданный импульс не больше 0,5 ГэВ. Соответственно возникает два масштаба: m_k и m_W . И как вы помните, когда в квантовой теории поля у вас есть два различных, связанных между собой масштаба, это

может сильно сыграть, в том смысле, что константа связи зависит от масштаба. Поэтому не всегда константа, выписанная в эффективном взаимодействии, будет давать правильный ответ. Более того, в данном случае ответ будет совершенно неправильным. В конце этой лекции или начале следующей мы увидим, что наивно посчитанная ширина оказывается совершенно неправильной (различие во много раз) по сравнению с той, которая фактически измеряется.

Представим, что есть некоторая перенормируемая теория. В этой теории мы хотим посчитать амплитуды или функции Грина:

ϕ – поля, которые есть в теории, $G(x_1 \dots x_n) = \langle 0 | T \phi_1(x_1) \dots \phi_n(x_n) | 0 \rangle$ – функции Грина.

Ренормгруппа

Из функций Грина всегда можно извлечь амплитуды с помощью формулы *Лемана-Симанчика-Циммермана*. Но когда начинаем считать эти функции Грина, возникают расходящиеся петлевые диаграммы. Регуляризуем теорию некоторым образом (размерная регуляризация, старшими производными), но в итоге все сводится к тому, что мы получаем конечный ответ, который при снятии регуляризации становится бесконечным. Делаем вычитание (перенормировку). К имеющемуся лагранжиану (*голому лагранжиану*) добавляем *лагранжиан контрчленов*, которые индуцируют некоторые новые поля, дополнительные к тем, которые были, так, что в сумме результат для амплитуд и функций Грина получается конечным:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &\rightarrow \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{к.ч.}} - \text{перенормировка лагранжиана;} \\ \phi^0(x) &\rightarrow \phi^R(x), \quad \phi^0(x) = Z^{\frac{1}{2}} \phi^R(x) - \text{перенормировка поля;} \\ \lambda_0 &\rightarrow \lambda - \text{константа связи.} \end{aligned}$$

Перенормировка не однозначна, поскольку можем накладывать различные перенормировочные условия в зависимости от масштаба. В размерную регуляризацию входит масштаб μ , в случае другой регуляризации масштаб вводится вручную. Будем рассматривать размерную регуляризацию:

$$\begin{aligned} \phi^0(x) &= Z^{\frac{1}{2}}(\mu) \phi^R(x), \quad \lambda_0 \rightarrow \lambda(\mu) \Rightarrow \\ G_n^0 &= Z^{\frac{n}{2}}(\mu) G_n^R(\mu, \lambda(\mu), p), p - \text{внешние импульсы.} \end{aligned}$$

Исходная голая функция Грина не зависит от масштаба μ . Поэтому можно сказать, что полная производная G_n^0 по μ равна нулю:

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} G_n^0 = \frac{n}{2} \frac{d}{d \ln \mu} Z(\mu) Z^{\frac{n}{2}-1}(\mu) G_n^R + Z^{\frac{n}{2}}(\mu) \frac{\partial}{\partial \ln \mu} G_n^R + Z^{\frac{n}{2}} \frac{\partial}{\partial \lambda} G_n^R \frac{\partial \lambda}{\partial \ln \mu},$$

$\beta = \frac{\partial \lambda}{\partial \ln \mu}$ – β -функция, показывает изменение константы связи с изменением масштаба;

$\gamma = \frac{d \ln Z(\mu)}{d \ln \mu}$ – аномальная размерность поля ϕ .

γ и β вычисляются по теории возмущений: $\beta(\lambda) = \#\lambda^2 + \#\lambda^3 + \dots$, γ – ряд по λ .

Таким образом, получим следующее выражение:

$$Z^{\frac{n}{2}}(\mu) \left[\frac{\partial}{\partial \ln \mu} \dots + \beta(\lambda) \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{n}{2} \gamma \right] G_n^R = 0 \text{ – уравнение Каллана – Симанчика.}$$

Уравнение Каллана-Симанчика (уравнение ренормгруппы) показывает, как изменяется функция Грина с изменением искусственно введенного масштаба μ .

Пусть необходимо посчитать функцию Грина. Будем считать теорию безмассовой или работаем при таких больших импульсах, что массы не важны.

$$G_n^R(\mu, \lambda(\mu), p) = \frac{1}{p^{d_G}} f\left(\frac{p}{\mu}, \lambda(\mu)\right),$$

где d_G – размерность функции Грина.

В определенных кинематических областях и в часто встречающихся задачах у функции f есть вполне определенный вид:

$$f^{n\text{-петл}}\left(\frac{p}{\mu}, \lambda(\mu)\right) = \lambda^n \left(\#\ln^{n-1} \frac{p}{\mu} + \#\ln^{n-2} \frac{p}{\mu} + \dots \right)$$

$$\Rightarrow \lambda, \quad \text{при } n = 1: \lambda^2 \left(\#\ln \frac{p}{\mu} + \#\right), \quad \text{при } n = 2: \lambda^3 \left(\#\ln^2 \frac{p}{\mu} + \#\ln \frac{p}{\mu} + \#\right).$$

Пусть $p \gg \mu$. Если $\# \approx 1$, тогда старшая степень логарифма будет давать основной вклад. Тогда основной ряд теории возмущений принимает следующий вид:

$$\lambda + \#\lambda^2 \ln \frac{p}{\mu} + \#\lambda^3 \ln^2 \frac{p}{\mu} \Rightarrow$$

Параметр разложения $\lambda \ln \frac{p}{\mu} \Rightarrow$ даже при маленьких λ логарифм может стать большим и скомпенсировать малость λ . В таком случае теория возмущений перестает работать – *проблема больших логарифмов*.

Мы хотим применять электрослабую теорию при малых энергиях, которые много меньше масштаба, на котором появилась эффективная электрослабая теория. При подсчете с использованием теории возмущений будут появляться большие логарифмы. Однако, решение возможно получить используя ренормгруппу.

$p \sim \mu$, функция Грина посчитана и есть ряд теории возмущений, в котором параметром разложения является λ . Представим, что теперь необходимо посчитать функцию Грина с импульсами в сраз больше:

$$G_n^R(\mu, \lambda(\mu), sp).$$

Тогда при переходе к безразмерным величинам возникнут логарифмы $\ln s$ в больших степенях. В таком случае хочется перейти к масштабу μ , сравнимому с импульсом:

$$G_n^R(\mu, \lambda(\mu), sp) = \frac{Z^{\frac{n}{2}}(s\mu)}{Z^{\frac{n}{2}}(\mu)} G_n^R(s\mu, \lambda(s\mu), sp)$$

$$G_n^R(s\mu, \lambda(s\mu), sp) = \frac{1}{(sp)^{d_G}} f\left(\frac{p}{\mu}, \lambda(s\mu)\right)$$

$$\int_{\mu}^{s\mu} d \ln Z(\mu) = \int_{\mu}^{s\mu} d \ln \mu \gamma(\lambda) \Rightarrow$$

$$\ln \frac{Z(s\mu)}{Z(\mu)} = \int_{\lambda(\mu)}^{\lambda(s\mu)} d\lambda \frac{\gamma(\lambda)}{\beta(\lambda)}$$

$$\left[\frac{Z(s\mu)}{Z(\mu)} \right]^{\frac{n}{2}} = \exp \left[\frac{n}{2} \int_{\lambda(\mu)}^{\lambda(s\mu)} d\lambda \frac{\gamma(\lambda)}{\beta(\lambda)} \right] \Rightarrow$$

$$G_n^R(\mu, \lambda(\mu), sp) = \exp \left[\frac{n}{2} \int_{\lambda(\mu)}^{\lambda(s\mu)} d\lambda \frac{\gamma(\lambda)}{\beta(\lambda)} \right] \frac{1}{(sp)^{d_G}} f\left(\frac{p}{\mu}, \lambda(s\mu)\right) -$$

улучшенная по ренормгруппе функция Грина. Улучшение заключается в том, что изменятся общий фактор и константу нужно взять бегущей. Следовательно получим хорошую теорию возмущений при $\lambda(s\mu) \ll 1$.

Перенормировка локальных операторов

Рассмотрим функции Грина другого вида. Рассмотрим локальный оператор, состоящий не из одного поля, а из нескольких:

$$O(x) = \phi_1(x) \dots \phi_k(x).$$

Таким локальным оператором является, например, токв квантовой электродинамике:

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x), \quad \partial_\mu j^\mu = 0.$$

Отсюда можно вывести *тождества Уорда*, в которых есть связь между различными функциями Грина. Тождества выводятся при рассмотрении T-произведения локального оператора с произведением полей:

$$\langle o | T j^\mu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | o \rangle - \text{функция Грина локального оператора.}$$

Считать такую функцию Грина будем по правилам Фейнмана.

1) Древесный уровень

$$\langle o | T \bar{\psi}_\delta(x) \gamma_{\delta\gamma}^\mu \psi_\gamma(x) \psi_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2) | o \rangle = S_{\alpha\delta}(x_1 - x) \gamma_{\delta\gamma} S_{\gamma\beta}(x - x_2),$$

α, β – спинорные индексы, $S(x - y) = \langle o | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | o \rangle$ – пропагатор, по теореме Вика спаривание возможно между $\bar{\psi}(x), \psi_\alpha(x_1)$ и $\psi(x), \bar{\psi}_\beta(x_2)$. Диаграмма Фейнмана представлены на рисунке 3.1.

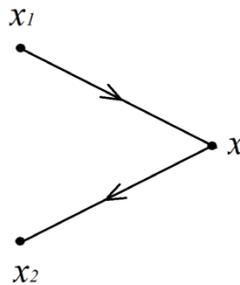


Рис.3.1. Диаграмма Фейнмана древесного уровня.

2) 1-петлевой уровень

$$\langle o | T \bar{\psi}_\delta(x) \gamma_{\delta\gamma}^\mu \psi_\gamma(x) \psi_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2) e^{i \int d^4x j^\mu A_\mu} | o \rangle$$

Поскольку фотонное поле одно, его невозможно ни с кем спарить. Следовательно, нетривиальный ответ получается только при разложении до второго порядка. В 1-петлевом решении появятся две вершины (рис. 3.2).

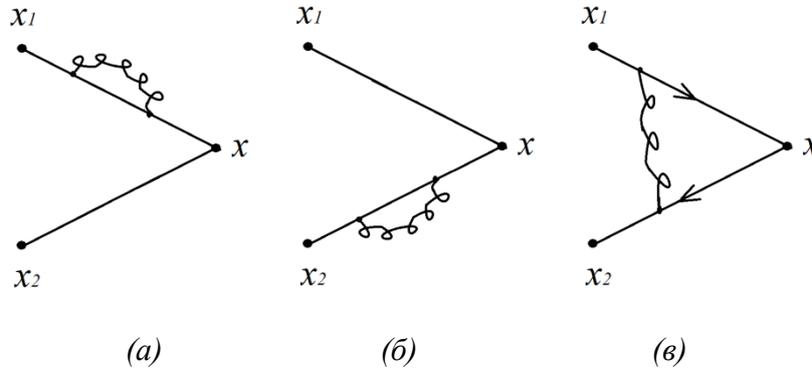


Рис. 3.2. Диаграммы Фейнмана для 1-петлевого решения.

Эти диаграммы расходятся, но поскольку мы перенормировали теорию, то помимо диаграмм на рисунке 3.2(a, б) будут контрчленные диаграммы, сокращающие расходимость (рис. 3.3(a, б)).

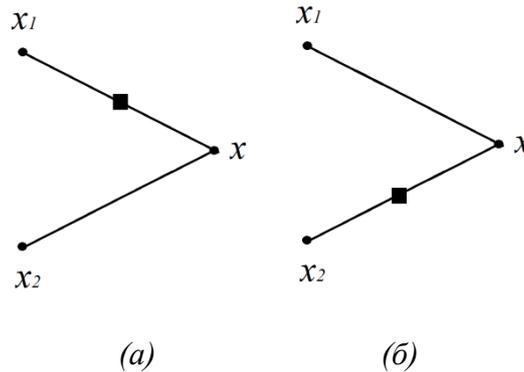


Рис. 3.3. Контрчленные диаграммы.

Для варианта, представленного на рисунке 3.2 (в) контрчлена не будет, такая функция грин будет расходиться даже не смотря на перенормировку. В таком случае перенормируют сам оператор:

$$O_o(x) = Z_o(\mu)O_R(x) = (1 + \delta Z_o(\mu))O_R(x) = O_R + \delta Z_o(\mu)O_R,$$

Z – фактор, показывающий, как перенормируется оператор.

Для оператора можно ввести аномальную размерность:

$$\gamma_o = \frac{d \ln Z_o}{d \ln \mu}.$$

После этого можно записать уравнение, аналогичное уравнению Каллана-Симанчика:

$$G(x, x_1 \dots x_n) = \langle o | T O(x) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) | o \rangle,$$

$$G^o = Z^{\frac{n}{2}} Z_o G^R(\mu, \lambda(\mu), p) \Rightarrow$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \ln \mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{n}{2} \gamma + \gamma_o \right] G^R = 0.$$

Задачи

- 1) Найти аномальную размерность γ_o оператора $O = \varphi^2$ в теории $\frac{\lambda}{4!} \varphi^4$ в одной петле.
- 2) Вычислить аномальную размерность для тока в электродинамике $j^\mu(x)$.

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(x)$$

$$|\Phi\rangle \rightarrow e^{i\alpha Q} |\Phi\rangle$$

$$\psi(x) \rightarrow e^{-i\alpha Q} \psi(x) e^{i\alpha Q} \approx \psi(x) - i\alpha [Q, \psi(x)] + O(\alpha^2) = (1 + i\alpha) \psi(x) \Rightarrow$$

$$[Q, \psi(x)] = -\psi(x)$$

Полученное соотношение не зависит ни от каких перенормировок, то есть верно и для голых, и для перенормированных полей.

$$[Q^0, \psi^0(x)] = -\psi^0(x), \quad [Q^R, \psi^R(x)] = -\psi^R(x), \quad \psi^0 = Z_\psi \psi^R \Rightarrow$$

$$Q^0 = Q^R \Rightarrow \gamma = 0.$$

Примеры

Вся описанная выше теория нужна для того, чтобы взять электрослабую теорию Ферми и вспомнить о том, что кварки – это сильно взаимодействующие частицы. На кварки влияет их взаимодействие с глюонами.

Для диаграммы, представленной на рисунке 3.4, эффективный лагранжиан выглядит следующим образом:

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = -2\sqrt{2} G_F j_{\text{кварк}}^\mu j_{\mu, \text{лепт}}$$

Есть поправки, связанные с электромагнитным взаимодействием, но они слабые. Важна глюонная часть. В рассматриваемом случае может возникнуть перенормировка тока. Но в задаче 2 мы сказали, что ток не перенормируется, поэтому лагранжиан не перенормируется за счет сильного взаимодействия, по крайней мере, в главном порядке теории возмущений.

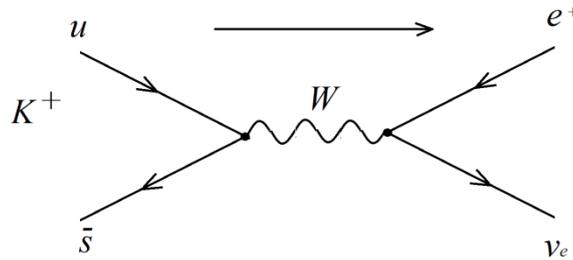


Рис. 3.4. Распад каона.

Рассмотрим другой тип взаимодействия, когда кварк есть и в начале, и в конце (рис. 3.5). Не смотря на то, что эта структура на древесном уровне такая же:

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = -2\sqrt{2}G_F j_{\text{кварк}}^\mu j_{\mu, \text{кварк}}$$

поправки могут быть гораздо более сложными, чем в предыдущем случае, потому что есть диаграммы, в которых обмен глюаном происходит между начальным и конечным кварками (рис. 1.6(a-g)). Для учета этого взаимодействия необходимо перенормировать весь локальный оператор. Применять теорию мы хотим для распада мезонов, при расчетах будем пренебрегать внешними импульсами. Массой кварка пренебрегаем, она мала по сравнению с массами мезонов.

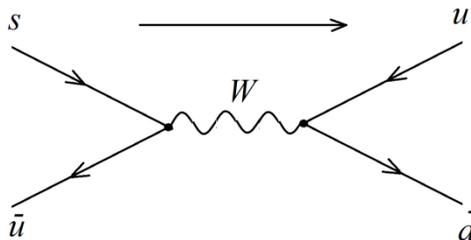


Рис. 3.5. Диаграмма Фейнмана с кварками в начале и конце.

Фейнмановский интеграл для диаграммы на рисунке 3.6 (a):

$$-2\sqrt{2}G_F \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \bar{u}_L \gamma^\mu t^a \frac{i \hat{p}}{p^2} \gamma^\nu s_L \bar{d}_L \gamma_\mu t^a \frac{i(-\hat{p})}{p^2} \gamma_\nu u_L \frac{-i}{p^2}$$

На следующей лекции будем вычислять этот интеграл. Для этого необходимо вычислить его фермионную составляющую:

$$\bar{u}_L \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu t^a s_L \cdot \bar{d}_L \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu$$

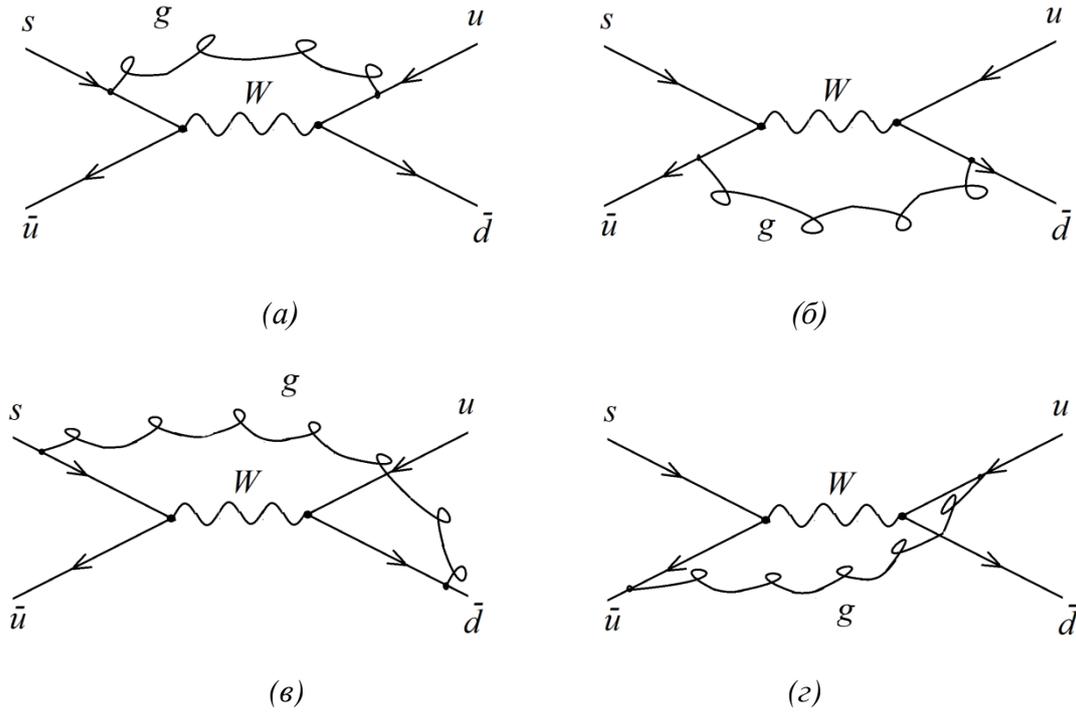


Рис. 3.6. Обмен глюонами между начальными и конечными кварками.

Домашнее задание:

Упростить фермионную структуру с использованием тождеств Фирца и тождества для матриц t .

$$\bar{u}_L \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu t^a s_L \cdot \bar{d}_L \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu = 8(\bar{u}_L \gamma^\mu u_L)(\bar{d}_L \gamma_\mu s_L) - \frac{8}{3}(\bar{d}_L \gamma^\mu u_L)(\bar{u}_L \gamma_\mu s_L),$$

$$(t^a)_{mn} (t^a)_{pq} = \frac{1}{2} \delta_{mq} \delta_{np} - \frac{1}{6} \delta_{mn} \delta_{pq}.$$

Лекция 4

Распад каонов

Расчет 1-петлевой поправки для распада каона

Ренормгруппа, рассмотренная на прошлом семинаре, необходима для использования эффективной теории Ферми для расчета распадов мезонов. Мезоны имеют малые массы по сравнению с W-бозоном, на масштабе которого получаем теорию Ферми. В прошлый раз начали выяснять роль сильного взаимодействия и его влияние на электрослабое взаимодействие. И увидели следующее:

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = -2\sqrt{2}G_F \bar{d}_L \gamma^\mu u_L \bar{u}_L \gamma_\mu s_L.$$

Этот лагранжиан описывает переход с изменением странности на 1. Этот лагранжиан получаем при отщеплении W-бозона на масштабе его массы. Кроме того на прошлой лекции мы начали рассматривать различные поправки, связанные с глюонным обменом. Обмен глюонами фактически перенормировка тока. Однако ток не перенормируется, потому что есть коммутационное соотношение, сохраняется заряд.

На прошлой лекции начали считать одну из поправок глюонного обмена (рис. 1.6 (a)). Мы считали в приближении теории Ферми и пренебрегли внешними импульсами. Мы получили следующее выражение:

$$\begin{aligned} & -2\sqrt{2}G_F \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\bar{u}_L \gamma^\mu t^a \frac{i\hat{p}}{p^2} \gamma^\nu s_L \right) \left(\bar{d}_L \gamma_\mu t^a \frac{i(-\hat{p})}{p^2} \gamma_\nu u_L \right) \frac{-i}{p^2} (ig_3)^2 \Rightarrow \\ & \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\rho p^\sigma}{(p^2)^3} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{4} \frac{g^{\rho\sigma} p^2}{(p^2)^3} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{4} \frac{g^{\rho\sigma}}{(p^2)^2} = \\ & = \left\{ \begin{array}{l} \text{вычислим с помощью регуляризации методом обрезания,} \\ \text{перейдем в евклидово пространство} \end{array} \right\} = \\ & = \frac{i}{4} g^{\rho\sigma} \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_E^2)^3} = \\ & = \left\{ \text{перейдем в сферическую систему координат} \right\} = \\ & = \frac{ig^{\rho\sigma}}{4} \int \frac{2\pi^2 p_E^3 dp_E}{p_E^4} = \frac{ig^{\rho\sigma}}{4} \int \frac{2\pi^2 dp_E}{p_E} - \end{aligned}$$

логарифмически расходящийся интеграл на верхнем и нижнем пределах. Но если внимательно присмотримся к диаграмме и распишем ее полностью, то получим отрицательную степень расходимости. Фейнмановский интеграл сходится в верхнем

пределе. Так, верхний предел интегрирования m_W – масса W-бозона, нижний предел определим как массу каона m_K :

$$\frac{ig^{\rho\sigma}}{4} \int \frac{2\pi^2 dp_E}{p_E} = \frac{ig^{\rho\sigma}}{4} \int_{m_K}^{m_W} \frac{2\pi^2 dp_E}{p_E} = \frac{ig^{\rho\sigma}}{64\pi^2} \ln \frac{m_W^2}{m_K^2},$$

фермионная часть:

$$(\bar{u}_L \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu t^a s_L)(\bar{d}_L \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu t^a u_L) = 8(\bar{u}_L \gamma^\mu u_L)(\bar{d}_L \gamma_\mu s_L) - \frac{8}{3}(\bar{d}_L \gamma^\mu u_L)(\bar{u}_L \gamma_\mu s_L).$$

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = -2\sqrt{2}G_F(-1)\frac{g_3^2}{64\pi^2} \ln \frac{m_W}{m_K} \left[8(\bar{u}_L \gamma^\mu u_L)(\bar{d}_L \gamma_\mu s_L) - \frac{8}{3}(\bar{d}_L \gamma^\mu u_L)(\bar{u}_L \gamma_\mu s_L) \right] -$$

эффективный лагранжиан для диаграммы на рисунке 3.6 (а). Для диаграммы на рисунке 1.6 (б) лагранжиан будет такой же, а для диаграмм с рисунка 3.6 (в, г) отличны.

Вычислим диаграмму с рисунка 1.6 (в). Петлевой импульс бежит по направлению против часовой стрелки, всегда будет бежать по направлению стрелок диаграммы. Порядок -матриц будет другой, потому что обмен идет между другими ногами.

$$\text{диаграмма 3.6(в)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (\bar{u}_L \gamma^\mu \frac{i\hat{p}}{p^2} \gamma^\nu t^a s_L) (\bar{d}_L \gamma^\nu t^a \frac{i\hat{p}}{p^2} \gamma^\mu u_L) \frac{-i}{p} (ig_3)^2.$$

Домашнее задание:

Упростить фермионную структуру с использованием тождеств Фирцаи тождества для матриц t :

$$(\bar{u}_L \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu t^a s_L)(\bar{d}_L \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\mu t^a u_L) = 2(\bar{u}_L \gamma^\mu u_L)(\bar{d}_L \gamma_\mu s_L) - \frac{2}{8}(\bar{d}_L \gamma^\mu u_L)(\bar{u}_L \gamma_\mu s_L).$$

Таким образом:

$$\text{диаграмма 3.6(в)} = \frac{g_3^2}{64\pi^2} \ln \frac{m_W^2}{m_K^2} \left[2(\bar{u}_L \gamma^\mu u_L)(\bar{d}_L \gamma_\mu s_L) - \frac{2}{8}(\bar{d}_L \gamma^\mu u_L)(\bar{u}_L \gamma_\mu s_L) \right]$$

Для диаграммы 3.6 (г) ответ такой же, как для 1.6 (в).

Мы рассматриваем большой интервал энергий от массы W-бозона (~80 ГэВ), где мы можем пользоваться теорией возмущений сильного взаимодействия, где аналог постоянной тонкой структуры:

$$\alpha_s(\mu) = \frac{g_3^2(\mu)}{4\pi}, \quad \alpha_s(\mu = M_Z) \cong 0.118,$$

до низких энергий порядка 1 ГэВ, где константа $\alpha_s \approx 1$, то есть теория возмущений не применима.

Таким образом, 1-петлевой ответ для всех рассчитанных диаграмм выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} 1 - \text{петлевой ответ} &= \frac{2g_3^2}{64\pi^2} \ln \frac{m_W^2}{m_K^2} \left[-6(\bar{u}_L \gamma^\mu u_L)(\bar{d}_L \gamma_\mu s_L) + 2(\bar{d}_L \gamma^\mu u_L)(\bar{u}_L \gamma_\mu s_L) \right] = \\ &= \frac{g_3^2}{16\pi^2} \ln \frac{m_W^2}{m_K^2} \left[-3(\bar{u}_L \gamma^\mu u_L)(\bar{d}_L \gamma_\mu s_L) + (\bar{d}_L \gamma^\mu u_L)(\bar{u}_L \gamma_\mu s_L) \right]. \end{aligned}$$

Оценим полученную квантовую поправку:

$$\frac{g_3^2}{16\pi^2} \ln \frac{m_W^2}{m_K^2} = \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \frac{m_W^2}{m_K^2} \approx \frac{0.1}{4\pi} \cdot 10$$

Получили большое значение величины, потому что здесь мы взяли α_s по верхнему пределу (на масштабе массы W-бозона). Так как мы интегрируем, то должны брать среднее значение между масштабами масс W-бозона и каона. Так, когда считаем квантовые поправки и есть несколько масштабов, то теория возмущений идет не по константе связи, а по константе связи, умноженной на большой логарифм. При расчете второй поправки появится $\alpha_s^2 \ln^2 \frac{m_W^2}{m_K^2}$. Константой связи в таком случае является большое число, по которому раскладывать не легитимно. Точный расчет сделать невозможно, поскольку рассматриваем масштабы масс каонов, где происходит сильное взаимодействие. Однако мы рассматриваем качественно эффект от сильных взаимодействий и его влияние на эффективную теорию Ферми.

Перенормировка операторов в 1-петлевом случае

Рассмотрим, что происходит в 1-петлевом случае с операторами:

$$\hat{O}_1 = (\bar{d}_L \gamma^\mu u_L)(\bar{u}_L \gamma_\mu s_L);$$

$$\hat{O}_2 = (\bar{u}_L \gamma^\mu u_L)(\bar{d}_L \gamma_\mu s_L).$$

$$\hat{O}_1 \rightarrow \hat{O}_1 + \frac{g_3^2}{16\pi^2} \ln \frac{m_W^2}{m_K^2} [-3\hat{O}_2 + \hat{O}_1] = \left(1 + \frac{g_3^2}{16\pi^2} \ln \frac{m_W^2}{m_K^2} \right) \hat{O}_1 - \frac{3g_3^2}{16\pi^2} \ln \frac{m_W^2}{m_K^2} \hat{O}_2.$$

$$\hat{O}_2 \rightarrow -\frac{3g_3^2}{16\pi^2} \ln \frac{m_W^2}{m_K^2} \hat{O}_1 + \left(1 + \frac{g_3^2}{16\pi^2} \ln \frac{m_W^2}{m_K^2}\right) \hat{O}_2.$$

Обратите внимание, при перенормировке полей, например, в теории φ^4 или электродинамике, поля перенормируются сами через себя. В рассматриваемом случае ситуация более сложная. После перенормировки не только появилась поправка к исходному оператору, но и появился вклад оператора другого типа, - явление смешивания операторов.

При вычислении 1-петлевого ответа присутствует расходимость на нижнем пределе. Применим теорию перенормировок. Введем перенормированные операторы, избавимся от нижнего предела:

$$\begin{aligned} \hat{O}_1^{R,\mu} &= \hat{O}_1 \left(1 - \frac{g_3^2}{16\pi^2} \ln \frac{m_W^2}{m_K^2}\right) + \hat{O}_2 \frac{3g_3^2}{16\pi^2} \ln \frac{m_W^2}{m_K^2}, \\ \hat{O}_2^{R,\mu} &= \hat{O}_1 \frac{3g_3^2}{16\pi^2} \ln \frac{m_W^2}{m_K^2} + \hat{O}_2 \left(1 - \frac{g_3^2}{16\pi^2} \ln \frac{m_W^2}{m_K^2}\right). \end{aligned}$$

К таким операторам 1-петлевые поправки в теории возмущений будут конечны, все члены с логарифмами сократятся.

В рамках определения связи между голым и перенормированным оператором:

$$\hat{O}_i^{(0)} = Z_{ij}(\mu) \hat{O}_j^{R,\mu}.$$

Предположим, что есть эффективное взаимодействие, которое представляет из себя сумму двух слагаемых, соответствующих этим операторам. Говоря иначе, предположим, что есть эффективный лагранжиан, состоящий из двух частей:

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \kappa_1 O_1 + \kappa_2 O_2.$$

Перенормировка операторов в этом случае будет **индуцировать перенормировку констант связи**:

$$\begin{aligned} \kappa_i^{(0)} &= Z_{ij}(\mu) \kappa_j(\mu) \Rightarrow \kappa_i(\mu) = Z_{ij}(\mu) \kappa_j^{(0)}, \\ Z_{ij}^{-1}(\mu) &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{g_3^2}{16\pi^2} \ln \frac{m_W^2}{m_K^2} & \frac{3g_3^2}{16\pi^2} \ln \frac{m_W^2}{m_K^2} \\ \frac{3g_3^2}{16\pi^2} \ln \frac{m_W^2}{m_K^2} & 1 - \frac{g_3^2}{16\pi^2} \ln \frac{m_W^2}{m_K^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Рассмотрим, как бегут константы связи. Посчитаем β – функцию для них:

$$\frac{d}{d \ln \mu^2} \begin{pmatrix} \kappa_1(\mu) \\ \kappa_2(\mu) \end{pmatrix} = \frac{g_3^2}{16\pi^2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1^{(0)} \\ \kappa_2^{(0)} \end{pmatrix} \cong \frac{g_3^2}{16\pi^2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1(\mu) \\ \kappa_2(\mu) \end{pmatrix}.$$

Для решения полученной системы дифференциальных уравнений удобно диагонализировать матрицу. Собственные значения:

$$\det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 3 \\ 3 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda + 1)^2 - 9 = \lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \\ \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -4.$$

Собственные вектора:

$$\lambda_1 = 2: \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \lambda_2 = -4: \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, удобно рассматривать комбинацию, приводящую к диагональному виду матрицы, рассматривать сумму операторов. Введем другие операторы:

$$\hat{O}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [\hat{O}_1 - \hat{O}_2], \\ \hat{O}_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} [\hat{O}_1 + \hat{O}_2].$$

Лагранжиан примет следующий вид:

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \kappa_{\frac{1}{2}} O_{\frac{1}{2}} + \kappa_{\frac{3}{2}} O_{\frac{3}{2}} = \kappa_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} [O_1 - O_2] + \kappa_{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} [O_1 + O_2] = \frac{1}{2} \left(\kappa_{\frac{1}{2}} + \kappa_{\frac{3}{2}} \right) O_1 + \frac{1}{2} \left(\kappa_{\frac{3}{2}} - \kappa_{\frac{1}{2}} \right) O_2 \\ \Rightarrow \\ \kappa_{\frac{1}{2}} = \kappa_1 - \kappa_2, \quad \lambda_2 = -4, \\ \kappa_{\frac{3}{2}} = \kappa_1 + \kappa_2, \quad \lambda_1 = 2.$$

Запишем дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{d \ln \mu^2} \begin{pmatrix} \kappa_{\frac{3}{2}} \\ \kappa_{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \frac{g_3^2}{16\pi^2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_{\frac{3}{2}} \\ \kappa_{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \frac{g_3^2}{16\pi^2} \begin{pmatrix} \gamma_{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & \gamma_{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_{\frac{3}{2}} \\ \kappa_{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{dx_i}{d \ln \mu^2} = \frac{\gamma_i g_3^2}{16\pi^2} x_i.$$

Бег константы связи определяется двумя константами перед двумя операторами. Кроме того нужно помнить, что g_3^2 – тоже бегущая константа связи:

$$g_3^2(\mu) = \frac{4\pi^2}{b_1 \ln \frac{\mu^2}{\lambda^2}},$$

λ – КХД,

μ – перенормировочный масштаб,

$b_1 = \frac{11}{4} - \frac{1}{6} n_f$ – константа, зависящая от числа фермионов n_f (n_f будет меняться от 5 до 3), для оценки будем считать, что $b_1 \approx 2$, важно что $b_1 > 0$.

$$\frac{dx_i}{x_i} = \gamma_i \frac{4\pi^2}{b_1 16\pi^2 \ln \frac{\mu^2}{\lambda^2}} d \ln \mu^2 \Rightarrow$$

$$\int_{\kappa_i(m_K)}^{\kappa_i(m_W)} \frac{dx_i}{x_i} = \int_{m_K}^{m_W} \gamma_i \frac{4\pi^2}{b_1 16\pi^2 \ln \frac{\mu^2}{\lambda^2}} d \ln \mu^2.$$

Наложим такие граничные условия, чтобы на масштабе массы W-бозона лагранжиан сводился к первоначальному:

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = -2\sqrt{2} G_F V_{us} V_{ud}^* \bar{d}_L \gamma^\mu u_L \bar{u}_L \gamma_\mu s_L \Rightarrow$$

$$\kappa_1(\mu = m_W) = -2\sqrt{2} G_F V_{us} V_{ud}^* = A,$$

$$\kappa_2(\mu = m_W) = 0 \Rightarrow$$

$$\kappa_{\frac{1}{2}}(m_W) = \kappa_{\frac{3}{2}}(m_W) = A.$$

Интегрируем переставив пределы:

$$\ln \frac{\kappa_i(m_K)}{A} = \frac{\gamma_i}{4b_1} \ln \left[\frac{\ln \frac{m_K^2}{\lambda^2}}{\ln \frac{m_W^2}{\lambda^2}} \right] \Rightarrow$$

$$\kappa_i(m_K) = A \left[\frac{b_1(m_W)g_3^2(m_W^2)}{b_1(m_K)g_3^2(m_K^2)} \right]^{\frac{\gamma_i}{4b_1}}$$

$\frac{g_3^2(m_W^2)}{g_3^2(m_K^2)} < 1$ – маленькое число.

