ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРИЯ ГРУПП. ЧАСТЬ 1

ИСАЕВ
АЛЕКСЕЙ ПЕТРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

Содержание

1 Лекция 1. Группы: основные понятия и определения 6

1.1 Определение группы . . . 6
1.2 Свойства . . . 6
1.3 Гомоморфизмы и изоморфизмы групп . . . 7
1.4 Прямое произведение групп. Подгруппы. Смежные классы . . . 8
1.5 Нормальные подгруппы . . . 9
1.6 Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа . . . 12
1.7 Группа перестановок. Группа кос . . . 13
1.7.1 Перемножение перестановок . . . 13
1.8 Матричные группы . . . 15

2 Лекция 2. Полупрямое произведение групп. Линейные неоднородные группы 18

2.1 Точные последовательности . . . 18
2.2 Образ отображения. Ядро отображения . . . 19
2.3 Точная последовательности . . . 20
2.3.1 Инвариантная подгруппа . . . 21
2.3.2 Простейшие точные последовательности . . . 21
2.4 Полупрямое произведение . . . 24
2.5 Группа Пуанкаре . . . 26

3 Лекция 3. Матричные группы. Линейные, унитарные, ортогональные и симплектические группы 27

3.1 Переосмысление понятия умножения . . . 27
3.2 Линейные группы . . . 28
3.3 Ортогональные и псевдоортогональные группы . . . 30
3.4 Симплектические группы . . . 32
3.5 Унитарные и псевдоунитарные группы . . . 34

4 Лекция 4. Многообразия. Группы Ли 36

4.1 Группа Ли. Гладкое многообразие . . . 36
4.2 Гомеоморфизм . . . 39
4.3 Гладкая кривая. Связанность, односвязность и гомотопия . . . 39

4.4 Вложенные многообразия 41
4.4.1 Примеры неособых поверхностей 42
4.4.2 Многомерный аналог однополостного гиперболоида 42
4.4.3 Пространство де Ситтера dS^n, вложенное в R^{n+1}. 43
4.4.4 Примеры многообразий матричных групп Ли 43

5 Лекция 5. Компактные и некомпактные группы Ли. Касательные пространства к многообразиям 46
5.1 Компактные группы Ли 46
5.2 Примеры компактных групп Ли 47
5.3 Примеры некомпактных групп Ли. Двумерная группа Лоренца. Бусты 49
5.4 Касательные многообразия к многообразиям 52

6 Лекция 6. Алгебры Ли линейных групп 54
6.1 Построение алгебры Ли. Коммутатор 54
6.2 Алгебры Ли линейных групп 56
6.3 Детерминант и пфаффиан матрицы 57
6.4 Прямые сумма и произведение матриц 58

7 Лекция 7. Гомоморфизмы и изоморфизмы алгебры Ли. Универсальные накрывающие группы 62
7.1 Определение алгебры Ли 62
7.2 Овеществление и комплексификация векторного пространства . . 62
7.3 Структурные соотношения и структурные константы алгебр Ли . 63
7.4 Вещественная форма алгебры Ли 64
7.5 Гомоморфизмы и изоморфизмы алгебр Ли 66
7.6 Вещественные формы матричных алгебр Ли 66
7.7 Примеры изоморфизмов алгебр Ли 67
7.8 Универсальные накрывающие группы 69

8 Лекция 8. Регулярные представления 70
8.1 Регулярные представления -группы $SU(N)$ 70
8.2 Прямое произведение определяющих представлений 71
8.3 Представление для соседней транспозиции 72

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

8.4 Утверждение 72
8.5 Пример 73

9 Лекция 9. Представления групп и представления алгебры Ли 75
9.1 Действие группы на множестве 75
9.2 Линейное представление группы 75
9.3 Унитарное представление группы 76
9.4 Примеры представлений групп 77
9.5 Регулярное представление группы 79
9.6 Представления алгебры Ли 79
9.7 Примеры представлений алгебры Ли 80

10 Лекция 10. Прямое произведение и прямая сумма представлений 82
10.1 Эквивалентные представления 82
10.2 Прямое произведение и прямая сумма представлений 83
10.3 Приводимые и неприводимые представления 87
10.4 Инвариантное пространство 88
10.5 Прямое произведение и прямая сумма представлений алгебры Ли 89

11 Лекция 11. Критерий неприводимости представлений. Лемма Шура 90
11.1 Критерий неприводимости представлений. Лемма Шура 90
11.2 Следствия из леммы Шура 93
11.3 Свойства представлений компактных групп Ли 94
11.4 Выделение неприводимых представлений из прямого произведения определяющих представлений 96

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 1. Группы: основные понятия и определения

Определение группы

Определение 1.1. ***Группа*** *– это множество элементов, на котором задано умножение, не выводящее из группы.*

$$\{g_1, g_2 \cdots g_n\} \tag{1.1}$$

Свойства

- Произведение любых двух элементов множества принадлежит этому же множеству;

$$g_1 g_2 = g_3 \tag{1.2}$$

- Множество ассоциативное;

$$g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3 \tag{1.3}$$

- Существует обратный элемент.

$$\forall g \quad \textit{существует} \quad g^{-1} \tag{1.4}$$

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e$$

где e – единичный элемент

Итого: операция умножения не выводит из группы, она ассоциативная, существует единичный и обратный элементы. Такое множество называется **группой**.

Определение 1.2. ***Симметрия*** *– это группа, так как у неё всегда есть обратный и единичный элементы. Многие группы задаются симметрией.*

Порядок группы (количество элементов)

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$ord \quad G = N(g)$$

где N – это число элементов

Группы разделяют на *конечные* и *бесконечные*. Также выделяют *дискретные группы*

Определение 1.3. ***Дискретные группы*** *– это группы, количество элементов в которых конечно или чётное число*

Умножение в группе не эквивалентно общепринятому понятию умножения. Данную операцию нужно понимать как абстрактное сопоставление двух элементов группы одному элементу.

Простой пример группы – Z_2 – это сложение чисел по модулю 2 (0,1). Операция в данной группе – это сложение двух данных чисел: 0 + 1, 1 + 0, 0 + 0, 1 + 1. Единичным элементом в данной группе является 0, так как $0+0=0$.

Следующий пример Z_n - *группа сложения/умножения элементов по модулю* n. Элементами данной группы будем считать 1 и g.

$$1, g, g^2, g^3 ... g^{n-1}$$
$$g^n = 1$$

Между группами существуют *изоморфизмы* и *гомоморфизмы*.

Гомоморфизмы и изоморфизмы групп

В случае изоморфизма можно построить взаимно однозначное соответствие таким образом, что отображение сохраняет операцию умножения. Изображение является взаимно однозначным гомоморфизмом.

Определение 1.4. ***Гомоморфизм*** *– это отображение, которое сохраняет групповую структуру.*

$$\rho(g_1)\rho(g_2) = \rho(g_1 \cdot g_2) \quad \textit{условие гомоморфизма групп} \tag{1.5}$$

Примеры групп

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Группа Z_n *является абелевой группой (коммутативной).*

$$g_1 g_2 = g_2 g_1 \quad \textit{условие коммутативности} \tag{1.6}$$

Группа C_n ***(группа диэдра)*** *– это правильный n-угольник, который разрешено поворачивать, при условии, что он совпадает сам с собой.*

Группы C_n и Z_n идентичны, и в большинстве случаев элемент группы g рассматривается как минимальный угол поворота n-угольника группы C_n.

Диэдра *– это два правильных n-угольника, "склеенных" по всем вершинам друг с другом.*

Диэдральные группы можно переворачивать, эту операцию можно свести к отражению от любой оси n-угольника. Отражение и поворот не равны, так как при повороте сохраняется обход, а при отражении обход вершин будет идти в противоположную сторону. Группа C_n не является абелевой (в общем случае).

$$gr \neq rg$$

Группы Z_n и C_n являются конечными.

Примерами бесконечных групп являются $(Z, +)$, $(R, \{0\}, \times)$. Обе группы дискретны.

Прямое произведение групп. Подгруппы. Смежные классы

$$(G_1 \times G_2) = G$$

Возьмем элементы $(g_1, g_2) = g_3$ принадлежащие G_1 и G_2 соответственно.

$$(g_1' g_2') = g_3'$$

Тогда

$$g_3 g_3' = (g_1 g_1', g_2 g_2')$$

Если существует конечная группа, то её можно легко описать с помощью всех возможных произведений, приведенных в таблице Кэли. Если у двух групп элементы таблицы Кэли совпадают, то группы одинаковые.

Определение 1.5. ***Подгруппа*** *- это группа, состоящая из подмножества элементов группы.*

В любой группе есть минимум 2 подгруппы: тривиальная (единица или сама группа) и нетривиальная.

Рассмотрим группу $Z_2 \times Z_2$ в которой 4 элемента: (0,0), (0,1), (1,0) и (1,1). Подгруппами этой группы являются: (0,0), (0,1) и (0,0), (1,0), так как при перемножении данных элементов всегда получим один из элементов подгруппы.

Определение 1.6. ***Смежный класс*** *– это множество элементов следующего вида:*

$$\{gh_1, gh_2 ...\} \tag{1.7}$$

где g – элемент, принадлежащий группе G, и h – это элемент, принадлежащий подгруппе H. У каждого элемента в группе есть смежный класс по подгруппе. Смежный класс может быть левым или правым. Смежный класс можно назвать группой, в случае, если левый смежный класс совпадает с правым.

$$gH = Hg$$

Данное условие выполняется, когда подгруппа является ***нормальной****.*

Нормальные подгруппы

$$ghg^{-1} \in H \quad \text{— условие нормальной подгруппы}$$

Присоединенное действие группы не выводит из подгруппы для любого элемента группы H.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ВАЖНО: *у абелевых групп бывают только нормальные подгруппы.*

В нормальной подгруппе все смежные классы являются группами и называются **фактор–группы** G/H.

Определение 1.7. ***Фактор-группа*** *– это группа, образованная смежными классами элементов* G *по подгруппе* H.

Пример 1.1. $Z_2 \times Z_2/(e, Z_2)$

Построим смежные классы

$$(e, Z_2) = \begin{matrix} (0,0) \\ (0,1) \end{matrix}$$

Умножаем единичный элемент на подгруппу

$$(0,0)(e, Z_2) = \begin{matrix} (0,0) \\ (0,1) \end{matrix}$$

$$(0,1)(e, Z_2) = \begin{matrix} (0,0) \\ (0,1) \end{matrix}$$

$$(1,0)(e, Z_2) = \begin{matrix} (1,0) \\ (1,1) \end{matrix}$$

$$(1,1)(e, Z_2) = \begin{matrix} (1,0) \\ (1,1) \end{matrix}$$

Получили 2 различных смежных класса

$$\begin{pmatrix} 0,0 \\ 0,1 \end{pmatrix} \textit{первый смежный класс} \tag{1.8}$$

$$\begin{pmatrix} 1,0 \\ 1,1 \end{pmatrix} \textit{второй смежный класс} \tag{1.9}$$

Смежные классы путём перемножения образуют группу. Перемножим элементы внутри смежного класса 1.8.

$$\begin{pmatrix}0,0\\0,1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,0\\0,1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,0\\0,1\end{pmatrix}$$

Перемножим элементы внутри смежного класса 1.9.

$$\begin{pmatrix}1,0\\1,1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1,0\\1,1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,0\\0,1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0,0\\0,1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1,0\\1,1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,0\\1,1\end{pmatrix}$$

Смежный класс 1.8 соответствует e, а смежный класс 1.9 соответствует g. Установили, что фактор группы

$$\frac{Z_2\times Z_2}{(e,Z_2)}=Z_2$$

$$e\times e=e$$

$$g\times g=g$$

$$e\times g=g$$

Приходим к выводу, что

$$\frac{(G_1\times G_2)}{G_1}=G_2$$

Группа Z_4

Поделим группу Z_4 на Z_2:

$$\frac{Z_4}{Z_2}=Z_2$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

В группу Z_4 входят элементы: 0, 1, 2 и 3. Нормальной подгруппой является (0,2). Умножаем элементы группы на нормальную подгруппу.

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \times (0,2) = \begin{matrix} 0,2 \\ 1,2 \\ 2,0 \\ 3,1 \end{matrix}$$

Выделяем 2 смежных класса: $(0,2) = e$ и $(1,3) = g$.

Пример 1.2. $\dfrac{Z_4 \times Z_2}{Z_2}$

Существует 2 варианта деления данных групп. При делении на Z_2, стоящую в числителе, получим Z_4.

$$\frac{Z_4 \times Z_2}{Z_2} = Z_4$$

При делении на Z_2, которая является нормальной подгруппой Z_4 получим $Z_2 \times Z_2$.

$$\frac{Z_4 \times Z_2}{Z_2} = Z_2 \times Z_2$$

$Z_4 \neq Z_2 \times Z_2$, поэтому делить можно по разному.

Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа

Определение 1.8. ***Индекс подгруппы*** *– это количество смежных классов по этой подгруппе.*

Теорема 1.1 (теорема Лагранжа)**.** *Количество элементов в группе – это количество элементов в подгруппе умноженное на количество смежных классов.*

$$ord \quad G = ord \quad H \cdot ind \quad H$$

Для нормальной подгруппы все смежные классы либо не совпадают, либо не пересекаются.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Группа перестановок. Группа кос

Элементом группы перестановок S_n является отображение, которое ставит в соответствие набору S_n $(1,2,3...n)$ какое-либо другое размещение данных элементов. Простейшая перестановка может быть представлена как:

$$(1,2,3...n)$$
$$(2,1,3...n)$$

Размерность такой группы равна $n!$

Любая конечная группа является подгруппой группы перестановок. Так как в группе конечное число элементов, и их произведение дает элементы этой же группы, что равнозначно перестановке элементов в группе.

Перемножение перестановок

Пример перемножения перестановок группы $S_3\{1,2,3\}$. Имеем несколько вариантов перестановок:

- Первая перестановка

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 2,1,3 \end{pmatrix}$$

- Вторая перестановка

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 1,3,2 \end{pmatrix}$$

При перемножении перестановок нужно чтобы нижняя строка первой перестановки совпадала с верхней строкой второй перестановки.

$$\begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 2,1,3 \\ 3,1,2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 3,1,2 \end{pmatrix} - \textit{итоговая перестановка}$$

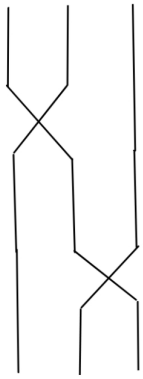

Рис. 1.1. Изображение перемножения группы перестановок

Любой элемент группы перестановок можно построить из сдвига группы на 1 и смены первой пары.