$\kappa_{\frac{1}{2}} \Rightarrow \gamma_{\frac{1}{2}} = -4 \Rightarrow$ малое число в отрицательной степени $\Rightarrow \kappa_{\frac{1}{2}}(m_K) = A \cdot 2.1 > A$.

$\kappa_{\frac{3}{2}} \Rightarrow \gamma_{\frac{3}{2}} = 2 \Rightarrow \kappa_{\frac{3}{2}}(m_K) = A \cdot 0.7 < A$.

Физика распада каонов

Перейдем к физике. Рассмотрим распады каонов:

$$K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0,$$

$$K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-.$$

На языке диаграмм Фейнмана распад представлен на рисунке 4.1.

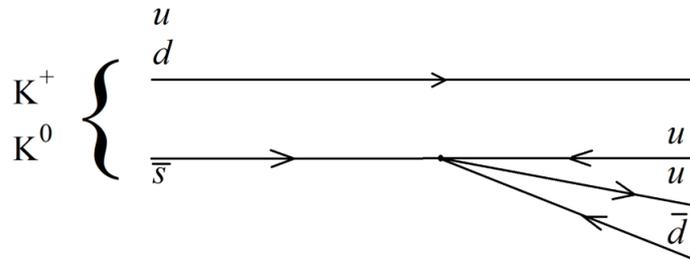


Рис. 4.1. Диаграмма Фейнмана распада каонов.

Зададимся вопросом о том, как соотносятся ширины этих распадов. Наивно можно ожидать? Используя изотопическую симметрию:

$$\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0) \cong \Gamma(K^0(K_S) \rightarrow \pi^+ \pi^-).$$

Экспериментально оказывается:

$$\frac{\Gamma(K^0(K_S) \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0)} \cong 450 \cong (22)^2.$$

Изменяется странность, изоспин. Каон по изоспину является дублетом, $I = \frac{1}{2}$. В конечном состоянии 2 пиона. Пион по изоспину триплет π_i . Двухпионное состояние может содержать:

$$1 \otimes 1 = 0 \oplus 1 \oplus 2.$$

Синглетному состоянию соответствует:

$$0 \Leftrightarrow \pi_i^{(1)} \pi_i^{(2)}.$$

Векторное состояние:

$$1 \Leftrightarrow \pi_i^{(1)} \pi_j^{(2)} \in ijk.$$

$$2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \pi_i^{(1)} \pi_j^{(2)} + \frac{1}{2} \pi_j^{(1)} \pi_i^{(2)} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \pi_k^{(1)} \pi_k^{(2)}.$$

Полный спин каона равен нулю:

$$J_K = 0.$$

Пионы обладают нулевым собственным моментом. После распада каона пионы образуют систему с угловым моментом равным нулю. Таким образом, орбитальный момент для двух пионов равен нулю:

$$L_{\pi\pi} = 0.$$

Это означает, что пространственная волновая функция этой пары симметрична, поскольку симметрия определяется как $(-1)^L$.

С точки зрения сильного взаимодействия пионы – тождественные частицы. Полная волновая функция должна быть симметрична. Следовательно, изоспиновая волновая функция должна быть симметрична:

$$\bar{\psi}_{\text{простр}} \bar{\psi}_{\text{изоспин}}.$$

Таким образом, вариант с векторным состоянием 1 невозможен. Остается два варианта (полный изоспин равен 0 или 2).

Рассмотрим вариант с нулевым изоспином. π^0, π^+ и π^- представляют собой следующие комбинации:

$$\pi^0 = \pi_3,$$

$$\pi^+ = \frac{\pi_1 - i\pi_2}{\sqrt{2}},$$

$$\pi^- = \frac{\pi_1 + i\pi_2}{\sqrt{2}}.$$

Перепишем структуру через физические состояния:

$$\pi_i^{(1)} \pi_i^{(2)} = \pi_0^{(1)} \pi_0^{(2)} + \# \pi^{+(1)} \pi^{-(2)} + \# \pi^{-(1)} \pi^{+(2)} -$$

Нет состояния $\pi^0 \pi^+$. Это означает, что K^+ не может распадаться в это состояние. Так, K^+ может распадаться только в состояние со спином 2, K^0 может распадаться в оба состояния.

Вывод:

Распад $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$ возможен только с изменением изоспина на $3/2$: $\Delta I = \frac{3}{2}$.

Распад $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ возможен с $\Delta I = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.

Лекция 5

Операторы, изменяющие странность на 1

Повторение материала прошлой лекции

Мы пытаемся вычислить лагранжиан взаимодействия, который бы описывал распады каонов, основываясь на том, что это электрослабый лагранжин, используем аналог эффективной теории Ферми. На древесном уровне:

$$\mathcal{L}_{int} = -2\sqrt{2}G_F V_{ud}^* V_{us} (\bar{d}_L \gamma^\mu u_L) (\bar{u}_L \gamma_\mu s_L).$$

С учетом 1-петлевых поправок сильного взаимодействия:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= -2\sqrt{2}G_F V_{ud}^* V_{us} (\kappa_1 (\bar{d}_L \gamma^\mu u_L) (\bar{u}_L \gamma_\mu s_L) + \kappa_2 (\bar{u}_L \gamma^\mu u_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu s_L)) \\ &= -2\sqrt{2}G_F V_{ud}^* V_{us} (\kappa_1 \hat{O}_1 + \kappa_2 \hat{O}_2). \end{aligned}$$

Кроме того мы нашли зависимость констант связи κ_1, κ_2 от перенормировки:

$$\hat{O}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [\hat{O}_1 - \hat{O}_2],$$

$$\hat{O}_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} [\hat{O}_1 + \hat{O}_2]$$

$$\mathcal{L}_{int} == -2\sqrt{2}G_F (\kappa_{\frac{1}{2}} \hat{O}_{\frac{1}{2}} + \kappa_{\frac{3}{2}} \hat{O}_{\frac{3}{2}})$$

$$\kappa_{\frac{1}{2}}(m_k) = \left(\frac{\alpha_s(m_W)}{\alpha_s(m_k)} \right)^{-\frac{1}{b_1}}, \quad \kappa_{\frac{3}{2}}(m_k) = \left(\frac{\alpha_s(m_W)}{\alpha_s(m_k)} \right)^{-\frac{1}{2b_1}}$$

m_k – бегущий масштаб. Если мы хотим рассматривать теорию в масштабе масс W , то $\kappa_{\frac{1}{2}} = \kappa_{\frac{3}{2}} = 1$. При низких энергиях ответ совпадает с древесным уровнем. $\kappa_{\frac{1}{2}}$ растет с уменьшением энергетического масштаба, $\kappa_{\frac{3}{2}}$ падает.

Далее мы рассмотрели два распада каонов:

$$K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0,$$

$$K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-.$$

Диаграммы для этих распадов отличаются только теми кварками, взаимодействие с которыми не происходит (спектаторные кварки) (рис. 4.1).

Мы отметили, что наивно ширины этих распадов должны быть одинаковы. Экспериментально это не так. Относительные ширины отличаются в 450 раз.

Мы выяснили, что начальное состояние каона – состояние с изоспином $I = \frac{1}{2}$. В конечном состоянии два пиона, они могут быть в состояниях 0, 1, 2. В результате рассуждений мы пришли к выводу, что состояния с изоспином 1 быть не может (антисимметричное состояние).

- При начальном состоянии $I = \frac{1}{2}$ и конечном $I = 0$ распад должен обеспечиваться оператором с изменением изоспина на $\frac{1}{2}$.
- При начальном состоянии $I = \frac{1}{2}$ и конечном $I = 2$ распад должен обеспечиваться оператором с изменением изоспина на $\frac{3}{2}$.

Рассмотрим операторы $\hat{O}_{\frac{1}{2}}$ и $\hat{O}_{\frac{3}{2}}$.

$$\hat{O}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [(\bar{d}_L \gamma^\mu u_L)(\bar{u}_L \gamma_\mu s_L) - (\bar{u}_L \gamma^\mu u_L)(\bar{d}_L \gamma_\mu s_L)],$$

$$\hat{O}_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} [(\bar{d}_L \gamma^\mu u_L)(\bar{u}_L \gamma_\mu s_L) + (\bar{u}_L \gamma^\mu u_L)(\bar{d}_L \gamma_\mu s_L)].$$

Вспомним про изоспины кварков.

$$I_S = 0$$

$\bar{d}\bar{u} - \bar{u}\bar{d}$ в операторе $\hat{O}_{\frac{1}{2}}$ под действием флейверной симметрии преобразуется как синглеты. Нетривиально преобразуется только u . $I_u = \frac{1}{2}$, следовательно, оператор $\hat{O}_{\frac{1}{2}}$ изменяет изоспин на $\frac{1}{2}$.

Домашнее задание:

Убедиться, что оператор $\hat{O}_{\frac{3}{2}}$ отвечает переходу между состояниями с изменением изоспина на $\frac{3}{2}$.

Закончим рассуждение о распаде каона. Мы выяснили, что состояние с полным изоспином равным 0 (синглетное состояние) записывается следующим образом:

$$\pi_i^{(1)} \pi_i^{(2)} = \pi_0^{(1)} \pi_0^{(2)} + \# \pi^{+(1)} \pi^{-(2)} + \# \pi^{-(1)} \pi^{+(2)},$$

то есть не содержит состояния $\pi^0\pi^+$ и не может распадаться в состояние с нулевым изоспином.

Распад $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$ возможен с $\Delta I = \frac{3}{2}$.

Распад $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ возможен с $\Delta I = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.

Так, K^0 распадается за счет операторов с $\Delta I = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$, а K^+ только за счет операторов с $\Delta I = \frac{3}{2}$, причем коэффициент перед этим оператором уменьшается с уменьшением масштаба при учете поправки от сильных взаимодействий. Так, сильное взаимодействие усиливает вклад оператора с изменением изоспина на $\frac{1}{2}$ и ослабляют вклад оператора с $\Delta I = \frac{3}{2}$. Подобные оценки полезно иметь в голове и уметь считать соответствующие ширины распадов.

Операторы, изменяющие странность на 1

Мы увидели, что при построении эффективной теории остаются только те степени свободы, которые нам интересны. При рассмотрении распада каона нам интересны кварковые степени свободы, и мы сделали первый шаг. Вся процедуру можно обобщить, если, например, ограничимся кварками трех самых легких флейверов (u, d, s), то можно продолжать процедуру, включая не только \bar{d}, \bar{u}, u, s , но и операторы, которые вовлекают в себя несколько d кварков. Ограничимся только операторами, изменяющими странность на 1, это то, что интересно при распаде каонов. В таком случае можно поинтересоваться, какие операторы возникнут при построении низкоэнергетической теории.

У лагранжиана эффективной теории есть какие-то операторы взаимодействия, чаще всего такие, взаимодействие относительно которых неперенормируемо (размерности больше 4). Общая схема следующая:

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \sum_j \frac{c_j}{\Lambda^{d_j-4}} O_j,$$

O_j – набор операторов,

c_j – константы связи,

Λ – масштаб, для которого теория считается эффективной, для теории Ферми Λ – масштаб массы W -бозона,

$\frac{c_j}{\Lambda^{d_j-4}}$ – безразмерная константа.

В общем случае ряд бесконечный, где размерность оператора растет.

Амплитуда процесса, который будет следовать из оператора:

$$M^{(j)} \sim \frac{c_j}{\Lambda^{d_j-4}} E^{d_j-4},$$

E – безразмеривающая величина, в общем случае – энергия процесса, условие работы теории:

$$E \ll \Lambda.$$

Чем меньше размерность, тем больше вклад оператора в амплитуду процесса. Возвращаясь к примеру электрослабой теории, отметим, что мы рассматривали оператор размерности 6 – наименьший оператор, приводящий к интересующему нас процессу.

Вернемся к интересующей нас задаче. Необходимо найти все операторы, описывающие изменение странности на 1: $\Delta s = 1$.

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \sqrt{2} G_F V_{ud} V_{us}^* \sum_{i=1}^6 c_i \hat{O}_i.$$

$$\hat{O}_1 = (\bar{d}_L \gamma_\mu s_L)(\bar{u}_L \gamma^\mu u_L) - (\bar{u}_L \gamma_\mu s_L)(\bar{d}_L \gamma^\mu u_L),$$

$$\hat{O}_2 = \left((\bar{d}_L \gamma_\mu s_L)(\bar{u}_L \gamma^\mu u_L) + (\bar{u}_L \gamma_\mu s_L)(\bar{d}_L \gamma^\mu u_L) + 2(\bar{d}_L \gamma_\mu s_L)(\bar{d}_L \gamma^\mu d_L) + 2(\bar{d}_L \gamma_\mu s_L)(\bar{s}_L \gamma^\mu s_L) \right),$$

$$\hat{O}_3 = \left((\bar{d}_L \gamma_\mu s_L)(\bar{u}_L \gamma^\mu u_L) + (\bar{u}_L \gamma_\mu s_L)(\bar{u}_L \gamma^\mu u_L) + 2(\bar{d}_L \gamma_\mu s_L)(\bar{d}_L \gamma^\mu d_L) - 3(\bar{d}_L \gamma_\mu s_L)(\bar{s}_L \gamma^\mu s_L) \right),$$

$$\hat{O}_4 = \left((\bar{d}_L \gamma^\mu s_L)(\bar{u}_L \gamma^\mu u_L) + (\bar{u}_L \gamma^\mu s_L)(\bar{d}_L \gamma^\mu u_L) - (\bar{d}_L \gamma^\mu s_L)(\bar{d}_L \gamma^\mu d_L) \right).$$

Домашнее задание:

Проверить, что операторы $\hat{O}_1, \hat{O}_2, \hat{O}_3, \hat{O}_4$ соответствуют следующим изменениям изоспина:

$$\hat{\mathcal{O}}_1, \hat{\mathcal{O}}_2, \hat{\mathcal{O}}_3 \Rightarrow \Delta I = \frac{1}{2},$$

$$\hat{\mathcal{O}}_4 \Rightarrow \Delta I = \frac{3}{2}.$$

Разберемся, на каком основании произведено разбиение на слагаемые. Первая причина заключается в том, что записанные комбинации соответствуют соответствующему изменению изоспина. Однако есть не только изоспиновая группа SU(2), но и группа SU(3). Можно поинтересоваться, какому изменению представления группы SU(3) соответствуют эти операторы.

$\hat{\mathcal{O}}_1, \hat{\mathcal{O}}_2$ соответствуют представлению {8}, $\hat{\mathcal{O}}_3, \hat{\mathcal{O}}_4$ соответствуют представлению {27}.

Определим оставшиеся 2 оператора. Первые четыре оператора возникают из тех диаграмм, которые мы уже вычислили – диаграмм, в которых возникает обмен глюоном между фермиевскими токами, между ногами, принадлежащими разным фермиевским токам. Есть другой тип диаграмм, другой тип квантовых поправок. На рисунке 5.1 представлена 1-петлевая диаграмма. Обмен может быть не только глюонным, но и фотонным или Z-бозонным, но глюон даст самый сильный вклад. Амплитуды, возникающие из таких диаграмм, называются «пингвинами».

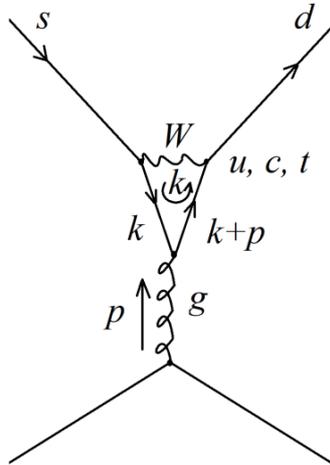


Рис. 5.1. 1-петлевая диаграмма типа «пингвин».

В отличие от операторов $\hat{O}_1, \hat{O}_2, \hat{O}_3, \hat{O}_4$, в которых есть только левые кварки, здесь есть обмен глюоном, взаимодействующий как с правыми, там и с левыми кварками.

Оценим вклад диаграммы, изображенной на рисунке 5.1. Петлевой импульс направлен против движения часовой стрелки, вдоль глюона направлен выходящий импульс p . Считать будем в пределе эффективной теории, петлевой импульс меньше массы W -бозона. Тогда в терминах эффективной теории диаграмму можно записать в другом виде (рис. 5.2).

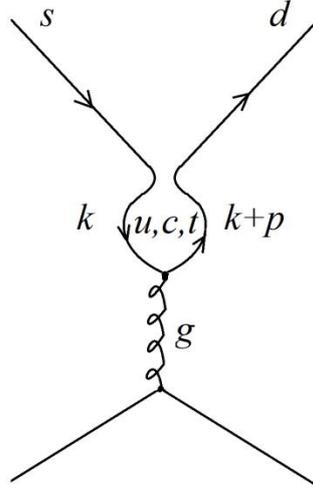


Рис. 5.2. Диаграмма типа «пингвин» в терминах эффективной теории.

Запишем выражение для соответствующей амплитуды, чтобы получить из него оператор:

$$\sum_{q=u,c,t} g_3^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} V_{qs} V_{qd}^* \bar{d}_L \gamma^\mu \frac{\hat{k} + \hat{p} + m_q}{(k+p)^2 - m_q^2} t^a \gamma^\rho \frac{\hat{k} + m_q}{k^2 - m_q^2} \gamma_\mu s_L \frac{1}{p^2} [\bar{u} \gamma_\rho t^a u + \bar{d} \gamma_\rho t^a d + \bar{s} \gamma_\rho t^a s].$$

Полученное выражение можно упростить, воспользовавшись тождеством Фирца.

$$\mathcal{L}_{\text{Ферми}} = -2\sqrt{2}G_F [V_{us}V_{ud}^* (\bar{u}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu u_L) + V_{cs}V_{cd}^* (\bar{c}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu c_L) + V_{ts}V_{td}^* (\bar{t}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu t_L)].$$

Сложность вычисления интеграла заключается в необходимости вычислять фермионную свертку с пятью γ – матрицами. С помощью тождества Фирца можем перейти к более удобной свертке:

$$(\bar{\psi}_L \gamma^\mu \chi_L)(\bar{\eta}_L \gamma^\mu \varphi_L) = (\bar{\eta}_L \gamma^\mu \chi_L)(\bar{\psi}_L \gamma_\mu \varphi_L)$$

Просто переставить кварки местами нельзя, потому что у них есть цвет. Применим к первому оператору тождество Фирца:

$$(\bar{u}_{Li} \gamma^\mu s_{Li})(\bar{d}_{Lj} \gamma_\mu u_{Lj}) = (\bar{d}_{Lj} \gamma^\mu s_{Li})(\bar{u}_{Li} \gamma_\mu u_{Lj})$$

Получается свертка по фермионным индексам, но цветовые индексы остаются. Таким образом, справедливо следующее:

$$\mathcal{L}_{\text{Ферми}} = -2\sqrt{2}G_F [V_{us}V_{ud}^*(\bar{d}_{Lj} \gamma^\mu s_{Li})(\bar{u}_{Li} \gamma_\mu u_{Lj}) + V_{cs}V_{cd}^*(\bar{d}_{Lj} \gamma^\mu s_{Li})(\bar{c}_{Li} \gamma_\mu c_{Lj}) + V_{ts}V_{td}^*(\bar{d}_{Lj} \gamma^\mu s_{Li})(\bar{t}_{Li} \gamma_\mu t_{Lj})].$$

Полученное взаимодействие изображено на рисунке 5.3.

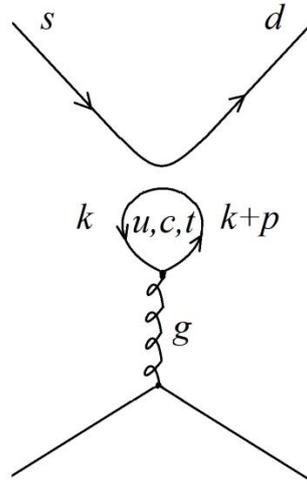


Рис. 5.3. Преобразованная диаграмма.

Вершина взаимодействия глюона с кварком:

$$(\bar{d}_{Lj} \gamma^\mu s_{Li})(\bar{u}_{Li} \gamma_\mu u_{Lj}) \mid \bar{u}_k t_{kl}^a \gamma^\rho u_l A_\rho,$$

A_ρ — глюонная матрица.

Свертки будем вычислять по теории возмущений. Применим теорему Вика, спарим поля, приводя к пропагатору. Будет два пропагатора, возникнет след, а индексы i, j сядут на матрицу t_{ij}^a . В результате цвета свернутся с цветовыми индексами, соответствующими внешним фермионным ногам. Зная это, выпишем ответ:

$$- \sum_{q=u,c,t} g_3^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} V_{qs} V_{qd}^* \bar{d}_L \gamma^\mu t^a s_L \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \frac{\hat{k} + \hat{p} + m_q}{(k+p)^2 - m_q^2} \gamma^v \frac{\hat{k} + m_q}{k^2 - m_q^2} \right] \frac{1}{p^2} [\bar{u} \gamma_v t^a u + \bar{d} \gamma_v t^a d + \bar{s} \gamma_v t^a s].$$

Интеграл расходится квадратично.

$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \frac{\hat{k} + \hat{p} + m_q}{(k+p)^2 - m_q^2} \gamma^v \frac{\hat{k} + m_q}{k^2 - m_q^2} \right] = \Pi_{\mu\nu}(p)$ – почти (из-за γ^5) поляризационный оператор вакуума.

Домашнее задание: Показать, что вклад с γ^5 обращается в ноль.

Про остальную часть поляризационного оператора вакуума известно следующее:

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{2} (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2) \Pi(p^2)$$

Поскольку одно из тождеств Уорда из квантовой электродинамики:

$$p_\mu \Pi_{\mu\nu}(p) = 0.$$

Из-за калибровочной инвариантности две степени импульса выходят, поэтому условная степень расходимости на 2 меньше. Так, интеграл расходится логарифмически.

Расходящаяся часть не зависит от массы кварка, не зависит от того, какой кварк бежит в петле. Получаем следующее:

$$\sum_{q=u,c,t} g_3^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} V_{qs} V_{qd}^* (\text{расходящаяся часть}) = 0,$$

$V_{qs} V_{qd}^* = 0$ в силу унитарности СКМ-матрицы. Это становится очевидно из следующих соображений: если бы мы изначально работали с диаграммой 5.1, а не с приближением теории Ферми, мы могли бы честно вычислить интеграл и увидели бы, что расходимость отсутствует.

Так, останется только конечная часть.

Домашнее задание:

Вычислить (оценить) конечную часть в следующих приближениях:

а) пренебречь массой u-кварка $m_u \rightarrow 0$;

б) пренебречь вкладом с массой t-кварка $m_t \rightarrow 0$;

в) оставить вклад с массой m_c .

Ответ:

$$\Pi(p^2) \sim \frac{1}{(2\pi)^2} \ln \frac{p^2}{m_c^2}.$$

Запишем вид соответствующего оператора. Доминирующий вклад в эффективный лагранжиан:

$$\frac{2\sqrt{2}G_F V_{cs} V_{cd}^* g_3^2}{12\pi^2} \ln \frac{m_c^2}{m_k^2} (\bar{d}_L \gamma^\mu t^a s_L) \sum_{q=u,d,s} \bar{q} \gamma^\mu t^a q \Rightarrow$$

$$\hat{O}_5 = (\bar{d}_L \gamma^\mu t^a s_L) (\bar{u}_R \gamma^\mu t^a u_R + \bar{d}_R \gamma^\mu t^a d_R + \bar{s}_R \gamma^\mu t^a s_R),$$

$$\hat{O}_6 = (\bar{d}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{u}_R \gamma^\mu u_R + \bar{d}_R \gamma^\mu d_R + \bar{s}_R \gamma^\mu s_R),$$

\hat{O}_5, \hat{O}_6 соответствуют изменению изоспина $\Delta I = \frac{1}{2}$, квантовые числа по SU(3) {8}.

Таким образом, мы получили полный набор операторов, если мы учитываем только сильные взаимодействия. При учете не только сильных взаимодействий, но и электромагнитных (обмен фотоном и Z-бозоном), то появятся операторы нового типа (можно записать еще 4 оператора). Полученный набор операторов можно использовать, чтобы вычислять ширины распадов каонов.

Численные оценки констант связи

Нам понадобятся численные оценки констант связи c . Для их получения надо записать для них уравнения ренормгруппы. В качестве начального условия учесть, что на масштабе массы W-бозона мы имеем только древесный ответ. Получим β – матрицу 6×6 .

$$c_1 \approx 2.75$$

$$c_2 \approx -0.06$$

$$c_3 \approx -0.08$$

$$c_4 \approx -0.39$$

$$c_5 \approx 0.14 \text{ (не для } t^a, \text{ а для матрицы Гелмана)} \cdot 4$$

$$c_6 \approx 0.05$$

Оценка ширины распада каона $K^- \rightarrow \pi^- \pi^0$

Этот распад описывается оператором с изменением изоспина $\Delta I = \frac{3}{2}$, оператором \hat{O}_4 .

$$M(K^- \rightarrow \pi^- \pi^0) = ic_4 \sqrt{2} G_F V_{ud} V_{us}^* \langle \pi^- \pi^0 | \hat{O}_4 | K^- \rangle,$$

$$\begin{aligned} \langle \pi^- \pi^0 | \hat{O}_4 | K^- \rangle = \\ = \langle \pi^- \pi^0 | (\bar{d}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{u}_L \gamma^\mu u_L) + (\bar{u}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{d}_L \gamma^\mu u_L) - (\bar{d}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{d}_L \gamma^\mu d_L) | K^- \rangle. \end{aligned}$$

Диаграммы процесса изображены на рисунке 5.4. На следующей лекции рассчитаем эти диаграммы.

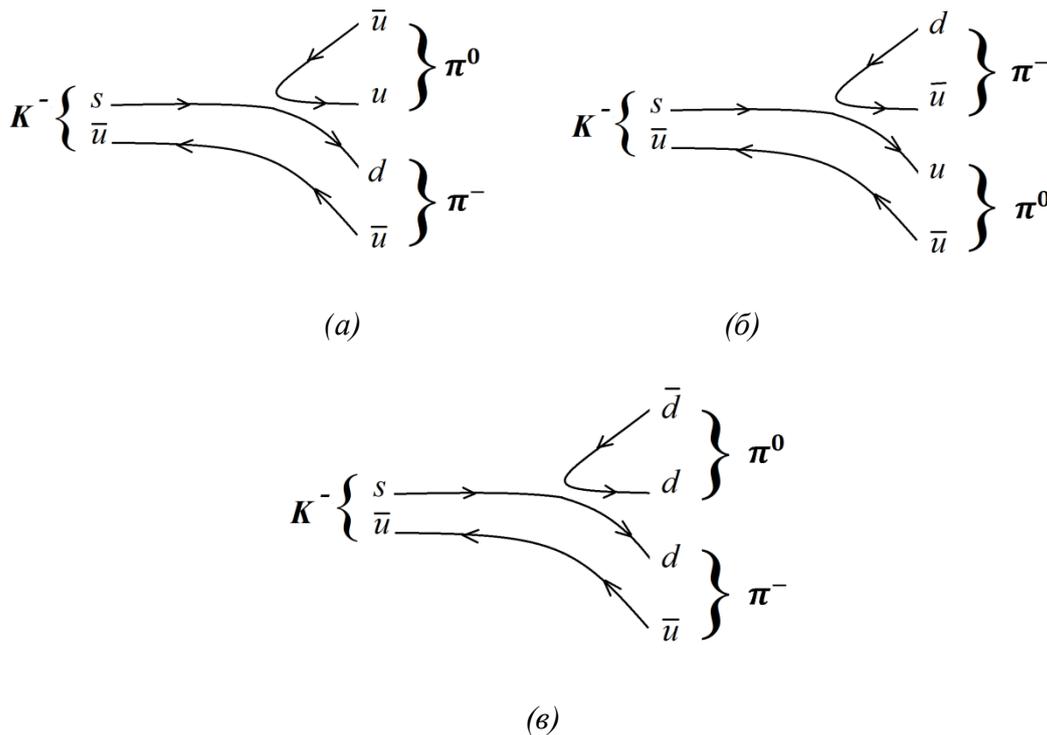


Рис. 5.4. Распада каона $K^- \rightarrow \pi^- \pi^0$.

Лекция 6

Оценка ширины распада каона $K^- \rightarrow \pi^- \pi^0$. CP-нарушение. Смешивание нейтральных каонов

Киральная теория и голдстоуновские бозоны

На прошлой лекции мы построили эффективный лагранжиан с изменением странности на 1. Он состоял из 6 операторов:

$$\mathcal{L}_{int}^{\Delta S=1} = \sum_{i=1}^6 c_i \hat{O}_i.$$

Мы начали вычислять распад $K^- \rightarrow \pi^- \pi^0$ с помощью полученного лагранжиана. Поскольку этот распад обусловлен оператором, в котором происходит изменение изоспина на $3/2$, то единственный из шести операторов лагранжиана дает вклад:

$$iM(K^- \rightarrow \pi^- \pi^0) = ic_4 \sqrt{2} G_F V_{ud} V_{us}^* \langle \pi^- \pi^0 | \hat{O}_4 | K^- \rangle.$$

Оценим матричный элемент:

$$\begin{aligned} & \langle \pi^- \pi^0 | \hat{O}_4 | K^- \rangle \\ &= \langle \pi^- \pi^0 | (\bar{d}_L \gamma^\mu s_L)(\bar{u}_L \gamma^\mu u_L) + (\bar{u}_L \gamma^\mu s_L)(\bar{d}_L \gamma^\mu u_L) - (\bar{d}_L \gamma^\mu s_L)(\bar{d}_L \gamma^\mu d_L) | K^- \rangle. \end{aligned}$$

Обратимся к киральной теории возмущений. Киральная теория возмущений была устроена следующим образом:

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \rightarrow SU(3)_V.$$

В прошлом семестре мы строили киральную теорию и вычисляли токи. Их можно выразить через кварковые поля. Мы знаем соответствующие матричные элементы токов.

$$SU(3)_L \times SU(3)_R = SU(3)_V \times SU(3)_A$$

Токи:

$$j^{\mu a} = \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 t^a q.$$

Поскольку эти токи соответствуют спонтанно нарушенной части группы, то они являются операторами рождения, полями, которые рождают состояние *голдстоуновских бозонов*. Все пионы и каоны лежат в октете, который мы

интерпретировали в киральной теории как псевдо голдстоуновские бозоны. Из теоремы Голдстоуна мы видели, что ненулевым является такой матричный элемент:

$$\langle 0 | j^{\mu sa} | \phi^b, p^\mu \rangle = -ip^\mu F_\pi e^{-ipx} \delta^{ab}.$$

Векторные токи обуславливают переходы между различными кварковыми состояниями.

Оценка оператора \hat{O}_4

В прошлый раз мы нарисовали несколько диаграмм (рис. 5.4). Фейнмановская диаграмма, изображенная на рисунке 5.4 (а) соответствует первому слагаемому оператора, 5.4 (б) – второму, 5.4 (в) – третьему. Вершины точечные, но мы специально изобразили подходящие близко друг к другу линии, чтобы показать, где спариваются фермионные индексы.

Для простоты начнем с третьей диаграммы, соответствующей последнему вкладу.

$$\langle \pi^- \pi^0 | (\bar{d}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu d_L) | K^- \rangle = \underbrace{\langle \pi^- \pi^0 | (\bar{d}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu d_L) | K^- \rangle}_{\text{first term}} + \underbrace{\langle \pi^- \pi^0 | (\bar{d}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu d_L) | K^- \rangle}_{\text{second term}}$$

Дальше по теореме Голдстоуна и по тому, что ток фактически рождает π^0 , можем оценить матричный элемент следующим образом:

$$\underbrace{\langle \pi^- \pi^0 | (\bar{d}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu d_L) | K^- \rangle}_{\text{first term}} \approx \langle \pi^- | \bar{d}_L \gamma^\mu s_L | K^- \rangle \langle \pi^0 | \bar{d}_L \gamma_\mu d_L | 0 \rangle$$

Аксиальная часть тока рождает π^0 , а векторная часть тока дает переходы между голдстоуновскими бозонами. Для оценки второго члена переставим два фермиона \bar{d}_L и \bar{d}_L с помощью тождества Фирца. Различие между ними в цветовых индексах:

$$(\bar{d}_{Li} \gamma^\mu s_{Li}) (\bar{d}_{Lj} \gamma_\mu d_{Lj}) = (\bar{d}_{Lj} \gamma^\mu s_{Li}) (\bar{d}_{Li} \gamma_\mu d_{Lj}).$$

После этого можем воспользоваться приближением, использованным для первого слагаемого:

$$\underbrace{\langle \pi^- \pi^0 | (\bar{d}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu d_L) | K^- \rangle}_{\text{second term}} \approx \langle \pi^- | \bar{d}_{Lj} \gamma^\mu s_{Li} | K^- \rangle \langle \pi^0 | \bar{d}_{Li} \gamma_\mu d_{Lj} | 0 \rangle$$

Разберемся с цветовыми индексами. Берем матричный элемент от оператора, у которого есть цветовые индексы, между бесцветными состояниями. Значит, результат должен быть пропорционален какому-то инварианту по цвету. Так, мы ожидаем, что матричный элемент равен следующему:

$$c \delta_{ij} \langle \pi^- | \bar{d}_{Lk} \gamma^\mu s_{Lk} | K^- \rangle.$$

Для определения константы свернем элемент по индексам ij :

$$3c \langle \pi^- | \bar{d}_{Lk} \gamma^\mu s_{Lk} | K^- \rangle = \langle \pi^- | \bar{d}_{Lj} \gamma^\mu s_{Li} | K^- \rangle \Rightarrow c = \frac{1}{3}.$$

То же самое сделаем со вторым матричным элементом:

$$\frac{1}{3} \delta_{ij} \langle \pi^0 | \bar{d}_L \gamma^\mu s_L | 0 \rangle = \langle \pi^0 | \bar{d}_{Li} \gamma_\mu d_{Lj} | 0 \rangle.$$

В итоге получим матричное произведение элементов без индексов, совпадающее с первым слагаемым. Таким образом:

$$\langle \pi^- \pi^0 | (\bar{d}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu d_L) | K^- \rangle = \frac{4}{3} \langle \pi^- | \bar{d}_L \gamma^\mu s_L | K^- \rangle \langle \pi^0 | \bar{d}_L \gamma_\mu d_L | 0 \rangle.$$

Прейдем к расчету оставшихся диаграмм, распишем первое слагаемое:

$$\langle \pi^- \pi^0 | (\bar{d}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{u}_L \gamma_\mu u_L) | K^- \rangle = \langle \pi^- \pi^0 | (\bar{d}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{u}_L \gamma_\mu u_L) | K^- \rangle + \langle \pi^- \pi^0 | (\bar{d}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{u}_L \gamma_\mu u_L) | K^- \rangle$$

Заметим, что второй член соответствует второй диаграмме. Первое слагаемое оператора частично соответствует диаграмме 5.4 (а), частично диаграмме 5.4 (б). Оценим это слагаемое:

$$\langle \pi^- \pi^0 | (\bar{d}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{u}_L \gamma_\mu u_L) | K^- \rangle \approx \langle \pi^- | \bar{d}_L \gamma^\mu s_L | K^- \rangle \langle \pi^0 | \bar{u}_L \gamma_\mu u_L | 0 \rangle$$

По тождеству Фирца:

$$(\bar{d}_{Li} \gamma^\mu s_{Li}) (\bar{u}_{Lj} \gamma_\mu u_{Lj}) = (\bar{d}_{Lj} \gamma^\mu s_{Li}) (\bar{u}_{Li} \gamma_\mu u_{Lj}) \Rightarrow$$

$$\langle \pi^- \pi^0 | (\bar{d}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{u}_L \gamma_\mu u_L) | K^- \rangle \approx \langle \pi^0 | \bar{u}_L \gamma^\mu s_L | K^- \rangle \langle \pi^- | \bar{d}_L \gamma_\mu u_L | 0 \rangle$$

$$\langle \pi^0 | \bar{u}_L \gamma^\mu s_L | K^- \rangle \langle \pi^- | \bar{d}_L \gamma_\mu u_L | 0 \rangle = \frac{1}{3} \langle \pi^0 | \bar{u}_L \gamma^\mu s_L | K^- \rangle \langle \pi^- | \bar{d}_L \gamma_\mu u_L | 0 \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \pi^- \pi^0 | (\bar{d}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{u}_L \gamma_\mu u_L) | K^- \rangle &= \\ &= \langle \pi^- | \bar{d}_L \gamma^\mu s_L | K^- \rangle \langle \pi^0 | \bar{u}_L \gamma_\mu u_L | 0 \rangle + \frac{1}{3} \langle \pi^0 | \bar{u}_L \gamma^\mu s_L | K^- \rangle \langle \pi^- | \bar{d}_L \gamma_\mu u_L | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Аналогично можно собрать ответ для второго слагаемого.

$$\langle \pi^- \pi^0 | (\bar{u}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu u_L) | K^- \rangle = \langle \pi^- \pi^0 | (\bar{u}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu u_L) | K^- \rangle + \langle \pi^- \pi^0 | (\bar{u}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu u_L) | K^- \rangle$$

Заметим, что второй член соответствует диаграмме 5.4 (a). Сразу выпишем ответ:

$$\begin{aligned} \langle \pi^- \pi^0 | (\bar{u}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu u_L) | K^- \rangle &= \\ &= \langle \pi^0 | \bar{u}_L \gamma^\mu s_L | K^- \rangle \langle \pi^- | \bar{d}_L \gamma_\mu u_L | 0 \rangle + \frac{1}{3} \langle \pi^- | \bar{d}_L \gamma^\mu s_L | K^- \rangle \langle \pi^0 | \bar{u}_L \gamma_\mu u_L | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Итоговая оценка для оператора:

$$\begin{aligned} \langle \pi^- \pi^0 | \hat{O}_4 | K^- \rangle &= \\ &= \langle \pi^- | \bar{d}_L \gamma^\mu s_L | K^- \rangle \langle \pi^0 | \bar{u}_L \gamma_\mu u_L | 0 \rangle + \frac{1}{3} \langle \pi^0 | \bar{u}_L \gamma^\mu s_L | K^- \rangle \langle \pi^- | \bar{d}_L \gamma_\mu u_L | 0 \rangle + \\ &+ \langle \pi^0 | \bar{u}_L \gamma^\mu s_L | K^- \rangle \langle \pi^- | \bar{d}_L \gamma_\mu u_L | 0 \rangle + \frac{1}{3} \langle \pi^- | \bar{d}_L \gamma^\mu s_L | K^- \rangle \langle \pi^0 | \bar{u}_L \gamma_\mu u_L | 0 \rangle - \\ &- \frac{4}{3} \langle \pi^- | \bar{d}_L \gamma^\mu s_L | K^- \rangle \langle \pi^0 | \bar{d}_L \gamma_\mu d_L | 0 \rangle = \\ &= \frac{4}{3} \langle \pi^0 | \bar{u}_L \gamma^\mu s_L | K^- \rangle \langle \pi^- | \bar{d}_L \gamma_\mu u_L | 0 \rangle + \frac{4}{3} \langle \pi^- | \bar{d}_L \gamma^\mu s_L | K^- \rangle \langle \pi^0 | \bar{u}_L \gamma_\mu u_L | 0 \rangle - \\ &- \frac{4}{3} \langle \pi^- | \bar{d}_L \gamma^\mu s_L | K^- \rangle \langle \pi^0 | \bar{d}_L \gamma_\mu d_L | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Домашнее задание:

При вычислении первого и второго матричного элемента мы не записали еще несколько свертков. Найдите эти свертки и убедитесь, что они соответствуют диаграммам на рисунке 6.1.

- 1) Найдите, каким спариваниям соответствуют эти диаграммы.
- 2) Покажите, что в пределе точной киральной симметрии SU(2), вклады этих двух диаграмм сокращаются.

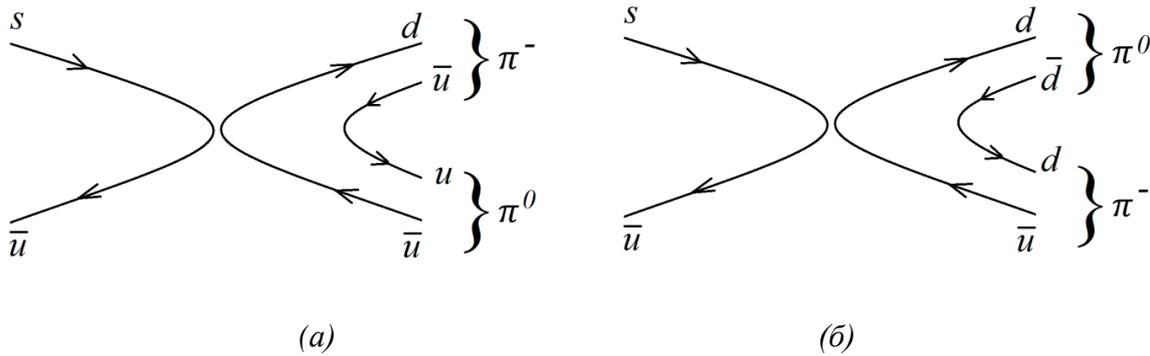


Рис. 6.1. Неучтенные свертки.

Вычисление матричных элементов

Осталось вычислить матричные элементы, для этого вспомним матричные элементы токов, выписанные вначале лекции. Итак, нам потребуется 3 тока:

$$J^{\mu 5a} = \bar{q}\gamma^\mu\gamma^5 t^a q.$$

Нас будет интересовать только рождение пионов. Рассмотрим эти токи при $a = 1, 2, 3$:

$$t^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$j^{\mu 51} = \frac{1}{2} (\bar{u}\gamma^\mu\gamma^5 d + \bar{d}\gamma^\mu\gamma^5 u),$$

$$j^{\mu 52} = -\frac{i}{2} (\bar{u}\gamma^\mu\gamma^5 d - \bar{d}\gamma^\mu\gamma^5 u),$$

$$j^{\mu 53} = \frac{1}{2} (\bar{u}\gamma^\mu\gamma^5 u + \bar{d}\gamma^\mu\gamma^5 d).$$

Применим теорему Голдстоуна для подгруппы SU(2):

$$\langle 0 | j^{\mu 5a} | \pi^b, p \rangle = -i p^\mu F_\pi \delta^{ab}, \quad \text{где}$$

$$|\pi^0\rangle \equiv |\pi^3\rangle, \quad |\pi^-\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi^1\rangle - i|\pi^2\rangle), \quad |\pi^+\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi^1\rangle + i|\pi^2\rangle).$$

$$\bar{d}_L \gamma^\mu u_L = \frac{\bar{d} \gamma^\mu (1 - \gamma^5)}{2} u = \frac{1}{2} \bar{d} \gamma^\mu u - \frac{1}{2} \bar{d} \gamma^\mu \gamma^5 u.$$

Нас интересует только аксиальная часть тока, поэтому найдем второе слагаемое:

$$\bar{d} \gamma^\mu \gamma^5 u = j^{\mu 51} - i j^{\mu 52}.$$

$$\langle \pi^- | \bar{d} \gamma^\mu \gamma^5 u | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle \pi^1 | + i \langle \pi^2 |) (j^{\mu 51} - i j^{\mu 52}) | 0 \rangle \Rightarrow$$

при раскрытии скобок получим 4 слагаемых, но из-за δ^{ab} ненулевыми будут только $\langle \pi^1 | j^{\mu 51} | 0 \rangle$ и $\langle \pi^2 | j^{\mu 52} | 0 \rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle \pi^1 | + i \langle \pi^2 |) (j^{\mu 51} - i j^{\mu 52}) | 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle \pi^1 | j^{\mu 51} | 0 \rangle + \langle \pi^2 | j^{\mu 52} | 0 \rangle) = \frac{i}{\sqrt{2}} 2 p_\pi^\mu F_\pi = \\ &= i \sqrt{2} p_\pi^\mu F_\pi. \end{aligned}$$

Два следующих члена оператора \hat{O}_4 обладают общим множителем, объединим их:

$$\langle \pi^0 | \bar{u}_L \gamma^\mu u_L - \bar{d}_L \gamma^\mu d_L | 0 \rangle = \frac{1}{2} \langle \pi^0 | \bar{u} \gamma^\mu \gamma^5 u - \bar{d} \gamma^\mu \gamma^5 d | 0 \rangle = \langle \pi^0 | j^{\mu 53} | 0 \rangle = i p_{\pi^0} F_\pi.$$

Домашнее задание:

Мы вычислили ту часть матричного элемента, которая отвечает за рождение пиона из вакуума. Осталось вычислить матричный элемент, который отвечает за переход между каоном и π^0 и каоном и π^- .

Ответ:

$$\langle \pi^- | \bar{d}_L \gamma^\mu s_L | K^- \rangle = \sqrt{2} \langle \pi^0 | \bar{u}_L \gamma^\mu s_L | K^- \rangle = \frac{1}{2} (p_K + p_\pi)^\mu.$$

Запишем ответ для матричного элемента $\langle \pi^- \pi^0 | \hat{O}_4 | K^- \rangle$:

$$\langle \pi^- \pi^0 | \hat{O}_4 | K^- \rangle = \frac{4}{3} \frac{1}{2\sqrt{2}} (p_K + p_{\pi^0})^\mu i \sqrt{2} p_{\pi^-} F_\pi + \frac{4}{3} \frac{1}{2} (p_K + p_{\pi^-})_\mu i F_\pi p_{\pi^0}^\mu.$$

Будем считать, что пионы гораздо легче каонов, и будем пренебрегать разницей между π^- и π^0 с точки зрения их кинематики:

$$m_\pi \ll m_K \Rightarrow m_\pi \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\frac{4}{3} \frac{1}{2\sqrt{2}} (p_K + p_{\pi^0})^\mu i\sqrt{2} p_{\pi^-} F_\pi + \frac{4}{3} \frac{1}{2} (p_K + p_{\pi^-})_\mu iF_\pi p_{\pi^0}^\mu = 2(p_K + p_\pi)^\mu p_\pi^\mu F_\pi.$$

Запишем ответ для амплитуды:

$$iM(K^- \rightarrow \pi^- \pi^0) = ic_4 \sqrt{2} G_F V_{ud} V_{us}^* 2(p_K + p_{\pi^0})^\mu p_{\pi^-} F_\pi.$$

Воспользуемся законом сохранения энергии и импульса:

$$p_K = p_{\pi^0} + p_{\pi^-}, \quad (p_K - p_{\pi^-})^2 = p_{\pi^0}^2,$$

$$m_K^2 - 2p_K p_{\pi^-} = 0, \quad p_{\pi^-} p_{\pi^0} = \frac{1}{2} m_K^2.$$

$$ic_4 \sqrt{2} G_F V_{ud} V_{us}^* 2(p_K + p_{\pi^0})^\mu p_{\pi^-} F_\pi = ic_4 \sqrt{2} G_F V_{ud} V_{us}^* m_K^2 F_\pi.$$

Численная оценка времени жизни распада каона $K^- \rightarrow \pi^- \pi^0$

Теперь легко посчитать ширину. Необходимо возвести в квадрат матричный элемент, умножить на фазовый объем и поделить на две массы распадающейся частицы. Так, ширина распада каона:

$$\Gamma = \frac{1}{2m_K} \frac{1}{8\pi} = \frac{c_4^2 F_\pi^2 m_K^2 G_F^2 V_{ud}^2 V_{us}^2}{8\pi}.$$

Если подставить числа и рассчитать время жизни, то получим следующее:

$$\tau \sim 10^{-8} \text{с.}$$

Экспериментальное время жизни:

$$\tau_{\text{эксп}} \sim 1.24 \cdot 10^{-8} \text{с.}$$

Таким образом, мы получили хорошее согласование теории и эксперимента, несмотря на использование большого числа приближений.

CP-нарушения в кварковом секторе стандартной модели

Вторая часть флейверной физики – **CP-нарушения в кварковом секторе стандартной модели**. Есть один явно нарушающий CP-параметр стандартной модели

– фаза, входящая в СКМ-матрицу. В ближайшие несколько лекций мы изучим эффект от этой фазы и ее следствия на примере мезонов. Когда мы обсуждали матрицу СКМ, мы видели, что есть несколько инвариантов, куда входит CP-нарушающая фаза. И была задана задача показать, что некоторый инвариант не зависит от параметризации кварковых полей: $I_m[V_{ud}V_{cd}^*V_{cb}V_{ub}^*]$ – инвариант относительно репараметризации. Можно показать, что любые элементы CP-нарушения входят в такую комбинацию. И если вспомним параметризацию Волькенштейна для матрицы СКМ и распишем элементы, то получим:

$$I_m[V_{ud}V_{cd}^*V_{cb}V_{ub}^*] \sim \text{Im} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\lambda^2\right) (-\lambda) A \lambda^2 A \lambda^3 (1 - \rho - \eta) \right] \sim A^2 \lambda^6 \eta.$$

Ответ подавлен 6 степенью λ , его трудно увидеть.

Смешивание нейтральных каонов

Классическим эффектом, связанным с CP нарушением, является эффект *смешивания нейтральных каонов*:

$$\begin{aligned} K^0 & d\bar{s}, \\ \bar{K}^0 & \bar{d}s. \end{aligned}$$

Каоны – псевдоскаляры, подействуем на них CP-преобразованием:

$$\begin{aligned} PC|K^0\rangle &= -|\bar{K}^0\rangle, \\ PC|\bar{K}^0\rangle &= -|K^0\rangle. \end{aligned}$$

В данном случае фаза равна 1 из соображений удобства. Полученные равенства говорят о том, что $|K^0\rangle$, $|\bar{K}^0\rangle$ не являются собственными относительно CP-преобразования. Но используя полученные соотношения, можно построить собственные состояния:

$$\begin{aligned} |K_1^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle), \\ |K_2^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle), \\ CP|K_1^0\rangle &= |K_1^0\rangle, \\ CP|K_2^0\rangle &= -|K_2^0\rangle. \end{aligned}$$

Слабые взаимодействия нарушают P-четность и C-четность. Долгое время считалось, что CP-четность – сохраняющаяся симметрия в стандартной модели. Из $|K^0\rangle$ и $|\bar{K}^0\rangle$ построим собственные состояния CP. Состояния $|K_1^0\rangle$ и $|K_2^0\rangle$ – теоретические собственные состояния. Экспериментаторы тоже наблюдали два каонных состояния

K_L и K_S (longi short), одно долго живущее, другое – короткоживущее. Эти состояния распадались на два или три пиона.

Представим, что CP-четность сохраняется:

$$K \rightarrow 2\pi, 3\pi \Rightarrow \begin{aligned} CP(2\pi) &= (-1)^l(-1)^2 = +1 \\ CP(3\pi) &= (-1)^3 = -1 \end{aligned} ,$$

Мы ожидаем, что состояние, которое распадается в 2 пиона, имеет CP-четность +1, а состояние, которое распадается в 3 пиона, имеет CP-четность -1. Экспериментаторы наблюдали:

$$\begin{aligned} K_S &\rightarrow 2\pi \quad (Br \approx 100\%), \\ K_L &\rightarrow 3\pi \quad (Br \approx 34\%). \end{aligned}$$

Времена жизни связаны с тем, что масса каона $m_K \approx 490$ МэВ, масса пионов $m_\pi \approx 140$ МэВ. Так при $K_L \rightarrow 3\pi$ на фазовый объем остается мало, при вычислении ширины распада возникнет подавление фазового объема, ширина будет уменьшаться, а время жизни состояния увеличено. Времена жизни:

$$\begin{aligned} \tau_{K_S} &\approx 0.59 \cdot 10^{-10} \text{ с} \\ \tau_{K_L} &\approx 5.2 \cdot 10^{-8} \text{ с}. \end{aligned}$$

По мере того, как ученые исследовали эти состояния, они обнаружили, что несмотря на то, что K_S доминирующим образом распадается в 2 пиона, иногда это состояние может распадаться в 3 пиона. K_L доминирующим образом распадается в 3 пиона, но иногда может распадаться и в состояние с двумя пионами:

$$\begin{aligned} Br(K_L^0 \rightarrow 2\pi) &\approx 3 \cdot 10^{-3} \\ Br(K_S^0 \rightarrow 3\pi) &\approx 3.5 \cdot 10^{-7}. \end{aligned}$$

Это означает, что экспериментально наблюдаемые состояния K_L и K_S не являются $|K_1^0\rangle$ и $|K_2^0\rangle$. Нарушение CP-четности было первым указанием на то, что это не истинная симметрия.

Перейдем к описанию процессов с CP-нарушением. Нам потребуется изучить квантовую механику пары мезон ($|M, \vec{p}\rangle$) – антимезон ($|\bar{M}, \vec{p}\rangle$).

$$\begin{aligned} CP|M, \vec{p}\rangle &= -|\bar{M}, -\vec{p}\rangle, \\ CP|\bar{M}, \vec{p}\rangle &= -|M, -\vec{p}\rangle. \end{aligned}$$

Далее нам потребуется вычисление различного рода амплитуд. Введем для них обозначения:

$$A(M \rightarrow f) = A_f,$$

$$A(\bar{M} \rightarrow f) = \bar{A}_f.$$

Произвольную волновую функцию, которая может быть смесью мезона и антимезона, можно разложить по базису:

$$|\psi\rangle = \psi_M |M\rangle + \psi_{\bar{M}} |\bar{M}\rangle \Rightarrow$$

пусть нет смешивания между M и \bar{M} . Это означает, что гамильтониан диагонален:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_M \\ \psi_{\bar{M}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} - \frac{i}{2} \Gamma_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} - \frac{i}{2} \Gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_M \\ \psi_{\bar{M}} \end{pmatrix},$$

M_{11}, M_{22} – массы соответствующих мезонов. Если включим смешивание, то гамильтониан устроен следующим образом:

$$H = \begin{pmatrix} \langle M | \hat{H} | M \rangle & \langle M | \hat{H} | \bar{M} \rangle \\ \langle \bar{M} | \hat{H} | M \rangle & \langle \bar{M} | \hat{H} | \bar{M} \rangle \end{pmatrix} -$$

произвольная матрица, которую можем разбить на эрмитову и антиэрмитову части:

$$H = M - \frac{i}{2} \Gamma = \begin{pmatrix} M_{11} - \frac{i}{2} \Gamma_{11} & M_{12} - \frac{i}{2} \Gamma_{12} \\ M_{21} - \frac{i}{2} \Gamma_{21} & M_{22} - \frac{i}{2} \Gamma_{22} \end{pmatrix},$$

$$M^+ = M, \quad \Gamma^+ = \Gamma.$$

Потребуем от матрицы H :

а) СРТ-симметрию: $M_{11} - \frac{i}{2} \Gamma_{11} = M_{22} - \frac{i}{2} \Gamma_{22} \Rightarrow M_{11} = M_{22} = M, \Gamma_{11} = \Gamma_{22} = \Gamma \Rightarrow$

$$H = \begin{pmatrix} M - \frac{i}{2} \Gamma & M_{12} - \frac{i}{2} \Gamma_{12} \\ M_{12}^* - \frac{i}{2} \Gamma_{12}^* & M - \frac{i}{2} \Gamma \end{pmatrix}$$

б) истинную CP-симметрию: $M_{12} - \frac{i}{2} \Gamma_{12} = M_{12}^* - \frac{i}{2} \Gamma_{12}^* = i \text{Im} M_{12} - i \cdot i \text{Im} \Gamma_{12} = 0$

$$\Rightarrow \text{Im} M_{12} = 0 \text{ и } \text{Im} \Gamma_{12} = 0.$$

Лекция 7

Классификация CP-нарушений

На прошлой лекции мы начали рассматривать CP-нарушения в кварковом секторе. Начали с системы нейтральных мезонов, рассмотрели эволюцию этой системы.

$$\begin{pmatrix} |M\rangle \\ |\bar{M}\rangle \end{pmatrix} |\psi\rangle = \psi_M |M\rangle + \psi_{\bar{M}} |\bar{M}\rangle$$

Эволюция квантовых амплитуд с квантово-механической точки зрения отображается уравнением Шредингера:

$$i\partial_t \begin{pmatrix} \psi_M \\ \psi_{\bar{M}} \end{pmatrix} = \hat{H} \begin{pmatrix} \psi_M \\ \psi_{\bar{M}} \end{pmatrix}.$$

Поскольку мезоны нестабильны и распадаются, то матрица не обязана быть унитарной. Мы разделили ее на унитарную и антиунитарную части. Общий вид матрицы:

$$H = \begin{pmatrix} M_{11} - \frac{i}{2}\Gamma_{11} & M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12} \\ M_{21} - \frac{i}{2}\Gamma_{21} & M_{22} - \frac{i}{2}\Gamma_{22} \end{pmatrix}.$$

Кроме того мы установили CPT-симметрию: $M_{11} - \frac{i}{2}\Gamma_{11} = M_{22} - \frac{i}{2}\Gamma_{22} \Rightarrow M_{11} = M_{22} = M$, $\Gamma_{11} = \Gamma_{22} = \Gamma$. И отметили, CP-симметрия $\Leftrightarrow \text{Im}M_{12} = 0$ и $\text{Im}\Gamma_{12} = 0$

Собственные вектора и собственные значения гамильтониана

Чтобы рассматривать эволюцию системы, необходимо определить собственные вектора и собственные значения матрицы. Поставим задачу на собственные значения, диагонализуем гамильтониан:

$$\begin{pmatrix} M - \frac{i}{2}\Gamma & M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12} \\ M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^* & M - \frac{i}{2}\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left(M - \frac{i}{2}\Gamma - \lambda\right)^2 - \left(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}\right)\left(M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_{\pm} = M - \frac{i}{2}\Gamma \pm \sqrt{\left(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}\right)\left(M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*\right)}.$$

$$\lambda_+ = \lambda_H \text{ (тяжелое)} = \begin{pmatrix} M - \frac{i}{2}\Gamma - \lambda_+ & M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12} \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0$$

$$-\sqrt{\left(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}\right)\left(M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*\right)}p + \left(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}\right)q = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{p}{q} = \frac{M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}}{\sqrt{M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*}},$$

$$\psi_H = p\psi_M + q\psi_{\bar{M}}, \quad \lambda_H \text{ (тяжелое)} = \lambda_+.$$

$$\lambda_- = \lambda_L \text{ (легкое)} = \begin{pmatrix} M - \frac{i}{2}\Gamma - \lambda_- & M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12} \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0$$

$$\sqrt{\left(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}\right)\left(M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*\right)}p + \left(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}\right)q = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{p}{q} = -\frac{M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}}{\sqrt{M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*}},$$

$$\psi_L = p\psi_M - q\psi_{\bar{M}}, \quad \lambda_L \text{ (легкое)} = \lambda_-.$$

Считаем, что $\psi_M, \psi_{\bar{M}}$ - ортонормированные состояния:

$$|\psi_M|^2 + |\psi_{\bar{M}}|^2 = 1 \Rightarrow |p|^2 + |q|^2 = 1.$$

Обратим внимание на то, что легкое и тяжелое состояния не ортогональны друг другу в общем случае:

$$|p|^2 - |q|^2 \equiv \langle \psi_H | \psi_L \rangle \neq 0.$$

Если бы CP-нарушения не было, то $\frac{p}{q} = 1 \Rightarrow \langle \psi_H | \psi_L \rangle = 0$. Оператор был бы эрмитовым.

Введем величину ε , отвечающую за CP несохранение:

$$\frac{p}{q} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} |M_H\rangle &= p|M\rangle + q|\bar{M}\rangle = q\left(\frac{p}{q}|M\rangle + |\bar{M}\rangle\right) = q\left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}|M\rangle + |\bar{M}\rangle\right) = \\ &= \frac{q}{1 - \varepsilon}\left((1 + \varepsilon)|M\rangle + (1 - \varepsilon)|\bar{M}\rangle\right) = N\left((1 + \varepsilon)|M\rangle + (1 - \varepsilon)|\bar{M}\rangle\right) = \\ &= N\left(\frac{(|M\rangle + |\bar{M}\rangle)}{\sqrt{2}} + \varepsilon\frac{(|M\rangle - |\bar{M}\rangle)}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Так, собственное состояние гамильтониана в случае каонов - суперпозиция каонов K_1^0 и K_2^0 с разными CP-четностями.

Введем еще несколько полезных определений:

$$\lambda_H - \lambda_L \equiv \lambda_+ - \lambda_- = \left\| \begin{array}{l} \lambda_H = M_H - \frac{i}{2}\Gamma_H \\ \lambda_L = M_L - \frac{i}{2}\Gamma_L \end{array} \right\| = (M_H - M_L) - \frac{i}{2}(\Gamma_H - \Gamma_L) = \Delta M - \frac{i}{2}\Delta\Gamma,$$

$$\frac{q}{p} = \sqrt{\frac{\left(M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*\right)\left(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}\right)}{\left(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}\right)^2}},$$

$$\lambda_+ - \lambda_- = 2\sqrt{\left(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}\right)\left(M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*\right)} = \Delta M - \frac{i}{2}\Delta\Gamma \Rightarrow$$

$$\frac{q}{p} = \frac{\Delta M - \frac{i}{2}\Delta\Gamma}{2\left(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}\right)}.$$

Эволюция

Теперь поговорим об эволюции, представим, что в эксперименте рождается мезон или антимезон. Возникает вопрос, что с ним дальше происходит, если гамильтониан \hat{H} .

$$\begin{cases} \psi_H = p\psi_M + q\psi_{\bar{M}} \\ \psi_L = p\psi_M - q\psi_{\bar{M}} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \psi_M = \frac{1}{2p}(\psi_H + \psi_L) \\ \psi_{\bar{M}} = \frac{1}{2q}(\psi_H - \psi_L) \end{cases},$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_H \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_H - \frac{i}{2} \Gamma_H & 0 \\ 0 & M_L - \frac{i}{2} \Gamma_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_H \\ \psi_L \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \psi_H(t) \\ \psi_L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i(M_H - \frac{i}{2} \Gamma_H)t} & 0 \\ 0 & e^{-i(M_L - \frac{i}{2} \Gamma_L)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_H(0) \\ \psi_L(0) \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся переходом, чтобы определить поведение в смешанном состоянии:

$$\begin{pmatrix} \psi_H \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ p & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_M \\ \psi_{\bar{M}} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} p & q \\ p & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_M(t) \\ \psi_{\bar{M}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_H t} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda_L t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ p & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_M(0) \\ \psi_{\bar{M}}(0) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \psi_M(t) \\ \psi_{\bar{M}}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2pq} \begin{pmatrix} q & q \\ p & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_H t} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda_L t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ p & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_M(0) \\ \psi_{\bar{M}}(0) \end{pmatrix} = \hat{U}(t) \begin{pmatrix} \psi_M(0) \\ \psi_{\bar{M}}(0) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\hat{U}(t) = \frac{1}{2pq} \begin{pmatrix} qe^{-i\lambda_H t} & qe^{-i\lambda_L t} \\ pe^{-i\lambda_H t} & -pe^{-i\lambda_L t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ p & -q \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2pq} \begin{pmatrix} qp(e^{-i\lambda_H t} + e^{-i\lambda_L t}) & q^2(e^{-i\lambda_H t} - e^{-i\lambda_L t}) \\ p^2(e^{-i\lambda_H t} - e^{-i\lambda_L t}) & pq(e^{-i\lambda_H t} + e^{-i\lambda_L t}) \end{pmatrix}.$$

Пусть: $g_{\pm}(t) = \frac{1}{2}(e^{-i\lambda_H t} \pm e^{-i\lambda_L t})$, тогда:

$$\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} g_+(t) & \frac{q}{p}g_-(t) \\ \frac{p}{q}g_-(t) & g_+(t) \end{pmatrix} -$$

оператор, описывающий эволюцию состояний.

Классификация нарушающих эффектов

Речь пойдет, конечно, о мезонах.

$$A(M \rightarrow f) = A_f,$$

$$A(\bar{M} \rightarrow f) = \bar{A}_f,$$

$$A(M \rightarrow \bar{f}) = A_{\bar{f}}.$$

1) **Прямое CP-нарушение:**

$$\frac{|A_f|^2}{|\bar{A}_{\bar{f}}|^2} \neq 1.$$

Представим, что константа связи λ комплексная:

$$A = \lambda\#.$$

При возведении модулей в квадрат комплексность пропадает:

$$|A|^2 = |\lambda|^2\#.$$

Единственный способ получить нетривиальное CP-нарушение – получить интерференцию:

$$\begin{aligned} A_f &= \lambda A_1 + g A_2 \\ \bar{A}_{\bar{f}} &= \lambda^* A_1 + g^* A_2. \end{aligned}$$

Наблюдаемая:

$$\mathcal{A}_{CP} = \frac{\Gamma(M \rightarrow f) - \Gamma(\bar{M} \rightarrow \bar{f})}{\Gamma(M \rightarrow f) + \Gamma(\bar{M} \rightarrow \bar{f})} \neq 0 \Rightarrow$$

CP-нарушающая асимметрия.

2) CP-нарушение смешивания:

Пусть $|A_f|^2 = |\bar{A}_{\bar{f}}|^2$, прямого CP-нарушения нет. Мезоны нейтральные, но

$$\frac{p}{q} \neq 1.$$

Представим, что есть полулептонный распад мезона:

$$\begin{aligned} M &\rightarrow l^+ X \quad (M \leftrightarrow l^- \bar{X}), \\ \bar{M} &\rightarrow l^- \bar{X} \quad (M \leftrightarrow l^+ X). \end{aligned}$$

При временной эволюции M начинает подмешиваться с \bar{M} , появляются распады с конечным состоянием $l^- \bar{X}$.

Наблюдаемая:

$$\mathcal{A}_{CP} = \frac{\Gamma(M(t) \rightarrow l^- \bar{X}) - \Gamma(\bar{M}(t) \rightarrow l^+ \bar{X})}{\Gamma(M(t) \rightarrow l^- \bar{X}) + \Gamma(\bar{M}(t) \rightarrow l^+ \bar{X})}.$$

$$\begin{pmatrix} \psi_M(t) \\ \psi_{\bar{M}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_+(t)\psi_M(0) + \frac{q}{p}g_-(t)\psi_{\bar{M}}(0) \\ \frac{p}{q}g_-(t)\psi_M(0) + g_+(t)\psi_{\bar{M}}(0) \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что $M(t)$ получается, если в начальном состоянии был мезон M . $\bar{M}(t)$ - в начальном состоянии был \bar{M} . Интегрирование по фазовому объему общее, асимметрия в ширинах может быть переписана в виде асимметрии в амплитудах:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{CP} &= \frac{|\mathcal{A}(M(t) \rightarrow l^- \bar{X})|^2 - |\mathcal{A}(\bar{M}(t) \rightarrow l^+ \bar{X})|^2}{|\mathcal{A}(M(t) \rightarrow l^- \bar{X})|^2 + |\mathcal{A}(\bar{M}(t) \rightarrow l^+ \bar{X})|^2} = \frac{\left| \frac{q}{p} g_-(t) \right|^2 - \left| \frac{p}{q} g_-(t) \right|^2}{\left| \frac{q}{p} g_-(t) \right|^2 + \left| \frac{p}{q} g_-(t) \right|^2} = \\ &= \frac{1 - \left| \frac{p}{q} \right|^4}{1 + \left| \frac{p}{q} \right|^4}. \end{aligned}$$

Самый общий случай – присутствуют оба нарушения.

3) **CP-нарушение в интерференции:**

Имеется в виду интерференция между прямым CP-нарушением и CP-нарушением смешивания.

Представим, что $|A_f|^2 = |\bar{A}_{\bar{f}}|^2$ и $|p| = |q|$. В этом случае тоже может быть CP-нарушающий эффект.