Получить группу перестановок можно несколькими способами:

1) В качестве образующей группы перестановок взять σ_i – соседнюю транспозицию ($i = 1...n-1$).

2) При выборе σ_1 и c.
$$c = \begin{pmatrix} 1,2,3...n \\ 2,3,4...n-1 \end{pmatrix}$$

Группу перестановок можно охарактеризовать как набор элементов σ_i для которого существует следующее условие:

$$\sigma_i^2 = 1$$

$$\sigma_i \cdot \sigma_j = \sigma_j \cdot \sigma_i \quad \textit{если} \quad |i-j| > 1$$

$$\sigma_{i+1} \cdot \sigma_i = \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \quad \textit{если} \quad |i-j| = 1 - \textit{уравнение Янга-Бакстера}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 1.9. ***Группа кос***

Группой кос *называется группа перестановок без условия* $\sigma_i^2 = 1$. *Данная группа бесконечная.*

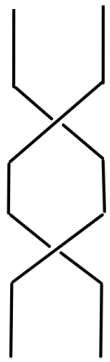

Рис. 1.2. Пример изображения группы кос

Порядок нитей в группе кос также прослеживается. Группа кос используется в узлах, так как практически является узлом. В непрерывных группах выделяют группу $U(1)$ – *это группа комплексных чисел, по модулю равных 1*. Элементы такой группы – $e^{i\varphi}$. Элементы перемножаются по правилам перемножения комплексных чисел.

В бесконечных группах выделяют ***группы Ли***.

Определение 1.10. ***Группы Ли*** *– это группы, множества элементов которых образуют многообразие. Простейшие группы Ли – это* $U(1)$ *– многообразие окружностей.*

Матричные группы

Определение 1.11. ***Группы*** $SO(n)$ *– матричные группы* $n \times n$ *с двумя условиями:*

1) *Условие ортогональности;*

$$O \cdot O^T = I$$

где I *– это единичная матрица*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Помимо условия ортогональности выделяют условие не ортогональности (псевдо-ортогональная матрица Op,q).

$$OI_{p,q}O^T = Ip,q$$

2) Данные группы невырожденные.

$$detO = 1 \tag{1.10}$$

Группа $S \quad O(2)$ представляет собой матрицу 2×2, такую что $O \cdot O^T = I$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

При отсутствии условия 1.10 матрица $SO(n)$ становится $O(n)$.

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$ac + bd = 0$$

$$c^2 + d^2 = 1$$

Тогда элементы a, d, c и d равны соответственно:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Не любая произвольная матрица является группой, так как не у любой матрицы есть обратная ей. Если матрица невырожденная, то у неё есть обратная.

Группа $GL(n)$ представляет группу невырожденных матриц. Подгруппой матрицы $GL(n)$ является матрица $SL(n)$ – *группа специальных линейных матриц.*

Матрицы $U(n)$ – *это унитарные матрицы, группы комплексных матриц на n.*

$$UU^+ = I$$

$SU(n)$ *– это группы унитарных матриц с условием* $detU = 1$.

$Sp(2n)$ *– это симплектическая матрица* $2n \times 2n$ *со следующим условием:*

$$GJG^T = J$$

$$Sp(2n) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

Лекция 2. Полупрямое произведение групп. Линейные неоднородные группы

Точные последовательности

Определение 2.1. ***Гомоморфизм*** *– это такое отображение из одной группы в другую, что элементу/элементам из группы G сопоставляется только один элемент из группы G'.*

Определение 2.2. ***Однозначное отображение (мономорфизм)*** *– сопоставление одного элемента группы G группе G', и* ***неоднозначное отображение*** *– это сопоставление нескольких элементов группы G группе G'.*

В случае гомоморфизма сохраняется групповое произведение 1.6.

Выделяют:

1) **Мономорфизм**. Мономорфизм не всегда является изоморфизмом.

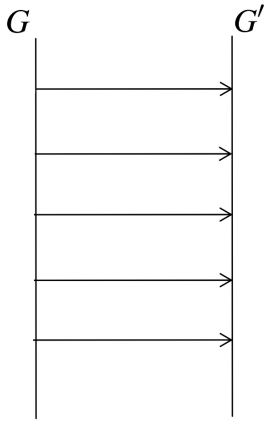

Рис. 2.1. Изображение мономорфизма

2) **Эпиморфизм** – это отображение группы на всю группу.

3) **Изоморфизм**. При изоморфизме выполняются условия мономорфизма и эпиморфизма.

4) **Автоморфизм** – условие, при котором отображенная группа равна исходной (отображение группы на себя).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

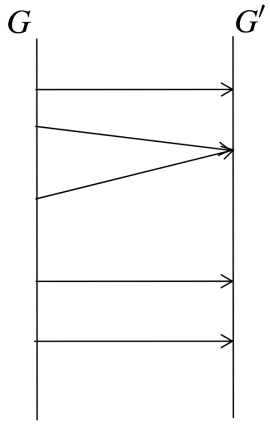

Рис. 2.2. Изображение эпиморфизма

Образ отображения. Ядро отображения

У гомоморфизма бывают ядро и образ.

Определение 2.3. ***Образ (Im)*** *– это множество элементов* $\rho(G)$*, принадлежащее* G'*.*

Определение 2.4. ***Ядро (Ker)*** *– это множество элементов* $\rho(G)$*, отображающееся в единичный элемент* e *и принадлежащее* G*.*

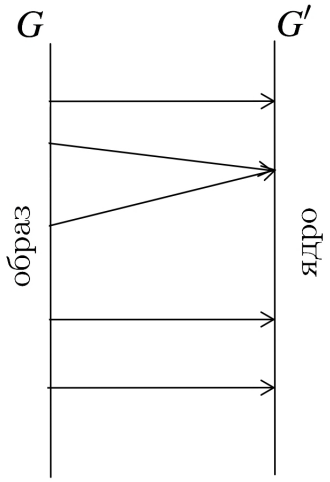

Рис. 2.3. Изображение гомоморфизма

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Точная последовательности

Точная последовательность *– это последовательность групп и гомоморфизмов, такая что ядро следующего совпадает с ядром предыдущего.*

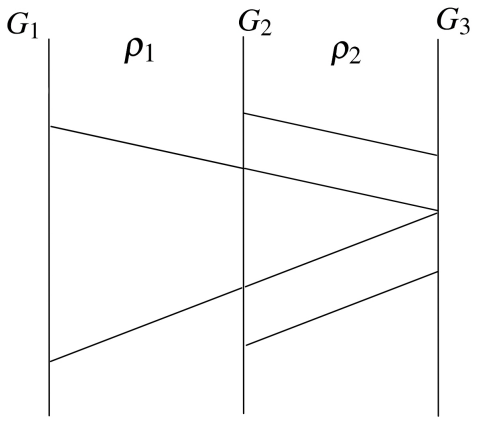

Рис. 2.4. Изображение точной последовательности

$$Ker(\rho_i) = Im(\rho_{i-1}) \tag{2.1}$$

Докажем, что $Im(\rho)$ является подгруппой. Рассмотрим отображение $G_1 \to G_2$.

$$Im(\rho) \in G_2$$

Для того, чтобы $Im(\rho)$ являлась подгруппой, она должна быть замкнута. Возьмем элемент, принадлежащий $Im(\rho)$ и представим его как $\rho(g_1)$.

$$\rho(g_1) \cdot \rho(g_2) = \rho(g_1 g_2)$$

Данное произведение должно быть замкнуто по обратному элементу.

$$\rho(g_1) \cdot \rho(g_1^{-1}) = e$$

Отображение от обратного элемента в группе G_1 будет обратным в группе G_2.

$$\rho(g^{-1}) = (\rho(g))^{-1}$$

Доказали, что Im является подгруппой, которая не всегда является инвариантной. Инвариантной подгруппой будет являться Ker.

$$Ker(\rho) \in G_1$$

Возьмем g_1 и g_2 такие, что $\rho(g_1) = e$ и $\rho(g_2) = e$.

$$\rho(g_1) \cdot \rho(g_2) = \rho(g_1 g_2) = e$$
$$\rho(g_1 g_2) \in Ker$$

В случае обратного элемента

$$\rho(g_1)^{-1} = e$$
$$\rho(g_1) = (g_1)^{-1} = \rho(e)$$

Инвариантная подгруппа

Докажем, что

$$gHg^{-1} \in H \tag{2.2}$$

Возьмем $g_1 \notin Ker$

$$\rho(g_1 \cdot h \cdot g_1^{-1}) = \rho(g_1)\rho(h)\rho(g_1^{-1})$$
$$\rho(h) = e$$
$$\rho(g_1)\rho(g_1^{-1}) = \rho(e) = e$$

Простейшие точные последовательности

- $e \to G_1 \to G_2$

  Отображение ρ связанное с $G_1 \to G_2$ совпадает с образом отображения $e \to G_1$. Поскольку отображение единицы возможно только в единицу, то $G_1 = e$, следовательно, ядро тривиальное – *мономорфизм.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

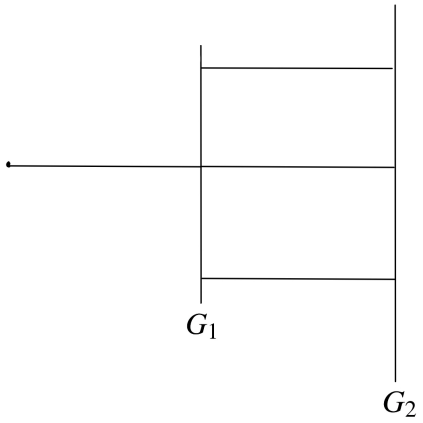

Рис. 2.5. Отображение первой простейшей точной последовательности (мономорфизма)

- $G_1 \to G_2 \to e$

  Образ ρ совпадает с ядром, которое представлено всей группой. Вся группа отображается в единицу. Следовательно, образ ρ – это вся группа – *эпиморфизм*.

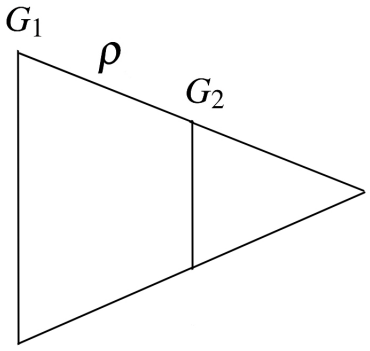

Рис. 2.6. Отображение второй простейшей точной последовательности (эпиморфизма)

Нетривиальная точная последовательность, содержащая 2 группы: G_1, G_2 и e.

$$e \to G_1 \to G_2 \to e$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Отображение ρ, принадлежащее $G_1 \to G_2$ одновременно моно- и эпиморфизм – изоморфизм.

Нетривиальная точная последовательность, содержащая 3 группы: G_1, G_2, G_3 и e.

$$e \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to e$$

Образ ρ_1 принадлежит $G_1 \to G_2$, ρ_2 принадлежит $G_2 \to G_3$.

$$Im \quad \rho_1 = \rho_1(G_1) = Ker \quad \rho_2$$

$Ker \quad \rho_2$ принадлежит G_2, так как $Ker \quad \rho_2$ инвариантный, то и образ ρ_1 также инвариантный. Образ группы $\rho_1(G_1)$ изоморфен G_1, потому что отображение ρ_1 – это изоморфизм.

Для того, чтобы доказать, что $G_3 = \dfrac{G_2}{G_1}$ нужно взять смежные классы G_2 по подгруппе G_1.

Вспомним матричные евклидовые $O(n)$ и псевдоевклидовые группы $O(p,q)$. Матричная группа $O(n)$ сохраняет единицу.

$$O^T I O = I \tag{2.3}$$

Матричная группа $O(p,q)$ сохраняет псевдоединицу.

$$O^T I_{p,q} O = I_{p,q} \tag{2.4}$$

Соотношение 2.4 эквивалентно сохранению квадратичной формы.

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1 - \textit{координаты вектора } x$$

$$O \cdot x = y$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

При действии на единичный вектор $\vec{x}$ ортогональной матрицы получается единичный вектор $\vec{y}$. Следовательно, матрицы O могут на что-нибудь действовать последовательно, при образовании группы.

$$O_1 O_2 \cdot x$$

Обсуждение группы O говорит о вращении в инертном пространстве, при обсуждении группы U подразумевается вращение в комплексном пространстве. Это является симметрией вращения, поскольку симметрия – это всегда группа. Наиболее простым примером симметрии является отображение $O(n)$. В симметрии есть операторы сдвига и поворота. Оператор сдвига – это импульс, оператор поворота – это момент импульса. Эти операторы не коммутируют. Возьмем элемент $\vec{x}$ и повернем его, далее и добавим $\vec{a}$.

$$(O, \vec{x}) + \vec{a}$$

$$(O, \vec{x}) + \vec{a} \neq (O, \vec{x} + \vec{a})$$

Поэтому при рассмотрении сдвигов и поворотов одновременно, не рассматривается прямое произведение, так как они не коммутируют.

Полупрямое произведение

Возьмем группы G_1 и H.

$$(g_1 h_1) \cdot (g_2 h_2) = (g_1 g_2, h_1 g_1(h_2)) - \textit{полупрямое произведение}$$

Обозначение полупрямого произведения – $G \ltimes H$.

В частном случае полупрямое произведение групп действует тривиально т.е. не действует.

$$g(h) = h$$

Группа G на H не действует.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Для выполнения свойств прямого произведения требуется выполнение свойств ассоциативности и существования обратного элемента.

$$(g_1h_1)(g_2h_2)(g_3h_3) = (g_1g_2, h_1g_1(h_2))(g_3h_3) = (g_1g_2g_3, h_1g_1(h_2)\cdot(g_1g_2)(h_3)$$

$$(g_1h_1)(g_2h_2)(g_3h_3) = (g_1h_1)(g_2g_3, h_2g_2(h_3)) = (g_1g_2g_3, h_1g_1(h_2g_2(h_3))$$

Существует следующее условие:

$$h_1\cdot g_1(h_2)\cdot g_1g_2(h_3) = h_1g_1(h_2g_2(h_3))$$

Потребуем, чтобы действие $g(h)$ происходило как гомоморфизм.

$$h_1g_1(h_2g_2(h_3)) = g_1(h_2)g_1(g_2(h_3))$$
$$g_1g_2(h_3) = g_1(g_2(h_3)) \tag{2.5}$$

Последовательное действие двух элементов группы G есть действие их произведения. Гомоморфизм, обладающий свойством 2.5 есть действие одной группы на другую. Найдем обратный элемент

$$(g_1h_1)\cdot(g_1^{-1}, h_2) = (e, h_1g_1(h_2))$$
$$h_2 = g_1^{-1}(h_1^{-1})$$

Обратным элементом будет:

$$(g,h)^{-1} = (g^{-1}, g^{-1}(h^{-1}))$$

Подгруппами полупрямого произведения $G\ltimes H$ являются сама группа g, группа h, также (e,h) и (g,e). Проверим данные подгруппы на инвариантность.

$$(g_2h_2)(g_1,e)(g_2^{-1}, g_2^{-1}(h_2^{-1})) = (g'h_1g_1g_1g_2^{-1}(h_2^{-1})) \neq (g',e)$$

Подгруппа g не является инвариантной и на неё делить нельзя.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Проверим на инвариантность подгруппу h

$$(g_1h_1)(e,h_1)(g_2^{-1},g_2^{-1}(h_2^{-1})) = (e,h')$$

Подгруппа h инвариантна.

Примером полупрямого произведения является группа D_n. Обобщением D_n является O_2.

$$O_2 = Z_2 \ltimes SO(2)$$

Группа Пуанкаре

Возьмем группы поворотов и сдвигов $SO(p,q)$ и $T(p,q)$. $SO(p,q)$ – это группа Лоренца. Рассмотрим перемножение сдвигов на поворот

$$x \to O_2\vec{x} + \vec{b}$$

$$(O_1,\vec{a})(O_2,\vec{b}) = (O_1O_2,\vec{a} + O_1(\vec{e}))$$

$$(e,\vec{a})(O_1,\vec{a})(e,-\vec{a}) = (O_2.\vec{a})$$

Определение 2.5. *Группа $SO(p,q)$ называется* ***группой Пуанкаре*** *(группа неоднородных линейных преобразований) – $ISO(p,q)$.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 3. Матричные группы. Линейные, унитарные, ортогональные и симплектические группы

Переосмысление понятия умножения

Определение 3.1. ***Группы*** *– это множества элементов, на которых преобладает умножение.*

Как оговорено ранее операция умножения – это сопоставление двум элементам третьему.

$$g_1 g_2 \to g_2 \in G$$

Свойства умножения (свойства группы):

1) Ассоциативность

   Если есть 3 элемента из группы G, то порядок умножения не зависит от конечного результата перемножения.

$$(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$$

2) Существование единичного элемента

$$e \in G : \forall g \in G \to e \cdot g = g \cdot e = g$$

3) Существование обратного элемента

$$\forall g \in G \quad \exists \quad g^{-1} \in G \to g \cdot g^{-1} = g^{-1} g = e$$

Любой объект обладает симметрией. Возьмем правильный пятиугольник и совершим такие операции над ним, которые не приводят к его изменению. Из таких операций выделим поворот на определенный угол.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

На множестве симметрии определенного объекта всегда определена операция умножения. Определив умножение на множестве выделим, что умножение ассоциативно. Также всегда при симметрии можно не менять объект (умножение на единицу) или повернуть объект обратно. Следовательно, как только возникает группа, то появляется симметрия, которая ей соответствует и наоборот.

Линейные группы

Рассмотрим группу $GL(n,K)$, где K – это поле вещественных или комплексных чисел.

$$K \to R, C$$

Примеры групп

$GL(n,R)$ – **это группа преобразования базиса.** Объект, сохраняющий эту группу – это векторное пространство $V_n(R)$.

Определение 3.2. ***Группа*** $SL(n,R)$ – ***это подгруппа*** $GL(n,R)$, *сохраняет векторное пространство, снабженное дополнительной структурой (n-линейной антисимметричной формой).*

$$\vec{x} \in V_n(R)$$

$$x_1 \wedge \vec{x}_2 \wedge \ldots \wedge \vec{x}_n$$

Внешнее произведение n векторов определяется антисимметричным тензором n-го ранга:

$$\varepsilon_{j1\ldots jn}(\vec{x}_1)_{j1}\ldots(\vec{x}_n)_{jn} \tag{3.1}$$

Объект группы 3.1 является антисимметричным при преобразовании группы $SL(n,R)$, так как векторы действуют на базис как линейные операторы.

Пусть e_i – базис в n-мерном пространстве в поле (n,K). Линейный оператор действуя в векторном пространстве переводит векторы в векторы.

$$\vec{e}_j \to \textit{базис}$$

Соответственно, если линейный оператор действует на базисный вектор, то получится вектор, который можно разложить по базису.

$$T \cdot \vec{e}_k = \vec{e}_j \cdot T_{jk} \tag{3.2}$$

$$T_{jk} \in K$$

$$(T_1 \cdot T_2) \cdot \vec{e}_k = T_1(T_2 \cdot \vec{e}_k)$$

Формула 3.2 сопоставляет линейным операторам некую матрицу. Каждому оператору можно сопоставить матрицу, но это сопоставление зависит от выбора базиса. Такое действие называется **представлением**.

Для отображения линейных операторов в матрицу имеем:

$$\rho_i L \to M_a t_n(K)$$

где L – множество линейных операторов.

$$(T_1 T_2)_{ij} = (T_1)_{ik}(T_2)_{ik}$$

$$\rho(T_1 T_2) = \rho(T_2)\rho(T_1)$$

Отображение ρ обладающее таким свойством – гомоморфизм.

При действии линейного оператора на базис, базис преобразуется следующим образом:

$$\vec{x} = x_i \vec{e}_i$$

$$x_i - x_j = T_{ij} x_j - \textit{преобразование в координатной форме}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Уравнение 3.1 сохраняется при преобразованиях линейных операторов из группы $SL(n,R)$. Каждый x_i заменяются на x_i' при преобразовании. Каждый x' переходит из старых координат действием матрицы T.

$$\varepsilon_{j1\ldots jn}T_{j1k1}\ldots T_{jkn}(\vec{x}_1)_{j1}\ldots(\vec{x}_n)_{jn}$$

Свертка ε-тензора с индексами даёт $det(T)\cdot\varepsilon_{k1\ldots kn}$.

Детерминант с помощью ε-тензора определяется как:

$$det(T) = \varepsilon_{i1\ldots in}T_{i,1}\ldots T_{i,n} - \textit{столбцовая форма}$$

$$det(T) = T_{1i1}\ldots T_{nin}\varepsilon_{i1\ldots in}$$

$$\varepsilon_{i1\ldots in}T_{i1k1}\ldots T_{inkn} = \varepsilon'_{k1\ldots kn}$$

Данный тензор полностью антисимметричен, так как он зануляется при совпадении двух индексов, входящих в него.

$$\varepsilon'_{1\ldots n} = det(T)$$

Антисимметричный тензор определяется двумя требованиями:

- $\varepsilon_{ik\ldots il} = -\varepsilon'_{il\ldots ik}$
- $\varepsilon_{1\ldots n} = 1$

Количество компонент произвольного тензора соответствует n^n, при наложении на тензор первого условия количество компонент сужается до $n!$. Данные требования однозначно определяют ε-тензор.

Ортогональные и псевдоортогональные группы

Определение 3.3. ***Группа*** $O(n,C)$ *– группа ортогональных матриц с комплексными элементами.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Если группа записана как $O(n)$, то поле является вещественным. *Данная группа – множество ортогональных матриц размерами $m \times n$ с вещественными коэффициентами.*

$$O^T O = I_n - \textit{условие ортогональности}$$

Данная группа сохраняет билинейную форму.

Определение 3.4. ***Билинейная форма*** *– это функция, которая двум векторам сопоставляет число так, что функция линейная как по первому, так и по второму аргументам.*

$$\vec{x}\vec{y} = V_n(R)$$

$$f(\vec{x},\vec{y}) = f(\vec{y},\vec{x}) = x^T I_{pq}\vec{y} = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{p+1}^{p+q} x_j y_j \tag{3.3}$$

Группа матриц размера $(p+q)\times(p+q)$, удовлетворяющих условию ортогональности, сохраняет скалярное произведение 3.3.

$$f(\vec{x},\vec{y}) = f(\vec{y},\vec{x}) = x_i \eta_{ij} y_j - \textit{скалярное произведение} \tag{3.4}$$

где η - матрица $I(p,q)$.

$$x_i \to x_i' = O_{ij} x_j$$
$$y_i \to y_i' = O_{ij} y_j$$

Условием сохранения скалярного произведения 3.4 является

$$(\vec{x}',\vec{y}') = (\vec{x},\vec{y}) \tag{3.5}$$

$$O_{ij} x_j \eta_{ik} O_{kl} y_l = x_j \eta_{jl} y_l$$
$$O_{ij} \eta_i k O_{kl} = \eta_{jl}$$

$$O_{ij} = (O^T)_{ji}$$
$$O^T I_{p,q} = I_{p,q} \tag{3.6}$$

Проверим свойство $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$.

$$\varepsilon_{i1\ldots in}(AB)_{i_1k_1}\ldots(AB)_{i_nk_n} = det(AB) \cdot \varepsilon_{k1\ldots kn}$$

$$(AB)_{i_1k_1}\ldots(AB)_{i_nk_n} = A_{i_1j_1}B_{i_nk_n}\ldots A_{i_nj_n}B_{i_nk_n}$$

При соединении ε-тензора с A получим сначала $det(A)$, а при свертке ε-тензора с B получим $det(B)$.

Следовательно

$$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$$

Детерминант от левой и правой частей уравнения 3.6 имеет следующий вид:

$$det(O)^2 = 1$$

Видим, что множество таких матриц делится на 2 части:+1 и -1. Часть, детерминант которой равняется $+1$ образует группу. Данная группа является подгруппой в O и равна $SO(p,q)$ – **специальная подгруппа**. Данная псевдоортогональная матрица называется собственной. И вращение с $det(O) = +1$ называется **собственным вращением**. $det(O) = -1$ не образует группу, так как произведение матриц с данным детерминантом даст матрицу с детерминантом $+1$, что приводит к невыполнению основного свойства.

Симплектические группы

Определение 3.5. ***Группа SP(2r,K) – симплектическая группа***. *Данная группа сохраняет антисимметричную форму.*

$$(\vec{x},\vec{y}) = -(\vec{y},\vec{x}) = x_iC_{ij}y_j$$
$$C^T = -C$$

Симплектическая структура известна из курса теоретической механики.

$$\{z_i, z_j\} = C_{ij}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Если $det(C) = 0$ т.е C – вырожденная, то все структуры являются Пуассоновыми. В случае, если C – невырожденная, то структура симплектическая.

Теорема 3.1. *Любая антисимметричная матрица $C \in Mat_{2n+1}(C)$ является вырожденной.*

$$det(C) = 0$$

Доказательство

$$det(C^T) = det(-C)$$

$$det(C) = det(-I_{2n+1})det(C)$$

$$det(-I_{2n+1}) = 1$$

Детерминант данной матрицы не может равняться 1. Следовательно, сокращать нельзя.

$$det(C) = det(-I_{2n+1})det(C) = -det(C)$$

$$V \in Sp(2r, K)$$

$$x'_{ii} = V_{ij}x_i$$

Получим требование, что матрица V является симплектической.

$$V^T CV = C \tag{3.7}$$

Множество таких матриц, удовлетворяющих соотношению 3.7 **образует группу**. Проверим данное утверждение.

Имеем 2 симплектические матрицы:

$$V_2^T CV_1 = C$$

В качестве умножения возьмем матричное умножение.

$$(V_1V_2) = C(V_1V_2) = V_2^T V_1^T CV_1V_2 = C_1$$

Данное множество **ассоциативное** и **содержит единичный элемент**.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Докажем, что если V - симплектическая матрица, то V^{-1} – также является симплектической матрицей.

$$(V^{-1})^T C \cdot V^{-1} = C$$

Следовательно V^{-1} тоже является симплектической матрицей.

Простые группы (комплексные) классифицируются четырьмя сериями:

1) $SL(n,C) \to A$

2) $SO(2n+1,C) \to B$

3) $Sp(2n,C) \to C$

4) $SO(2n,C) \to D$

Также существует 5 исключительных групп: G_2, F_4, E_7, E_8.

Унитарные и псевдоунитарные группы

Определение 3.6. ***Группы*** $U(n)$, $SU(n)$ *– это множество унитарных матриц. Данные комплексные матрицы удавлетворяют условию 3.8.*

$$U^+ U = I_n \tag{3.8}$$

Группы сохраняют антилинейность второго аргумента эрмитовой формы.

$$(\vec{x},\vec{y}) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i - \textit{эрмитовое произведение}$$

Формула линейная по y (линейная по второму аргументу). По первому аргументу формула антилинейна.

$$(\vec{x},\vec{y})^* = (\vec{y},\vec{x}) - \textit{эрмитова форма}$$

Проверим полученное свойство для произвольной симметричной вещественной матрицы η.

$$(U_{ij}x_j)^* \eta_{ik} U_{kl} y_l = x_j^* \eta_{jl} y_l$$

$$U_{ij}^{*}\eta_i k U_{kl} = \eta_{jl}$$

Преобразование U, которое действует на комплексное n-мерное эрмитово пространство будет сохранять эрмитову форму.

$$U_{ij}{}^{T*}\eta_i k U_{kl} = \eta_{jl}$$

Условие инвариантности эрмитового скалярного произведения:

$$U^{+}\eta U = \eta \tag{3.9}$$

Унитарные и псевдоунитарные группы – это вещественные формы группы $SL(n,C)$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 4. Многообразия. Группы Ли

Группа Ли. Гладкое многообразие

Были обсуждены матричные группы серий $SL(n,C)$, $SO(n,C)$ и $Sp(2r,C)$. Множества элементов этих групп образуют гладкие поверхности – *многообразия.*

Если есть две матрицы

$$M, M' \in M_a t_n(C)$$

То на множестве матриц можно задать метрику

$$|MM'|^2 = \sum_{ij} (M_i j - M'_{ij})(M_i j - M'_{ij})^*$$

Данные матрицы будут близки, если их элементы будут близки друг к другу.