Пусть конечное состояние f – CP-симметричное. Представим, что возможны оба случая:

$$\begin{aligned} M &\rightarrow f, \\ \bar{M} &\rightarrow f. \end{aligned}$$

В конечное состояние f мезон M может перейти двумя путями: напрямую или через состояние \bar{M} :

$$M \rightarrow \bar{M} \rightarrow f.$$

Таким образом, есть две амплитуды, между ними есть интерференция. Пусть

$$\lambda = \frac{p}{q} \cdot \frac{A_f}{A_{\bar{f}}},$$

по модулю λ может быть единицей, но она может быть комплексной, обладать нетривиальной фазой:

$$\text{Im } \lambda \neq 0.$$

$$\mathcal{A}_{CP}(t) = \frac{\Gamma(M_0(t) \rightarrow f) - \Gamma(\bar{M}_0(t) \rightarrow f)}{\Gamma(M_0(t) \rightarrow f) + \Gamma(\bar{M}_0(t) \rightarrow f)}.$$

Можно получить лаконичную итоговую формулу, если предположить, что $\Delta\Gamma = 0$:

$$\begin{aligned} \Gamma(M_0(t) \rightarrow f) &\approx \left| g_+(t)A_f + \frac{q}{p}g_-(t)\bar{A}_f \right|^2 \\ \Gamma(\bar{M}_0(t) \rightarrow f) &\approx \left| \frac{p}{q}g_-(t)A_f + g_+(t)\bar{A}_f \right|^2 \quad \Rightarrow \\ \mathcal{A}_{CP}(t) &= \frac{\left| g_+(t)A_f + \frac{q}{p}g_-(t)\bar{A}_f \right|^2 - \left| \frac{p}{q}g_-(t)A_f + g_+(t)\bar{A}_f \right|^2}{\left| g_+(t)A_f + \frac{q}{p}g_-(t)\bar{A}_f \right|^2 + \left| \frac{p}{q}g_-(t)A_f + g_+(t)\bar{A}_f \right|^2} = \\ &= \frac{\left| \frac{q}{p}\bar{A}_f \right|^2 |g_+(t)\lambda + g_-(t)|^2 - |\bar{A}_f|^2 |\lambda g_-(t) + g_+(t)|^2}{\left| \frac{q}{p}\bar{A}_f \right|^2 |g_+(t)\lambda + g_-(t)|^2 + |\bar{A}_f|^2 |\lambda g_-(t) + g_+(t)|^2} = \\ &= \frac{|g_+(t)\lambda + g_-(t)|^2 - |\lambda g_-(t) + g_+(t)|^2}{|g_+(t)\lambda + g_-(t)|^2 + |\lambda g_-(t) + g_+(t)|^2} \\ \text{числитель} &= 2\text{Re}(g_+(t)\lambda g_-^*(t)) - 2\text{Re}(g_-(t)\lambda g_+^*(t)) = \\ &= 2\text{Re}(\lambda(g_+(t)g_-^*(t) - g_-(t)g_+^*(t))) = ||g_+(t)g_-^*(t) - g_-(t)g_+^*(t) = \\ &= \frac{1}{4}e^{-\Gamma t} \left((e^{-iM_H t} + e^{-iM_L t})(e^{iM_H t} - e^{iM_L t}) - (e^{-iM_H t} - e^{-iM_L t})(e^{iM_H t} + e^{iM_L t}) \right) \\ &= \frac{1}{4}e^{-\Gamma t} \left((1 - e^{-i\Delta M t} + e^{i\Delta M t} - 1) - (1 + e^{-i\Delta M t} - e^{i\Delta M t} - 1) \right) = \\ &= \frac{1}{4}e^{-\Gamma t} 4i \sin \Delta M t \quad || = -2\text{Im}(\lambda)e^{-\Gamma t} \sin \Delta M t. \\ \text{знаменатель} &= 2|g_+(t)|^2 + 2|g_-(t)|^2 + 2\text{Re}(\lambda(g_+(t)g_-^*(t) + g_-(t)\lambda g_+^*(t))) = \\ &= 2|g_+(t)|^2 + 2|g_-(t)|^2 = 2 \frac{1}{4}e^{-\Gamma t} \left(|e^{-iM_H t} + e^{-iM_L t}|^2 + |e^{-iM_H t} - e^{-iM_L t}|^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2}e^{-\Gamma t} \left(1 + 1 + 2\text{Re}(e^{-iM_H t + iM_L t}) + 1 + 1 - 2\text{Re}(e^{-iM_H t + iM_L t}) \right) = 2e^{-\Gamma t}. \\ \mathcal{A}_{CP}(t) &= \frac{-2\text{Im}(\lambda)e^{-\Gamma t} \sin \Delta M t}{2e^{-\Gamma t}} = -\text{Im}(\lambda) \sin \Delta M t. \end{aligned}$$

Полученное выражение ненулевое, несмотря на то, что прямого СР-нарушения нет, СР-нарушения смешивания нет, осталась только интерференция. Второй интересный момент - $\mathcal{A}_{CP}(t)$ зависит от времени синусоидальным образом.

Лекция 8

Матричный элемент теоретико-полевого гамильтониана между состояниями мезона и антимезона

Предположения

В предыдущей лекции мы разобрали виды CP-нарушения. И увидели, что все зависит от двух величин. Если говорим о CP-нарушении смешивания, то это величины p и q , которые определяются из гамильтониана. Начнем с CP-нарушения в смешивании.

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} M - \frac{i}{2}\Gamma & M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12} \\ M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^* & M - \frac{i}{2}\Gamma \end{pmatrix}$$

$M - \frac{i}{2}\Gamma$ — матричный элемент теоретико-полевого гамильтониана между состояниями мезона и антимезона:

$$M - \frac{i}{2}\Gamma = \langle M | \hat{H} | \bar{M} \rangle.$$

Вычислим эту величину в квантовой теории поля Стандартной модели. Рассмотрим систему нейтральных каонов:

$$K^0 - \bar{K}^0 \text{ осцилляции.}$$

$(\bar{s}d) - (s\bar{d})$

Диаграмма Фейнмана представлена на рисунке 8.1.

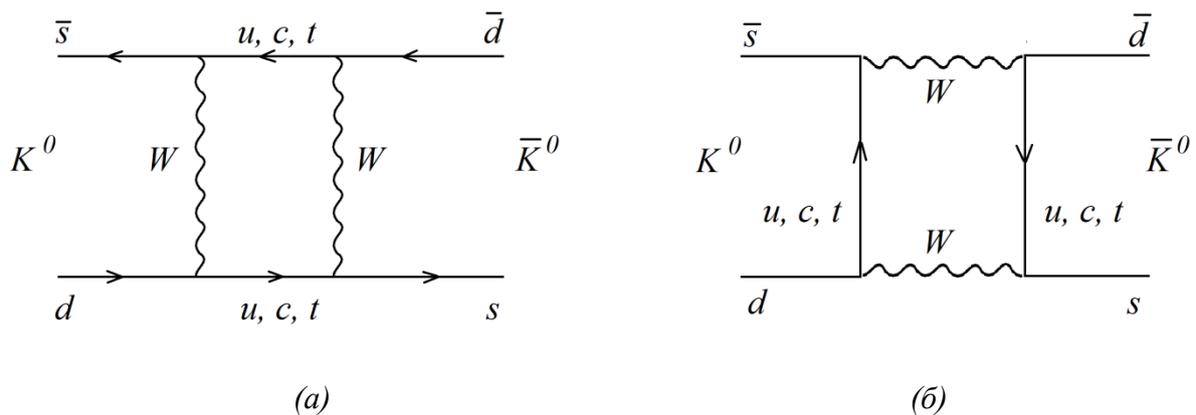


Рис. 8.1. Диаграммы Фейнмана перехода $K^0 \rightarrow \bar{K}^0$.

Задача посчитать эффективный гамильтониан этих диаграмм. В этом процессе странность меняется на 2: $\Delta S = 2$. M и \bar{M} - состояния, которые получаем в теории поля, то есть возникнет дополнительный множитель из-за релятивистской нормировки:

$$\langle M | \hat{H} | \bar{M} \rangle \rightarrow \frac{\langle M | \hat{H} | \bar{M} \rangle}{2M_K}$$

Упрощающие предположения:

- 1) Пренебрегаем внешними импульсами;
- 2) Оцениваем диаграммы в приближении Фермиевской теории.

С учетом предположений диаграммы Фейнмана (рис. 8.1) превращаются в диаграммы, представленные на рисунке 8.2.

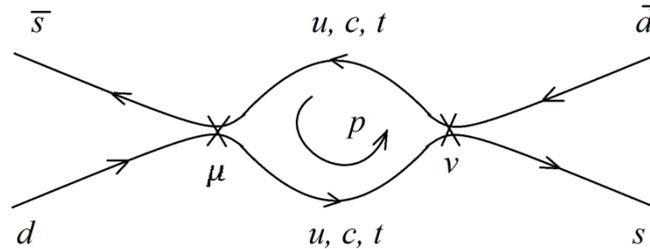


Рис. 8.2. Преобразованная диаграмма $K^0 \rightarrow \bar{K}^0$.

Эффективный лагранжиан и амплитуда

Эффективный лагранжиан:

$$\mathcal{L}_{\text{Ферми}} = -2\sqrt{2}G_F V_{ud} V_{us}^* \bar{u}_L \gamma^\mu d_L \bar{s}_L \gamma_\mu u_L + \dots$$

Амплитуда для такого процесса:

$$\begin{aligned} & (-i2\sqrt{2}G_F)^2 i^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \bar{s}_L \gamma^\mu \left[\frac{V_{us}^* V_{ud}}{\hat{p} - m_u} + \frac{V_{cs}^* V_{cd}}{\hat{p} - m_c} + \frac{V_{ts}^* V_{td}}{\hat{p} - m_t} \right] \gamma^\nu d_L \bar{s}_L \gamma_\nu \left[\frac{V_{us}^* V_{ud}}{\hat{p} - m_u} + \frac{V_{cs}^* V_{cd}}{\hat{p} - m_c} \right. \\ & \left. + \frac{V_{ts}^* V_{td}}{\hat{p} - m_t} \right] \gamma_\mu d_L. \end{aligned}$$

Воспользуемся унитарностью матрицы СКМ для данного набора элементов:

$$V_{us}^* V_{ud} + V_{cs}^* V_{cd} + V_{ts}^* V_{td} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{V_{us}^* V_{ud}}{\hat{p} - m_u} + \frac{V_{cs}^* V_{cd}}{\hat{p} - m_c} + \frac{V_{ts}^* V_{td}}{\hat{p} - m_t} = V_{cs}^* V_{cd} \left(\frac{1}{\hat{p} - m_c} - \frac{1}{\hat{p} - m_u} \right) + V_{ts}^* V_{td} \left(\frac{1}{\hat{p} - m_t} - \frac{1}{\hat{p} - m_u} \right).$$

Пренебрежем массой u-кварка по сравнению с c и t:

$$\begin{aligned} \frac{V_{us}^* V_{ud}}{\hat{p} - m_u} + \frac{V_{cs}^* V_{cd}}{\hat{p} - m_c} + \frac{V_{ts}^* V_{td}}{\hat{p} - m_t} &\approx V_{cs}^* V_{cd} \left(\frac{\hat{p} + m_c}{p^2 - m_c^2} - \frac{\hat{p}}{p^2} \right) + V_{ts}^* V_{td} \left(\frac{\hat{p} + m_t}{p^2 - m_t^2} - \frac{\hat{p}}{p^2} \right) \\ &= V_{cs}^* V_{cd} \left(\frac{m_c p^2 - m_c^2 \hat{p}}{p^2 - m_c^2} \right) + V_{ts}^* V_{td} \left(\frac{m_t p^2 - m_t^2 \hat{p}}{p^2 - m_t^2} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим фермионную структуру.

$$\frac{V_{us}^* V_{ud}}{\hat{p} - m_u} + \frac{V_{cs}^* V_{cd}}{\hat{p} - m_c} + \frac{V_{ts}^* V_{td}}{\hat{p} - m_t} = \bar{s}_L \gamma^\mu (m_c p^2 - m_c^2 \hat{p}) \gamma^v d_L.$$

Отсюда появляются две фермионные структуры:

$$\begin{aligned} \bar{s}_L \gamma^\mu \gamma^v d_L = 0 \quad (d_L = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}) \Rightarrow \\ \bar{s}_L \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^v d_L \neq 0 \end{aligned}$$

$$\bar{s}_L \gamma^\mu (m_c p^2 - m_c^2 \hat{p}) \gamma^v d_L = -m_c^2 p_\rho \bar{s}_L \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^v d_L.$$

Ответ для амплитуды:

$$\begin{aligned} 8G_F^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \bar{s}_L \gamma^\mu \left[V_{cs}^* V_{cd} \left(\frac{m_c^2 \hat{p}}{p^2 - m_c^2} \right) + V_{ts}^* V_{td} \left(\frac{m_t^2 \hat{p}}{p^2 - m_t^2} \right) \right] \gamma^v d_L \bar{s}_L \gamma_\nu \left[V_{cs}^* V_{cd} \left(\frac{m_c^2 \hat{p}}{p^2 - m_c^2} \right) \right. \\ \left. + V_{ts}^* V_{td} \left(\frac{m_t^2 \hat{p}}{p^2 - m_t^2} \right) \right] \gamma_\mu d_L \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\text{Фермионная часть} = \bar{s}_L \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^v d_L \cdot \bar{s}_L \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\mu d_L.$$

Домашнее задание:

Воспользоваться тождеством Фирца и проверить:

$$\bar{s}_L \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^v d_L \cdot \bar{s}_L \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\mu d_L = 4 \bar{s}_L \gamma^\mu d_L \bar{s}_L \gamma_\mu d_L.$$

Вычислим интегралы:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\rho p^\sigma}{[(p^2 - m_c^2) p^2]^2} &= \frac{1}{4} g^{\rho\sigma} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 (p^2 - m_c^2)^2} = -\frac{i}{4} g^{\rho\sigma} \int \frac{\frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} 1}{p_E^2 (p_E^2 + m_c^2)^2} \\ &= -\frac{i}{4} g^{\rho\sigma} \int \frac{2\pi p^3 dp}{16\pi^4 p^2 (p^2 + m_c^2)} = -\frac{i}{64\pi^2} g^{\rho\sigma} \int_0^\infty \frac{dp^2}{(p^2 + m_c^2)^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{i}{64\pi^2} g^{\rho\sigma} \frac{1}{p^2 + m_c^2} \Big|_0^\infty = -\frac{g^{\rho\sigma}}{64\pi^2 m_c^2} \\
 &\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\rho p^\sigma}{[(p^2 - m_t^2)p^2]^2} = -\frac{g^{\rho\sigma}}{64\pi^2 m_t^2} \\
 &\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\rho p^\sigma}{p^2(p^2 - m_c^2)(p^2 - m_t^2)} = -\frac{ig^{\rho\sigma}}{4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2(p^2 + m_c^2)(p^2 + m_t^2)} \\
 &= -\frac{ig^{\rho\sigma}}{64\pi^2} \int_0^\infty \frac{d p^2}{(p^2 + m_c^2)(p^2 + m_t^2)} = \\
 &= \left| \left| \frac{1}{(p^2 + m_c^2)(p^2 + m_t^2)} = \frac{1}{m_t^2 + m_c^2} \left(\frac{1}{p^2 + m_c^2} - \frac{1}{p^2 + m_t^2} \right) \right| \right| = \\
 &= -\frac{ig^{\rho\sigma}}{64\pi^2} \frac{1}{m_t^2 + m_c^2} \ln \frac{m_t^2}{m_c^2}.
 \end{aligned}$$

Воспользуемся тождеством Фирца и для амплитуды запишем:

$$\begin{aligned}
 &8G_F^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \bar{s}_L \gamma^\mu \left[V_{cs}^* V_{cd} \left(\frac{m_c^2 \hat{p}}{p^2 - m_c^2} \right) + V_{ts}^* V_{td} \left(\frac{m_t^2 \hat{p}}{p^2 - m_t^2} \right) \right] \gamma^\nu d_L \bar{s}_L \gamma_\nu \left[V_{cs}^* V_{cd} \left(\frac{m_c^2 \hat{p}}{p^2 - m_c^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + V_{ts}^* V_{td} \left(\frac{m_t^2 \hat{p}}{p^2 - m_t^2} \right) \right] \gamma_\mu d_L = \\
 &= -\frac{32G_F^2 i}{64\pi^2} (\bar{s}_L \gamma^\mu d_L)^2 \left[(V_{cs}^* V_{cd})^2 m_c^2 + (V_{ts}^* V_{td})^2 m_t^2 + 2(V_{cs}^* V_{cd})(V_{ts}^* V_{td}) m_c^2 m_t^2 \frac{\ln \frac{m_t^2}{m_c^2}}{m_t^2 - m_c^2} \right].
 \end{aligned}$$

Эффективный лагранжиан:

$$\mathcal{L}_{inf} = \alpha (\bar{s}_L \gamma^\mu d_L)^2.$$

При расчете по правилу Фейнмана получим следующую амплитуду:

$$\mathcal{A} = i\alpha 4$$

$$\mathcal{A}(p) = \mathcal{A}^{(0)} + p_\mu \mathcal{A}_\mu^{(1)} + p_\mu p_\nu \mathcal{A}_{\mu\nu}^{(2)} + \dots$$

↓

$$\mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}_{int}^{(0)} + \mathcal{L}_{int}^{(1)} + \dots = O(p^0) + O(p^1) + \dots$$

Вспомним, что мы рассматриваем 2 диаграммы, причем вклад второй такой же, как и первой. Поэтому необходимо учесть фактор 2. Соответственно числовая часть сокращается.

Лагранжиан взаимодействия, описывающий переходы с $\Delta S = 2$:

$$\mathcal{L}_{int}^{\Delta S=2} = -\frac{G_F^2}{4\pi^2} (\bar{s}_L \gamma^\mu d_L)^2 \left[(V_{cs}^* V_{cd})^2 m_c^2 + (V_{ts}^* V_{td})^2 m_t^2 + 2(V_{cs}^* V_{cd})(V_{ts}^* V_{td}) m_c^2 m_t^2 \frac{\ln \frac{m_t^2}{m_c^2}}{m_t^2 - m_c^2} \right].$$

Плотность гамильтониана взаимодействия:

$$\mathcal{H}_{int} = -\mathcal{L}_{int}.$$

В общем случае в лагранжиане взаимодействия вместо квадратов масс стоит некоторая функция:

$$\begin{aligned} m_c^2 &\rightarrow S(m_c^2, m_W^2), \\ m_t^2 &\rightarrow S(m_t^2, m_W^2), \\ \frac{m_c^2 m_t^2}{m_t^2 - m_c^2} \ln \frac{m_t^2}{m_c^2} &\rightarrow \tilde{S}(m_c^2, m_t^2, m_W^2). \end{aligned}$$

В пределе очень тяжелого W-бозона используются функции, записанные слева. При сравнимых массах поправки становятся значительными:

$$S(m_t^2, m_W^2) = 0.55 m_t^2.$$

Оценки для слагаемых лагранжиана

Итак, мы получили довольно громоздкий ответ. Вспомним структуру СКМ-матрицы. В ней есть малый параметр, и может так оказаться, что этот малый параметр сыграет так, что некоторые из членов окажутся доминирующими.

Матрица СКМ:

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda - iA^2\lambda^5\eta & 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Сравним три слагаемых лагранжиана взаимодействия:

$$(V_{cs}^* V_{cd})^2 = \left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right)^2 (-\lambda - iA^2\lambda^5\eta)^2 \approx \lambda^2 + 2iA^2\lambda^6\eta + \dots -$$

действительная часть подавлена как λ^2 , мнимая как λ^6 ;

$$(V_{ts}^* V_{td})^2 = (-A\lambda^2)^2 (A\lambda^3(1 - \rho - i\eta))^2 = A^4\lambda^{10}(1 - \rho - \eta)^2 -$$

подавлено как λ^{10} ;

$$(V_{cs}^* V_{cd})(V_{ts}^* V_{td}) \approx \left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right)(-\lambda)(-A\lambda^2)A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) \approx A^2\lambda^6(1 - \rho - i\eta) -$$

подавлено как λ^{10} .

При этом $m_t^2 > m_c^2$. Между первыми двумя членами лагранжиана возникает конкуренция. Проверим, какой член в ней выигрывает:

$$\frac{m_c^2}{m_t^2} \approx 5 \cdot 10^{-5}, \quad \lambda \approx 0.22 \Rightarrow$$

$$\lambda^8 \approx 5 \cdot 10^{-6} \Rightarrow$$

выигрывает первый член с с-кварком.

Последнее слагаемое $m_c^2\lambda^6$, первое слагаемое $m_c^2\lambda^2$, то есть первое слагаемое побеждает, если говорим о действительной части:

$$\text{Re } M_{12} \rightarrow \text{основной вклад } (V_{cs}^* V_{cd})^2 m_c^2.$$

Для мнимой части вклад первого слагаемого $m_c^2\lambda^6$, вклад второго $\lambda^{10}m_t^2$. Видно, что побеждает уже второе слагаемое, перекрестный член такого же порядка как и первый, следовательно:

$$\text{Im } M_{12} \rightarrow \text{основной вклад } (V_{ts}^* V_{td})^2 m_t^2.$$

Вычисление матричного элемента

Осталось вычислить матричный элемент.

$$M_{12} = \frac{1}{2m_K} \langle K^0 | H | \bar{K}^0 \rangle,$$

$$\langle K^0 | H | \bar{K}^0 \rangle = \langle K^0 | \bar{s}_L \gamma^\mu d_L \bar{s}_L \gamma_\mu d_L | \bar{K}^0 \rangle = \langle \bar{s}d | \bar{s}_L \gamma^\mu d_L \bar{s}_L \gamma_\mu d_L | s\bar{d} \rangle.$$

$$\psi \sim ab^+, \bar{\psi} \sim a^+b.$$

Если поле действительное:

$$\Phi \sim \int d^3k (ae^{ikx} + a^+e^{-ikx}).$$

Если поле комплексное, то есть два вещественных поля и операторы рождения частиц и античастиц:

$$\Phi \sim \int d^3k (ae^{ikx} + b^+e^{-ikx}),$$

$$\Phi^* \sim \int d^3k (a^+e^{ikx} + be^{-ikx}).$$

Следовательно, получаем:

$$\langle \bar{s}d | \bar{s}_L \gamma^\mu d_L \bar{s}_L \gamma_\mu d_L | s\bar{d} \rangle = 0.$$

Нетривиальное значение получается при переставлении местами K^0 и \bar{K}^0 :

$$\begin{aligned} \langle \bar{K}^0 | H | K^0 \rangle &= \langle \bar{K}^0 | \bar{s}_L \gamma^\mu d_L \bar{s}_L \gamma_\mu d_L | K^0 \rangle = \langle s\bar{d} | \bar{s}_L \gamma^\mu d_L \bar{s}_L \gamma_\mu d_L | s\bar{d} \rangle \approx \\ &\approx 2 \langle \bar{K}^0 | \bar{s}_L \gamma^\mu d_L | 0 \rangle \langle 0 | d_L \bar{s}_L \gamma_\mu | K^0 \rangle + 2 \frac{1}{3} \langle \bar{K}^0 | \bar{s}_L \gamma^\mu d_L | 0 \rangle \langle 0 | d_L \bar{s}_L \gamma_\mu | K^0 \rangle \dots \end{aligned}$$

Вычисление будет закончено на следующей лекции.

Лекция 9

Матричный элемент теоретико-полевого гамильтониана между состояниями мезона и антимезона. Часть 2. Применение к B -мезонам

Вычисление матричного элемента (продолжение)

На прошлой лекции мы вычислили эффективный лагранжиан, который описывает переходы странности на 2, переходы между каонами и антикаонами, и увидели следующее:

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = -\frac{G_F^2}{4\pi^2} [m_c^2 \text{Re}(V_{cs}^* V_{cd})^2 + im_t^2 \text{Im}(V_{ts}^* V_{td})^2] (\bar{s}_L \gamma^\mu d_L)^2.$$

Этот эффективный лагранжиан мы получили для диаграммы с рисунка 6.1 (а), стянув W -бозоны в точки (рис. 6.2). Это приближение не очень хорошо работает, потому что масса t -кварка сравнима с массой W -бозона. Поэтому необходимы безразмерные поправки:

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = -\frac{G_F^2}{4\pi^2} \left[m_c^2 \text{Re}(V_{cs}^* V_{cd})^2 \mathcal{S}\left(\frac{m_c^2}{m_W^2}\right) + im_t^2 \text{Im}(V_{ts}^* V_{td})^2 \mathcal{S}\left(\frac{m_t^2}{m_W^2}\right) \right] (\bar{s}_L \gamma^\mu d_L)^2 + h.c.$$

$h.c.$ – эрмитова сопряженная часть.

Из эффективного лагранжиана мы можем получить гамильтонианову плотность:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{эфф}} = -\mathcal{L}_{\text{эфф}}.$$

$$M_{12}^* = \frac{1}{2m_K} \langle \bar{K}^0 | \hat{\mathcal{H}}_{\text{эфф}} | K^0 \rangle.$$

В прошлый раз мы начали вычислять матричный элемент:

$$\langle \bar{K}^0 | \bar{s}_L \gamma^\mu d_L \bar{s}_L \gamma^\mu d_L | K^0 \rangle.$$

Будем использовать тот факт, что каоны – это псевдо голдстоуновские бозоны, которые рождаются аксиальным током:

$$\langle 0 | \bar{s} \gamma^\mu \gamma^5 d | K^0, p \rangle = ip^\mu f_K$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{K}^0 | H | K^0 \rangle &= \langle \bar{K}^0 | \bar{s}_L \gamma^\mu d_L \bar{s}_L \gamma_\mu d_L | K^0 \rangle = \langle s \bar{d} | \bar{s}_L \gamma^\mu d_L \bar{s}_L \gamma_\mu d_L | \bar{s} d \rangle = \\ &= \left| \langle \bar{s}_L^i \gamma^\mu d_{Lj} \bar{s}_L^j \gamma_\mu d_{Li} \rangle = \bar{s}_L^i \gamma^\mu d_{Lj} \bar{s}_L^j \gamma_\mu d_{Li} \right| \approx \\ &\approx 2 \langle \bar{K}^0 | \bar{s}_L \gamma^\mu d_L | 0 \rangle \langle 0 | d_L \bar{s}_L \gamma_\mu | K^0 \rangle + 2 \langle \bar{K}^0 | \bar{s}_L^i \gamma^\mu d_{Lj} | 0 \rangle \langle 0 | \bar{s}_L^j \gamma_\mu d_{Li} | K^0 \rangle = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\langle \bar{K}^0 | \bar{s}_L \gamma^\mu d_L | 0 \rangle \langle 0 | d_L \bar{s}_L \gamma_\mu | K^0 \rangle + 2 \frac{1}{3} \delta_j^i \langle \bar{K}^0 | \bar{s}_L \gamma^\mu d_L | 0 \rangle \frac{1}{3} \delta_i^j \langle 0 | \bar{s}_L \gamma_\mu d_L | K^0 \rangle = \\
 &= \frac{2}{4} i (p^\mu)^2 f_K^2 + \frac{2}{3} \frac{1}{4} (p^\mu)^2 f_K^2 = \frac{2}{3} m_K^2 f_K^2 \Rightarrow \\
 \text{Re} M_{12} &= \frac{1}{2m_K} \frac{2}{3} m_K^2 f_K^2 \frac{G_F^2}{4\pi^2} m_c^2 \text{Re}(V_{cs}^* V_{cd})^2 = \frac{G_F^2}{12\pi^2} f_K^2 m_K m_c^2 \text{Re}(V_{cs}^* V_{cd})^2.
 \end{aligned}$$

При диагонализации гамильтониана, описывающего систему мезон-антимезон, появлялись собственные значения с действительными и мнимыми частями. Действительные части собственных значений – массы, мнимые – ширины.

$$\Delta m_{LH} = 2 \text{Re} M_{12} = \frac{G_F^2}{6\pi^2} f_K^2 m_K m_c^2 \text{Re}(V_{cs}^* V_{cd})^2 -$$

оценка разности масс состояний нейтральных каонов.

Экспериментальное значение:

$$\frac{\Delta m_{LH}}{m_K} \approx 0.7 \cdot 10^{-15}.$$

Теоретическое:

$$\left(\frac{\Delta m_{LH}}{m_K} \right)_{\text{теор}} = \left| \begin{array}{l} f_K = 0.16 \text{ ГэВ} \\ m_K = 0.49 \text{ ГэВ} \\ m_c = 1.35 \text{ ГэВ} \\ \lambda \approx 0.22 \end{array} \right| = 1.87 \cdot 10^{-15}.$$

Экспериментальное значение от теоретического отличается примерно в 2 раза.

Посчитаем мнимую часть M_{12} и вычислим параметр ε , который отвечает за CP-нарушение.

$$\frac{p}{q} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} = 2 \frac{M_{12} - \frac{i}{2} \Gamma_{12}}{\Delta M - \frac{i}{2} \Delta \Gamma}.$$

Будем считать, что $\text{Im} \Gamma_{12} = 0 \Rightarrow$

$$\Delta M - \frac{i}{2} \Delta \Gamma = 2 \sqrt{\left(M_{12} - \frac{i}{2} \Gamma_{12} \right) \left(M_{12}^* - \frac{i}{2} \Gamma_{12}^* \right)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \sqrt{\left(\operatorname{Re} M_{12} + i \operatorname{Im} M_{12} - \frac{i}{2} \Gamma_{12} \right) \left(\operatorname{Re} M_{12} - i \operatorname{Im} M_{12} - \frac{i}{2} \Gamma_{12} \right)} = \\
 &= 2 \sqrt{\left(\operatorname{Re} M_{12} - \frac{i}{2} \Gamma_{12} \right)^2 + (\operatorname{Im} M_{12})^2} = |\operatorname{Im} M_{12} \ll \operatorname{Re} M_{12}, \Gamma_{12}| \\
 &\approx 2 \left(\operatorname{Re} M_{12} - \frac{i}{2} \Gamma_{12} \right) + O(\operatorname{Im} M_{12}) \\
 \frac{p}{q} &= 2 \frac{M_{12} - \frac{i}{2} \Gamma_{12}}{\Delta M - \frac{i}{2} \Delta \Gamma} = 2 \frac{\frac{1}{2} (\Delta M - \frac{i}{2} \Delta \Gamma) + i \operatorname{Im} M_{12}}{\Delta M - \frac{i}{2} \Delta \Gamma} = 1 + \frac{2i \operatorname{Im} M_{12}}{\Delta M - \frac{i}{2} \Delta \Gamma} \approx 1 + 2\varepsilon \Rightarrow \\
 \varepsilon &= \frac{i \operatorname{Im} M_{12}}{\Delta M - \frac{i}{2} \Delta \Gamma}
 \end{aligned}$$

Численное упрощение для каонов:

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta \Gamma}{2} \approx -\Delta M \Rightarrow \varepsilon &\approx \frac{i \operatorname{Im} M_{12}}{\Delta M (1+i)} = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}} \operatorname{Im} M_{12}}{\sqrt{2} \Delta M}. \\
 \operatorname{Im} M_{12} &= \frac{G_F^2}{12\pi^2} f_K^2 m_K m_t^2 \operatorname{Im}[(V_{ts}^* V_{td})^2] S\left(\frac{m_t^2}{m_W^2}\right) \Rightarrow \\
 \text{т. к. } S\left(\frac{m_t^2}{m_W^2}\right) &\approx 0.55 \Rightarrow \\
 |\varepsilon| &\approx 2 \cdot 10^{-3} -
 \end{aligned}$$

хорошо соответствует экспериментальным данным.

$\operatorname{Im} \Gamma_{12} = 0$. Объяснение

Разберемся, почему $\operatorname{Im} \Gamma_{12} = 0$.

Для диаграммы с рисунка 8.1 (а) мы оставили только высокоэнергетическую часть петли. Чтобы посчитать Γ_{12} , эту диаграмму нужно разрезать пополам, используя оптическую теорему.

Аналогичную диаграмму можно нарисовать и для нестабильной частицы (рис. 9.1)

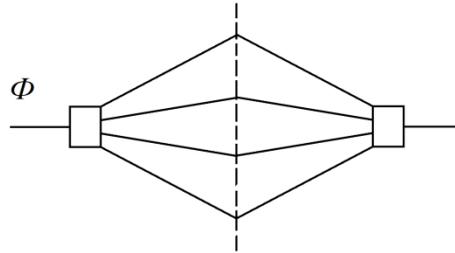


Рис. 9.1. Диаграмма для нестабильной частицы.

Для честного применения оптической теоремы необходимо подставить промежуточные состояния. В начале и в конце у нас адроны, а не кварки. Соответственно промежуточные состояния тоже не кварки. Так, необходимо нарисовать диаграмму в терминах пионов и каонов. Для упрощения будем считать, что распад происходит на кварковом уровне. При этом на массовую поверхность сажаем только те кварки, в которые могут распасться начальное и конечное состояния – u-кварки, которые легче каонов. И из всех трех диаграмм в Γ_{12} дает вклад только часть с u-кварком из-за того, что вклады с s- и t-кварками не подходят по закону сохранения энергии:

$$\Gamma_{12} \sim \text{Im} \left(\begin{array}{cccc} \bar{s} & \bar{u} & \bar{d} & \\ & \leftarrow & \leftarrow & \\ K^0 & W & W & \bar{K}^0 \\ & \uparrow & \uparrow & \\ d & \rightarrow & \rightarrow & s \end{array} \right)$$

Источник мнимости – матрицы СКМ:

$$\Gamma_{12} \sim (V_{us}^* V_{ud})^2.$$

Рассмотрев эти элементы, обнаружим, что они чисто действительные. Следовательно:

$$\text{Im} \Gamma_{12} = 0.$$

Оценки для B^0 мезона

Применим разработанную технику для B-мезонов.

Есть два типа B-мезонов (B^0 и B_s), для которых изучаются осцилляции:

$$B^0(\bar{b}, d), \bar{B}^0(b, \bar{d}); m_B \approx 5.28 \text{ ГэВ}; \tau_B \approx 1.5 \cdot 10^{-12} \text{ с};$$

Для расчета M_{12}, Γ_{12} для В-мезонов необходимо сделать то же самое, что и для каонов. Рассмотрим диаграмму Фейнмана, вначале и в конце вместо s-кварка поставим b-кварк (рис. 9.2). При этом вычисления аналогичны вычислениям для каонов, необходимо только в элементах матрицы СКМ заменить s-кварки на b-кварки.

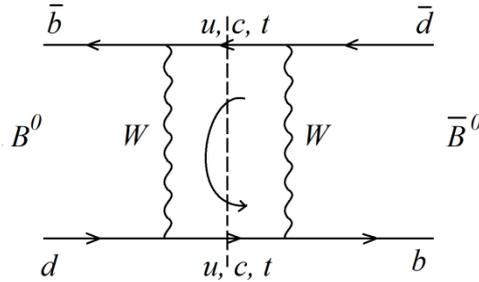


Рис. 9.2. Диаграмма перехода $B^0 \rightarrow \bar{B}^0$.