Пространство комплексных матриц можно представить как элементы плоского пространства R^{2n^2}. При рассмотрении вещественной размерности матрицы рассматриваются как точки в данном пространстве.

В пространстве таких матриц можно рассматривать поверхности или кривые.

$$M = \|M_{ij}\|$$

$$M(\varphi) = \|M_{ij}(\varphi)\|$$

$$\frac{d}{d\varphi} M(\varphi) = \left\| \frac{dM_{ij}(\varphi)}{d\varphi} \right\|$$

Рассмотрим вещественные матрицы $M_2(R)$.

$$\|M_{ij}(\varphi)\| = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}(\varphi) & M_{12}(\varphi) \\ M_{21}(\varphi) & M_{22}(\varphi) \end{pmatrix}$$

где $M_{ij}(\varphi)$ – однопараметрическое семейство матриц в четырехмерном пространстве. Данная кривая – окружность в четырехмерном пространстве.

$$\begin{aligned} M_{11} = M_{22} = x \\ M_{12} = -M_{21} = y \end{aligned} \tag{4.1}$$

Каждое из условий 4.1 определяет некую трехмерную гиперповерхность. Пересечение трехмерных гиперповерхностей дает двумерную поверхность.

$$x^2 + y^2 = 1$$

Элементы группы $SO(2)$ образуют непрерывную гладкую кривую (окружность).

Определение 4.1. ***Группы Ли*** *– это группы бесконечного порядка, элементы которых образуют гладкое многообразие, а групповая операция $G \otimes G \to G$ – гладкое отображение.*

Определение 4.2. *Понятие многообразия придумал К.Ф. Гаусс. Многообразие следует понимать как множество точек, которые локально устроены как плоскости (плоские объекты).*

Определение 4.3. ***Гладким (бесконечно дифференцируемым) n-мерным вещественным многообразием*** *называется множество точек M, снабженное структурой, которая называется* ***атлас****. Т.е. M покрыта набором своих открытых подмножеств $U^{(\alpha)}$ называемых* ***локальными картами****, поэтому $M = \cup_\alpha \quad U^\alpha$.*

Определение 4.4. ***Открытое подмножество*** *– это подмножество, у которого все его точки принадлежат этому подмножеству как достаточно маленькие шары в метрическом пространстве.*

Свойства:

1) Для каждого α установлено взаимно однозначное отображение $\varphi(\alpha)$, которое отображает α в открытое подмножество m-мерного евклидового пространства R^m.

$$\varphi_\alpha : U^\alpha \to V^{(\alpha)} \in R^m$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Любой точке p, принадлежащей локальной карте φ_α сопоставляет набор координат точки p.

$$\forall p \in U^\alpha \to \varphi_\alpha \quad \textit{сопоставляет набор} \quad (x_1^{(\alpha)}(p), x_2^{(\alpha)}(p), \ldots x_n^{(\alpha)}(p))$$

Взаимноднозначное отображение дает возможность локальной карте ввести систему координат. При введении системы координат, можно говорить о близости и непрерывности её точек.

2) *Свойство сшивки*

Точка p может принадлежать двум локальным картам.

$$P \in U^{(\alpha)} \cap U^{(\beta)}$$

Возьмем точку, которая принадлежит локальной карте U^β. Так как она принадлежит данной карте, то мы может совершить обратное отображение $\varphi_{(\beta)}^{-1}$.

$$\varphi_{(\beta)}^{-1}(x_1^\beta \ldots x_m^\beta)$$

Теперь данной точке p можно сопоставить координаты локальной карты U^α.

$$\left[\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1}(x_1^\beta \ldots x_m^\beta)\right]_k = x_k^{(\alpha)}$$

Возникает набор функций, который связывает координаты в локальной карте α и в локальной карте β. Если эти функции r-дифференцируемы, то многообразие также r- дифференцируемо.

Если $r = \infty$, то многообразие гладкое.

Размерностью многообразия n определяется размерностью того евклидового пространства, куда отображаются локальные карты данного пространства.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Отображения кроме условия дифференцирования, также должны быть невырожденными.

$$det \left\| \frac{\partial x_n^{(\alpha)}}{\partial x_n^{(\beta)}} \right\| \neq 0$$

Определение 4.5. ***Гладкое отображение***. *Отображение $f : M_1 \to M_2$ называется r-дифференцируемым, если в локальных координатах M_1 и M_2 оно задается r-дифференцируемыми функциями.*

Гомеоморфизм

Взаимооднозначное отображение f, которое непрерывно и f^{-1} также непрерывно называется ***гомеоморфизм***.

Если f – гладкая и f^{-1} – гладкая, то f – **диффеоморфизм**.

Примеры гомеоморфных многообразий – эллипсоид вращения или сфера.

Многообразие торр не является гомеорморфным.

Гладкая кривая. Связанность, односвязность и гомотопия

Определение 4.6. ***Гладкая кривая на многообразие*** M *– это отображение отрезка на многообразии M такое, что его дифференциал в каждой точке непрерывен.*

$$I = [0,1] \in R \quad \text{отображается гладко в} \quad M$$

$$f(0) = f(1) - \text{замкнутая кривая}$$

Определение 4.7. *Многообразие M называется* ***связанным***, *если $\forall P_1, P_2 \in M$ можно соединить гладкой кривой.*

Определение 4.8. *Две одномерные замкнутые кривые лежащие в некотором многообразии M называются* ***гомотопными***, *если они могут быть приведены друг в друга с помощью непрерывного преобразования.*

Определение 4.9. ***M односвязное***, *если две замкнутые кривые в M гомотопны.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

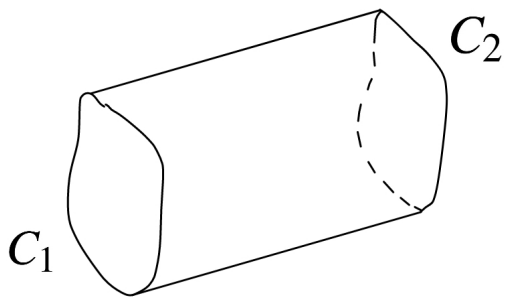

Рис. 4.1. Пример гомотопных замкнутых кривых C_1 и C_2

Определение 4.10. *Если в M существуют больше 2 замкнутых кривых, то такие многообразия называют* ***неодносвязными****.*

Отличие гомотопии от гомеоморфизма показано на рисунке 4.2. Если есть плоскость с выколотой точкой и есть одна замкнутая кривая, которая обозначена вокруг этой точки и одна кривая, не описывающаяся вокруг выколотой точки, то они не являются гомотопными, но являются гомеоморфными (существует однозначное гладкое отображение).

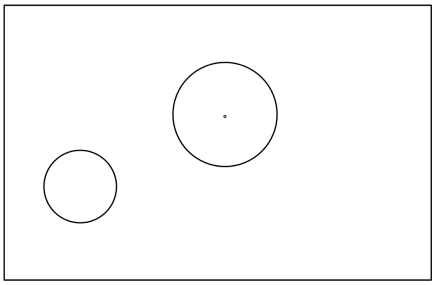

Рис. 4.2. Изображение двух гомеоморфных кривых

Определение 4.11. *Группа Ли называется* ***m-мерной****, когда многообразие, которое сопоставляется ей также m-мерно.*

Определение 4.12. *Группа Ли называется* ***связной, односвязной, неодносвязной*** *и т.д. когда соответствующее ей многообразие обладает такими же свойствами.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1) Многообразие = 2 не пересекающиеся сферы в R^m – неодносвязное многообразие.

2) Окружность S^1 – неодносвязное многообразие, так как есть бесконечное число замкнутых кривых, которые не сводятся друг к другу.

3) S^2, S^3 – односвязное многообразие. Все S^n для $n > 1$ - односвязные.

4) RP^n – множество прямых в R^{n+1}, проходящих через начало координат. При представлении S^n в виде сферы мы считаем, что все диаметрально противоположные точки сферы отождествлены. Однако это не является многообразием. Знаем, что однозначно отождествлены верхняя и нижняя половинки сферы. Поэтому будем представлять RP^n в виде нижней половины сферы.

   RP^n – это половина сферы S^n, у которой граничная сфера S^{n-1} с отождествленными диаметрально расположенными точками.

$$RP^3 = SO(3)$$
$$RP^n = \frac{S^n}{Z_2}$$

Вложенные многообразия

Следующее описание многообразий – это описание m-мерных M как поверхностей в евклидовом пространстве R^n при $n > m$.

R^n – это векторы , которые можно рассматривать как набор n-чисел.

$$\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$$
$$f_A(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$

где $A = 1, 2...n - m$

Каждое $n - m$ уравнений можно использовать, чтобы выразить координату x через остальные. Поэтому набор $n - m$ соотношений позволяет выразить $n - m$ координат через m оставшихся. Получается m-мерное многообразие.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Будем передвигать по поверхности $x_i \to x_i' \in a_i \quad \varepsilon \to 0$. Следовательно, преобразованные координаты должны удовлетворять тем же соотношениям.

$$f_A(x_1', x_2', ..., x_n') = 0$$

$$a_i \frac{\partial f_A}{\partial x_i} = 0$$

Чтобы движение оставалось в выбранной поверхности a_i должно быть касательным вектором. Следовательно, набор $n-m$ векторов должен быть ортогональным к касательному вектору.

Если во всех точках векторы $n-m$ являются линейно независимыми, то точки называются неособыми, и, соответственно, поверхности также неособые.

Примеры неособых поверхностей

$$R^n$$

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1 - \textit{ уравнение сферы } \quad S^{n-1}$$

Соотношение остается инвариантным, при вращении в R^n.

$$x_i \to O_{ij} x_j$$

Изометрия сферы – группа $SO(n)$.

Многомерный аналог однополостного гиперболоида

$$x_1^2 + ... + x_n^2 - x_{n+1}^2 - M^2 = 0$$

Изометрия однополостного гиперболоида – $SO(n,1)$. При $n = 2$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - M^2 = 0 - \textit{пространство анти-де Ситтера}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Оно задается в R^{n+1} уравнением:

$$x_1^2 + ... + x_{n-1}^2 - x_n^2 - x_{n+1}^2 + M^2 = 0$$

Изометрия пространства анти-де Ситтера – $SO(n-1,2)$.

Пространство де Ситтера dS^n, вложенное в R^{n+1}.

$$x_1^2 + ... + x_{n-1}^2 - x_{n+1}^2 M^2 = 0$$

Изометрия пространства – $SO(n,1)$

Примеры многообразий матричных групп Ли

Группа Ли – это многообразие, соответственно рассматриваем окрестность единичного элемента, который принадлежит локальной карте.

$$e \in U$$

Удобно выбирать так, чтобы нулевой вектор соответствовал единичному элементу.

$$g(\vec{0}) = e$$

$$g(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Если есть два элемента, принадлежащих локальной карте единичного элемента, то Z должна быть функцией от x и y.

$$g(\vec{x}), g(\vec{y}) \in U_e$$

$$g(\vec{x})g(\vec{y}) = g(\vec{z})$$

$$F(0, \vec{x}) = F(\vec{x}, 0) = \vec{x}$$

$$F'(x,y) = x^i + y^i + f^i_{kj} x^k y^j + Xxy + Yyx$$

Функция F описывает локальные свойства группы и связана со структурными константами группы.

Рассмотрим некоторые группы

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1) $O(n) = O_+(n) \cup O_-(n)$

где $O_+(n)$ и $O_-(n)$ – собственные и несобственные вращения соответственно

Многообразие группы $O(n)$ является несвязанным, и $O_+(n)$ и $O_-(n)$ изоморфны друг к другу.

Берем любое несобственное вращение $R \in O_-(n)$, тогда

$$O(n) = R \cdot SO(n)$$

Если O_{ij} – координаты в R^{n2}

$$O_{ij}O_{ik} = \delta_{ik} - \textit{соотношение ортогональности}$$

Количество данных соотношений равно $\dfrac{n(n+1)}{2}$, так как $O^T O = I$ - симметричная матрица.

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} - \textit{размерность многообразия}$$

2) $Sp(2r, R)$

Вещественная поверхность – R^{4r^2}.

$$V^T C V = C$$

Справа и слева стоят антисимметричные матрицы (на диагонали всегда нулевые элементы). Независимое соотношение вытекает из сравнения элементов, стоящих на главной диагонали.

Размерность равна:

$$4r^2 - \frac{2r \cdot (2r+1)}{2} = \frac{2r(2r+1)}{2}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

3) **U(n)** – группа унитарных матриц.

Соответствующая поверхность вкладывается в пространство размерности R^{2n^2}.

$$U^+U = I_n$$
$$(U^+U)^+ = U^+U$$

У эрмитовой матрицы на диагонали стоят вещественные элементы. Следовательно, число соотношений соответствует n^2.

Размерность группы соответственно $2n^2 - n^2 = n^2$

4) **SU(n)** Размерность такой группы n^2.

Лекция 5. Компактные и некомпактные группы Ли. Касательные пространства к многообразиям

Компактные группы Ли

Локальные многообразия устроены как евклидово пространство. В локальное многообразие можно ввести систему координат. Группа Ли — это группы бесконечного порядка, элементы, которых образуют гладкие многообразия. Если все элементы группы Ли связать с точками, то образуется гладкое многообразие. Группа Ли называется компактной, если ее многообразие является компактным.

Критерий компактности $M \subset R^n$

M — компактна, если M — замкнута и ограничена. Замкнутость M эквивалентна полноте M. Под полнотой подразумевается, что любая сходящееся последовательность точек M имеет предельную точку, которая принадлежит M. Под ограниченностью подразумевается, что расстояние между любыми 2 точками (x_1, x_2), принадлежащие M, меньше заданного числа R.

$$|x_1 - x_2| \leqslant R$$

Утверждение 5.1. *Сфера S^{n-1} конечного радиуса R — компактна.*

Доказательство

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_4^2 = R^2$$

Множество точек с координатами x_n, которые удовлетворяют этому соотношению, образуют сферу. Необходимо доказать, что любой набор сходящихся точек всегда будет принадлежать сфере. Это является условием полноты.

$$\vec{x} = (x_1, x_2 ... x_n)$$

Берется точка, которая не ежит на сфере.

$$\vec{x}^2 = R^2 + \varepsilon^2$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство полноты работает для любого многообразия, заданного с помощью некого конечного набора соотношений, вложенного в R^n.

$$|x_i| \leqslant R$$

Таким образом, любая сфера является компактным многообразием. ■

Гипотеза Пуанкаре. Любое односвязное компактное трехмерное многообразие без края дифеоморфно трехмерной сфере.