Выражение для амплитуды:

$$(-2\sqrt{2}iG_F)^2 i^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \bar{b}_L \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu d_L \bar{b}_L \gamma_\mu \gamma_\sigma \gamma_\nu d_L \left[V_{cd} V_{cb}^* \frac{m_c^2 p_\rho}{(p^2 - m_c^2) p^2} + V_{td} V_{tb}^* \frac{m_t^2 p_\rho}{(p^2 - m_t^2) p^2} \right] \left[V_{cd} V_{cb}^* \frac{m_c^2 p_\sigma}{(p^2 - m_c^2) p^2} + V_{td} V_{tb}^* \frac{m_t^2 p_\sigma}{(p^2 - m_t^2) p^2} \right].$$

Матрица СКМ:

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \lambda & \lambda & A \lambda^3 (\rho - i\eta) \\ -\lambda - i A^2 \lambda^5 \eta & 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 & A \lambda^2 \\ A \lambda^3 (1 - \rho - i\eta) & -A \lambda^2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(V_{cd} V_{cb}^*)^2 = (-\lambda - i A^2 \lambda^5 \eta)^2 (A \lambda^2)^2 = A^2 \lambda^4 + 2 A^4 \lambda^{10} \eta^2 i;$$

$$(V_{td} V_{tb}^*)^2 = (A \lambda^3 (1 - \rho - i\eta))^2 = A^2 \lambda^6 \# - i \# A^2 \lambda^6 \eta;$$

$$V_{cd} V_{cb}^* V_{td} V_{tb}^* = (-\lambda - i A^2 \lambda^5 \eta) (A \lambda^2) A \lambda^3 (1 - \rho - i\eta) = -A^2 \lambda^6 + i \# A^2 \lambda^6 \eta.$$

В этом случае всегда будет доминировать вклад с t-кварком как в действительной, так и в мнимой части.

Запишем ответ:

$$M_{12} = \frac{G_F^2}{12\pi^2} f_B^2 m_t^2 m_B (V_{td}^* V_{tb})^2 S\left(\frac{m_t^2}{m_W^2}\right),$$

$$S\left(\frac{m_t^2}{m_W^2}\right) \approx 0.55.$$

Оценим теперь Γ_{12} , воспользуемся той же диаграммой и той же логикой, а именно посадим промежуточные частицы на массовую поверхность.

Правила Фейнмана:

$$\frac{i(\hat{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{i\mathcal{P}(\hat{p} + m)}{p^2 - m^2} - \frac{i\pi i(\hat{p} + m)}{\delta(p^2 - m^2)}.$$

При вычислении Γ_{12} будем использовать диаграмму с рисунка 7.2. Внешний импульс равен импульсу покоящегося В-мезона. Промежуточные фермионы в петле будем сажать на массовую поверхность (u- и с-кварки). Фермионный пропагатор будем заменять на выражение:

$$\pi(\hat{p} + m)\delta(p^2 - m^2).$$

Оценка будет не аккуратна, поскольку в качестве промежуточных состояний мы должны подставлять реальные физические промежуточные частицы, на которые распадается В-мезон, а не кварки.

Преобразованная диаграмма изображена на рисунке 9.3.

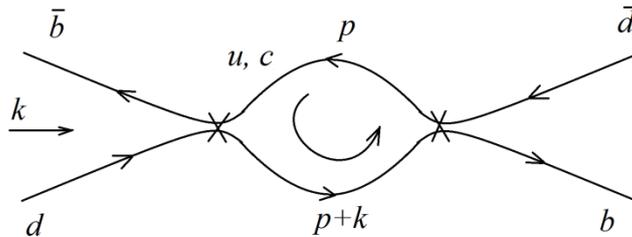


Рис. 9.3. Преобразованная диаграмма.

Вычислим соответствующую амплитуду, пренебрежем массами u- и с-кварков:

$$m_u, m_c \rightarrow 0 \Rightarrow \pi(\hat{p} + m)\delta(p^2 - m^2) \rightarrow \pi\hat{p}\delta(p^2) \Rightarrow$$

$$(-2\sqrt{2}G_F i)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \bar{b}_L \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu d_L \bar{b}_L \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\mu d_L \pi^2 p_\rho (p+k)_\sigma \delta(p^2) \delta((p+k)^2)$$

$$\cdot (V_{ud} V_{ub}^* + V_{cd} V_{cb}^*)^2$$

Домашнее задание:

Вычислить интеграл:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \pi^2 \delta(p^2) \delta((p+k)^2) p_\rho (p+k)_\sigma = b g^{\rho\sigma} + a k^\rho k^\sigma.$$

Считать в состоянии покоя:

$$k^\mu = (m_B, \vec{0}).$$

Ответ:

$$a = -\frac{1}{192\pi}, \quad b = -\frac{m_B^2}{384\pi}.$$

В результате для амплитуды получим следующее (с применением тождества Фирца):

$$\begin{aligned} & -8G_F^2 (\bar{b}_L \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu d_L) (\bar{b}_L \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\mu d_L) \left(-\frac{k^\rho k^\sigma}{192\pi} - \frac{m_B^2 g^{\rho\sigma}}{384\pi} \right) (V_{ud} V_{ub}^* + V_{cd} V_{cb}^*)^2 = \\ & = \left| \left(\bar{b}_L \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu d_L \right) (\bar{b}_L \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\mu d_L) = 4 \bar{b}_L \gamma^\rho d_L \bar{b}_L \gamma^\sigma d_L \right| \left| \begin{matrix} V_{ud} V_{ub}^* + V_{cd} V_{cb}^* = -V_{td} V_{tb}^* \end{matrix} \right| = \\ & = G_F^2 (\bar{b}_L \gamma^\rho d_L) (\bar{b}_L \gamma^\sigma d_L) \left(\frac{k^\rho k^\sigma}{6\pi} + \frac{m_B^2 g^{\rho\sigma}}{12\pi} \right) (V_{td} V_{tb}^*)^2. \end{aligned}$$

Из амплитуды восстановим эффективный лагранжиан, после этого рассчитаем матричный элемент $M_{12} - \frac{i}{2} \Gamma_{12} = \frac{1}{2m_B} \langle B^0 | H_{\text{эфф}} | \bar{B}^0 \rangle$.

Матричные элементы между состояниями В-мезонов и оператором $(\bar{b}_L \gamma^\rho d_L) (\bar{b}_L \gamma^\sigma d_L)$ предлагается оценить с использованием метода вакуумной вставки и найти следующее выражение:

$$\langle \bar{B}^0 | (\bar{b}_L \gamma^\rho d_L \bar{b}_L \gamma_\rho d_L) | B^0 \rangle = \frac{2}{3} f_B^2 m_B^2,$$

$$\langle \bar{B}^0 | (\bar{b}_L \hat{k} d_L \bar{b}_L \hat{k} d_L) | B^0 \rangle = \frac{5}{12} f_B^2 m_B^4.$$

Запишем ответ для Γ_{12} :

$$-\frac{(-i)G_F^2 (V_{td} V_{tb}^*)^2}{2m_B} \left[\frac{1}{6\pi} \frac{5}{12} f_B^2 m_B^4 + \frac{1}{12\pi} m_B^2 \frac{2}{3} f_B^2 m_B^2 \right] S \left(\frac{m_t^2}{m_W^2} \right) = \frac{iG_F^2}{8\pi} (V_{td} V_{tb}^*)^2 f_B^2 m_B^3.$$

При переходе от амплитуды к эффективному лагранжиану есть коэффициент $\frac{1}{4}$ симметричного фактора. Кроме того пропущен еще один коэффициент – диаграммы две, поэтому следует домножить на 2. В целом дополнительно появляется коэффициент $\frac{1}{2}$:

$$\frac{iG_F^2}{16\pi} (V_{td}V_{tb}^*)^2 f_B^2 m_B^3.$$

$$\Gamma_{12} = -\frac{G_F^2}{8\pi} (V_{td}V_{tb}^*)^2 f_B^2 m_B^3.$$

Если бы мы не пренебрегали массой с-кварка, то была бы поправка:

$$\Gamma_{12} = -\frac{G_F^2}{8\pi} (V_{td}V_{tb}^*)^2 f_B^2 m_B^3 \left[1 + O\left(\frac{m_c^2}{m_b^2}\right) V_{cd}^* V_{cb} V_{td}^* V_{tb} \right].$$

Итак, мы оценили Γ_{12} для системы B^0, \bar{B}^0 мезонов. В следующий раз оценим численно и обобщим на систему B_s -мезонов:

$$B_s(\bar{b}s), \quad \bar{B}_s(b\bar{s}).$$

Лекция 10

Сравнение систем нейтральных каонов, B_d и B_s мезонов и CP-нарушения в них

Оценки для B-мезонов

В прошлый раз мы закончили изучение параметров осцилляций дл каонов и перешли к изучению параметров осцилляций для B-мезонов.

Массы долгоживущих и короткоживущих каонов:

$$\left(\frac{\Delta m}{m}\right)_{\text{эксп}} \approx 0.7 \cdot 10^{-14};$$

$$\left(\frac{\Delta m}{m}\right)_{\text{теор}} \approx 0.35 \cdot 10^{-14} -$$

значение, записанное в предыдущей лекции, ошибочно. Теоретическое и экспериментальное значения отличаются в 2 раза. Основной источник ошибок – оценкк матричных элементов.

Вернемся к мезоном. Были получены следующие оценки для $B_d^0 - \bar{B}_d^0$:

$$M_{12} \approx \frac{G_F^2}{12\pi^2} f_B^2 m_t^2 m_B (V_{td}^* V_{tb})^2 S\left(\frac{m_t^2}{m_W^2}\right), \text{ где}$$

$$S\left(\frac{m_t^2}{m_W^2}\right) \approx 0.55.$$

Из диаграммы типа «box» (рис. 9.2) мы оценили ширину распада, сделав приближения:

$$\Gamma_{12} = -\frac{1}{8\pi} \sigma_F^2 f_B^2 m_B^3 (V_{td}^* V_{tb})^2.$$

$$\Delta m = 2\text{Re}M_{12}, \quad \Delta\Gamma = 2\text{Re}\Gamma_{12}.$$

CP-нарушение появляется тогда, когда $\text{Im}M_{12} \neq 0$ или $\text{Im}\Gamma_{12} \neq 0$.

Массы B-мезонов:

$$m_B \approx 5.28 \text{ ГэВ}, \quad \tau_B \approx 15 \cdot 10^{-12} \text{ с} \Rightarrow$$

$$\Delta m_{B_d} \sim 3.310^{-13} \text{ ГэВ} -$$

мало по сравнению с массой m_B .

$$\Delta\Gamma_{Bd} \approx 3 \cdot 10^{-15} \text{ ГэВ.}$$

То же самое можно проделать и для B_s -мезонов (вместо d-кварка s-кварк):

$$\begin{matrix} B_s & - & \bar{B}_s \\ \bar{b}s & & b\bar{s} \end{matrix}, \quad m_{B_s} \approx 5.37 \text{ ГэВ}, \quad \tau_{B_s} \approx 1.5 \cdot 10^{-12} \text{ с.}$$

Доминирующий вклад в случае M_{12} дает пропагатор с t-кварком (оценки аналогичны оценкам, сделанным на предыдущей лекции):

$$M_{12} \approx \frac{G_F^2}{12\pi^2} f_B^2 m_t^2 m_B (V_{ts}^* V_{tb})^2 S\left(\frac{m_t^2}{m_W^2}\right),$$

$$\Gamma_{12} = -\frac{1}{8\pi} \sigma_F^2 f_B^2 m_B^3 (V_{ts}^* V_{tb})^2.$$

Если подставить числа, то получатся следующие значения:

$$\Delta m_{B_s} \approx 1.2 \cdot 10^{-11} \text{ ГэВ,}$$

$$\Delta\Gamma_{B_s} \approx 5 \cdot 10^{-14} \text{ ГэВ.}$$

Сравнение нейтральных каонов, d- и s-мезонов

Сравним между собой три рассмотренные системы (нейтральные каоны, b- и s-мезоны). Δm отвечает за скорость осцилляций между мезоном и антимезоном, которые устроены как $\sin(\Delta m t)$. Время жизни Γ определяет, как долго мы сможем наблюдать эти осцилляции:

$$\tau_{osc} \sim \Delta m^{-1}.$$

Если $\Delta m \gg \Gamma$, то увидим много осцилляций. Если $\Delta m \ll \Gamma$, то частица распадается быстрее, чем происходит хотя бы одна осцилляция. И три рассмотренных ситуации качественно разные по отношению к этим параметрам, что позволяет изучать эти системы в разных режимах.

1) Каоны:

$$K^0 - \bar{K}^0 \Rightarrow \begin{matrix} \Delta m \approx 3.5 \cdot 10^{-15} \text{ ГэВ,} \\ \Gamma_{K_S} \sim 7 \cdot 10^{-15} \text{ ГэВ,} \quad \Gamma_{K_L} \sim 1.1 \cdot 10^{-17} \text{ ГэВ} \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Delta m \sim \Gamma \sim \Delta\Gamma, \quad \Delta m \ll \Gamma \Rightarrow$$

Осцилляции, о которых мы говорили, пронаблюдать нельзя.

2) B_d – мезоны:

$$B_d^0 - \bar{B}_d^0 \Rightarrow \begin{matrix} \Delta m \approx 3.4 \cdot 10^{-13} \text{ ГэВ}, \\ \Gamma \sim 3 \cdot 10^{-13} \text{ ГэВ}, \quad \Delta\Gamma \sim 3 \cdot 10^{-15} \text{ ГэВ} \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Delta\Gamma \ll \Gamma \sim \Delta m.$$

3) B_s – мезоны:

$$B_s^0 - \bar{B}_s^0 \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \Delta m \approx 1.2 \cdot 10^{-11} \text{ ГэВ}, \\ \Gamma \sim 3.4 \cdot 10^{-13} \text{ ГэВ}, \quad \Delta\Gamma \sim 5 \cdot 10^{-14} \text{ ГэВ} \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Delta\Gamma \ll \Gamma \ll \Delta m.$$

Если рассмотреть каждое мезонное состояние как резонанс, обладающий шириной, то в случае каонов K_S обладает широким резонансом и его центр – масса короткоживущего состояния. Ширина этого резонанса соответствует ширине частицы. Примерно на расстоянии ширины этого резонанса расположено долгоживущее состояние K_L системы каон-антикаон (рис. 10.1 (а)). В случае B_d -мезона есть один пик и рядом (порядка ширины) второй, ширины одинаковы (рис. 10.1 (б)). Для B_s ситуация другая. В этом случае будут два не пересекающихся между собой узких резонанса. В этой ситуации наблюдаются осцилляции (рис. 10.1 (в)).

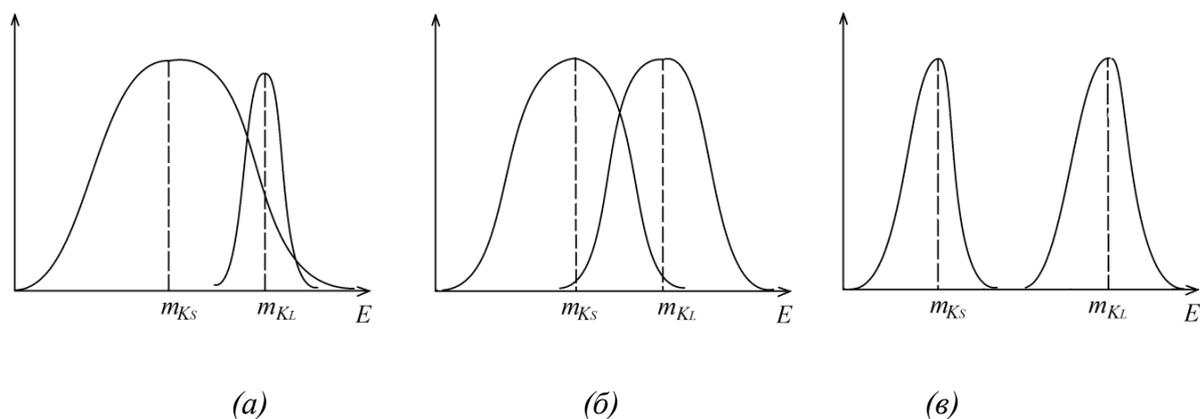


Рис. 10.1. Мезонное состояние как резонанс для каона (а), B_d -мезона (б), B_s -мезона (в).

CP-нарушение в смешивании в системе В-мезонов

Оценим CP-нарушение в смешивании в системе В-мезонов. Для этого необходимо посчитать параметр p/q . Вспомним, что собственные состояния (тяжелое и легкое) определяются следующими формулами:

$$\begin{cases} \psi_H = p_B \psi_{B^0} + q_B \psi_{\bar{B}^0} \\ \psi_L = p_B \psi_{B^0} - q_B \psi_{\bar{B}^0} \end{cases}$$

$$\frac{p_B}{q_B} = \sqrt{\frac{M_{12} - \frac{i}{2} \Gamma_{12}}{M_{12}^* - \frac{i}{2} \Gamma_{12}^*}}$$

За CP-нарушение в смешивании отвечает отличие $\left| \frac{p_B}{q_B} \right|$ от 1. Оценим $\frac{p_B}{q_B}$ для В-мезонов.

$$M_{12} \approx \frac{G_F^2}{12\pi^2} f_B^2 m_t^2 m_B (V_{td}^* V_{tb})^2 S\left(\frac{m_t^2}{m_W^2}\right),$$

$$\Gamma_{12} = -\frac{1}{8\pi} \sigma_F^2 f_B^2 m_B^3 (V_{td}^* V_{tb})^2.$$

$$\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}} \sim \frac{m_b^2}{m_t^2} \ll 1 \Rightarrow$$

$$\frac{p_B}{q_B} = \sqrt{\frac{M_{12} - \frac{i}{2} \Gamma_{12}}{M_{12}^* - \frac{i}{2} \Gamma_{12}^*}} = \sqrt{\frac{M_{12} \left(1 - \frac{i}{2} \frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right)}{M_{12}^* \left(1 - \frac{i}{2} \frac{\Gamma_{12}^*}{M_{12}^*}\right)}} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{p_B}{q_B} \right| = \left| \frac{1 - \frac{i}{2} \frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}}{1 - \frac{i}{2} \frac{\Gamma_{12}^*}{M_{12}^*}} \right| = \left| \sqrt{1 - \frac{i}{2} \left(\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}} - \frac{\Gamma_{12}^*}{M_{12}^*} \right)} \right| = \left| \sqrt{1 - \frac{i}{2} 2 \operatorname{Im} \frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}} \right| \approx 1 + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}.$$

$$\left| \frac{p_B}{q_B} \right| - 1 = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \frac{12\pi}{8} \frac{m_B^2}{m_t^2 S\left(\frac{m_t^2}{m_W^2}\right)}.$$

Если не пренебрегать массой с-кварка:

$$\Gamma_{12} = -\frac{1}{8\pi} \sigma_F^2 f_B^2 m_B^3 \left[(V_{td}^* V_{tb})^2 + \# \frac{m_c^2}{m_b^2} V_{cd}^* V_{cb} V_{td}^* V_{tb} \right].$$

С учетом этого вклада:

$$\left| \frac{p_B}{q_B} \right| - 1 = -\frac{1}{2} \text{Im} \frac{12\pi}{8} \frac{m_B^2}{m_t^2 S\left(\frac{m_t^2}{m_W^2}\right)} \left[1 + \# \frac{m_c^2 V_{cd}^* V_{cb}}{m_b^2 V_{td}^* V_{tb}} \right] \sim \frac{m_c^2}{m_t^2} \text{Im} \frac{V_{cd}^* V_{cb}}{V_{td}^* V_{tb}}.$$

Вспомним вид СКМ-матрицы и сделаем оценку:

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda - iA^2\lambda^5\eta & 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 - iA\lambda^4\eta & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{p_B}{q_B} \right| - 1 \sim \frac{m_c^2}{m_t^2} \text{Im} \frac{-\lambda \cdot A\lambda^2}{A\lambda^3(1 - \rho - i\eta)} \sim \frac{m_c^2}{m_t^2} -$$

дополнительной малости не возникает.

$$\left| \frac{p_B}{q_B} \right| - 1 \sim \frac{m_c^2}{m_t^2} \sim 4 \cdot 10^{-4}.$$

Для каонов эта величина была равна $2 \cdot 10^{-3}$. Чтобы измерить эту величину, нужно измерить асимметрию:

$$\mathcal{A}_{CP} = \frac{\Gamma(B^0(t) \rightarrow l^+ X) - \Gamma(\bar{B}^0(t) \rightarrow l^- X)}{\Gamma(B^0(t) \rightarrow l^+ X) + \Gamma(\bar{B}^0(t) \rightarrow l^- X)}.$$

Сколько потребуется распадов чтобы измерить эту асимметрию? Необходимо иметь порядка 10^8 В-мезонов. Текущие эксперименты набрали статистику только $3 \cdot 10^7$. Ожидается, что статистика будет набрана в экспериментах следующего поколения. Так, CP-нарушение смешивания для В-мезонов пока не измерено.

Кроме CP-нарушения в смешивании мы рассматривали прямое CP-нарушение и CP-нарушение в интерференции.

Прямое CP-нарушение

Прямое CP-нарушение будем обсуждать на примере системы каонов.

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1 + |\varepsilon|^2)}} [(1 + \varepsilon)|K^0\rangle + (1 - \varepsilon)|\bar{K}^0\rangle],$$

$$|K_H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1 + |\varepsilon|^2)}} [(1 + \varepsilon)|K^0\rangle - (1 - \varepsilon)|\bar{K}^0\rangle],$$

$$\text{при } \varepsilon = 0: \begin{cases} |K_L\rangle = |K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + \bar{K}^0\rangle) \\ |K_S\rangle = |K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - \bar{K}^0\rangle) \end{cases},$$

$$CP_{K_L} = -1.$$

Тем не менее, K_L может распадаться в 2 π -мезона из-за CP-нарушения в смешивании (в состоянии K_1^0 примешивается состояние K_2^0 с противоположной CP-четностью):

$$\begin{aligned} |K_1^0\rangle &\rightarrow CP = -1 \\ |K_2^0\rangle &\rightarrow CP = 1, \end{aligned}$$

Даже если $\varepsilon = 0$, то K_1^0 мог бы распадаться в 2 π -мезона:

$$\mathcal{A}(K_1^0 \rightarrow 2\pi) \neq 0 - \text{прямое } CP - \text{нарушение.}$$

Рассмотрим следующие соотношения:

$$\alpha = \frac{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^+\pi^-)}{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^0\pi^0)}, \quad \beta = \frac{\Gamma(K_S \rightarrow \pi^+\pi^-)}{\Gamma(K_S \rightarrow \pi^0\pi^0)}.$$

Пусть нет прямого CP-нарушения, единственный источник CP-нарушения – параметр ε . Тогда:

$$\begin{aligned} &K_2^0 \rightarrow 2\pi \Rightarrow \\ &K_1^0 \rightarrow 2\pi \Rightarrow \\ \alpha &= \frac{|\varepsilon|^2 |\mathcal{A}(K_2^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)|^2}{|\varepsilon|^2 |\mathcal{A}(K_2^0 \rightarrow \pi^0\pi^0)|^2}, \\ \beta &= \frac{\# |\mathcal{A}(K_2^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)|^2}{\# |\mathcal{A}(K_2^0 \rightarrow \pi^0\pi^0)|^2} \Rightarrow \\ &\alpha = \beta. \end{aligned}$$

Таким образом, $\alpha \neq \beta$ свидетельствует о наличии прямого CP-нарушения.

При наличии прямого CP-нарушения экспериментально:

$$\eta_{\pm} = \frac{\mathcal{A}(K_L \rightarrow \pi^+\pi^-)}{\mathcal{A}(K_S \rightarrow \pi^+\pi^-)},$$

$$\eta_{00} = \frac{\mathcal{A}(K_L \rightarrow \pi^0\pi^0)}{\mathcal{A}(K_S \rightarrow \pi^0\pi^0)}$$

$$K \rightarrow 2\pi \rightarrow I = 0 \text{ или } 2 \Rightarrow$$

Есть две независимые амплитуды распада в состояния с изоспинами 0 (I_0) и 2 (I_2).

Пусть:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(K^0 \rightarrow \pi\pi(I)) &=_{out} \langle \pi\pi(I) | K^0 \rangle_m = \\ &= \mathcal{A}_1 \left(\begin{array}{c} \text{слабое рассеяние} \\ \bar{s} \rightarrow \bar{d} \end{array} \right) \cdot \mathcal{A}_2 \left(\begin{array}{c} \text{сильное рассеяние } e^{i\delta_I} \\ \pi\pi \end{array} \right) = A_I \cdot e^{i\delta_I}, \text{ где} \end{aligned}$$

$$A_I = \mathcal{A}_1, \quad e^{i\delta_I} = \mathcal{A}_2.$$

$$\mathcal{A}(\bar{K}^0 \rightarrow \pi\pi(I)) = -A_I^* \cdot e^{i\delta_I}.$$

Домашнее задание:

- 1) Покажите, что если нет прямого CP-нарушения, то:

$$\eta_{\pm} = \eta_{00} = \varepsilon.$$

- 2) Покажите, что:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |\pi^+\pi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |\pi\pi(I=2)\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi\pi(I=0)\rangle,$$

$$|\pi^0\pi^0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi\pi(I=2)\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\pi\pi(I=0)\rangle.$$

Состояние всегда можно умножить на некоторые фазы. Соответственно всегда фазы можно выбрать так, что:

$$\delta_0 = 0 -$$

соглашение о выборе фаз. В таком случае нетривиальной фазой будет только δ_2 .

Посчитаем η_{+-} :

$$\eta_{\pm} = \frac{\mathcal{A}(K_L \rightarrow \pi^+\pi^-)}{\mathcal{A}(K_S \rightarrow \pi^+\pi^-)} = \frac{(1+\varepsilon)\mathcal{A}(K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) + (1-\varepsilon)\mathcal{A}(\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)}{(1+\varepsilon)\mathcal{A}(K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) - (1-\varepsilon)\mathcal{A}(\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)} =$$

$$\begin{aligned}
 & (1 + \varepsilon)[\mathcal{A}(K^0 \rightarrow \pi\pi(I = 2)) + \sqrt{2}\mathcal{A}(K^0 \rightarrow \pi\pi(I = 0))] + (1 - \varepsilon)[K^0 \rightarrow \bar{K}^0] \\
 = & \frac{(1 + \varepsilon)[\mathcal{A}(K^0 \rightarrow \pi\pi(I = 2)) + \sqrt{2}\mathcal{A}(K^0 \rightarrow \pi\pi(I = 0))] + (1 - \varepsilon)[K^0 \rightarrow \bar{K}^0]}{(1 + \varepsilon)[\mathcal{A}(K^0 \rightarrow \pi\pi(I = 2)) + \sqrt{2}\mathcal{A}(K^0 \rightarrow \pi\pi(I = 0))] - (1 - \varepsilon)[K^0 \rightarrow \bar{K}^0]} = \\
 = & \frac{(1 + \varepsilon)[\mathcal{A}_2 e^{i\delta_2} + \sqrt{2}\mathcal{A}_0] + (1 - \varepsilon)[- \mathcal{A}_2^* e^{i\delta_2} - \sqrt{2}\mathcal{A}_0^*]}{(1 + \varepsilon)[\mathcal{A}_2 e^{i\delta_2} + \sqrt{2}\mathcal{A}_0] - (1 - \varepsilon)[- \mathcal{A}_2^* e^{i\delta_2} - \sqrt{2}\mathcal{A}_0^*]}.
 \end{aligned}$$

Пусть:

- 1) $Im\mathcal{A}_0 = 0$ - важна относительная фаза;
- 2) $\mathcal{A}_2 = Re\mathcal{A}_2 + iIm\mathcal{A}_2$,
 $\mathcal{A}_2^* = Re\mathcal{A}_2 - iIm\mathcal{A}_2$;
- 3) $\mathcal{A}_0 - \Delta I = \frac{1}{2}$,
 $\mathcal{A}_2 - \Delta I = \frac{3}{2}$.

Отношение амплитуд – малая величина:

$$\left| \frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_0} \right| \sim \frac{1}{20}.$$

Лекция 11

CP-нарушения в системах нейтральных каонов и В-мезонов

Прямое CP-нарушение

В прошлый раз мы закончили говорить про CP-нарушение в смешивании в В-мезонах и начали говорить про прямое CP-нарушение. Закончим это рассуждение:

$$\eta_{+-} = \frac{\mathcal{A}(K_L \rightarrow \pi^+\pi^-)}{\mathcal{A}(K_S \rightarrow \pi^+\pi^-)}$$

Поскольку K_L и K_S являются суперпозицией K^0 и \bar{K}^0 и определены амплитуды распада каона в два пиона с определенным изоспином:

$$\mathcal{A}(K_0 \rightarrow \pi\pi(I)) = A_I e^{i\delta_I}, \quad I = 0, 2, \quad \delta_0 = 0, \quad \text{Im}A_0 = 0.$$

Также была дано задание связать двухпионное состояние с определенным изоспином с зарядовыми состояниями пионов. В результате мы получили следующее соотношение:

$$\eta_{+-} = \frac{(1 + \varepsilon)(A_2 e^{i\delta_2} + \sqrt{2}A_0 e^{i\delta_0}) + (1 - \varepsilon)(-A_2^* e^{i\delta_2} - \sqrt{2}A_0 e^{i\delta_0})}{(1 + \varepsilon)(A_2 e^{i\delta_2} + \sqrt{2}A_0 e^{i\delta_0}) - (1 - \varepsilon)(-A_2^* e^{i\delta_2} - \sqrt{2}A_0 e^{i\delta_0})} \Rightarrow$$

разложим выражение по параметру малости $\left|\frac{A_2}{A_0}\right| \sim \frac{1}{20}$:

$$\begin{aligned} \eta_{+-} &= \frac{(1 + \varepsilon)(A_2 e^{i\delta_2} + \sqrt{2}A_0) + (1 - \varepsilon)(-A_2^* e^{i\delta_2} - \sqrt{2}A_0)}{(1 + \varepsilon)(A_2 e^{i\delta_2} + \sqrt{2}A_0) - (1 - \varepsilon)(-A_2^* e^{i\delta_2} - \sqrt{2}A_0)} = \\ &= \left| |A_2 = \text{Re}A_2 + i\text{Im}A_2| \right| = \\ &= \frac{(1 + \varepsilon)[(\text{Re}A_2 + i\text{Im}A_2)e^{i\delta_2} + \sqrt{2}A_0] + (1 - \varepsilon)[-(\text{Re}A_2 - i\text{Im}A_2)e^{i\delta_2} - \sqrt{2}A_0]}{(1 + \varepsilon)[(\text{Re}A_2 + i\text{Im}A_2)e^{i\delta_2} + \sqrt{2}A_0] - (1 - \varepsilon)[-(\text{Re}A_2 - i\text{Im}A_2)e^{i\delta_2} - \sqrt{2}A_0]} = \\ &= \frac{e^{i\delta_2}(2\varepsilon\text{Re}A_2 + 2i\text{Im}A_2) + 2\sqrt{2}\varepsilon A_0}{e^{i\delta_2}(2\text{Re}A_2 + 2\varepsilon i\text{Im}A_2) + 2\sqrt{2}A_0} = \frac{\varepsilon + e^{i\delta_2} \left(\varepsilon \frac{\text{Re}A_2}{\sqrt{2}A_0} + i \frac{\text{Im}A_2}{\sqrt{2}A_0} \right)}{1 + e^{i\delta_2} \left(\frac{\text{Re}A_2}{\sqrt{2}A_0} + i\varepsilon \frac{\text{Im}A_2}{\sqrt{2}A_0} \right)} \approx \\ &\approx \left(\varepsilon + e^{i\delta_2} \left(\varepsilon \frac{\text{Re}A_2}{\sqrt{2}A_0} + i \frac{\text{Im}A_2}{\sqrt{2}A_0} \right) \left(1 - e^{i\delta_2} + i\varepsilon \frac{\text{Im}A_2}{\sqrt{2}A_0} \right) \right) \approx \\ &\approx \varepsilon + e^{i\delta_2} \left(\varepsilon \frac{\text{Re}A_2}{\sqrt{2}A_0} + i \frac{\text{Im}A_2}{\sqrt{2}A_0} - \varepsilon \frac{\text{Re}A_2}{\sqrt{2}A_0} - i\varepsilon^2 \frac{\text{Im}A_2}{\sqrt{2}A_0} \right) = \|\varepsilon \approx 2 \cdot 10^{-3}\| = \end{aligned}$$

$$= \varepsilon + i \frac{\text{Im}A_2}{\sqrt{2}A_0} e^{i\delta_2} = \varepsilon + \varepsilon'.$$

Теперь если проведем вычисления для величины η_{00} с теми же выкладками и приближениями, то получим:

$$\eta_{00} = \frac{\mathcal{A}(K_L \rightarrow \pi^0 \pi^0)}{\mathcal{A}(K_S \rightarrow \pi^0 \pi^0)} \approx \varepsilon - 2\varepsilon'.$$

Так, $\eta_{00} \neq \eta_{+-}$, если $\varepsilon' \neq 0$ ($A_2 \neq 0$). A_2 действительно отлична от нуля, это амплитуда, которая отвечает за переход s в d , за распад каона с изменением изоспина $3/2$. Часть этой амплитуды мы уже считали и использовали для вычисления распада $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$. Но если вспомним то вычисление, то увидим, что комбинация элементов матрицы СКМ оператора O_4 была чисто действительной. Так, основной вклад в A_2 входит из диаграмм типа «пингвин».

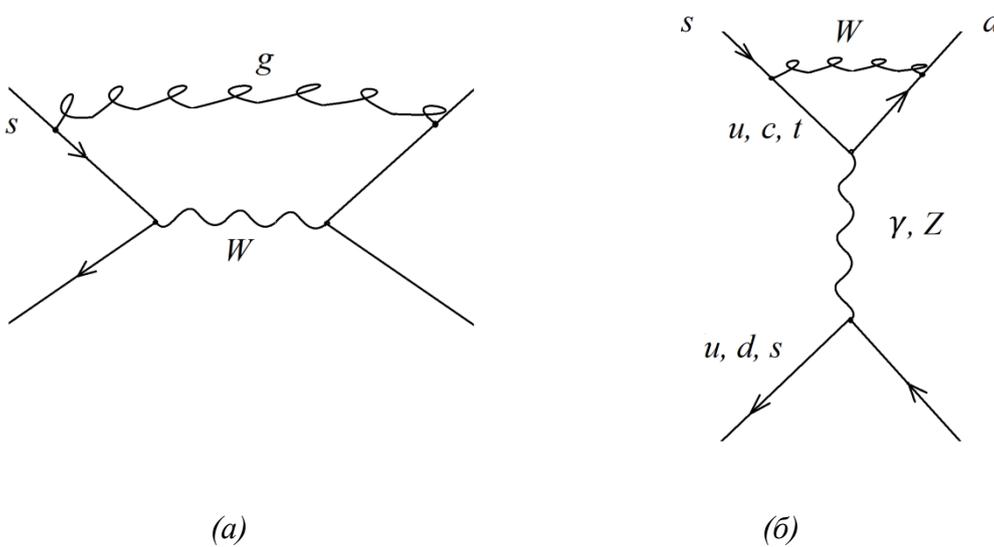


Рис. 11.1. Диаграмма древесного уровня (а) и диаграмма типа «пингвин» (б).