Примеры компактных групп Ли

Пример 5.1. *Группа $SO(2)$ изоморфна группе $U(1)$ и имеет многообразие S_1. Поэтому группа $SO(2)$ является компактной.*

Пример 5.2. *Многообразие группы $O(n)$ задается как:*

$$O^T O = I^n$$

$$O_{ij} O_{ik} = \delta_{jk}$$

Выполнено условие полноты, и многообразие ограничено.

$$\sum_i (O_{ij})^2 = 1$$

Таким образом, любая группа $O(n)$ — компактна.

Пример 5.3. *Многообразие RP^3 — компактна для группы $SO(3)$. $SO(3)$ — это группа собственных вращений в трехмерном пространстве. Каждое вращение в трехмерном пространстве можно описать как поворот вокруг некоторой оси на некоторый угол. Пусть O_{ij} — координаты $\vec{O}_j$. На ортогональную группу $O(n)$ можно смотреть как на набор ортонормированных базисов.*

$$\forall O \subset SO(3) \leftrightarrow (\vec{O}_1, -\pi \leqslant \psi \leqslant \pi) \leftrightarrow \psi \times \vec{O}_1$$

Таким образом, получается точка внутри шара с радиусом π. RP^3 — это множество прямых, проходящие через координаты в R^4.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

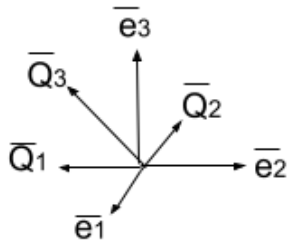

Рис. 5.1. Стандартный базис

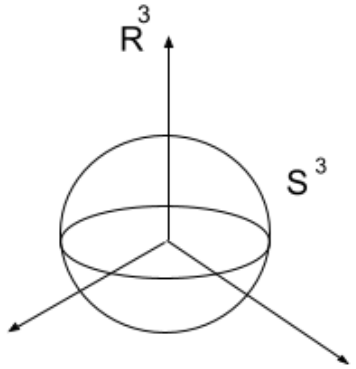

Рис. 5.2. Многообразие RP^3

Пример 5.4. *Группа $U(n)$ — это множество унитарных матриц.*

$$U(n) \subset R^{2n^2}$$

$$U^+U = I_n$$

$$U^*ijU_{ik} = \delta_{jk}$$

$$\sum_i U^*ijU_{ij} = 1, \quad \forall j$$

Это многообразие обладает свойством полноты. Все координаты ограничены, следовательно, многообразие компактное. В этом компактном многообразии есть подмногообразие, которое определяется следующим условием:

$$det(U) = 1$$

$$SU(2) \ni (x^0 I + ix^i \sigma^i), \quad x^0, x^i \in R$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

σ^i *— матрица Паули. Берутся произвольные унитарные элементы* $SU(2)$*:*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix} = U^+ = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\alpha\delta - \gamma\beta = 1$$

$$U^+ = U^{-1}$$

$$\alpha^* = \delta, \quad \gamma^* = -\beta$$

$$\alpha = x^0 + ix^3$$

$$\beta = x^1 - ix^2$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 + ix^3 & x^1 - ix^2 \\ -x^1 + ix^2 & x^0 - ix^3 \end{pmatrix}$$

Таким образом, любой элемент группы $SU(2)$ *— это есть точка, соответствующая сфере* S^3*. Соответственно, трехмерные повороты соответствуют единичным кватернионам.*

Примеры некомпактных групп Ли. Двумерная группа Лоренца. Бусты

Пример 5.5. *Группа* $O(1,1)$ *— псевдо-ортогональная группа.*

$$x_0^2 - x_1^2 = M^2$$

Множество всех собственных вращений в двухмерном пространстве записывается следующим образом:

$$O = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Аналогичная матрица записывается для группы $O(1,1)$ *параметризации элементов через гиперболический* $\cos$*:*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$O = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix} \subset SO^{\uparrow}(1,1) \tag{5.1}$$

$$(x_0 + x_1) \to (x_0' + x_1') = e^{\varphi}(x_0 - x_1) = (x_0 - x_1) \to (x_0' - x_1') = e^{-\varphi}(x_0 - x_1)$$

Пересечение 2 гиперплоскостей дает двумерную плоскость. Многообразием этой группы является гипербола, которая не ограничена.

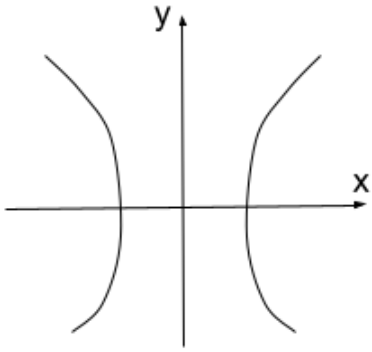

Рис. 5.3. Многообразие группы $SO(1,1)$

$$O \equiv P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PT = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, можно записать фрагменты, которые входят в группу $O(1,1)$

$$O(1,1) = SO^{\uparrow}(1,1) + P \times SO^{\uparrow}(1,1) + T \times SO^{\uparrow}(1,1) + PT \times SO^{\uparrow}(1,1)$$

$$x_0^2 - x_1^2 = x_i \eta_{ij} x_j$$

$$||\eta_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$O^T \eta O = \eta$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Записывается условие в компонентах:

$$O_{ik}\eta_{ij}O_{jl} = \eta_{kl}$$

$$O_{i0}\eta_{ij}O_{j0} = 1$$

Соотношение записывается следующим образом:

$$O_{00}^2 - O_{10}^2 = 1$$

Отсюда следует, что верхний угловой коэффициент получается:

$$|O_{00}| \geqslant 1$$

Происходит замена переменных в уравнении (5.1)*:*

$$\cosh = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\sinh = \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$x_0' = \frac{x_0 - \frac{v}{c}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x_1' = \frac{-\frac{v}{c}x_0 + x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

x_0 *имеет размерность координаты.*

$$x_0 = ct$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Таким способом преобразуются координаты x_1' при таком повороте. Это преобразование называется буст. Буст — это вращение из $O(1,3)$, которое затрагивает временную и пространственную координаты.

$$O(1,1) \subset O(1,3)$$

Таким образом, все псевдо-ортогональные группы являются не компактными.

Касательные многообразия к многообразиям

У любого многообразие можно определить касательное пространство. Множество всех касательных векторов, исходящих из точки P, образуют касательное пространство.

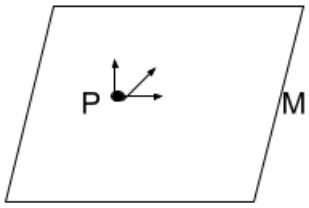

Рис. 5.4. Касательное пространство

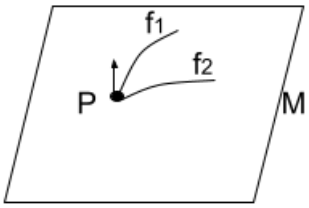

Рис. 5.5. Эквивалентные кривые

Каждый касательный вектор соответствует кривой многообразия. После этого определяются эквивалентные кривые.

$$f_1 : \ I \to M, \quad I = [0,1]$$

$$f_2 : \ I \to M$$

$$f_1(0) = f_2(0) \in P$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\lim \frac{f_1(t) - f_2(t)}{t}\bigg|_{t=0} = 0$$

$$x_i^{(1)}(t) = a_i^{(1)} t + b_i^{(1)} t^2 + \ldots$$
$$x_i^{(2)}(t) = a_i^{(2)} t + b_i^{(2)} t^2 + \ldots$$
$$a_i^{(1)} = a_i^{(2)}$$

Касательным вектором называется класс эквивалентных кривых. Касательное пространство также имеет структуру алгебры.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 6. Алгебры Ли линейных групп

Построение алгебры Ли. Коммутатор

Поскольку группа Ли это многообразие, то можно ввести класс эквивалентности кривых на многообразии. Эти кривые называются векторами, которые создают касательное пространство.

$$g(t) = g_0 + tA + ...$$

Кривая — это элемент, который зависит от параметра. Записываются групповые кривые, которые выходят из 1:

$$g(t) = e + tA + ...$$

Алгебра Ли — это касательное пространство в группе. Размерность этого касательного пространства совпадает с размерностью многообразия. Происходит разложение элементов до первого порядка:

$$g_3(t) = g_1(t) \times g_2(t) = (e + tA_1)(e + tA_2) = e + t(A_1 + A_2)$$

В алгебре определена операция сложения образующих. Рассматривается коммутатор в группе:

$$g_3 = g_1 g_2 g_{-1} g_2^{-1} = (e+tA_1)(e+tA_2)(e-tA_1)(e-tA_2) = e + 0 + ...$$
$$g_1 \times g_1^{-1} = (e + tA_2)(e + tX)$$
$$e = e + tA_2 + tX + t^2$$

Первый порядок сокращается. Ряд Тейлора для g_3 устроен следующим образом:

$$g_3 = e + sA_3$$
$$g_1 = e + tA_1 + t^2 B_1$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$g_1^{-1} = e - tA_1 - t_1^C$$
$$(g_1 \times g_1^{-1}) = e = e + t^2B_1 - t^2C_1 - t^2A_1^2$$
$$C_1 = B_1 - A_1^2$$

Происходит разложение элементов до второго порядка:

$$g_3 = g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1} = (e + tA_1 + t^2B_1)(e + tA_2 + t^2B_2)(e - tA_1 - t^2C_1)(e - tA_2 - t^2C_2) =$$
$$= e + 0 + t^2(B_1 + B_2 - C_1 - C_2 + A_1A_2 - A_2A_1 + A_1A_2 - A_1^2 - A_1A_2 - A_2^2) =$$
$$= e + 0 + t^2(A_1A_2 - A_2A_1)$$

Можно заметить, что если есть элементы g_1 и g_2, комбинация которых принадлежит группе, то, следовательно, коммутатор элементов алгебры тоже принадлежит алгебре Ли.

$$e + sA_3 = e + t^2[A_1A_2]$$

Группа Ли гладкое многообразие, что означает можно определить касательное пространство. Зная группу Ли, можно определить алгебру Ли. Если g — это матрица, то A — тоже матрица.

Есть независимые определения алгебры Ли. Можно сразу сказать, что алгебра Ли называется линейное векторное пространство с дополнительной операцией коммутатор.

$$[A_1A_2] \in A$$
$$[A_1A_2] = -[A_2A_1]$$
$$[A_1[A_2A_3]] + cycle = 0$$

$$[A_1[A_2A_3]] = [A_1(A_2A_3 - A_3A_2)] = A_1A_2A_3 - A_1A_3A_2 - A_2A_3A_1 + A_3A_2A_1 + A_2A_3A_1 -$$
$$-A_3A_2A_1 - A_3A_1A_2 + A_2A_1A_3 + A_3A_1A_2 - A_2A_1A_3 - A_1A_2A_3 + A_1A_3A_2 =$$

Были добавлены циклические перестановки. Алгеброй называется линейное пространство с операцией умножение. Алгеброй Ли называется такая алгебра, в которой это умножение антисимметрична и удовлетворяет тождеству. Ассоциативная алгебра — это алгебра, у которой для операции умножение выполняется ассоциативность.

$$A_1(A_2A_3) = (A_1A_2)A_3$$

Алгебра Ли не бывает ассоциативной.

$$[A_1[A_2A_3]][[A_1A_2]A_3]$$
$$[A_1[A_2A_3]] + [A_3A_1A_2] = 0$$

Алгебры Ли линейных групп

Пример 6.1.

$$SO(2) = U(1)$$

Группа $SO(2)$ представляется следующим образом:

$$SO(2) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = I + \varphi \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

С помощью разложения можно из группы получить алгебру. Необходимо найти способ для получения группы из алгебры Ли ($A \to g$).

$$e + At = g$$
$$e^{(tA)} = e + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \ldots$$

Необходимо проверить, что экспонента элемента алгебры будет элементом группы.

$$e^{(tA_1)} \times e^{(tA_2)} = e^{t(A_1+A_2)}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример 6.2. $Sl(2,C)$

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

$$det\ g = 1$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + tA$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1 + a_{22} \end{pmatrix}$$

$$det\ g = (1 + a_{11})(1 + a_{12}) - a_{12}a_{21} = 1 + a_{11} + a_{21} = 1$$

Таким образом, для алгебры условие следующее:

$$a_{11} + a_{22} = 0 \to Tr(A) = 0$$

Детерминант и пфаффиан матрицы

$$det(A + \varepsilon B) = det\ A(1 + \varepsilon Tr(A^{-1}B))$$

Детерминант определяется следующим образом:

$$det(A) = \sum \varepsilon_{i_1, i_2, i_3 \ldots i_n} A_{i_1 1} A_{i_2 2} \ldots A_{i_n n}$$

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} A_{i_1 j_1} \ldots A_{i_n j_n} = det\ A \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n}$$

$$\sum_{i_1 \ldots i_k} \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots i_n i_1 \ldots i_k j_k n \ldots j_n}$$

$$det(A) \frac{1}{n!} \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} \varepsilon_{j_1 \ldots j_n} A_{i_1 j_1} \ldots A_{i_n j_n}$$

$$det(A \times B) = det(A) \times det(B)$$

$$(A^{-1})_{ji} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{det\ A} \varepsilon_{i i_2 \ldots i_n} A_{i_2 j_2} \ldots A_{i_n j_n} \varepsilon_{j j_2 \ldots j_n}$$

Выше написанная формула используется для представления группы $SO(n)$.

$$\frac{\partial}{\partial t} det\left(e^{(tA)}\right) = Tr(A) det\left(e^{(tA)}\right)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Прямые сумма и произведение матриц

Прямая сумма матриц записывается следующим образом:

$$A_1 \oplus A_2 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

Прямое произведение матрицы записывается следующим образом:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{12}b_{22} \end{pmatrix}$$

Пфаффиан определен только в четных размерностях. Для симметричных матриц пфаффиан равен 0. Поэтому пфаффиан определяется для асимметричных матриц.

$$Pf(A) = \frac{1}{2^n n!} \sum \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} B_{i_1 i_2} B_{i_3 i_4} \ldots B_{i_n \ldots i_n}$$
$$(Pf(A))^2 = det(A)$$

$$Pf(ABA^T) = det(A) + Pf(B)$$
$$Pf(B^T) = (-1)^n Pf(B)$$

Пфаффиан нужен для доказательства изоморфизма групп SP и SO.

$$det(I + \varepsilon B) = \varepsilon TrB$$

Детерминант для элемента группы равен 1 и $trace$ соответствующего элемента алгебры равен 0.