К древесному ответу от интегрирования W -бозона возникает поправка, которая является другим оператором, отличным от оператора древесного уровня (рис. 11.1 (а)). Это приводит к распадам с изменением изоспина на $3/2$. Но комбинация получается чисто действительной. Основной вклад приходит из электрослабой диаграммы типа «пингвин» (рис. 11.1 (б)). При интегрировании по петле возникает следующее выражение:

$$A_2 \sim \# \frac{G_F \alpha}{4\pi} \left[V_{us} V_{ud}^* f \left(\frac{m_u^2}{m_W^2} \right) + V_{cs} V_{cd}^* f \left(\frac{m_c^2}{m_W^2} \right) + V_{ts} V_{td}^* f \left(\frac{m_t^2}{m_W^2} \right) \right] =$$

$$= \left| |V_{us}V_{ud}^* \approx \lambda; V_{cs}V_{cd}^* \approx -\lambda(1 + iA^2\lambda^4\eta); V_{ts}V_{td}^* \approx -A\lambda^2(1 - \rho - i\eta)(1 + i\lambda^2\eta)| \right| \Rightarrow$$

$$\text{Im}A_2 \sim \frac{G_F}{4\pi} \alpha A^2 \lambda^5 \eta.$$

Численно:

$$\text{Re} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \approx 1.66 \cdot 10^{-3}.$$

То есть эффект прямого CP-нарушения еще более подавлен. До сих пор выходя работы по уточнению ε' .

CP-нарушение в интерференции

CP-нарушение в смешивании в системе B-мезонов очень маленькое (на прошлой лекции численно оценивали отношение p/q) и требует большой статистики. Зато есть CP-нарушение в интерференции (рис. 11.2).

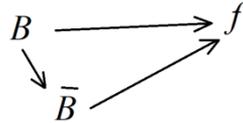


Рис. 11.2. CP-нарушение в интерференции.

Сейчас будем говорить о системе кварк-антикварк. В обсуждении нам потребуются некоторые квантовые числа.

- 1) Пусть есть система из частицы и античастицы со спином $s = 0$. Эта система находится в состоянии с орбитальным моментом l . У этого состояния четность $P = (-1)^l$. Волновая функция такого состояния должна быть симметрична относительно перестановки бозонов:

$$CP = 1 \Rightarrow C(-1)^l = 1 \Rightarrow C = (-1)^l = 1.$$

- 2) Пусть есть система из двух фермионов со спинами $s = \frac{1}{2}$, система кварк-антикварк $q\bar{q}$, орбитальный момент l . Система находится в состоянии с полным спином J . Такая система должна быть симметрична относительно перестановки фермионов:

$$P = (-1)^{l+1} \Rightarrow PCS = (-1)^l C (-1)^{J+1} = -1 \Rightarrow C = (-1)^{J+l}.$$

Рассмотрим теперь связанное состояние $c\bar{c}$:

$$\eta_c, \quad 1s, \quad J = 0;$$

$$J/\psi, \quad 1s, \quad J = 1.$$

Посчитаем их квантовые числа. Квантовые числа обычно характеризуют величиной:

$$J^{PC}.$$

$$\eta_c, \quad 1s, \quad J = 0 \Rightarrow J^{PC} = 0^{-+};$$

$$J/\psi, \quad 1s, \quad J = 1 \Rightarrow J^{PC} = 1^{--}.$$

Распад $B^0 \rightarrow J/\psi K_S^0$

Рассмотрим распад $B^0(\bar{B}^0) \rightarrow J/\psi K_S^0$. Пренебрегая CP-нарушением в каонах, спросим, какую CP-четность имеет конечное состояние:

$$CP(J/\psi) = +1, \quad CP(K_S^0) = +1.$$

$$B^0(\bar{B}^0): J = 0 \Rightarrow$$

чтобы сохранялся орбитальный момент, распад должен происходить как минимум в P-волне. Это означает, что пространственная волновая функция конечного состояния не может быть симметричной. То есть P-четность конечного состояния:

$$P = (-1)^l = ||l = 1|| = -1.$$

Полная CP-четность конечного состояния:

$$CP = -1.$$

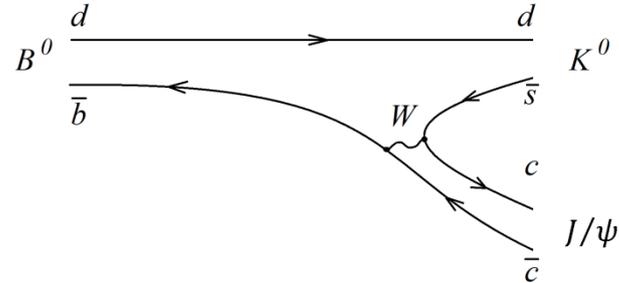
Так, мы пренебрегли CP-нарушением в системе каонов.

Рассмотрим, как на кварковом уровне выглядит распад. Диаграммы представлены на рисунке 11.3. Можно изобразить древесную диаграмму (рис. 11.3 (а)). Помимо древесной диаграммы можно нарисовать петлевую диаграмму, которая обусловлена диаграммой типа «пингвин» (рис. 11.3 (б)). Нас будут интересовать мнимости, которые приходят из CP-нарушающей фазы. На древесном уровне:

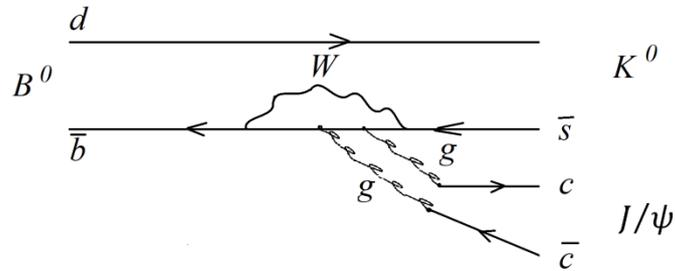
$$\mathcal{A}_{tree} = V_{cs} V_{cb}^* \mathcal{A}_{cc},$$

\mathcal{A}_{cc} — диаграмма, которая возникает из-за заряженных токов. Таким образом, мы запараметризовали древесный вклад. Петлевой вклад устроен следующим образом:

$$\mathcal{A}_{loop} = V_{us}V_{ub}^* \mathcal{A}_p \left(\frac{m_u^2}{m_W^2} \right) + V_{cs}V_{cb}^* \mathcal{A}_p(m_c) + V_{ts}V_{tb}^* \mathcal{A}_p(m_t).$$



(a)



(б)

Рис. 11.3. Древесная диаграмма (a) и петлевая диаграмма (б).

Вспомним, как связаны между собой K_S и K_L :

$$\begin{cases} K_S = p_k K^0 - q_k \bar{K}^0 \\ K_L = p_k K^0 + q_k \bar{K}^0 \end{cases} \Rightarrow K^0 = \frac{1}{2p_k} (K_S + K_L), \quad \bar{K}^0 = \frac{1}{2q_k} (K_L - K_S) \Rightarrow$$

$$\mathcal{A}(B^0 \rightarrow J/\psi K_S) = \left(V_{cs}V_{cb}^* \mathcal{A}_{cc} + V_{us}V_{ub}^* \mathcal{A}_p(m_u) + V_{ts}V_{tb}^* \mathcal{A}_p(m_t) \right) \cdot \frac{1}{2p_k} =$$

$$= \left| V_{ts}V_{tb}^* = -V_{us}V_{ub}^* - V_{cs}V_{cb}^* \right| =$$

$$= \frac{1}{2p_k} \left(V_{us}V_{ub}^* \left(\mathcal{A}_p(m_u) - \mathcal{A}_p(m_t) \right) + V_{cs}V_{cb}^* \left(\mathcal{A}_{cc} + \mathcal{A}_p(m_c) - \mathcal{A}_p(m_t) \right) \right).$$

Определим доминирующий вклад:

$$V_{us}V_{ub}^* \approx A\lambda^4(\rho - i\eta), \quad V_{cs}V_{cb}^* = A\lambda^2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) \Rightarrow$$

в первом приближении пренебрежем первой частью:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2p_k} \left(V_{us}V_{ub}^* \left(\mathcal{A}_p(m_u) - \mathcal{A}_p(m_t) \right) + V_{cs}V_{cb}^* \left(\mathcal{A}_{cc} + \mathcal{A}_p(m_c) - \mathcal{A}_p(m_t) \right) \right) \\ & \approx \frac{1}{2p_k} V_{cs}V_{cb}^* \left(\mathcal{A}_{cc} + \mathcal{A}_p(m_c) - \mathcal{A}_p(m_t) \right) - \end{aligned}$$

CP-фаза вынеслась как общий множитель.

$$\lambda = \frac{A_f p}{A_f q}.$$

Распад $\bar{B}^0 \rightarrow J/\psi K_S^0$

Проведем те же операции для CP-сопряженного процесса.

$$\bar{\mathcal{A}}(\bar{B}^0 \rightarrow J/\psi K_S) = V_{cs}^*V_{cb} \left(\mathcal{A}_{cc} + \mathcal{A}_p(m_c) - \mathcal{A}_p(m_t) \right) (-1).$$

$$\lambda = \frac{q_B}{p_B} \cdot \frac{\bar{A}_f}{A_f} = \frac{q_B}{p_B} \cdot \frac{V_{cs}^*V_{cb}}{V_{cs}V_{cb}^*} \cdot \frac{p_k}{q_k}.$$

Так, все элементы, которые мы не умеем рассчитывать, сократились. Величина, от которой будет зависеть CP-нарушение в смешивании, может быть выражена через элементы матрицы СКМ. Осталось вспомнить, чему будут равны отношения p и q для систем каонов и B -мезонов:

$$\begin{aligned} \frac{p_k}{q_k} & \approx \frac{V_{cd}^*V_{cs}}{V_{cd}V_{cs}^*}, & \frac{q_B}{p_B} & \approx \frac{V_{td}^*V_{tb}}{V_{td}V_{tb}^*} \Rightarrow \\ \lambda & = \frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{td}^*V_{tb}} \cdot \frac{V_{cs}^*V_{cb}}{V_{cs}V_{cb}^*} \cdot \frac{V_{cd}^*V_{cs}}{V_{cd}V_{cs}^*} = \frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{td}^*V_{tb}} \cdot \frac{V_{cb}V_{cd}^*}{V_{cb}^*V_{cd}}. \end{aligned}$$

Вспомним про унитарный треугольник:

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} + 1 + \frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} = 0.$$

Изображение на комплексной плоскости приведено на рисунке 11.4.

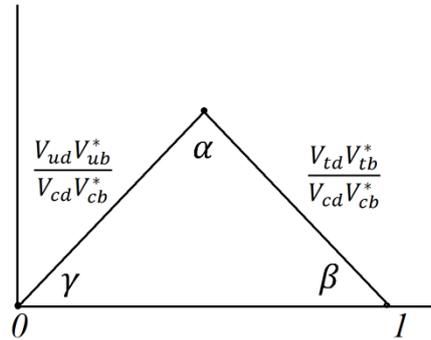


Рис. 11.4. Унитарный треугольник на комплексной плоскости.

$$\lambda = \frac{V_{td} V_{tb}^*}{V_{td}^* V_{tb}} \cdot \frac{V_{cb} V_{cd}^*}{V_{cb}^* V_{cd}} = \frac{\left(\frac{V_{td} V_{tb}^*}{V_{cd} V_{cb}^*} \right)}{\left(\frac{V_{td}^* V_{tb}}{V_{cd}^* V_{cb}} \right)} = \rho e^{i(\pi - \beta)} = e^{-2i\beta}.$$

Эта величина входит в CP-нарушающую асимметрию:

$$\mathcal{A}_{CP}(t) = \frac{\Gamma(B^0(t) \rightarrow f) - \Gamma(\bar{B}^0(t) \rightarrow f)}{\Gamma(B^0(t) \rightarrow f) + \Gamma(\bar{B}^0(t) \rightarrow f)} = \left| |\Gamma_L \approx \Gamma_S| \right| = \text{Im} \lambda \sin \Delta m \cdot t.$$

Измеряя CP-нарушение, измеряем угол треугольника с рисунка 9.4.

Измерения

Кратко опишем, как происходит измерение зависящей от времени CP-нарушающей асимметрии. Это не тривиальная задача. Для нее строят специальные асимметричные В-фабрики.

$$Br(B^0 \rightarrow J/\psi K_S) \approx 6 \cdot 10^{-4}$$

$$Br(J/\psi \rightarrow l^+ l^-) \approx 0.06$$

$$Br(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-) \approx 0.69$$

Так, вероятность зарегистрировать распад:

$$P \approx 5 \cdot 10^{-4} \cdot 0.06 \cdot 0.69 \approx 2 \cdot 10^{-5} -$$

малая величина. Таким образом, нужна большая статистика (для этого строят В-фабрики).

Кроме того сложность составляет отличить распад $B^0(t) \rightarrow f$ от $\bar{B}^0(t) \rightarrow f$, поскольку конечное состояние одинаково. Во-первых, необходимо уметь различать B^0 и \bar{B}^0 . Они различаются по распаду в лептоны:

$$B^0 \rightarrow l^+ \nu_e \quad (Br \approx 10\%), \quad \bar{B}^0 \rightarrow l^- \bar{\nu}_e \quad (Br \approx 10\%).$$

Однако поле таких распадов невозможно регистрировать $\mathcal{A}_{CP}(t)$. Общая идея заключается в том, чтобы рождал парю B^0 и \bar{B}^0 , сталкиваются e^+e^- , рождается связанное состояние $B^0\bar{B}^0, \gamma(4s)$ – самое легкое состояние, которое может

распасться на $B^0\bar{B}^0, m_\gamma \approx 10.579$ ГэВ:

$$e^+e^- \rightarrow \gamma(4s) \begin{cases} \nearrow & B^0\bar{B}^0 \\ \rightarrow & B^+B^- \\ \searrow & \text{ост. моды} \\ \rightarrow & B_S^0\bar{B}_S^0 \end{cases}$$

Таким образом, в таких экспериментах сначала рождается пара $B^0\bar{B}^0$. Один из этих мезонов распадается по лептонному каналу. Регистрируя заряд лептона, можем определить, какой мезон распался. Далее регистрируется распад другого, оставшегося мезона.

Лекция 12

Глубокое неупругое рассеяние

CP-нарушения в интерференции. Измерения

В прошлый раз мы обсудили прямое CP-нарушение и CP-нарушение в интерференции в системе B-мезонов. Закончим обсуждение экспериментального измерения CP-нарушения в смешивании в системе B-мезонов.

Мы рассматривали *золотую моду*:

$$B^0(\bar{B}^0) \rightarrow J/\psi K_S^0 = f$$

CP-нарушающая асимметрия:

$$\mathcal{A}_{CP}(t) = \frac{\Gamma(B^0(t) \rightarrow f) - \Gamma(\bar{B}^0(t) \rightarrow f)}{\Gamma(B^0(t) \rightarrow f) + \Gamma(\bar{B}^0(t) \rightarrow f)} = \left| |\Gamma_L \approx \Gamma_S| \right| = Im\lambda \sin \Delta m \cdot t,$$

$$\lambda = \frac{q \bar{A}_f}{p A_f}.$$

Относительные вероятности распадов:

$$Br(B^0 \rightarrow J/\psi K_S) = \frac{\Gamma(B^0 \rightarrow J/\psi K_S)}{\Gamma_{tot}(B^0)} \approx 5 \cdot 10^{-4}$$

$$Br(J/\psi \rightarrow l^+ l^-) \approx 0.06$$

$$Br(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-) \approx 0.69$$

Так, вероятность зарегистрировать распад:

$$P \approx 5 \cdot 10^{-4} \cdot 0.06 \cdot 0.69 \approx 2 \cdot 10^{-5}.$$

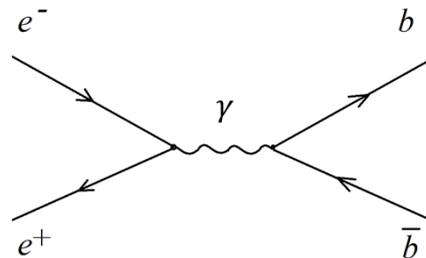


Рис. 12.1. Диаграмма Фейнмана столкновения лептонов.

Такую CP-нарушающую асимметрию измеряют на В-фабриках, где сталкивают e^+, e^- (рис. 12.1):

$$e^+e^- \rightarrow b\bar{b}.$$

Далее $b\bar{b}$, подцепляя частицы из вакуума, образуют В-мезоны. Экспериментаторы подбирают энергию пары e^+e^- так, чтобы родить определенное связанное состояние b-кварков – состояние $\gamma(4s)$ (связанное состояние $b\bar{b}$). Это самое легкое из связанных состояний, которое умеет распадаться на пару $b\bar{b}$:

$$e^+e^- \rightarrow \gamma(4s) \begin{cases} \nearrow B^0\bar{B}^0 & (48.6 \%) \\ \rightarrow B^+B^- & (51.4 \%) \\ \searrow \text{ост. моды} \\ \rightarrow B_S^0\bar{B}_S^0 \end{cases},$$

$$m_\gamma \approx 10.579 \text{ ГэВ}, \quad \Gamma \approx 20.5 \text{ МэВ}.$$

Проблема В-фабрик на встречных пучках заключается в том, что $\gamma(4s)$ рождается в покое, и $b\bar{b}$ имеет малый импульс:

1) Симметричные пучки e^+e^- :

$$P_\gamma = (m_\gamma, \vec{0}),$$

$$P_{B^0} = (E_B, \vec{p}_B),$$

$$P_{\bar{B}^0} = (E_B, -\vec{p}_B),$$

$$E = \frac{1}{2}m_\gamma \Rightarrow$$

$$p_B = \sqrt{E_B^2 - m_B^2} \approx 0.33 \text{ ГэВ} \ll m_B.$$

Можно оценить, сколько пролетит В-мезон до того, как распадется. Длина пробега:

$$l_B = \frac{p_B}{m_B} \tau_B \approx 0.0028 \text{ см}.$$

Если мы хотим посчитать асимметрию, то нам нужно разрешить положение В-мезона с точностью 0.0028 см. Такое измерение оказалось невозможно выполнить.

2) Асимметричные пучки e^+e^- :

До настоящего времени с этой идеей отработали 2 В-фабрики:

- BaBar: $e^+(3.1 \text{ ГэВ}) e^-(9 \text{ ГэВ})$;
- Belle: $e^+(3.5 \text{ ГэВ}) e^-(8 \text{ ГэВ})$.

$\gamma(4s)$ будет лететь в лабораторной системе отсчета. Следовательно, В-мезоны будут иметь большую скорость и пролетят большее расстояние:

$$l_B \approx 0.025 \text{ см.}$$

Необходимо различить B^0 и \bar{B}^0 :

$$B^0 \rightarrow l;$$

$$\bar{B}^0 \rightarrow \bar{l}.$$

Мезон и антимезон рождаются парой. Один из них распадается по лептонному каналу. Знак лептона определяет, какой из лептонов распался. Соответственно мы знаем, какая частица не распалась.

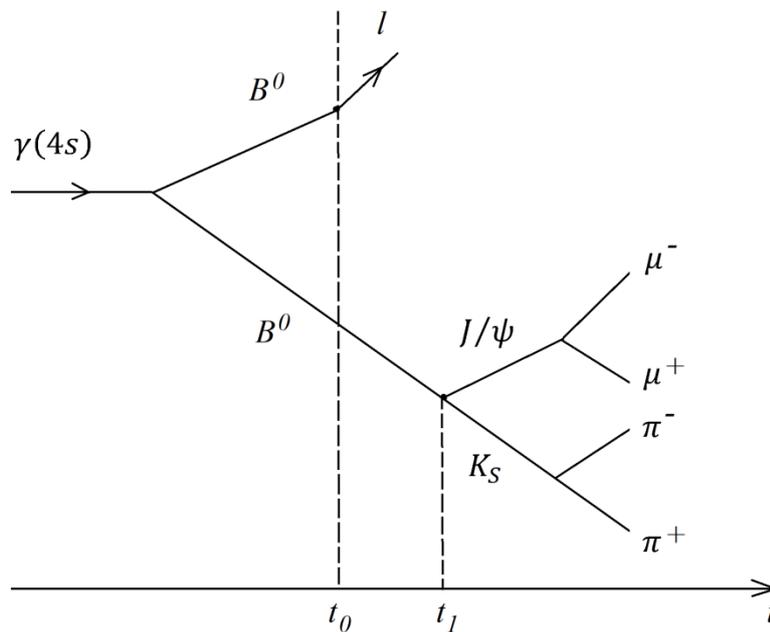


Рис. 12.2. Диаграмма распада $\gamma(4s) \rightarrow B^0 \bar{B}^0$.

Еще одна тонкость, которую стоит отметить, заключается в следующем: распад

$$\gamma(4s) \rightarrow B^0 \bar{B}^0$$

происходит так, как изображено на диаграмме (рис. 12.2). И до того, как мы определим, какая из частиц является мезоном, а какая антимезоном, для нас распад происходит в запутанное состояние.

По лептонным распадам J/ψ и K_S , можем установить, когда распался мезон/антимезон. Для этого экспериментаторы строят распределения событий (рис. 12.2) для B^0 и \bar{B}^0 . Эти кривые сдвинуты друг относительно друга. Сдвиг свидетельствует об асимметрии. Если вычтем один график из другого, то получим осцилляционную картину (рис. 12.3), задаваемую формулой, которую мы вывели ранее.

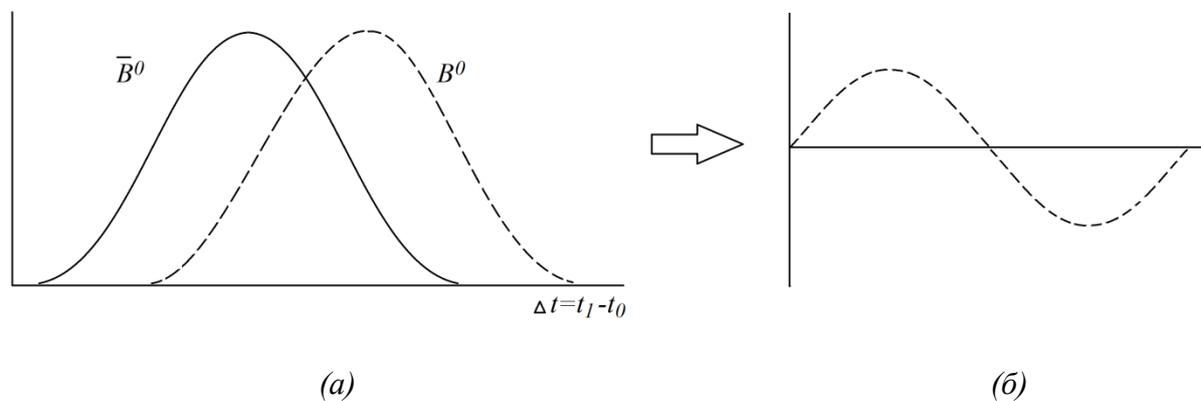


Рис. 12.3. Экспериментальное распределение событий для B^0 и \bar{B}^0 (а) и осцилляционная картина (б).

Так измеряется CP-нарушающая асимметрия в интерференции. Мы разобрали одну из мод распада.

Глубоко неупругое рассеяние

Под глубоким неупругим рассеянием подразумевается изучение структур адронов путем рассеяния лептонов на этих адронах.

Вспомним опыт Резерфорда, который показал, что внутри атома есть ядро. Исторически существовало 2 модели атома: модель Томсона и модель Резерфорда. Модель Томсона заключалась в следующем: электроны вращаются в некотором аморфном пространстве, в котором равномерно распределен положительный заряд. В опыте Резерфорда -частицы рассеивались на золотой фольге. При рассеивании на чем-то аморфном частицы должны были пролетать как сквозь желе, рассеяния на большие

углы не ожидалось. Резерфорд обнаружил, что нечто (ядро) внутри атома может отталкивать эти тяжелые -частицы.

Идея глубокого неупругого рассеяния аналогична: предлагается рассеивать на адронах высокоэнергетичные лептоны. Посмотрим, как лептоны отклоняются и как изменяется их энергия после рассеяния. Это нетривиальная задача.

Рассеяние лептона на мюоне

Нуклон состоит из кварков, но мы не можем написать волновую функцию такого нуклона. Так, посчитать энергию из первых принципов мы тоже не можем. Вычислим аналогичный процесс в квантовой электродинамике. Рассмотрим рассеяние, аналогичное рассеянию лептона на чем-то тяжелом, например, на мюоне μ :

$$e\mu \rightarrow e\mu.$$

В лабораторной системе отсчета будем считать мюон неподвижной мишенью, на которой рассеиваются электроны.

$$m_\mu \gg m_e.$$

Фейнмановская диаграмма представлена на рисунке 12.4.

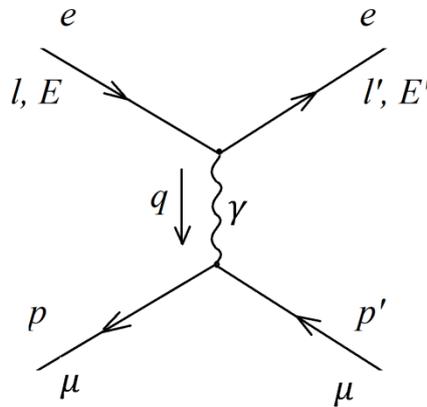


Рис. 12.4. Диаграмма рассеяния электрона на мюоне.

Введем универсальные обозначения (распространяются на рассеяния электронов на нуклонах):

Импульс и энергия электрона до рассеяния: l, E ; после: l', E' ;

Импульс мюона до: p ; после: p' ;

Импульс виртуального фотона: $q = l - l'$.

Амплитуда этого процесса:

$$M = \frac{(-ie)^2(-i)}{q^2} \bar{u}_e(l') \gamma^\mu u_e(l) \bar{u}_\mu(p') \gamma_\mu u_\mu(p) \pi.$$

Усредняем по спинам начальных состояний:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{пол}} |M|^2 &= \frac{e^4}{4(q^2)^2} \text{Tr}[\hat{l}' \gamma^\mu \hat{l} \gamma^\nu] \cdot \text{Tr}[(\hat{p}' + m) \gamma_\mu (\hat{p} + m) \gamma_\nu] = \\ &= \frac{4e^4}{(q^2)^2} (l'^\mu l^\nu + l'^\nu l^\mu - g^{\mu\nu} l l') \cdot (p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu - g_{\mu\nu} p p' + m^2 g_{\mu\nu}) = \\ &= \frac{4e^4}{(q^2)^2} [2(l' p')(l p) + 2(l' p)(l p') - 4(l l')(p p') + 4(l l')(p p') + 2m^2(l l') - 4m^2(l l')] = \\ &= \frac{8e^4}{(q^2)^2} [(l' p')(l p) + (l' p)(l p') - m^2(l l')]. \end{aligned}$$

Сейчас выражение записано в Лоренцевском инвариантном виде. Вычислим в той системе отсчета, в которой хотим считать, а именно в системе покоящегося мюона и налетающего электрона:

$$p = (m, \vec{0});$$

$$pl = mE = p'l', \text{ т. к.}$$

$$(p + l)^2 = (p' + l')^2 \Rightarrow p^2 + l^2 + 2pl = p'^2 + l'^2 + 2p'l' \Rightarrow$$

$$m^2 + 2pl = m^2 p'l' \Rightarrow pl = p'l';$$

$$pl' = mE' = p'l;$$

$$q^2 = (l - l')^2 = -2ll' = -2(EE' - \hat{l}\hat{l}') = -2EE'(1 - \cos \theta) = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2};$$

$$Q^2 = -q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2};$$

$$v = E - E' - \text{потеря энергии электрона.}$$

Таким образом, рассеяние характеризует угол θ и переданная энергия v . Но мы знаем, что если реакция упругая, то есть всего лишь один параметр:

$$p + l = p' + l' \Rightarrow p + q = p' \Rightarrow (p + q)^2 = p'^2 \Rightarrow p^2 + 2pq + q^2 = p'^2 \Rightarrow$$

$$2pq + q^2 = 0 \Rightarrow 2mv - Q^2 = 0 \Rightarrow$$

v и угол рассеяния связаны между собой. Для неупругой реакции это уже будет не так.

Вернемся к вычислению квадрата матричного элемента и посчитаем его в лабораторной системе отсчета.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{пол}} |M|^2 &= \frac{8e^4}{(Q^2)^2} \left[m^2 E^2 + m^2 E'^2 + \frac{1}{2} m^2 q^2 \right] = \\ &= \left| m(E - E') = -\frac{1}{2} q^2 = 2EE'(1 - \cos \theta) \Rightarrow E' - E = \frac{1}{m} EE'(1 - \cos \theta) \right| = \\ &= \frac{8e^4}{Q^4} [m^2(E - E')^2 + 2m^2 EE' - EE'm^2(1 - \cos \theta)] = \\ &= \frac{8e^4}{Q^4} \left[-\frac{1}{2} q^2 EE'(1 - \cos \theta) + m^2 EE'(1 + \cos \theta) \right] = \\ &= \frac{16e^4 m^2 EE'}{Q^4} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \end{aligned}$$

Нас интересует сечение:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{2E_1 2E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \Rightarrow \\ d\sigma &= \frac{1}{2E_2 m} \frac{16e^4 m^2 EE'}{Q^4} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + l - p' \\ &\quad - l') \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'_\mu} \frac{d^3 l'}{2E'(2\pi)^3}. \end{aligned}$$

Отметим, что электрон ультрарелятивистский, то есть налетает с очень большой энергией, поэтому его массой мы пренебрегаем:

$$E \gg m_e.$$

Домашнее задание:

Покажите, что верно следующее:

$$\int \delta^{(4)}(p + q - p') \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'_\mu} = \frac{1}{(2\pi)^3} \delta((p + q)^2 - m^2).$$

$$(p + q)^2 - m^2 = p^2 + 2pq + q^2 - m^2 = 2pq + q^2 = 2mv - Q^2$$

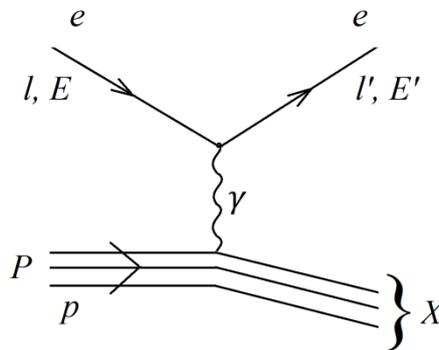
$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \Rightarrow e^4 = 16\pi^2\alpha^2$$

$$\begin{aligned} \int d\sigma \text{ по } d^3p' &= \frac{16\pi^2\alpha^2 m}{Q^4 2\pi^2} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta(2mv - Q^2) d\Omega' E'^2 dE' \\ &= \frac{8\alpha^2 m}{Q^4} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] d\Omega E'^2 dE' \frac{1}{2m} \delta\left(v - \frac{Q^2}{2m}\right). \end{aligned}$$

Полученное выражение – ответ для сечения, которое мы получили при условии точности мишени.

Рассеяние лептона на адроне

Теперь сделаем те же операции при условии, что неподвижной частицей является адрон (рис. 12.5). Для упрощения ситуации оставим только электромагнитные взаимодействия. Нас будет интересовать режим, когда протон летит с большой энергией и в результате разрушается, образуется некоторое конечное состояние X. Кинематика аналогична описанной ранее.



12.5. Диаграмма рассеяния электрона на адроне.

Нас будет интересовать *инклюзивное сечение*. Будем регистрировать рассеявшийся электрон, посчитаем полное возможное сечение рассеяния.

Кинематический режим:

$$m_e \ll m_p;$$

$$E \gg m_p;$$

$$S \gg m_p^2.$$

Лагранжиан взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{int} = -e\mathcal{A}_\mu (J_{лепт}^\mu + J_{адр}^\mu).$$

Матричный элемент будем вычислять в первом порядке по электромагнитному взаимодействию:

$$iM = (-ie)^2 - \frac{i}{q^2} \bar{u}(l')\gamma^\mu u(l) \cdot \langle X | J_{\mu,адр} | p \rangle;$$

$$\frac{1}{4} \sum_{пол, X} |M|^2 (2\pi)^4 \delta(p + q - p'_X) = \frac{1}{4} \frac{e^4}{Q^4} Tr(\hat{l}'\gamma^\mu \hat{l}\gamma^\nu) \langle X | J_{\mu,адр} | p \rangle [\langle X | J_{\mu,адр} | p \rangle^*].$$

Неупругое рассеяние означает, что конечное состояние отлично от начального. Для глубоко неупругого рассеяния:

$$Q^2 \gg m^2.$$

$Tr(\hat{l}'\gamma^\mu \hat{l}\gamma^\nu) = L^{\mu\nu}$ – лептонный тензор,

$H_{\mu\nu}(p, q) = \sum_X (2\pi)^4 \delta(p + q - p'_X) \langle X | J_{\mu,адр} | p \rangle [\langle X | J_{\nu,адр} | p \rangle^*]$ – тензор, зависящий от импульсных переменных p и q .

Домашнее задание:

1) Покажите:

$$q^\mu H_{\mu\nu} = 0;$$

$$q^\nu H_{\mu\nu} = 0.$$

И покажите, что если P -четность сохраняется, то $H_{\mu\nu} = H_{\nu\mu}$.

2) Используя эти свойства получить общее представление:

$$\frac{1}{8\pi} H_{\mu\nu}(p, q) = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) W_1(Q^2, \nu) + \left(p_\mu - \frac{q_\mu(pq)}{q^2}\right) \left(p_\nu - \frac{q_\nu(pq)}{q^2}\right) W_2(Q^2, \nu)$$

$W_1(Q^2, \nu), W_2(Q^2, \nu)$ – скалярные функции,

$$Q^2 = -q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$\nu = \frac{pq}{m} = E - E'$ – лоренцов инвариант.

Лекция 13

Структурные функции. Партоновая модель

Сечения лептонного рассеяния на мюоне и адроне

Мы начали изучать глубокое неупругое рассеяние – метод изучения структуры адронов. Мы вычислили сечение рассеяния электрона в качестве снаряда на точечной мишени мюоне (рис. 12.4):

$$m_l \ll m_\mu \equiv m;$$

Импульс и энергия электрона до рассеяния: l, E ; после: l', E' ;

Импульс мюона до: p ; после: p' ;

Импульс виртуального фотона: $q = l - l'$.

Энергии налетающей частицы очень большие:

$$E \gg m \text{ или } s \gg m^2.$$

Мы вычислили древесное сечение в первом порядке по константе связи и получили следующее выражение в лабораторной системе отсчета:

$$d\sigma = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^2} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta \left(v - \frac{Q^2}{2m} \right) d\Omega dE',$$

$$Q^2 = -q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$v = \frac{pq}{m} = E - E';$$

$v = \frac{Q^2}{2m}$ – упругое рассеяние.

Далее мы рассеивали лептон на нуклоне (рис. 12.5). Мы решили, что будем рассматривать этот процесс в лидирующем порядке по электромагнитному взаимодействию, оставим только вклад, связанный с обменом фотонами. Разница со случаем, рассмотренным ранее, заключается в том, что в ситуации с нуклонами рассеяние неупругое. Нас будет интересовать полное сечение рассеяние:

$$d\sigma = \frac{\pi^2 \alpha^2}{mEQ^4} L^{\mu\nu} H_{\mu\nu} \frac{d^3 l'}{(2\pi)^3 2E'}$$

$$L_{\mu\nu} = \text{Tr}(\hat{l}\gamma^\mu\hat{l}'\gamma^\nu) = 4(l^\mu l'^\nu + l^\nu l'^\mu - g^{\mu\nu}ll'),$$

$$H_{\mu\nu} = \sum (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + q - p') \langle X | J_{\text{э/м}}^\mu | p \rangle \left[\langle X | J_{\text{э/м}}^\nu | p \rangle \right]^*.$$

$$\frac{1}{8\pi} H_{\mu\nu} = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_1(Q^2, \nu) + \left(p_\mu - \frac{(pq)q_\mu}{q^2} \right) \left(p_\nu - \frac{(pq)q_\nu}{q^2} \right) \frac{W_2(Q^2, \nu)}{m^2},$$

$$q^\mu H_{\mu\nu} = 0,$$

$$H_{\mu\nu} = H_{\nu\mu}.$$

$W_1(Q^2, \nu), W_2(Q^2, \nu)$ – структурные функции адрона.

Найдем свертку $L_{\mu\nu}$ с $H_{\mu\nu}$. $L_{\mu\nu}$ построен из матричных элементов лептонного электромагнитного тока и верны соотношения:

$$q^\mu L_{\mu\nu} = 0,$$

$$q^\nu L_{\mu\nu} = 0.$$

$$\frac{1}{8\pi} H_{\mu\nu} L^{\mu\nu} = -L_\mu^\mu W_1(Q^2, \nu) + p_\mu p_\nu L_{\mu\nu} \frac{W_2(Q^2, \nu)}{m^2},$$

$$L_\mu^\mu = 4(2ll' - 4(ll')) = -8ll' = (-8)2EE' \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$p_\mu p_\nu L_{\mu\nu} = 4(2(pl)(pl') - p^2 ll') = 4 \left[2m^2 EE' - 2m^2 EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] = 8m^2 EE' \cos^2 \frac{\theta}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{8\pi} H_{\mu\nu} L^{\mu\nu} = 16EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} W_1(Q^2, \nu) + 8EE' \cos^2 \frac{\theta}{2} W_2(Q^2, \nu).$$

$$d\sigma = \frac{\pi^2 \alpha^2}{mEQ^4} 8\pi 8EE' \left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2} W_1(Q^2, \nu) + \cos^2 \frac{\theta}{2} W_2(Q^2, \nu) \right) \frac{d\Omega E'^2 dE'}{(2\pi)^3 2E'}$$

$$= \frac{4\alpha^2 E'^2}{mQ^4} \left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2} W_1(Q^2, \nu) + \cos^2 \frac{\theta}{2} W_2(Q^2, \nu) \right) d\Omega dE'.$$

Структурные функции

Мы получили сечение, похожее по структуре на сечение при лептонном рассеянии на мюоне. Сечения совпадут, если:

$$\frac{2}{m} W_1 = \frac{Q^2}{2m^2} \delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2m} \right);$$

$$\frac{1}{m} W_2 = \delta\left(v - \frac{Q^2}{2m}\right).$$

Определим, в каких пределах изменяются Q^2 и v :

$$0 \leq v = E - E' \leq E,$$

$$Q^2 \geq 0,$$

$$p + l = p' + l' \Rightarrow p + q = p' \Rightarrow$$

$$(p + q)^2 = p'^2 \Rightarrow m^2 + 2mv - Q^2 \geq m^2 \Rightarrow Q^2 \leq 2mv \Rightarrow$$

$$0 \leq Q^2 \leq 2mv.$$

Введем безразмерные величины:

$$x = \frac{Q^2}{2mv}, \quad y = \frac{v}{E} = \frac{E - E'}{E},$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$F_1(x, Q^2) = W_1(Q^2, v),$$

$$F_2(x, Q^2) = \frac{v}{m} W_2(Q^2, v).$$

Выражения для случая упругого рассеяния на точечной частице:

$$F_1(x, Q^2) = \frac{Q^2}{4mv} \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2mv}\right) = \frac{1}{2} x \delta(1 - x),$$

$$F_2(x, Q^2) = v \delta\left(v - \frac{Q^2}{2m}\right) = \delta(1 - x).$$

В общем случае будем получать более сложные выражения от x и Q^2 .

Домашнее задание:

Переписать дифференциальное сечение в безразмерных переменных:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \frac{4\pi\alpha^2 s}{Q^4} \left(xy^2 F_1^{ep}(x, Q^2) + (1 - y) F_2^{ep}(x, Q^2) \right).$$

Рассеяние нейтрино на адроне

Структурные функции адрона зависят от процесса, который мы рассматриваем. Рассмотрим то же самое неупругое рассеяние, но вместо электрона рассмотрим нейтрино. Диаграмма 10.5 по своей сути никак не изменится. Рассеяние будем рассматривать через заряженные токи. Будем регистрировать заряженные лептоны после рассеяния нейтрино на мишени. В качестве мишени возьмем протон. Вычислим инклюзивное (полное) сечение, просуммированное по всем конечным состояниям. Будем применять теорию Ферми:

$$m^2 \ll s \ll m_W^2.$$

Лагранжиан взаимодействия:

$$\mathcal{L} = -2\sqrt{2}G_F L_\mu H^\mu,$$

$$L_\mu = \bar{\nu}_L \gamma^\mu l_L.$$

Сечение:

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{пол}} |M|^2 = 8G_F^2 L_{\mu\nu}^{(W)} H^{(W)\mu\nu},$$

$$L_{\mu\nu}^{(W)} = \text{Tr} \left[\hat{l} \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \hat{l} \gamma^\nu \frac{1-\gamma^5}{2} \right] = 2(l^\mu l'^\nu + l^\nu l'^\mu - g^{\mu\nu} l l' + i\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} l_\rho l'_\lambda),$$

$$H_{\mu\nu}^{(W)} = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_1^{vp}(Q^2, v) + \left(p_\mu - \frac{(pq)q_\mu}{q^2} \right) \left(p_\nu - \frac{(pq)q_\nu}{q^2} \right) \frac{W_2^{vp}(Q^2, v)}{m^2} - \frac{i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} p_\lambda q_\rho}{2m^2} W_3^{vp}(Q^2, v).$$

Домашнее задание:

Записать полное сечение в случае рассеяния нейтрино.

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \frac{G_F^2}{2\pi} s (xy^2 F_1^{vp}(x, Q^2) + (1-y) F_2^{vp}(x, Q^2) - xy \left(1 - \frac{y}{2}\right) F_3^{vp}(x, Q^2)),$$

$$F_3^{vp}(x, Q^2) = \frac{v}{m^2} W_3^{vp}(Q^2, v)$$

Скейлинг Бьеркена

Экспериментаторы регистрируют заряженные лептоны. Регистрируя сечение под разными углами и при разных энергиях, можно восстановить структурные функции адрона. Эти данные говорят о структуре адрона.

Представим, что адрон – аморфная структура, барионное число равномерно распределено по некоторому объему (все остальные заряды также равномерно распределены по этому объему). Рассмотрим процессы в пределе большого переданного импульса Q^2 . Для процессов с большим Q расстояния малы, значит с увеличением Q мы пробуем все меньшую часть адрона. Если адрон – бесструктурная частица, то можно ожидать, что все формфакторы занулятся:

$$F_i \rightarrow 0 \text{ при } Q^2 \rightarrow \infty.$$

Эксперимент показал следующий результат:

$$F_i(x, Q^2) \rightarrow F_i(x) \text{ при } Q^2 \rightarrow \infty.$$

Это явление носит название «скейлинг Бьеркена». Для объяснения была сформирована *партонная модель*.

Партонная модель

В эксперименте мы получили структурные функции, зависящие только от x . Обратим внимание, что при расчетах рассеяния на точечной частице F_i также зависели только от x . Так, рассеяние на протоне сходило с рассеянием на точечной частице.

Идея заключалась в рассмотрении протона в качестве совокупности точечных частиц. Считать будем рассеяние лептона на этих частицах (партонах), составляющих протон (рис. 13.1). Полное сечение – сумма всех возможных рассеяний.

адрон = "кучка" партонов.

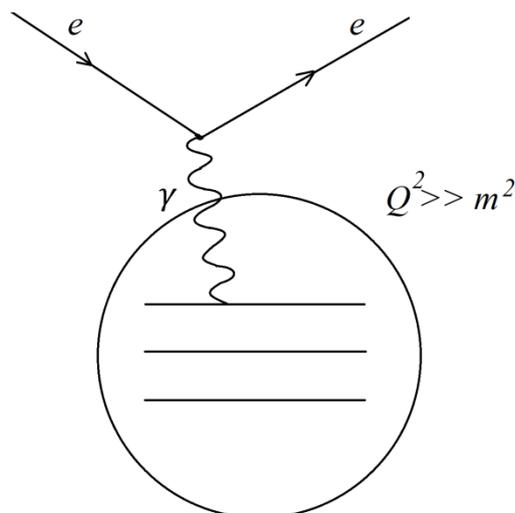


Рис. 13.1. Диаграмма рассеяния лептона на партоне.

$Q \gg m^{-1}$ означает, что время взаимодействия мало, меньше характерного времени движения партонов внутри адрона:

$$Q^{-1} \sim \tau_{\text{взаим}} \ll \tau_{\text{внутр. движения партонов в адроне}}$$

Значит снаряд взаимодействует со свободными партонами.

Удобно ввести партонную модель в системе отсчета, где протон летит с большим импульсом (в идеале с бесконечно большим). Партоны также летят внутри протона с импульсами p_i (рис. 13.2):

$$\vec{p}_i = \vec{p}_i^{\parallel} + \vec{p}_i^{\perp}.$$

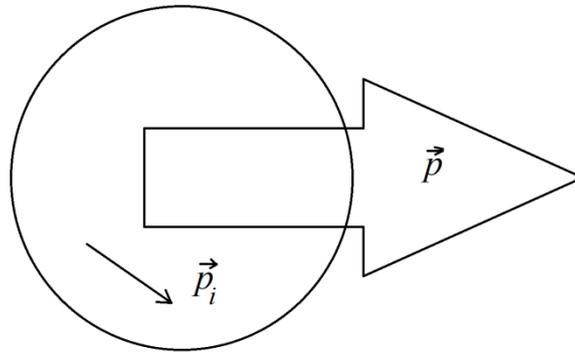


Рис. 13.2. Партон внутри летящего протона.

\vec{p}_i^{\perp} связан с движением партона внутри адрона.

$$|\vec{p}_i^{\perp}| \gg |\vec{p}_i^{\parallel}| \cong |\vec{p}_i| \Rightarrow$$

Поперечными импульсами партонов будем пренебрегать.

Пусть произошло рассеяние на конкретном партоне с импульсом \vec{p}_i :

$$p_i \sim p,$$

$$p_i = \xi p,$$

ξ — доля импульса. Рассеяние упругое. Необходимо просуммировать все такие рассеяния. Иными словами необходимо знать, как распределены партоны (кварки) внутри протона по импульсам. Для этого вводят *партонные функции распределения*:

$$f_i(\xi).$$

$$f_i(\xi)d\xi -$$

вероятность найти партон типа i внутри протона с долей импульса в интервале $[\xi, d\xi]$.

Полное сечение:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dE'}(ep \rightarrow eX) \cong \sum_i \int_0^1 f_i(\xi) d\xi \frac{d\sigma}{d\Omega dE'}(eq_i^{(-)} \rightarrow eq_i^{(-)}).$$

Закон сохранения энергии и импульсов на уровне партонов:

$$\begin{aligned} p_{\text{парт}} + l &= p'_{\text{парт}} + l' \Rightarrow p_{\text{парт}} + q = p'_{\text{парт}} \Rightarrow \\ (p_{\text{парт}} + q)^2 &= p'^2_{\text{парт}} \Rightarrow p^2_{\text{парт}} + 2p_{\text{парт}}q + q^2 = p'^2_{\text{парт}} \Rightarrow \\ 2p_{\text{парт}}q + q^2 &= 2p\xi q - Q^2 = 0 \Rightarrow \\ \xi &= \frac{Q^2}{2pq}. \end{aligned}$$

Вычислим сечение партонного подпроцесса $eq_i \rightarrow eq_i$:

$$\begin{aligned} p^\mu_{\text{парт}} &= \xi p^\mu, \\ p^2_{\text{парт}} &= \xi^2 p^2, \\ m^2_{\text{парт}} &= \xi^2 m^2 \Rightarrow \\ \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} &= \frac{4Q_i^2 \alpha^2 E'^2}{Q^4} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2m^2_{\text{парт}}} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta \left(v - \frac{Q^2}{2m_{\text{парт}}} \right) \Rightarrow \\ \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} &= \sum_i d\xi f_i(\xi) Q_i^2 \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2\xi^2 m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta \left(v - \frac{Q^2}{2\xi m} \right) = \\ &= \left[\delta \left(v - \frac{Q^2}{2\xi m} \right) = \frac{\xi}{v} \delta \left(\xi - \frac{Q^2}{2mv} \right) \right] = \sum_i f_i(x) Q_i^2 \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left[\frac{x}{v} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2xm^2 v} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] = \\ &= \sum_i f_i(x) Q_i^2 \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left[\frac{x}{v} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{m} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] = \\ &= \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left[\frac{1}{v} \left(\sum_i f_i(x) x Q_i^2 \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{m} \left(\sum_i f_i(x) Q_i^2 \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$W_1 = F_1^{ep}(x, Q^2) = \frac{1}{2} \sum_i Q_i^2 f_i(x),$$

$$W_2 = \frac{m}{v} \sum_i f_i(x) x Q_i^2 \Rightarrow F_2^{ep}(x, Q^2) = \sum_i f_i(x) x Q_i^2.$$

Так, мы получили структурные функции партона как функции только x .

Кроме того заметим:

$$F_2^{ep} = 2xF_1^{ep} -$$

соотношение Каллана-Гросса.

Для скалярных партонов $F_1 = 0$ - противоречит экспериментальным данным.

Лекция 14

Рассеяние лептонов на протоне и изосинглетной мишени.

Аннигиляция e^+e^- в адроне в партонной модели

Рассеяние электрона на протоне

На прошлой лекции мы обсуждали партонную модель. Мы рассматривали рассеяние лептона на нуклоне. Изучались инклюзивные процессы (регистрируются угол и энергия рассеянного электрона). Такое сечение может быть записано с помощью функций:

$$F_1^{ep}(x, Q^2), F_2^{ep}(x, Q^2).$$

Инварианты:

$$Q^2 = -q^2, v = \frac{pq}{m}.$$

От v и Q^2 мы перешли к безразмерным величинам:

$$(Q^2, v) \rightarrow x, y:$$

$$0 \leq x \leq 1;$$

$$0 \leq y \leq 1.$$

Экспериментально при больших энергиях наблюдается скейлинг Бьеркена. Партонная модель была построена для объяснения этого эффекта. В этой модели протон рассматривается как совокупность партонов. Электрон упруго рассеивается на каждом из партонов внутри протона. Так, в этой модели полное сечение неупругого рассеяния является суммой сечений всевозможных упругих рассеяний на партонах:

$$\begin{aligned} \sigma(ep(p) \rightarrow eX) &= \\ &= \left| \int_0^1 dx f_i(x) \sigma(e, q_i(xp) \rightarrow eq_i) \right|^2 = \\ &= \sum_i \int_0^1 dx f_i(x) \sigma(e, q_i(xp) \rightarrow eq_i). \end{aligned}$$

Для рассеяния электрона на протоне:

$$F_1^{ep}(x) = \frac{1}{2} \sum_i Q_i^2 f_i(x); \quad F_2^{ep}(x) = x \sum_i Q_i^2 f_i(x);$$

$$F_2(x) = 2xF_1(x).$$

Если ограничиться первыми наиболее легкими тремя кварками:

$$F_1^{ep}(x) = \frac{1}{2}(Q_u^2(f_u(x) + f_{\bar{u}}(x)) + Q_d^2(f_d(x) + f_{\bar{d}}(x)) + Q_s^2(f_s(x) + f_{\bar{s}}(x))).$$

Кварковый состав протона:

$$p = (uud).$$

Кварки, которые входят в состав протона называются *валентными кварками*. Они определяют квантовые числа протона. Все остальные кварки называются *морскими кварками*.

Рассеяние нейтрино на протоне

Те же операции можно проделать и для рассеяния нейтрино на протоне:

$$\nu p \rightarrow lX.$$

Изобразим всевозможные процессы на кварковом уровне. Ограничимся первым поколением *u* и *d* кварками и их антикварками. Есть две возможные диаграммы (рис. 14.1).

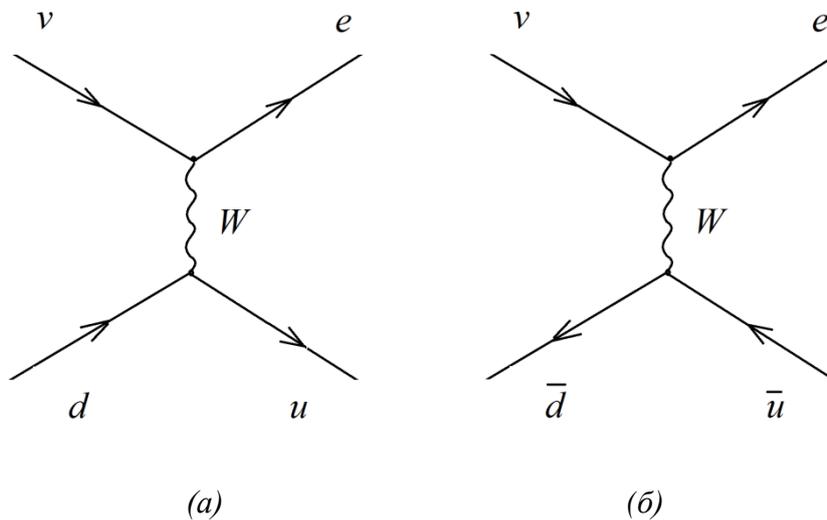


Рис. 14.1. Возможные диаграммы рассеяния нейтрино на протоне.

Для первого процесса:

$$\frac{d\sigma}{dy}(\nu d \rightarrow l u) = \frac{G_F^2}{\pi} \hat{s}$$

s – мандельштамовская переменная для партонного подпроцесса:

$$\hat{s} = (l + p_i)^2 = l^2 + p_i^2 + 2lp_i \approx 2lp_i = x2lp_i \approx xs.$$

Для второго подпроцесса:

$$\frac{d\sigma}{dy}(v\bar{u} \rightarrow l\bar{d}) = \frac{G_F^2}{\pi} \hat{s}(1-y)^2.$$

Полное сечение неупругого рассеяния нейтрино на протоне в рамках партонной модели:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dy}(vp \rightarrow lX) &= \int_0^1 \left(\frac{G_F^2}{\pi} \hat{s} f_d(x) + \frac{G_F^2}{\pi} \hat{s}(1-y)^2 f_{\bar{u}}(x) \right) dx = \\ &= \frac{G_F^2}{\pi} s \int_0^1 dx [x f_d(x) + x(1-y)^2 f_{\bar{u}}(x)] \Rightarrow \\ \frac{d^2\sigma}{dx dy} &= \frac{G_F^2}{\pi} s [x f_d(x) + x(1-y)^2 f_{\bar{u}}(x)]. \end{aligned}$$

Домашнее задание:

Сравнить полученное выражение с выражением, полученным через структурные функции и извлеките $F_1(x), F_2(x), F_3(x)$.

Ответ:

$$F_1^{vp}(x) = \frac{1}{2}(f_d(x) + f_{\bar{u}}(x)),$$

$$F_2^{vp}(x) = x(f_d(x) + f_{\bar{u}}(x)),$$

$$F_3^{vp}(x) = f_{\bar{u}}(x) - f_d(x).$$

Общие свойства партонных функций распределения

Нас также будут интересовать партонные функции распределения в нейтроне. Пусть известны функции распределения кварков в протоне:

$$p: f_u^p(x), \quad f_d^p(x), \quad f_s^p(x).$$

В нейтроне:

ДЕМИДОВ СЕРГЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

$$n: f_u^n(x) \approx f_d^p(x), \quad f_d^n(x) \approx f_u^p(x), \quad f_s^n(x) \approx f_s^p(x).$$

В антипротоне:

$$\bar{p}: f_u^{\bar{p}}(x) \approx f_u^p(x), \quad f_d^{\bar{p}}(x) \approx f_d^p(x), \quad f_s^{\bar{p}}(x) \approx f_s^p(x).$$

$f_i(x)dx$ – вероятность найти партон типа i с долей импульса x . Поскольку весь импульс распределяется между партонами, то:

$$\sum_i \int_0^1 x p^i f_i(x) dx = p^i \Rightarrow \sum_i \int_0^1 x f_i(x) dx = 1.$$

Партон несет заряды. Если протон состоит из партонов, то партонный заряд должен суммироваться:

$$p: Q = 1, \quad B = 1, \quad S = 0 \Rightarrow$$

$$Q = 1: \int_0^1 dx \left(\frac{2}{3}(f_u(x) - f_{\bar{u}}(x)) - \frac{1}{3}(f_d(x) - f_{\bar{d}}(x)) - \frac{1}{3}(f_s(x) - f_{\bar{s}}(x)) \right) = 1;$$

$$B = 1: \int_0^1 dx \left[\frac{1}{3}(f_u(x) - f_{\bar{u}}(x)) + \frac{1}{3}(f_d(x) - f_{\bar{d}}(x)) + \frac{1}{3}(f_s(x) - f_{\bar{s}}(x)) \right] = 1;$$

$$S = 0: \int_0^1 dx (f_s(x) - f_{\bar{s}}(x)) = 0.$$

Отсюда можно выразить вклады каждого из кварков:

$$\int_0^1 dx (f_u(x) - f_{\bar{u}}(x)) = 2 \quad - 2 u \text{ - кварка;}$$

$$\int_0^1 dx (f_d(x) - f_{\bar{d}}(x)) = 1 \quad - 1 d \text{ - кварк;}$$

$$\int_0^1 dx (f_s(x) - f_{\bar{s}}(x)) = 0.$$

Рассеяние нейтрино на изосинглетной мишени

Вернемся к рассеянию нейтрино. Но в качестве мишени возьмем не протон, а ядро, в котором равное число протонов и нейтронов – *изосинглетная мишень*. Тогда необходимо рассмотреть и рассеяние на нейтроне (заменить в расчетах для протона u -кварки на d , а d -кварки на u). Сечение для изосинглетной мишени – сумма сечений рассеяния на протонах и на нейтронах:

$$\sigma(\nu N \rightarrow lX),$$

где N – изосинглетная мишень.

$$F_2^{\nu N} = F_2^{\nu p}(x) + F_2^{\nu n}(x) = x(f_u(x) + f_d(x) + f_{\bar{u}}(x) + f_{\bar{d}}(x))$$

Экспериментально можно вычислить:

$$\int_0^1 F_2^{\nu N}(x) dx \approx 0.50 \pm 0.05 \text{ при } Q^2 \leq 10 \text{ ГэВ.}$$

Нехватка импульса связана с тем, что учтены не все партоны. Оставшийся импульс несут глюоны.

e^+e^- аннигиляция в адронах

Рассмотрим рассеяние e^+e^- при очень больших энергиях (больше масс адронов) в рамках квантовой хромодинамики. В лидирующем порядке процесс эквивалентен рассеянию на кварке-антикварке:

$$e^+e^- \rightarrow \text{адрон} \Leftrightarrow e^+e^- \rightarrow q\bar{q}.$$

Рассчитаем сечение эквивалентного процесса (рис. 14.2).

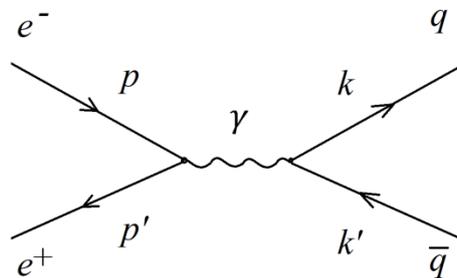


Рис. 14.2. Аннигиляция e^+e^- на кварке-антикварке.

$s = q^2 \ll m_W^2$ – можно пренебречь диаграммами с обменом Z -бозоном;

$\sqrt{s} \gg m_q$ – можно использовать выражения для сечений для безмассового случая.

Матричный элемент:

$$iM = (-ie)\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p) \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}(k)\gamma^\nu v(k')(-ie)Q_q.$$

Нас будет интересовать усредненное по спинам начальных частиц неполяризованное сечение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{пол.}} |M|^2 &= N_c \frac{e^4 Q_q^2}{4(q^2)^2} \sum_{\text{пол.}} \text{Tr} u(p)\bar{u}(p)\gamma^\nu v(p')\bar{v}(p)\gamma^\mu \text{Tr} u(k)\bar{u}(k)\gamma_\nu v(k')\bar{v}(k)\gamma_\mu \\ &= \left\| \sum_{\text{пол.}} u(p)\bar{u}(p) = \sum_{\text{пол.}} v(p)\bar{v}(p) = \hat{p} \right\| = \\ &= N_c \frac{e^4 Q_q^2}{4(q^2)^2} 16(p^\nu p'^\mu + p^\mu p'^\nu - g^{\mu\nu} pp') (k^\nu k'^\mu + k^\mu k'^\nu - g^{\mu\nu} kk') = \\ &= \frac{4N_c e^4 Q_q^2}{(q^2)^2} (2(pk)(p'k') + 2(pk')(p'k) - 2(pp')(kk') - 2(pp')(kk') + 4(pp')(kk')) = \\ &= \frac{8N_c e^4 Q_q^2}{(q^2)^2} ((pk)(p'k') + (pk')(p'k)) \end{aligned}$$

Изображение в системе центра масс представлено на рисунке 14.3.

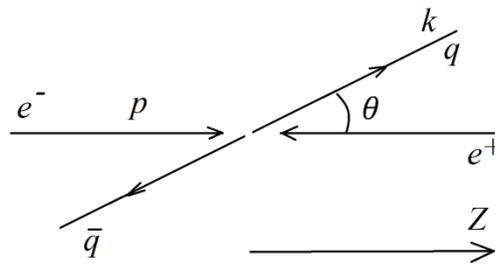


Рис. 14.3. Аннигиляция в системе центра масс.

$$p = (E, 0, 0, E), \quad p' = (E, 0, 0, -E) \Rightarrow$$

$$p'k' = pk = p^0 k^0 - \vec{p}\vec{k} = E^2(1 - \cos\theta);$$

$$pk' = E^2(1 + \cos\theta).$$

$$q^2 = (p + p')^2 = 4E^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \frac{8N_c e^4 Q_q^2}{(q^2)^2} ((pk)(p'k') + (pk')(p'k)) = ||_{\text{В СИСТ. Ц. М.}} || = \\ & = \frac{8N_c e^4 Q_q^2}{(q^2)^2} [E^4(1 - \cos \theta)^2 + E^4(1 + \cos \theta)^2] = N_c e^4 Q_q^2 (1 + \cos^2 \theta). \end{aligned}$$

Фазовый объем:

$$d\Phi_2 = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \cdot \frac{1}{8\pi} \frac{2|\vec{p}|}{E_{\text{ц.м.}}} = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \cdot \frac{1}{8\pi} = \frac{1}{2} d \cos \theta \cdot \frac{1}{8\pi}.$$

Сечение:

$$\begin{aligned} \sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) &= \frac{1}{2 \cdot 8\pi} N_c e^4 Q_q^2 \int (1 + \cos^2 \theta) d \cos \theta \cdot \frac{1}{2E_1 2E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} = \\ &= ||_{\cos \theta = y, \quad 2E_1 2E_2 = s, \quad |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = 2} || = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 8\pi} N_c e^4 Q_q^2 \int (1 + y^2) dy \cdot \frac{1}{2s} = \frac{1}{2s} \cdot \frac{1}{2 \cdot 8\pi} N_c e^4 Q_q^2 \left(y + \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{-1}^1 = \\ &= \frac{1}{2s} \cdot \frac{1}{2 \cdot 8\pi} N_c e^4 Q_q^2 2 \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \left| \left| \alpha = \frac{e^2}{4\pi} \right| \right| = N_c \frac{16\pi^2 \alpha^2 Q_q^2 8}{16\pi 2s} \frac{8}{3} = \frac{4\pi \alpha^2}{3s} N_c Q_q^2. \\ \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) &= \frac{4\pi \alpha^2}{3s}. \end{aligned}$$

Отношение полного сечения рассеяния на адронах к сечению рассеяния на мюонах:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адрон})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = ||_{\text{В LO}} || = N_c \sum_{\text{кварк}} Q_q^2; \\ E_{\text{ц.и.}} < 2m_c: \quad R &= 3 \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right) = 3 \cdot \frac{6}{9} = 2; \\ 2m_c < E_{\text{ц.и.}} < 2m_b: \quad R &= 2 + \frac{4}{9} \cdot 3 = 3 \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

График зависимости отношения R от мандельштамовской переменной s представлен на рисунке 14.4.

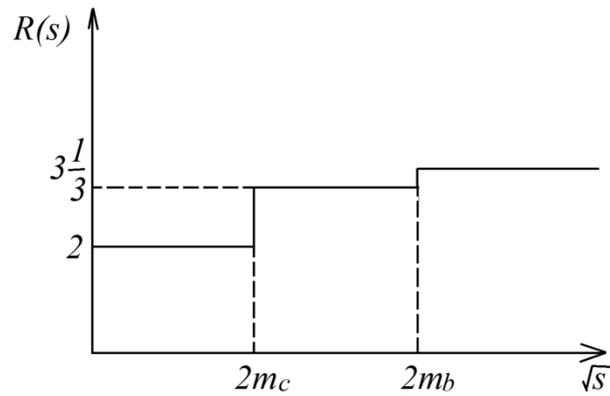


Рис. 14.4. График зависимости отношения R от мандельштамовской переменной s .

Поправки e^+e^- аннигиляции в адроне. Реальные поправки

Рассчитаем по КХД поправки, которые могут возникать от сильных взаимодействий: виртуальные поправки (рис. 14.5 (а)), реальные поправки (рис. 14.5 (б, в)). Сначала рассмотрим реальные поправки.

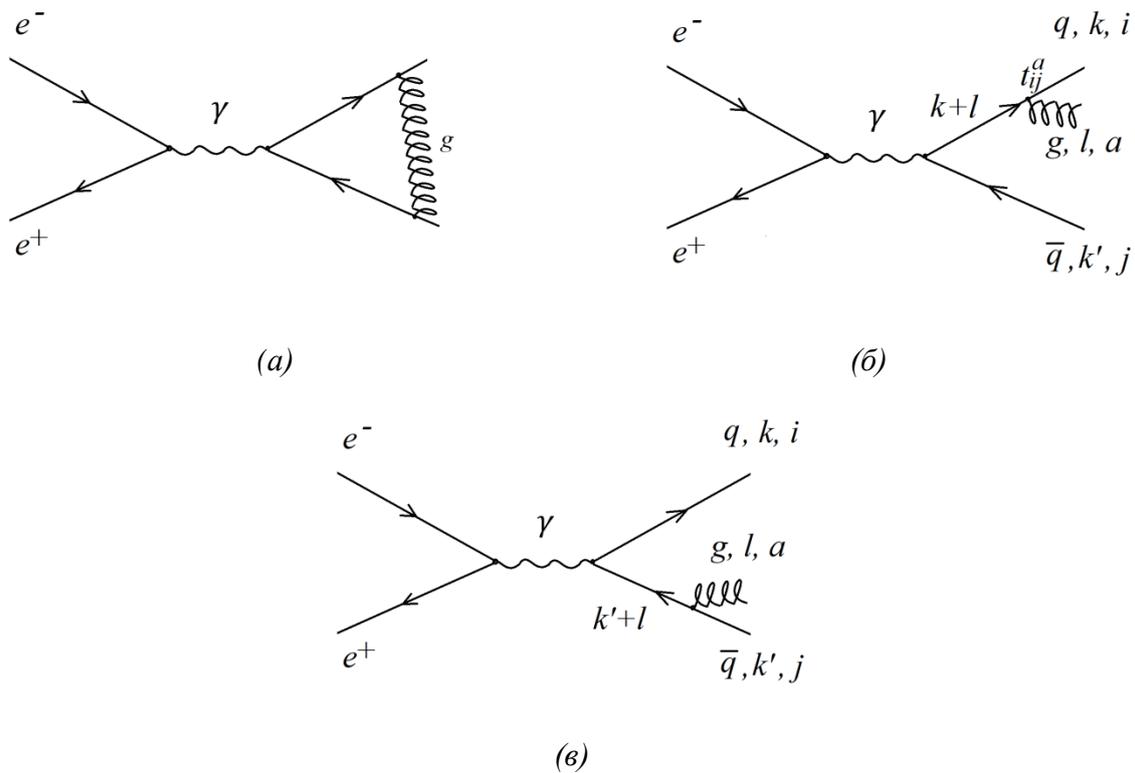


Рис. 14.5. Поправки сильного взаимодействия, виртуальные (а) и реальные (б, в).

Излучение глюона изменит цвет кварка. Будем рассчитывать часть сечения, а именно вклад в сечение от глюонов, которые имеют очень маленький импульс (мягкие) или коллинеарны той ноге, из которой излучаются.

Матричный элемент:

$$iM^{q\bar{q}g} = \dots ig_3 \bar{u}(k) t_{ij}^a \gamma^\mu \varepsilon_\mu^*(l) \frac{i(\hat{k} + \hat{l})}{(k' + l)^2} + \dots ig_3 \frac{i(-\hat{k}' - \hat{l})}{(k' + l)^2} t_{ig}^a \gamma^\mu \varepsilon_\mu^*(l) v(k').$$

$$\hat{\varepsilon}^*(l)(\hat{k} + \hat{l}) \approx \hat{\varepsilon}^*(l)\hat{k},$$

$$(\hat{k}' + \hat{l})\hat{\varepsilon}^*(l) \approx \hat{k}'\hat{\varepsilon}^*(l);$$

$$\hat{k}'\hat{\varepsilon}^*(l)v(k') = (2k'^\mu \varepsilon_\mu^*(l) - \hat{\varepsilon}^*(l)\hat{k}')v(k') = 2k'^\mu \varepsilon_\mu^*(l)v(k'),$$

$$\bar{u}(k)\varepsilon^*(l)\hat{k} = \bar{u}(k) \cdot 2k^\mu \varepsilon_\mu^*(l);$$

$$(k + l)^2 = 2kl,$$

$$(k' + l)^2 = 2k'l.$$

$$iM^{q\bar{q}g} = \dots (-g_3) t_{ij}^a \bar{u}(k) \frac{2k^\mu \varepsilon_\mu^*(l)}{2kl} + \dots (g_3) t_{ig}^a \frac{2k'^\mu \varepsilon_\mu^*(l)}{2k'l} = M^{q\bar{q}} (-g_3 t_{ij}^a) \left(\frac{k\varepsilon^*}{kl} - \frac{k'\varepsilon^*}{k'l} \right),$$

$M^{q\bar{q}}$ – амплитуда без учета цвета.