Пример 6.3. *Матрица группы $O(n)$ ортогональна.*

$$O^T O = I$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Происходит разложение матрицы вблизи I:

$$(I+A^T)(I+A)=I$$
$$A^T=-A$$

Считается размерность матрицы:

$$o(n,R)=\frac{n(n-1)}{2}$$

Пример 6.4. $SO(n)$

$$O^TO=I$$
$$(I+A^T)(I+A)=I$$
$$A^T=-A$$
$$Tr(A)=0$$

Размерность такая же, как и для $O(n)$:

$$o(n,R)=\frac{n(n-1)}{2}$$

Пример 6.5. $U(n)$

$$U^+U=I$$
$$(I+A^+)(I+A)=I$$
$$A^+=-A$$

Получается алгебра анти-эрмитовых матриц. Размерность получается n^2.

Пример 6.6. $SU(n)$

$$U^+U=I$$
$$(I+A^+)(I+A)=I$$
$$A^+=-A$$
$$Tr(A)=0$$

Размерность записывается как: n^2-1

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример 6.7. $Sp(2n,R)$

$$O^T JO = J$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$(I + A^T)J(I + A) = J$$

$$A^T J + JA = 0$$

Размерность считается следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X^T & Z^T \\ Y^T & W^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z^T & -X^T \\ W^T & -Y^T \end{pmatrix}$$

$$JA = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Z & -W \\ X & Y \end{pmatrix}$$

Соответственно, сумма этих матриц равна 0.

$$Z^T - Z = 0$$

$$X + W^T = 0$$

$$Y - Y^T = 0$$

Таким образом, размерность получается:

$$n(n+1) + n^2 = n(2n+1)$$

$O(p,q)$ — это псевдо-ортогональная матрица.

$$O^T I_{pq} O = I_{pq}$$

Пример 6.8. $USp(2n)$ — *унитарная симплектическая группа. Матрица удовлетворяет следующим условиям:*

$$U^T JU = J$$

$$U^+ U = I$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$Z^T - Z = 0$$

$$X + W^T = 0$$

$$Y - Y^T = 0$$

$$A^+ = -A$$

$$\begin{pmatrix} X^+ & Z^+ \\ Y^+ & W^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X & -Y \\ -Z & -W \end{pmatrix}$$

Получаются следующие условия:

$$X^+ = -X$$

$$Z^+ = -Y$$

$$W^+ = -W$$

Размерность получается:

$$n(2n+1)$$

Унитарная симплектическая имеет ту же размерность, что и симплектическая действительная.

Пример 6.9. *Имеется алгебра матриц $sl(2,C)$ с нулевым трейсом.*

$$sl(2,C) = a_1\sigma_1 + b_1 i\sigma_1 + ...$$

У комплексной алгебры можно взять вещественную форму и получится $SU(2)$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 7. Гомоморфизмы и изоморфизмы алгебры Ли. Универсальные накрывающие группы

Определение алгебры Ли

Определение 7.1. *Алгебра Ли — это овеществление, комплексификации и вещественные формы. Это векторное пространство, на котором задано антисимметричное умножение векторов.*

$$\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$$

Записывается тождество Якоби:

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + (\vec{z} \times \vec{x}) \times \vec{y}$$

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} + (\vec{z} \times \vec{x}) \times \vec{y} + \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = 0$$

В алгебре Ли ассоциативность нарушена.

$$\vec{x} \times \vec{y} = [\vec{x}, \vec{y}]$$

Любое касательное пространство является векторным пространством, в котором можно умножать вектора.

Овеществление и комплексификация векторного пространства

Рассматривается комплексное векторное пространство — $V_n(C)$. С таким пространством ассоциируется вещественное пространство — $V_{2n}(R)$. Записывается базис в $V_n(C)$:

$$\vec{z} = z_j \vec{e}_{j...n} z_j \in C, \quad \{\vec{e}_j ... \vec{e}_n\}$$

$$z_j = x_j + iy_j, \quad x_j, y_j \in R$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$x_j\vec{e}_j + y_j(i\vec{e}_j), \quad \{\vec{e}_j, i\vec{e}_j\}$$

Любой вектор в комплексном пространстве можно рассматривать как вещественном пространстве. Эта процедура называется овеществление.

При комплексификации вещественного пространства $V_n(R)$ есть вектор, который можно разложить следующим образом:

$$\vec{x} \in R, \quad \vec{x} = x_j \times \vec{e}_j, \quad x_j \in R$$

Вместо вещественного вектора можно рассмотреть комплексный вектор:

$$\vec{z} = z_j\vec{e}_j, \quad z_j \in C$$

Таким образом, из вещественного пространство получается комплексное пространство. Такая процедура называется комплексификацией.

Структурные соотношения и структурные константы алгебр Ли

Эти две процедуры, овеществление и комплексификация, можно перенести на алгебру Ли. Пусть A_R вещественная алгебра Ли. Есть базис $\{X_a\}$ в A_R. В вещественной алгебре Ли умножение двух базисов разлагается на структурную константу:

$$[X_a, X_b] = C^d_{ab}X_d, \quad C^d_{ab} \in R$$

Любой элемент A из алгебры Ли можно разложить по базису.

$$\forall A \in A_R, \text{ ‘ } A = A_aX_a, \quad A_a \in R$$

Таким образом, из этой вещественной алгебры можно получить комплексную алгебру с помощью комплексификации.

$$\forall A \in A_C, \quad A = \vec{A}_aX_a, \quad \vec{A}_a inC$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пусть A_C^n комплексная алгебра Ли. Структурное соотношение записывается следующим образом:

$$[X_a, X_b] = C_{ab}^d X_d, \quad C_{ab}^d \in C$$

$$\forall A \in A_C, \quad \vec{A}_a = B_a + iC_a, \quad B_a, C_a \in R$$

Их можно разложить по вещественной части и мнимой части:

$$B_a X_a + C_a(iX_a)$$

Вводится новый базис:

$$Y_a = X_a$$

$$Z_a = iX_a$$

$$[Y_a, Y_b] = ReC_{ab}^d Y_d + ImC_{ab}^d Z_d$$

Таким образом, получается структурное соотношение для вещественной алгебры Ли. Такая процедура называется овеществлением комплексной алгебры Ли.

Вещественная форма алгебры Ли

Пусть есть комплексная алгебра Ли A_C и существует базис X_a в A_C такой, что структурные соотношения таковы:

$$[X_a, X_b] = C_{ab}^d X_d, \quad C_{ab}^d \in R$$

Вещественная алгебра Ли, построенная по комплексной алгебре Ли, называется вещественной формой алгебры Ли.

$$\forall A \in A_R, \quad A = A_a X_a, \quad A_a \in R$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример 7.1. *Рассматривается алгебра Ли* $sl(2,C) \subset Mat(C)$.

$$A \in sl(2,C) \to Tr(A) = 0$$

Любой элемент алгебры Ли $sl(2,C)$ *можно представить в следующем виде:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a,b,c \in C$$

Умножение в этом базисе дает вещественную структурную константу.

$$[h, e^{\pm}] = 2e^{\pm}$$

$$[e^{+}, e^{-}] = h$$

В результате получается вещественная форма $sl(2,R)$.

Пример 7.2. *Вещественное линейное пространство* $A \in Mat(C)$ *такое, что:*

$$A^{+} = -A$$

$$B^{+} = -B$$

$$\forall \alpha, \beta \in R \quad (\alpha A + \beta B)^{+} = -(\alpha A + \beta B)$$

Множество антиэрмитовых матриц образуют вещественное пространство. Эрмитовое сопряжение вычисляется следующим образом:

$$([A,B])^{+} = [B^{+}, A^{+}] = -[A^{+}, B^{+}] = -[A,B]$$

В результате получается вещественна форма $su(2)$ *группы* $sl(2,C)$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Гомоморфизмы и изоморфизмы алгебр Ли

Вещественные формы из любой комплексной алгебры Ли выделяется с помощью линейных автоморфизмов. Автоморфизм — это отображение алгебраической системы на всю группу (на себя).

$$\sigma^2 = 1$$

Гомоморфизм — это отображение, которое сохраняет умножение в группе.

$$(\rho[A,B]) = [\rho(A), \rho(B)]$$
$$\rho(\alpha A + \beta B) = \alpha\rho(A) + \beta\rho(B)$$

Линейность гомоморфизма гарантируется вещественной алгеброй.

Пример 7.3. *Линейный автоморфизм.*

$$\forall A \in L \quad \sigma_1(A) = A^*$$

Требуется следующее условие вещественности матриц в пространстве $sl(2,C)$:

$$\sigma_1(A) = A$$
$$\sigma_2(A) = A^+$$
$$\sigma_2(A) = A$$

В результате получается вещественна форма $su(2)$ группы $sl(2,C)$.

Вещественные формы матричных алгебр Ли

Вещественные формы $sl(n,C)$

1) $sl(n,R)$

2) $su(n)$

3) $su(p,q), \quad p+q=n, \quad (p \neq 0,\ q \neq 0)$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

4) $su^*(n), \quad n = 2r$

$$A \in Mat_{2r}(C), \quad Tr(A) = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} D & B \\ -B^* & D^* \end{pmatrix}, \quad B, D \in Mat_r(C), \quad Tr(D \times D^*) = 0$$

Вещественные формы $so(n,C)$

1) $so(n,R) = so(n)$

2) $so(p,q), \quad p+q = n \quad (p \neq 0,\ q \neq 0)$

3) $so^*(n), \quad n = 2r$

$$A = \begin{pmatrix} D & B \\ -B^* & D^* \end{pmatrix}$$

$$A^T = -A$$

Отсюда следует, что:

$$D^T = -D, \quad B^+ = B$$

Вещественные формы $sp(2r,C)$

1) $sp(2r,R)$

2) $sp(r) = usp(2r)$

3) $sp(p,q), \quad p+q = 2r, \quad (p \neq 0,\ q \neq 0)$

Примеры изоморфизмов алгебр Ли

Доказать изоморфизмы:

1) $su(2) = so(3) = usp(2)$

2) $sl(2,R) = so(1,2) \overset{?}{=} sp(1,1)$

3) $usp(2r) = su(r,H)$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

4) $so(4) = su(2) + su(2)$

Прямая сумма векторов записывается следующим образом:

$$L = L_1 + L_2$$

$$[L_1, L_1] \subset L_1$$

$$[L_2, L_2] \subset L_2$$

$$[L_1, L_2] = 0$$

5) $so(2,2) = sl(2,R) + sl(2,R)$

6) $so(4,C) = sl(2,C) + sl(2,C)$

7) $A(SL(2,C)) = SO(1,3)$

8) $so^*(4) = so(2) + su(1,1)$

9) $so(6,C) = sl(4,C)$

$$so(6) = su(4)$$

$$so(3,3) = sl(4,R)$$

$$so(2,4) = su(2,2)$$

$$so(1,5) = sl(2,H) \stackrel{?}{=} su^*(4)$$

10) $sp(5,C) = so(5,C)$

Локально все группы изоморфны, но глобальны группы могут быть не изоморфными.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Универсальные накрывающие группы

Если есть $A(\hat{G})$ и $\hat{G}$ — односвязная, то $\hat{G}$ называется универсально накрывающей.

$$A(\hat{G}) = A(G)$$

$$g = \frac{\hat{G}}{\hat{Z}}$$

$\hat{Z}$ — дискретный нормальный делитель в $\hat{G}$.

Утверждение 7.1. *Пусть группа Ли G — не односвязная, то многообразие такой группы имеет негомотопные замкнутые кривые (m).*

$$ord(\hat{Z}) = m$$

В $\hat{G}$ имеются кривые, которые отображаются в G как замкнутые кривые.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 8. Регулярные представления

Регулярные представления -группы $SU(N)$

Регулярное представление определяется следующим образом:

$$\forall g SU(N)$$

Представление $T(g)$ — это некий линейный оператор, который действует в пространстве функции φ.

$$\varphi : G \to C$$

Правое регулярное представление записывается следующим образом:

$$[T^R(g) \times \varphi](h) = \varphi(h \times g)$$

Все конечные мерные неприводимые представления компактных групп вложены в регулярное представление. Чтоб выделить эти представления из регулярных представлений, рассматривается специальный подкласс функций, у которых есть полиномы от h_{ij}.

$$h \in SU(N) \leftrightarrow h = ||h_{ij}||$$

Рассматривается полином $h_{i_1k_1}h_{i_2k_2}...h_{i_rk_r}$.

$$h_{i_1k_1}h_{i_2k_2}...h_{i_rk_r} \to h_{i_1l_1}h_{i_2l_2}...h_{i_rl_r}g^{l_1}_{k_1}g^{l_2}_{k_2}...g^{l_r}_{k_r}$$

Если есть полином, построенный как линейная комбинация мономов разной степени, то этот полином развалится на инвариантные подпространства полиномов, имеющие одну и ту же степень однородности.

$$h_{i_1k_1} \to h_{i_1l_1}g^{l_1}_{k_1}$$

Регулярное представление действует на полиноме первой степени, как на пространстве, определяющее представление.

$$\vec{e}_i(i = 1, 2...N) \to V_N$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$T(g) \times \vec{e}_i = \vec{e}_k g_i^k \quad ig \in SU(N)$$

Прямое произведение определяющих представлений

$$T^{\otimes r}(g) = T(g) \otimes T(g) \otimes ... T(g) \to V^{\otimes r} N$$

Чтобы задать тензорное произведение, которое определяет представление, необходимо задать как этот оператор действует на базисе.

$$T^{\otimes r}(g)(\vec{e}_{i_1} \otimes ... \otimes \vec{e}_{i_r}) = \vec{e}_{l_1} \otimes ... \otimes \vec{e}_{l_r} g_{i_1}^{l_1} ... g_{i_r}^{l_r}$$

Прямое произведение,определяющее представление, является приводимым. В пространстве произведение $V_N^{\otimes r}$, определяющих представление, действует не только группа $SU(N)$, но и группа перестановок S_r.