Рассчитаем вклад в сечение:

$$\begin{aligned} d\sigma^{q\bar{q}g} &= \frac{1}{3} \sigma^{q\bar{q}} g_3^2 t_{ij}^a t_{ij}^{a*} \sum_{\text{пол.}} \left| \frac{k\varepsilon^*}{kl} - \frac{k'\varepsilon^*}{k'l} \right|^2 d\Phi_g = \left\| \sum_{\text{пол.}} \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu^* = -g_{\mu\nu} \right\|^2 = \\ &= \frac{4}{3} g_3^2 \sigma^{q\bar{q}} \frac{2kk'}{(kl)(k'l)} \frac{d^3l}{2\omega_g (2\pi)^3} = \\ &= \left\| kl = E\omega_l(1 - \cos\theta), \quad k'l = E\omega_l(1 - \cos\theta) \right\| \sim \\ &\sim \frac{\omega_l^2 d\omega_l 2\pi \sin\theta d\theta}{E^2 \omega_l^2 (1 - \cos^2\theta)} \sim \frac{d\omega_l d\theta}{\omega_l \theta}. \end{aligned}$$

Интегралы дают логарифмы. На нижнем пределе ($\omega_l = 0$ или $\theta = 0$) логарифмы расходятся. То есть сечение рассеяния коллинеарного мягкого глюона формально равно бесконечности.

Лекция 15

Аннигиляция e^+e^- в адронах. Излучение в начальном состоянии

Поправки e^+e^- аннигиляции в адроне. Виртуальные поправки

На прошлой лекции мы начали изучать e^+e^- аннигиляцию в адроны:

$$L0$$

$$e^+e^- \rightarrow \text{адроны} \Leftrightarrow e^+e^- \rightarrow q\bar{q},$$

посчитали древесное сечение, ввели понятие R-отношения (изменяется скачкообразно), посчитали поправку к сечению следующих порядков теории возмущений по сильной константе связи (рис. 14.5). Мы считали реальные поправки, предполагая, что глюон «мягкий»:

$$d\sigma^{q\bar{q}g} = d\sigma^{q\bar{q}} \frac{4}{3} g_3^2 \frac{2kk'}{(kl)(k'l)} \frac{d^3l}{(2\pi)^3 2\omega_l} 2 = \left| \left| \begin{aligned} kl &= E\omega_l(1 - \cos\theta) \\ k'l &= E\omega_l(1 + \cos\theta) \end{aligned} \right. \right| \alpha_s = \frac{g_3^2}{4\pi} =$$

$$= d\sigma^{q\bar{q}} \frac{4}{3} \frac{4\pi\alpha_s}{16\pi^3} \frac{2 \cdot 2E^2}{E^2\omega_l^2(1 - \cos^2\theta)} \frac{\omega_l^2 d\omega_l 2\pi \sin\theta d\theta}{\omega_l} = d\sigma^{q\bar{q}} 8\alpha_s \frac{d\omega_l}{\omega_l} \frac{d\theta}{\sin\theta}.$$

Мы получили расходящийся результат. Тот же эффект будет иметь место и для КЭД.

$\frac{d\omega_l}{\omega_l}$ — инфракрасная расходимость, $\frac{d\theta}{\sin\theta}$ — коллинеарная расходимость.

Рассчитаем петлевую поправку для виртуального случая (рис. 14.5 (a)). Будем рассматривать только правую часть диаграммы (рис. 15.1). Вклад от этой диаграммы (массами пренебрегаем):

$$iM^{NLO} = \dots \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \bar{u}(k) i g_3 t_{ik}^a \gamma^\mu \frac{i(\hat{k} + \hat{l})}{(k+l)^2 + i\epsilon} \cdot ieQ_q \frac{i(\hat{l} - \hat{k}')}{(l-k')^2 + i\epsilon} i g_3 t_{kj}^a \gamma_\mu v(k') \frac{-i}{l^2 + i\epsilon}.$$

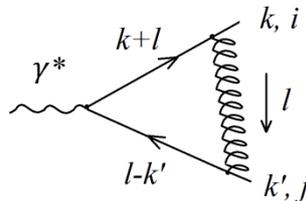


Рис. 15.1. Правая часть диаграммы для виртуальной поправки.

Нас будет интересовать не весь петлевой интеграл, а только его часть, связанная с областью, где глюон находится на массовой поверхности:

$$\text{от } \int dl_0 d^3l \text{ и пропагатора } \frac{1}{l^2 + i\varepsilon}: \quad 2\pi i \frac{1}{2(-\omega_l)}$$

Мюонная часть:

$$\begin{aligned} & \bar{u}(k)\gamma^\mu \hat{k}\gamma^\rho(-\hat{k}')\gamma_\mu v(k') = \\ & = \left\| \gamma^\mu \hat{k}\gamma^\rho(-\hat{k}')\gamma_\mu = 2\hat{k}'\gamma^\rho \hat{k} = 2(2k'^\rho - \gamma^\rho \hat{k}')\hat{k} = \begin{bmatrix} \hat{k}u(k) = 0 \\ \hat{k}'v(k') = 0 \end{bmatrix} = -2\gamma^\rho(2kk' - \hat{k}\hat{k}') \right. \\ & \left. = -4\gamma^\rho kk' \right\| = -4\gamma^\rho kk' \bar{u}(k)v(k') \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iM^{NLO} &= iM^{LO} \left[\int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \frac{g_3^2}{2\omega_l} (-1) \frac{-4kk'}{2kl(-2k'l)} \frac{4}{3} \delta_{ij} + \dots \right] = \\ &= iM^{LO} \left(-\frac{4}{3} g_3^2 \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3 2\omega_l} \frac{kk'}{(kl)(k'l)} \right). \end{aligned}$$

Виртуальная поправка к полному сечению:

$$\sigma^{q\bar{q}} = |iM^{LO} + iM^{NLO}|^2 = \sigma_{LO}^{q\bar{q}} \left(1 - \frac{4}{3} g_3^2 \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3 2\omega_l} \frac{2kk'}{(kl)(k'l)} \right).$$

Сечение с реальной поправкой:

$$\sigma^{q\bar{q}g} = \sigma_{LO}^{q\bar{q}} \frac{4}{3} g_3^2 \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3 2\omega_l} \frac{2kk'}{(kl)(k'l)}.$$

Сумма:

$$\sigma^{q\bar{q}} + \sigma^{q\bar{q}g} = \text{конечная величина.}$$

Так, если мы считаем сечение с рождением реального глюона, то оно бесконечно. Если считаем сечение рождения кварк-антикварковой пары с учетом виртуального глюона, то также получаем отрицательную бесконечную величину. Мы посчитали эти поправки с учетом условий мягкости и коллинеарности глюона. Это означает, что при наличии реального физического детектора, обладающего

определенным разрешением по энергии и углу, мы не сможем разрешить ситуацию с летящим кварком и испускающимся из него мягким коллинеарным глюоном. Так, инфракрасные расходимости сокращаются с учетом петлевых состояний. При учете реальных и виртуальных поправок одновременно получаем конечную величину.

Вероятность рождения глюонов

Обрежем интегралы той областью энергий, в которой справедлива теория возмущений. Обрежем расходящиеся интегралы на величине порядка $\Lambda_{\text{КХД}}$.

В квантовой электродинамике ω_l пропорциональна энергии фотона, а θ — угол между фотоном и фермионом. Если мы учтем массу той частицы, из которой излучаем фотон, то коллинеарной расходимости не будет:

$$0 < E\omega_l \left(1 - \cos\theta \frac{|\vec{E}|}{E} \right) = E\omega_l - \vec{k}\vec{l}.$$

Инфракрасная расходимость никуда не исчезает даже при учете масс кварков. Поэтому в КЭД чаще говорят об инфракрасной расходимости как о более фундаментальной.

В квантовой хромодинамике массами кварков мы тоже пренебрегаем, потому что они малы по сравнению с энергиями.

Вычислим сечение обрезав интегралы. Оценка:

$$\sigma^{q\bar{q}g} \sim \sigma^{q\bar{q}} \frac{8\alpha_s}{3\pi} \int_{\Lambda_{\text{КХД}}}^{\sqrt{s}} \frac{d\omega_l}{\omega_l} \int_{\frac{\Lambda_{\text{КХД}}}{\sqrt{s}}}^1 \frac{d\theta}{\theta} = \sigma^{q\bar{q}} \frac{8\alpha_s}{3\pi} \ln^2 \frac{\sqrt{s}}{\Lambda_{\text{КХД}}}.$$

Давайте фактор, который оценили, обозначим:

$$\frac{8\alpha_s}{3\pi} \ln^2 \frac{\sqrt{s}}{\Lambda_{\text{КХД}}} = A.$$

Этот фактор пропорционален вероятности рождения глюона:

- 0 глюонов: $\sigma^{q\bar{q}}$;
- 1 глюон: $\sigma^{q\bar{q}} \cdot A$;
- 2 глюона: $\sigma^{q\bar{q}} \cdot \frac{A^2}{2!}$;
- N глюонов: $\sigma^{q\bar{q}} \cdot \frac{A^n}{n!} e^{-A}$, e^{-A} — нормировка.

ДЕМИДОВ СЕРГЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

A – среднее число глюонов, которое родится в данной реакции.

Если предположить, что $\sqrt{s} \sim M_Z = 90$ ГэВ, и взять α_s на том же масштабе, то получается:

$$\alpha_s(M_Z) \sim 0.12 \Rightarrow A \cong 3.$$

Адронный джет

По большому счету древесное вычисление не правильное. Оно не дает главного ответа, главный ответ дает диаграмма, в которой излучаются три мягких коллинеарных глюона.

Посмотрим на процесс с другой стороны. Мы считаем полное физическое сечение:

$$\begin{aligned} \sigma^{\text{физич}} &= \left| \begin{array}{c} e^- \\ p \\ \gamma \\ k \\ q \\ e^+ \\ p' \\ k' \\ \bar{q} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} e^- \\ \gamma \\ e^+ \\ \text{глюон } g \end{array} \right|^2 + \\ &+ \left| \begin{array}{c} e^- \\ \gamma \\ e^+ \\ q, k, i \\ k+l \\ g, l, a \\ \bar{q}, k', j \end{array} \right|^2 + \dots = \\ &= \sigma_{LO} \left(1 - \frac{8\alpha_s}{3\pi} \int \frac{d\omega_l d\theta}{\omega_l \theta} A_{\text{virt}}(\omega_l, \theta) \right) + \sigma_{LO} \frac{8\alpha_s}{3\pi} \int \frac{d\omega_l d\theta}{\omega_l \theta} A_{\text{real}}(\omega_l, \theta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{\substack{\omega_l \rightarrow 0 \\ \theta \rightarrow 0, \pi}} [A_{\text{virt}}(\omega_l, \theta) - A_{\text{real}}(\omega_l, \theta)] = 0. \end{aligned}$$

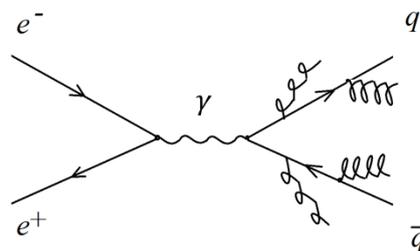


Рис. 15.2. Рождение множества глюонов.

Таким образом, интересующий нас процесс выглядит так, как показано на рис. 15.2. Глюоны могут излучаться в неограниченном количестве. Также нужно просуммировать эту диаграмму со всеми возможными петлевыми вкладами.

В эксперименте, когда измеряется e^+e^- аннигиляция в адронах, никто не измеряет кварки и отдельные глюоны. Например, излученный глюон может расщепиться на два глюона. Так, среднее число излученных глюонов оценено нами не честно – не учли возможность рождения пары глюонов. Можно получить более правильную формулу для среднего количества излученных глюонов с учетом этого эффекта. Кроме того любой глюон может расщепиться и на пару кварк-антикварк, летящую в том же направлении.

В конечном итоге все эти частицы, летящие в одном направлении в какой-то момент **адронизуются** (превращаются в адроны). Постепенно теряя энергию частицы в итоге преобразуются в адроны. Эксперимент регистрирует всю эту струю адронов, летящих в одном направлении. Эта струя называется «**адронный джет**» (рис. 15.3). Правильной физической величиной, которую должен считать теоретик, является не сечение рождения кварк-антикварка, а сечение рождения джета, потому что это экспериментально регистрируемая величина: в лидирующем порядке: σ^{jj} , в следующем порядке: σ^{jjj} . Джет может определяться по-разному. Соседние джеты могут перекрывать друг друга.

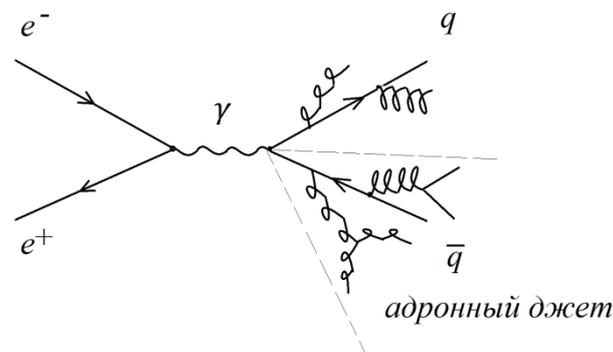


Рис. 15.3. Адронный джет.

Так, отношение e^+e^- аннигиляции в адронах:

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адрон})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = R^{\text{tree}}(s)[1 + \#\alpha_s + \#\alpha_s^2(s) + \dots].$$

Излучение в начальном состоянии

Мы рассмотрели излучение мягких коллинеарных глюонов в конечном состоянии и увидели, что соответствующие расходимости сокращаются при учете петлевых поправок. Можно изучать излучение мягких коллинеарных частиц из начального состояния. Изучим этот процесс на примере КЭД, однако для КХД все аналогично. При рассмотрении этого процесса окажется так, что виртуальные и реальные поправки сокращаются не полностью, остается некоторый конечный вклад.

Пусть в начале есть высокоэнергетичный электрон. Он сталкивается с другой частицей и рождает некоторое конечное состояние (рис. 15.4). Посчитаем поправку к этой реакции, связанную с тем, что из электрона может происходить мягкое излучение. Например, электрон может испустить мягкий коллинеарный фотон.

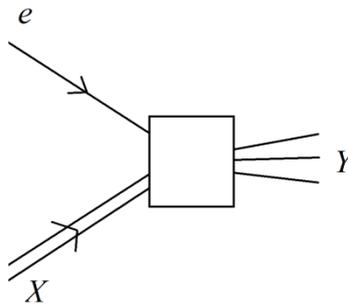


Рис.15.4. Столкновение электрона с другой частицей.

Рассмотрим отдельно кинематику (рис. 15.5). Пусть p – начальный импульс электрона, q – импульс излученного фотона, k – импульс электрона после излучения фотона. В жесткой реакции с протоном участвует электрон.

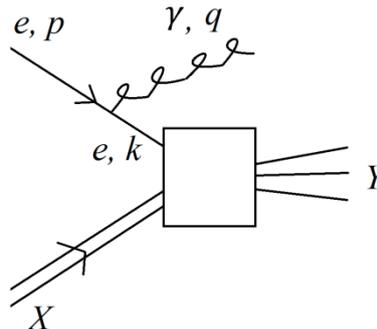


Рис. 15.5. В жесткую реакцию вступает электрон.

Возможен и другой вариант – в реакции с протоном участвует фотон, а электрон улетает (рис. 15.6).

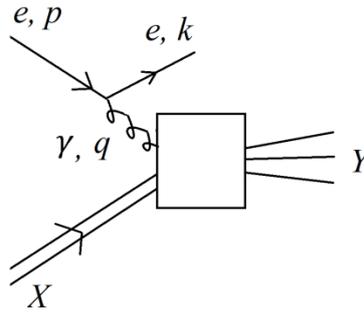


Рис. 15.6. В жесткую реакцию вступает фотон.

Обе диаграммы являются поправками к первому процессу.

Поскольку электрон высокоэнергетичный, будем пренебрегать его массой. Введем оси x и z . начальный электрон летит по направлению оси z .

$$p = (p, 0, 0, p),$$

$$q \cong (zp, p_{\perp}, 0, zp),$$

$$k \cong ((1-z)p, -p_{\perp}, 0, (1-z)p).$$

$$p^2 = 0, q^2 = -p_{\perp}^2, k^2 = -p_{\perp}^2.$$

В случае, изображенном на рисунке 13.5, фотон реальный, на массовой поверхности его виртуальность должна быть строго нулевой, а электрон виртуальный с ненулевой виртуальностью. Нос выбранной нами кинематикой мы получили одинаковые виртуальности для излученного фотона и электрона после излучения. Унифицируем виртуальности так, чтобы виртуальность излученного фотона с рисунка 13.5 была, по крайней мере, параметрически меньше, чем у электрона (имеется в виду малость по отношению к параметру):

$$q \cong \left(zp, p_{\perp}, 0, zp - \frac{p_{\perp}^2}{2zp} \right),$$

$$k \cong \left((1-z)p, -p_{\perp}, 0, (1-z)p + \frac{p_{\perp}^2}{2zp} \right) \Rightarrow$$

$$q^2 = -\frac{p_{\perp}^4}{4z^2 p^2}, k^2 = -\frac{p_{\perp}^2}{z}.$$

Так виртуальность q^2 параметрически меньше, чем k^2 .

Для второго процесса (рис. 15.6) необходимо потребовать равенства нулю или по крайней мере параметрической малости виртуальности k :

$$q \cong \left(zp, p_{\perp}, 0, zp - \frac{p_{\perp}^2}{2(1-z)p} \right),$$

$$k \cong \left((1-z)p, -p_{\perp}, 0, (1-z)p + \frac{p_{\perp}^2}{2(1-z)p} \right) \Rightarrow$$

$$q^2 = -\frac{p_{\perp}^2}{1-z}, k^2 = O(p_{\perp}^4).$$

Другими словами это подбор кинематики для того, чтобы различать виртуальную и реальную частицы в конечном состоянии.

Обратим внимание на первый процесс (рис. 15.5). Матричный элемент этого процесса:

$$iM_{tot} = iM_{box} \frac{i\hat{k}}{k^2} \gamma^{\mu} (-ie) u(p) \varepsilon_{\mu}^*(q).$$

box – вся диаграмма за исключением начальной электронной ветки.

Формула суммирования по поляризациям:

$$\sum_{\text{пол}} u(k) \bar{u}(k) = \hat{k} -$$

справедливо для физического вектора k , у которого $k^2 = 0$. В нашем случае k почти на массовой поверхности с точностью до маленькой виртуальности. Поэтому \hat{k} можно представить следующим образом:

$$\hat{k} = \sum_{\text{пол}} u(k) \bar{u}(k) + O(p_{\perp}^2).$$

Тогда пропагатор можно разбить на сумму двух спинорных решений:

$$iM_{tot} = M(e(k)X \rightarrow Y) \frac{i}{k^2} M(e(p) \rightarrow e(k)) + O(p_{\perp}^2).$$

Лекция 16

Излучение в начальном состоянии. Уравнения DGLAP и Альтарелли-Паризи

Излучение в начальном состоянии

На прошлой лекции мы начали рассматривать процессы излучения в квантовой электродинамике в начальном состоянии двух типов (рис.15.5 и рис. 15.6). В первом случае (рис.15.5) в жесткую реакцию с протоном вступает электрон, во втором (рис. 15.6) – фотон. Мы начали рассматривать первый случай. Кинематика:

$$\begin{aligned} p^\mu &= (p, 0, 0, p), \\ q^\mu &\cong (zp, p_\perp, 0, zp), \\ k^\mu &\cong ((1-z)p, -p_\perp, 0, (1-z)p). \end{aligned}$$

Виртуальность излученного фотона с рисунка 15.5 должна быть по крайней мере параметрически меньше, чем у электрона:

$$\begin{aligned} q &\cong \left(zp, p_\perp, 0, zp - \frac{p_\perp^2}{2zp} \right), \\ k &\cong \left((1-z)p, -p_\perp, 0, (1-z)p + \frac{p_\perp^2}{2zp} \right) \Rightarrow \\ q^2 &= O(p_\perp^4), \quad k^2 = -\frac{p_\perp^2}{z}. \end{aligned}$$

Для второго случая (рис. 15.6):

$$\begin{aligned} q &\cong \left(zp, p_\perp, 0, zp - \frac{p_\perp^2}{2(1-z)p} \right), \\ k &\cong \left((1-z)p, -p_\perp, 0, (1-z)p + \frac{p_\perp^2}{2(1-z)p} \right) \Rightarrow \\ q^2 &= -\frac{p_\perp^2}{1-z}, \quad k^2 = O(p_\perp^4). \end{aligned}$$

Матричный элемент для первого случая:

$$iM_{tot} = iM_{box} \frac{i\hat{k}}{k^2} \gamma^\mu (-ie) u(p) \varepsilon_\mu^*(q) =$$

$$= \left\| \hat{k} = \sum_{\text{пол}} u(k) \bar{u}(k) + O(p_{\perp}^2) \right\| \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} |M(e \rightarrow e\gamma)|^2 = \frac{2e^2 p_{\perp}^2}{z(1-z)} \frac{1 + (1-z)^2}{z} + O(p_{\perp}^4).$$

Последнее выражение не зависит от того, какая из частиц виртуальна.

Рассчитаем сечение для диаграммы второго типа (рис. 15.6). Полное сечение рассеяния электрона:

$$\sigma(eX \rightarrow eY) = \frac{1}{2p2E_x(1+v_x)} \int \frac{1}{2} \left| \sum_{\text{пол.}} M(e \rightarrow e\gamma) \right|^2 \frac{1}{(q^2)^2} |M_{\gamma X}|^2 d\Phi_Y \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} =$$

$$= \left\| d^3k = dk^3 d^2k_{\perp} \rightarrow pdz 2\pi p_{\perp} dp_{\perp} = \pi p dz dp_{\perp}^2 \right\| =$$

$$= \int \frac{\pi p dz dp_{\perp}^2}{8\pi^3 2(1-z)p} \frac{(1-z)^2}{p_{\perp}^4} \frac{1}{2} \left| \sum_{\text{пол.}} M(e \rightarrow e\gamma) \right|^2 \frac{z}{2zp2E_x(1+v_x)} |M_{\gamma X}|^2 d\Phi_x =$$

$$= \sigma(\gamma(zp)X \rightarrow Y) =$$

$$= \int \frac{dz dp_{\perp}^2}{16\pi^2} \frac{z(1-z)}{p_{\perp}^4} \frac{2e^2 p_{\perp}^2}{z(1-z)} \frac{1 + (1-z)^2}{z} \sigma(\gamma(zp)X \rightarrow Y) =$$

Мы представили сечение процесса диаграммы 15.6, как сечение процесса, задаваемое жестким фотоном.

$$= \left\| \alpha = \frac{e^2}{4\pi} \right\| = \int_0^1 dz \int_{m_e^2}^s \frac{dp_{\perp}^2}{p_{\perp}^2} \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1 + (1-z)^2}{z} \sigma(\gamma(zp)X \rightarrow Y) =$$

$$= \int_0^1 dz f(z) \sigma(\gamma(zp)X \rightarrow Y) -$$

напоминает выражение для сечения в партонной модели. Приближение, в котором мы рассчитываем сечение – **приближение Вайцеккера-Вильямса**.

Обобщим полученные для второго процесса результаты на первый процесс (рис. 15.5):

$$\sigma(e(p)X \rightarrow \gamma Y) = \int_0^1 dz \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{s}{m_e^2} \frac{1 + (1-z)^2}{z} \sigma(e((1-z)p)X \rightarrow Y) =$$

$$= ||x = 1 - z|| = \int_0^1 dx \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{s}{m_e^2} \frac{1+x^2}{1-x} \sigma(e(xp)X \rightarrow Y) \equiv \int_0^1 dx f_e(x) \sigma(e(xp)X \rightarrow Y)$$

$$f_e(x) = \delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{s}{m_e^2} \frac{1+x^2}{1-x} -$$

при интегрировании возникнет логарифмическая расходимость:

$$\sigma(e(xp)X \rightarrow Y) \rightarrow const,$$

$$\int_0^1 dx \frac{1}{1-x} - \text{логарифмически расходится.}$$

$x = 1 \Rightarrow q = 0$ – фотон имеет очень маленькую энергию, излучение мягких фотонов, которое мы изучали ранее. Таким образом, расходимость ожидаема (это инфракрасная расходимость). Эта расходимость сокращается петлевыми диаграммами при учете виртуального излучения. При добавлении петлевого фотона сечение изменится на вклад порядка $\delta(1-x)$:

$$f_e(x) = \delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{s}{m_e^2} \left(\frac{1+x^2}{1-x} - \tilde{A} \delta(1-x) \right),$$

\tilde{A} – формально бесконечная величина, $\tilde{A} \delta(1-x)$ – вклад от петель.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \left(\delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{s}{m_e^2} \left(\frac{1+x^2}{1-x} - \tilde{A} \delta(1-x) \right) \right) \sigma(e(xp)X \rightarrow Y) = \\ & = \left| \left| \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{s}{m_e^2} \frac{1+x^2}{1-x} \sigma(e(xp)X \rightarrow Y) - \sigma(e(p)X \rightarrow Y) + \sigma(e(p)X \rightarrow Y) \right| \right| = \\ & = \left| \left| \frac{1}{(1-x)_+} : \int_0^1 \frac{f(x) dx}{(1-x)_+} \equiv \int_0^1 \frac{f(x) - f(1)}{1-x} dx \right| \right| = \\ & = \int_0^1 dx \left(\delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{s}{m_e^2} \left(\frac{1+x^2}{(1-x)_+} - A \delta(1-x) \right) \right), \end{aligned}$$

$A \delta(1-x)$ – то, что осталось после сокращения инфракрасных расходимостей,

$f_e(x) = \delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{s}{m_e^2} \left(\frac{1+x^2}{(1-x)_+} - A \delta(1-x) \right)$ – партонная функция распределения электронов в электроны,

ДЕМИДОВ СЕРГЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

A – конечное число,

$f_\gamma(x) = \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{s}{m_e^2} \frac{1+(1-x)^2}{x}$ – вторая партонная функция распределения.

У этого набора партонных функций распределения будут некоторые интегральные законы сохранения. Все партонны несут полный импульс и все квантовые числа исходной частицы. В данном случае мы говорим об электроне. Фотон заряд не переносит, соответственно весь заряд переносится электроном.

$$\int_0^1 f_e(x) dx = 1 \Rightarrow$$

можно определить A :

$$A = -\frac{3}{2}.$$

Таким образом, полная функция распределения электронов в электроне в этой модели:

$$f_e(x) = \delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{s}{m_e^2} \left(\frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-x) \right).$$

Множественное излучение в начальном состоянии

Мы изучили, как рассчитывать сечение при однократном излучении.

σ_0 – сечение без излучения фотона,

$\frac{dp_\perp^2}{p_\perp^2} \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1+(1-z)^2}{z}$ – вероятность излучения фотона с импульсом в интервале $(p_\perp, p_\perp + dp_\perp)$,

$\sigma_1 \sim \alpha \ln \frac{s}{m_e^2}$ – сечение с учетом излучения одного фотона.

Можно изобразить диаграммы с излучением двух фотонов из ноги и показать, что при определенном соотношении между поперечными импульсами:

$$\sigma_2 \sim \alpha^2 \ln^2 \frac{s}{m_e^2},$$

$$p_{\perp 1} (\text{внешн.}) \gg p_{\perp 2} (\text{внутр.}).$$

Это связано с тем, что при излучении электроном фотона $p_{\perp 2}$ электрон стал чуть-чуть виртуальным. После электрон излучил еще один фотон, чей поперечный импульс значительно больше, чем виртуальность электрона. То есть для излучения

второго фотона чуть-чуть виртуальный электрон находится практически на массовой поверхности.

Это говорит о том, что при рассмотрении всех таких процессов, каждый раз будем получать фазу $\alpha \ln \frac{s}{m_e^2}$. Ситуация похожа на ситуацию в ренормгруппе. Здесь также есть два масштаба: на одном обрезаются коллинеарные расходимости (масса электрона), а второй масштаб – характерные энергии реакции, которая происходит.

DGLAP

Интересно было бы просуммировать все эти логарифмы так же, как в ренормгруппе. Этим занимается уравнение Альтарелли-Паризи в КХД или уравнение Докшицера-Грибова-Липатов. DGLAP – система уравнений, которая суммирует логарифмические вклады.

Чтобы понять эти уравнения, введем другие функции распределения:

$$f_e(x, Q^2), f_\gamma(x, Q^2).$$

$f_e(x)dx$ – вероятность найти электрон с долей импульса x от исходной частицы, дающей жесткую реакцию.

$f_{e,\gamma}(x, Q^2)dx$ – вероятность найти определенный партон в исходной частице с учетом того, что доля просуммированного мягкого излучения не превышает Q^2 .

Изучим теперь зависимость от Q^2 : $Q^2 \rightarrow Q^2 + dQ^2$.

$$f_\gamma(x, Q^2 + dQ^2)dx = f_\gamma(x, Q^2)dx + \int f_e(x', Q^2)dx' dz \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dQ^2}{Q^2} \frac{1 + (1-z)^2}{z},$$

$$zx' = x \Rightarrow dx' = \frac{dx}{z},$$

x' – доля импульса исходного электрона, x – доля импульса жестко взаимодействующего фотона.

$$f_\gamma(x, Q^2 + dQ^2)dx = f_\gamma(x, Q^2)dx + dx \int \frac{dz}{z} \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dQ^2}{Q^2} \frac{1 + (1-z)^2}{z} f_e\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) =$$

$$= \left| \left| z = \frac{x}{x'} \Rightarrow z \in (x, 1) \right| \right| \Rightarrow$$

$$\frac{df_\gamma(x, Q^2)}{d \ln Q^2} = dx \frac{\alpha}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \frac{1 + (1-z)^2}{z} f_e\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) = \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{e \rightarrow \gamma}(z) f_e\left(\frac{x}{z}, Q^2\right),$$

ДЕМИДОВ СЕРГЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

$P_{e \rightarrow \gamma}(z)$ – функция расщепления электрона в фотон:

$$P_{e \rightarrow \gamma}(z) = \frac{\alpha(Q^2)}{2\pi} \frac{1 + (1-z)^2}{z}$$

Аналогично для $f_e(x, Q^2)$:

$$\frac{df_e(x, Q^2)}{d \ln Q^2} = \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{e \rightarrow e}(z) f_e\left(\frac{x}{z}, Q^2\right),$$

$P_{e \rightarrow e}(z)$ – функция расщепления электрона в электрон:

$$P_{e \rightarrow e}(z) = \frac{\alpha(Q^2)}{2\pi} \left(\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right).$$

Для полной системы уравнений необходимо также уравнения расщепления в электрон-позитронную пару:

$$P_{\gamma \rightarrow e}(z) = \frac{\alpha(Q^2)}{2\pi} (z^2 + (1-z)^2).$$

И функция расщепления фотона в фотон:

$$P_{\gamma \rightarrow \gamma}(z) = \frac{\alpha(Q^2)}{2\pi} (1-z).$$

Полная система уравнений DGLAP:

$$\begin{cases} \frac{d}{d \ln Q^2} f_\gamma(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dz}{z} [P_{e \rightarrow \gamma}(z) [f_e\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) + f_{e^+}\left(\frac{x}{z}, Q^2\right)] + P_{\gamma \rightarrow \gamma}(z) f_\gamma\left(\frac{x}{z}, Q^2\right)] \\ \frac{d}{d \ln Q^2} f_e(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dz}{z} [P_{e \rightarrow e}(z) f_e\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) + P_{\gamma \rightarrow e}(z) f_\gamma\left(\frac{x}{z}, Q^2\right)] \\ \frac{d}{d \ln Q^2} f_{e^+}(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dz}{z} [P_{e \rightarrow e}(z) f_{e^+}\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) + P_{\gamma \rightarrow e}(z) f_\gamma\left(\frac{x}{z}, Q^2\right)] \end{cases}$$

Начальные условия:

$$\begin{cases} f_e(x, Q^2 = m_e^2) = \delta(1-x) \\ f_\gamma(x, Q^2 = m_e^2) = f_{e^+}(x, Q^2 = m_e^2) = 0 \end{cases}$$

Уравнения Альтарелли-Паризи

Все то же самое происходит при переходе в КХД. Теперь у нас есть кварки, антикварки, глюоны. Пусть кварк распадается в кварк и глюон. Все будет аналогично

КЭД за исключением цветовых факторов – в вершине будет стоять матрица генератор t_{ij}^a , будет необходимо усреднять и суммировать по цветам. Поэтому кинематически зависимость будет та же, что и в КЭД. Второе отличие заключается в наличии в КХД трехглюонной вершины, которой не было в КЭД. Так, глюон может расщепиться на глюон и глюон с меньшей энергией, появится дополнительная функция расщепления глюона в глюон.

$$P_{q \rightarrow q}(z) = \frac{\alpha(Q^2)}{2\pi} \frac{4}{3} \left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right],$$

$$P_{q \rightarrow g}(z) = \frac{\alpha(Q^2)}{2\pi} \frac{4}{3} \frac{1+(1-z)^2}{z},$$

$$P_{g \rightarrow q}(z) = \frac{\alpha(Q^2)}{2\pi} \frac{1}{2} (z^2 + (1-z)^2),$$

$$P_{g \rightarrow g}(z) = \frac{\alpha(Q^2)}{2\pi} 6 \left[\frac{1-z}{z} + \frac{z}{(1-z)_+} + z(1-z) + \frac{11}{12} - \frac{n_\varphi}{18} \delta(1-z) \right].$$

Эволюционные уравнения в КХД на партонные функции распределения носят название *уравнений Альтарелли-Паризи* и используются во всех генераторах при расчете сечений при определенном масштабе:

$$\begin{cases} \frac{d}{d \ln Q^2} f_g(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dz}{z} \sum_i [P_{q_i \rightarrow g}(z) [f_{q_i}(\frac{x}{z}, Q^2) + f_{\bar{q}_i}(\frac{x}{z}, Q^2)] + P_{g \rightarrow g}(z) f_g(\frac{x}{z}, Q^2)] \\ \frac{d}{d \ln Q^2} f_q(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dz}{z} [P_{q \rightarrow q}(z) f_q(\frac{x}{z}, Q^2) + P_{g \rightarrow q}(z) f_g(\frac{x}{z}, Q^2)] \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

Для антикварков аналогичные уравнения.

Отличие КХД от КЭД в том, что мы не можем пойти в область очень маленьких Q^2 , потому что мягкое излучение соответствует теории сильной связи, то есть не можем подставить туда начальные условия. Начальные условия в случае КХД задаются бьеркенским пределом.



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