$$\forall \sigma \in S_r$$

Берется тензорное произведение:

$$(\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2 \otimes ... \otimes \vec{v}_r) \in V_N^{\otimes r}$$

Определяется действие σ на это тензорное произведение:

$$S(\sigma)(\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2 \otimes ... \otimes \vec{v}_r) = (\vec{v}_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \vec{v}_{\sigma^{-1}(2)} \otimes ... \otimes \vec{v}_{\sigma^{-1}(r)})$$
$$S(\sigma\mu) = S(\sigma) \times S(\mu)$$

$$S(\sigma) \times S(\mu)(\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2 \otimes ... \otimes \vec{v}_r) = S(\sigma)(\vec{v}'_1 \otimes \vec{v}'_2 \otimes ... \otimes \vec{v}'_r) =$$
$$= (\vec{v}'_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \vec{v}'_{\sigma^{-1}(2)} \otimes ... \otimes \vec{v}'_{\sigma^{-1}(r)}) = (\vec{v}'_{\mu^{-1}\sigma^{-1}(1)} \otimes \vec{v}_{\mu^{-1}\sigma^{-1}(2)} \otimes ... \otimes \vec{v}_{\mu^{-1}\sigma^{-1}(r)})$$
$$v'_i = v_{\mu^{-1}(i)}$$

Чтобы построить матричное представление, необходимо построить действие $S(\sigma)$ на базисный элемент в пространстве $V_N^{\otimes r}$.

$$S(\sigma)(\vec{e}_{i_1} \otimes ... \otimes \vec{e}_{i_r}) = (\vec{e}_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \vec{e}_{i_{\sigma^{-1}(2)}} \otimes ... \otimes \vec{e}_{i_{\sigma^{-1}(r)}}) =$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$= \vec{e}_{k_1} \times \vec{e}_{k_2} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{k_r} \left(\delta^{k_1}_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \ldots \delta^{k_r}_{i_{\sigma^{-1}(r)}} \right)$$

Представление для соседней транспозиции

$$S(\sigma_k)(\vec{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i_r}) = (\ldots \otimes \vec{e}_{i_{k+1}} \otimes \vec{e}_{i_k} \otimes \ldots) = (\vec{e}_{l_1} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{l_r}) \left(\delta^{l_1}_{i_1} \delta^{l_2}_{i_2} \delta^{l_k}_{i_{k+1}} \delta^{l_{k+1}}_{i_k} \ldots \delta^{l_r}_{i_r} \right)$$

В этом пространстве можно определить еще действие группы Sr. Пусть оператор X действует в пространстве $V_N^{\otimes r}$. Оператор X инвариантен относительно действия группы $SU(N)$ преобразование в пространстве $V_N^{\otimes r}$, если оператор X удовлетворяет такому условию:

$$T(g) \otimes T(g) \otimes \ldots \otimes T(g) X = X T^{\otimes r}(g)$$
$$T^{\otimes r}(g) X \left(T^{\otimes r}(g) \right)^{-1} = X, \quad \forall g \in SU(N)$$

Утверждение

Любой оператор, который удовлетворяет выше написанному соотношению, представляется следующим образом:

$$X = \sum_{\sigma \in Sr} X_\sigma S(\sigma)$$

Доказательство.

$$T^{\otimes r}(g) S(\sigma) = S(\sigma) T^{\otimes r}(g) \quad \forall \sigma \in Sr, \quad \forall g \in SU(N)$$

Таким образом, можно доказать, что любой оператор такого типа коммутирует. Для этого рассматривается прямое произведение операторов, которые действуют в этом пространстве:

$$(A_1 \otimes A_2 \otimes \ldots \otimes A_r) S(\sigma)(\vec{v}_1 \otimes \ldots \otimes \vec{v}_r) = (A_1 \vec{v}_{\sigma^{-1}(1)} \otimes A_2 \vec{v}_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \ldots \otimes A_r \vec{v}_{\sigma^{-1}(r)} \otimes)$$

Происходит перестановка операторов:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$S(\sigma)(A_{\sigma(1)} \otimes A_{\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes A_{\sigma(r)})(\vec{v}_1 \otimes \ldots \otimes \vec{v}_r) =$$
$$= (A_1 \vec{v}_{\sigma^{-1}(1)} \otimes A_2 \vec{v}_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \ldots \otimes A_r \vec{v}_{\sigma^{-1}(r)})$$

Необходимо доказать, что любой оператор, который является инвариантным, есть линейная комбинация некоторых представлений элементов группы перестановок. Пусть g — диагональная матрица.

$$g^{i_1}_{k_1} \ldots g^{i_r}_{k_r} X^{k_1 \ldots k_r}_{l_1 \ldots l_r} = X^{i_1 \ldots i_r}_{k_1 \ldots k_r} g^{k_1}_{l_1} \ldots g^{k_r}_{l_r}$$

$$a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_r} X^{i_1 \ldots i_r}_{l_1 \ldots l_r} = X^{i_1 \ldots i_r}_{l_1 \ldots l_r} a_{l_1} a_{l_2} \ldots a_{l_r}$$

$$(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_r} - a_{l_1} a_{l_2} \ldots a_{l_r}) X^{i_1 \ldots i_r}_{l_1 \ldots l_r} = 0$$

Таким образом, общее решение записывается следующим образом:

$$X^{i_1 \ldots i_r}_{l_1 \ldots l_r} = X^{i_1 \ldots i_r} \delta^{i_1}_{l_{\sigma(1)}} \delta^{i_2}_{l_{\sigma(2)}} \delta^{i_r}_{l_{\sigma(r)}}$$

■

Пример

Рассматривается тензорное произведение двух определяющих представлений в пространстве $V_N^{\otimes 2}$.

$$T(g) \otimes T(g), \quad \forall g \in G$$
$$S(\sigma)(\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2}) = (\vec{e}_{i_2} \otimes \vec{e}_{i_1}) = (\vec{e}_{k_1} \otimes \vec{e}_{k_2}) \left(\delta^{k_1}_{i_2} \delta^{k_2}_{i_1} \right)$$

Пусть есть единичный оператор:

$$X = X_e S(e) + X_p S(\sigma)$$

$$S(e) = I^{i_1 i_2}_{k_1 k_2} = \delta^{i_1} k_1 \delta^{i_2}_{k_2}$$
$$S(\sigma) = P^{i_1 i_2}_{k_1 k_2} = \delta^{i_1} k_2 \delta^{i_2}_{k_1}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$P_+ = \frac{1}{2}(I+P)$$
$$P_- = \frac{1}{2}(I-P)$$
$$P_+ + P_- = I$$

Получается инвариантное пространство:

$$V_\pm = P_\pm V_N^{\otimes 2}$$

$$\psi \in V_N^{\otimes 2}$$
$$\psi_\pm = P_\pm \psi \in V_\pm$$

$$T^{\otimes 2}(g)\psi_\pm = T^{\otimes 2}(g)P_\pm\psi = P_\pm T^{\otimes 2}(g)\psi \in V_\pm$$

Дальше среди этих операторов надо выделить все проектора.

$$\sum_\alpha P_\alpha = I$$

$$P_\alpha^2 = P_\alpha$$

$$P_\alpha P_\beta = \delta_{\alpha\beta} P_\alpha$$

$$V_\alpha = P_\alpha V_N^{\otimes n}$$

$$P_\alpha T_N^{\otimes r}(g) = T_N^{\otimes r}(g) P_\alpha$$

Неприводимость гарантируется тем, что проектора должны быть примитивными.

$$P_\alpha \neq P'_\alpha + P''_\alpha$$

Среди таких сумм необходимо выделить систему взаимно ортогональных, полных и примитивных проекторов. После этого можно решить задачу о выделении всех неприводимых конечномерных представлений в тензорном произведении.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 9. Представления групп и представления алгебры Ли

Действие группы на множестве

Пусть есть G группа и задано представление группы G в пространстве M, если задано действие группы G в пространстве M. Действие — это функция, которая отображает прямое произведение:

$$F:\ G \otimes M \to M$$

$$\forall \xi \in M,\ \ \forall g \in G \quad F(g,\xi) = \eta \in M$$

Есть 2 условия:

1) Если вместо g взять единичный элемент, то это действие множество M не сдвинет.
$$F(e,\xi) = \xi$$

2) Если взять два элемента, то результат должен совпадать с произведением двух элементов.
$$\forall g_1, g_2 \in G$$
$$F(g_1, F(g_2,\xi)) = F(g_1, g_2, \xi)$$

Линейное представление группы

Это представление, в которых роль M играет векторное пространство, а действие записывается следующим образом:

$$g \in G,\ \ \xi inV,\quad F(g,\xi) = T(g) \times \xi = \eta inV$$

Под представлением подразумевается действие некого линейного оператора $T(g)$. Согласно первому условию, единичный элемент переводится в единичный оператор в V:

$$T(e) = I$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Согласно второму условию:

$$T(g_1) \times T(g_2) = T(g_1 \times g_2)$$

Определение 9.1. *Линейное представление группы G в векторном пространстве V называется гомоморфизмом T из группы G в группу Γ линейных операторов, действующих в V.*

$$T(g^{-1}) = (T(g))^{-1}$$

Если пространство $V(C)$ комплексное, то представление называется комплексным. Если пространство представления $V(R)$ вещественное, то представление называется вещественным. Пусть представление T из группы G действует в пространстве $V_n(K)$, в котором есть базис $\{\vec{e}_i\}$. Записывается действие линейного оператора на базисный элемент:

$$\forall g \in G: \quad T(g) \times \vec{e}_k = \vec{e}_j T_{ji}(g)$$

В результате получится отображение в группу матриц.

Унитарное представление группы

Пусть в пространстве $V(C)$ задано комплексное представление и эрмитова форма. Эрмитова форма записывается следующим образом:

$$\xi, \eta \in V_n(C) \quad (\vec{\xi}, \vec{\eta}) \in C$$
$$(\vec{\xi}, \alpha\vec{\eta} + \beta\vec{\gamma}) = \alpha(\vec{\xi}, \vec{\eta}) + \beta(\vec{\xi}, \vec{\gamma})$$
$$(T(g)\vec{\xi}, T(g)\vec{\eta}) = (\vec{\xi}, \vec{\eta})$$

Если представление сохраняется относительно этой формы, то такое представление T называется унитарным. Выбирается базис $\{\vec{e}_i\}$ в пространстве $V_n(C)$, ортонормированный относительно эрмитова скалярного произведения $(\vec{\xi}, \vec{\eta})$.

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \delta_{ik}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Записывается свойство унитарности для базисных векторов:

$$(T(g)\vec{e}_i, T(g)\vec{e}_k) = (\vec{e}_i, \vec{e}_k)\delta_{ik}$$

$$(\vec{e}_j T_{ji}(g), \vec{e}_l T_{lk}(g)) = T^*_{ji}(g)T_{lk}(g) = \left(T^{*T}(g)\right)_i kT_{jk} = \left(T^+(g)T(g)\right)_{ik}$$

Примеры представлений групп

Записывается отображение гомоморфизм и получается **тривиальное** представление:

$$T: \ G \to 1$$

Пусть группа G — матричная. Тогда $T(g)$ — это линейный оператор, действующий в $V_n(K)$ с базисом $\{\vec{e}_i\}$.

$$\forall g \in G$$

$$T(g)\vec{e}_i = \vec{e}_j g_{ji}$$

Получается **определяющее** представление.

Пусть T представление группы G. Тогда **контраградиентное** представление $\tilde{T}$ к представлению T определяется как отображение:

$$\forall g \in G \quad \tilde{T}(g) = \left((T(g))^T\right)^{-1}$$

$$T(g)\vec{e}_k = \vec{e}_j T_{jk}(g)$$

$$T^T(g)\vec{e}_k = \vec{e}_j T_{kj}(g)$$

Необходимо доказать, что для $\tilde{T}$ выполнено условие гомоморфизма.

$$T(g_1)T(g_2) = T(g_1, g_2)$$

$$\tilde{T}(g_1)\tilde{T}(g_2) = \tilde{T}(g_1, g_2)$$

$$(T^T(g_1))^{-1}(T^T(g_2))^{-1} = (T^T(g_2)T^T(g_1))^{-1} = ((T(g_1)T(g_2))^T)^{-1} = \tilde{T}(g_1, g_2)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Присоединенное представление $T \to ad$. Пусть G матричная группа Ли, и $A(G)$ ее матричная алгебра Ли.

$$G = SO(n0$$

$$A \in A(SO(N)) \quad A \in Mat_n(R)$$

$$A^T = -A$$

$$G = Sp(2r, K)$$

$$A \in A(Sp(2r, K)) \quad A \in Mat_{2r}(K)$$

$$A^T C + CA = 0$$

В качестве пространства представления ad выступает алгебра Ли группы G. Представление определяется следующим образом:

$$ad(g)X = g \times X \times g^{-1}$$

Проверяется гомоморфизм:

$$ad(g_1)ad(g_2) = g_1(g_2 X g_2^{-1})g_1^{-1} = ad(g_1 g_2) \times X$$

Необходимо определить представление для произвольный группы Ли. Берется кривая $g(t)$ в G, исходящая из единичного элемента $e \in G$. $g_A(t)$ — кривая, которая соответствует вектору A.

$$\forall g \in G \quad g \times g_A(t) g^{-1} = \tilde{g}(t)$$

Определение 9.2. *Контрградиентное присоединенное представление называется коприсоединенным.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Регулярное представление группы

Пусть G конечная группа.

$$G = (g_1, g_2 ... g_n), \quad ord(G) = n$$
$$\forall g_i \in G \quad g_i(g_1, g_2 ... g_n) = (g_i g_1, g_i g_2 ... g_i g_n) = T^R(g_i)$$

Примером этого представления является группа C_3.

$$C_3 = (g_0, g_1, g_2)$$

Записывается действие единичной матрицы на элемент g_0:

$$e(g_0, g_1, g_2) = (g_0, g_1, g_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Записывается действие единичной матрицы на элемент g_1:

$$g_1(g_0, g_1, g_2) = (g_1, g_2, g_0) = (g_0, g_1, g_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Записывается действие единичной матрицы на элемент g_2:

$$g_2(g_0, g_1, g_2) = (g_2, g_0, g_1) = (g_0, g_1, g_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача: Построить T^R для группы $D_3 = S_3$.

Представления алгебры Ли

Определение 9.3. *Представления алгебры Ли — это линейный гомоморфизм T, который отображает элемент алгебры Ли $A_{K'}$ в алгебру линейных операторов, действующих в векторном пространстве $V(K)$.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

У вещественной алгебр Ли пространство может быть вещественным и комплексным. А у комплексной алгебры Ли пространство может быть только комплексным. Гомоморфизм должен сохранять умножение в алгебре Ли.

$$X, Y \in A_{K'}: \ T([X,Y]) = [T(x), T(y)] = T(x)T(y) - T(y)T(x)$$
$$T(\alpha X + \beta Y) = \alpha T(X) + \beta T(Y)$$

Примеры представлений алгебры Ли

Тривиальное представление T алгебры Ли A.

$$\forall X \in A \quad T : X \to 0$$

Определяющее представление для матричной алгебры Ли.

$$T(X) \times \vec{e}_k = \vec{e}_j X_{ji}, \quad ||X_{ij}|| \in A$$

Сопряженное представление T^* к T. В случае групп если есть преставление T, реализованное матрицами $T_{ij}(g)$, то для каждого элемента g из группы G сопоставляется матрица, и комплексно сопряженное представление — это:

$$T^*(g) \to T^*_{ij}(g)$$

Контрградиентное представление определяется следующим образом:

$$\tilde{T}'(X) = -(T(X))^T$$

В случае групп контрградиентное представление определяется следующим образом:

$$\tilde{T}(g) = (T^T(g))^{-1}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Присоединенное представление алгебры Ли. Представление действует в пространстве A. В присоединенном представлении определяется линейный оператор, который действует на элемент из алгебры Ли.

$$\forall X \in A, \quad \forall Y \in A \quad Ad(X) \times Y = [X, Y] \in A$$

Действие на элемент алгебры Ли осуществляется коммутатором. Таким образом, такое отображение называется присоединенным представлением.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 10. Прямое произведение и прямая сумма представлений

Эквивалентные представления

Представление — это гомоморфизм. Задана группа G и представление это отображение, которое отображает все элементы группы в группу линейных операторов, действующих в некотором пространстве $V(K)$.

$$T: \ G \to \Gamma$$

Любой линейный оператор можно представить в виде матрицы.

$$T \times \vec{e}_i = \vec{e}_j \times T_{ji}$$

Любой элемент из группы представляется как линейный оператор:

$$\forall g \in G \to T(g)$$

Пусть есть пространство представления и базис $\{\vec{e}_i\}$ в пространстве $V(K)$. Происходит переход от старого базиса в новый:

$$\vec{e}_i \to \vec{e}_i' = e_j S_{ji}$$

Представление преобразуется следующим образом:

$$T\vec{e}_i' = T\vec{e}_j S_{ji} = \vec{e}_k T_{kj} S_{ji} = \vec{e}_l S_{lk}^{-1} T_{kj} S_{ji}$$
$$T \to T' = S^{-1} T S$$

Происходит преобразование матриц и представление выглядит следующим образом:

$$T'(g) = S^{-1} T(g) S$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Основным требованием является то, что представление является гомоморфизмом.

$$T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2)$$

Определение 10.1. *Преставления T и T' называются эквивалентными, если существует оператор S такой, что:*

$$T'(g) = S^{-1}T(g)S \quad \forall g \in G$$

Вводится характеристика функции на группе $\chi_T(g)$, которая зависит от представления T. Эта функция определяется следующим образом:

$$\chi_T(g) = Tr_V(T(g))$$

Эта функция является характером представления T группы G. Для эквивалентных представлений характеры совпадают:

$$\chi_T(g) = \chi_{T'}(g)$$

Если характеры двух представлений компактных групп совпадают, то это означает, что их представления тоже совпадают и эквивалентны. Если соотношение — эквивалентное, то оно — так же тривиальное.

Прямое произведение и прямая сумма представлений

Пусть заданы 2 представления группы G T_1 и T_2, которые действуют в пространствах $V_n^{(1)}(K)$ $V_m^{(2)}(K)$. Тогда имеются 2 операции, которые называются прямое произведение представлений и прямая сумма представлений. С помощью этих операций можно сделать новое представление из T_1 и T_2.

Прямое произведение представлений обозначается как $T^{(1)} \otimes T^{(2)}$. Пусть $\{\vec{e}_i\}$ — это базис в пространстве $V_n^{(1)}$, а $\{\vec{\varepsilon}_a\}$ — базис в пространстве $V_m^{(2)}$. Рассматриваются два вектора:

$$\vec{x} \in V_n^{(1)} \quad (x_1, x_2, ...x_n)$$
$$\vec{y} \in V_n^{(2)} \quad (y_1, y_2, ...y_m)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Создается новый вектор в пространстве $V_{nm}(K)$:

$$\vec{z} = (x_1y_1, x_1y_2, ...x_1y_m, x_2y_1, ...x_2y_m, ...x_ny_1, ...x_ny_m)$$

Этот вектор называется прямым произведением векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

$$(\vec{x} \otimes \vec{z}) \in V_{nm}(K)$$
$$\vec{e}_i \otimes \vec{\varepsilon}_a = (0, 0, ..., 0, 1, 0..., 0)$$
$$x_i y_a = 1$$
$$(i-1)m + a = 0$$

Произвольный элемент этого пространства выглядит следующим образом:

$$\vec{v} = v_{ia}(\vec{e}_i \otimes \vec{\varepsilon}_a) \in V_n^{(1)} \otimes V_m^{(2)}$$

Получается тензорное произведение двух векторных пространств. Таким образом, можно определить действие группы на тензорном произведении.

$$T^{(1)}(g) \times \vec{e}_i = \vec{e}_j T_{ji}^{(1)}(g)$$
$$T^{(2)}(g) \times \vec{\varepsilon}_a = \vec{\varepsilon}_b T_{ba}^{(2)}(g)$$

$$T^{(P)}(g)(\vec{e}_i \otimes \vec{\varepsilon}_a) = (\vec{e}_j \otimes \vec{\varepsilon}_b) T_{ji}^{(1)}(g) T_{ba}^{(2)}(g)$$

Чтобы проверить является ли отображение представлением, необходимо доказать, что отображение гомоморфизм.

$$T^{(P)}(g_1) \times T^{(P)}(g_2) = T^{(P)}(g_1 \times g_2)$$

Примером является группа:

$$C_3 = Z_3$$

Элементами этой группы являются:

$$(g_0, g_1, g_2)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пусть есть одномерные представления:

$$T^{(1)}(g_0) = 1$$
$$T^{(1)}(g_1) = e^{(i\frac{2\pi}{3})}$$
$$T^{(2)}(g_2) = e^{(i\frac{4\pi}{3})}$$

Записываются регулярные представления:

$$T^{(2)}(g_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{(2)}(g_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T^{(2)}(g_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Дальше записывается прямое произведение двух представлений:

$$T^{(P)}(g_i) = T^{(1)}(g_i) \otimes T^{(2)}(g_i)$$

$$T^{(P)}(g_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{(P)}(g_1) = e^{(i\frac{2\pi}{3})} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{(i\frac{2\pi}{3})} \\ e^{(i\frac{2\pi}{3})} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(i\frac{2\pi}{3})} & 0 \end{pmatrix}$$

$$T^{(P)}(g_2) = e^{(i\frac{4\pi}{3})} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{(i\frac{4\pi}{3})} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(i\frac{4\pi}{3})} \\ e^{(i\frac{4\pi}{3})} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Это представление гомоморфное.

Прямая сумма представлений обозначается следующим образом:

$$T^{(1)} \oplus T^{(2)}$$

Берутся два вектора из пространства $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$:

$$\vec{x} \in V^{(1)} \to (x_1, x_2 ... x_n)$$
$$\vec{y} \in V^{(2)} \to (y_1, y_2 ... y_m)$$

создается новый вектор:

$$\vec{z} = (x_1, x_2 ... x_n, y_1, y_2 ... y_m) = \vec{x} \oplus \vec{y}$$

Базисные элементы этого вектора записываются следующим образом:

$$\vec{e}_i = (0...1...0...0) \quad \vec{\varepsilon}_a = (0...0, 0...1...0)$$
$$\vec{z} = x_i \vec{e}_i' + y_a \vec{\varepsilon}_a'$$

Зная действие представлений, можно записать действие группы G на вектор z.

$$\vec{z} \to \vec{z}' = x_i \vec{e}_j' T_{ji}^{(1)}(g) + y_a \vec{\varepsilon}_b' T_{ba}^{(2)}(g)$$

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \\ y_1 \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$\vec{z}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_n' \\ y_1' \\ y_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & T^{(2)}(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \\ y_1 \\ y_m \end{pmatrix}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Чтобы проверить является ли отображение представлением, необходимо доказать, что отображение гомоморфизм.

$$T^S(g_1 \times g_2) = T^S(g_1) \times T^S(g_2)$$

$$\begin{pmatrix} T^{(1)}(g_1) & 0 \\ 0 & T^{(2)}(g_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{(1)}(g_2) & 0 \\ 0 & T^{(2)}(g_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{(1)}(g_1)T^{(1)}(g_2) & 0 \\ 0 & T^{(2)}(g_1)T^{(2)}(g_2) \end{pmatrix}$$

Записывается одномерные и регулярные представления:

$$T^{(1)}(g_0) = 1$$
$$T^{(1)}(g_1) = e^{(i\frac{2\pi}{3})}$$
$$T^{(2)}(g_2) = e^{(i\frac{4\pi}{3})}$$

Дальше записывается прямая сумма двух представлений:

$$T^{(S)}(g_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{(S)}(g_1) = \begin{pmatrix} e^{(i\frac{2\pi}{3})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{(i\frac{2\pi}{3})} \\ 0 & e^{(i\frac{2\pi}{3})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{(i\frac{2\pi}{3})} & 0 \end{pmatrix}$$

Приводимые и неприводимые представления

У абелевой группы все неприводимые представления являются одномерными.

Определение 10.2. *T представление группы G, если существует невырожденная матрица S такая, что:*

$$\forall g \in G \quad ST(g)S^{-1} = \begin{pmatrix} T^{(1)}(g) & X(g) \\ 0 & T^{(2)}(g) \end{pmatrix}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

тогда, такое представление называется ***приводимым****.*

Если такого преобразования не существует, то представление называется **неприводимым**. Гомоморфизм выглядит следующим образом:

$$T(g_1) \times T(g_2) = T(g_1 \times g_2)$$

$$\begin{pmatrix} T^{(1)}(g_1) & X(g_1) \\ 0 & T^{(2)}(g_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{(1)}(g_2) & X(g_2) \\ 0 & T^{(2)}(g_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} T^{(1)}(g_1)T^{(1)}(g_2) & T^{(1)}(g_1)X(g_2) + X(g_1)T^{(2)}(g_2) \\ 0 & T^{(2)}(g_1)T^{(2)}(g_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{(1)}(g_1 \times g_2) & X(g_1 \times g_2) \\ 0 & T^{(2)}(g_1 \times g_2) \end{pmatrix}$$

Инвариантное пространство

Записывается преобразованный вектор:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_n' \\ y_1' \\ y_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{(1)}(g) & X(g) \\ 0 & T^{(2)}(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \\ y_1 \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{(1)}(g)\vec{x} + X(g)\vec{y} \\ T^{(2)}(g)\vec{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}' \\ \vec{y}' \end{pmatrix}$$

Предполагается, что все координаты композитного вектора равны 0:

$$\vec{y} = 0$$
$$\vec{x}' = T^{(1)}(g)\vec{x} + X(g)\vec{y}$$
$$\vec{y}' = T^{(2)}(g)\vec{y}$$

Таким образом, пространство переходит само в себя. Такое пространство называется инвариантным.

Определение 10.3. *Подпространство W в пространстве V называется инвариантным по отношению к представлению T группы G, если:*

$$\forall g \in G \quad T(g)\vec{V} \subset W$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 10.4. *Представление T приводимо, если в пространстве V имеется инвариантное нетривиальное подпространство W.*

$$T^{(2)}(g) \to \frac{V}{W}$$

Прямое произведение и прямая сумма представлений алгебры Ли

Пусть G является группой алгебры Ли. Берется кривая, которая исходит из единичного элемента.

$$T^{(P)}(g(t)) = T^{(1)}(g_A(t)) \otimes T^{(2)}(g_A(t))$$

Происходит разложение вблизи единичного элемента:

$$T^{(1)}(g(t)) = T^{(1)}(e) + tT^{(1)}(A)$$
$$T^{(1,2)}(g(t)) = I_n + tT^{(1,2)}(A) + t^2 ...$$

Таким образом, можно записать прямое произведение для алгебры Ли:

$$I_{nm} + tT^{(P)}(A) + t^2 ... = (I_n + tT^{(1)}(A) + ...) \otimes (I_n + tT^{(2)}(A) + ...) =$$
$$= I_{nm} + t(I_n \otimes T^{(2)}(A) + T^{(1)}(A) \otimes I_m) + t^2 ...$$

Прямая сумма записывается следующим образом:

$$T^{(P)}(g(t)) = T^{(1)}(g_A(t)) \oplus T^{(2)}(g_A(t))$$

$$T^{(S)}(A) = \begin{pmatrix} T^{(1)}(A) & 0 \\ 0 & T^{(2)}(A) \end{pmatrix}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 11. Критерий неприводимости представлений. Лемма Шура

Критерий неприводимости представлений. Лемма Шура

Определение 11.1. *T – представление группы G, если существует невырожденная матрица S такая, что:*

$$\forall g \in G \quad ST(g)S^{-1} = \begin{pmatrix} T^{(1)}(g) & X(g) \\ 0 & T^{(2)}(g) \end{pmatrix}$$

*тогда, такое представление называется **приводимым**. Представление T приводимо, если в пространстве V имеется инвариантное нетривиальное подпространство W.*

$$\forall g \in G \quad T(g)\vec{V} \subset W$$

Если такого преобразования не существует, то представление называется **неприводимым**.

Основной задачей теории представления является найти все неприводимые не эквивалентные представления группы. Для этого применяются критерии приводимости представлений. Этот критерий дается леммой Шура.

Лемма 11.1. *Оператор $A \neq 0$ коммутирует со всеми $g \in G$ в неприводимом комплексном представлении T:*

$$T(g) \times A \times A \times T(g), \quad \forall g \in G$$

Оператор кратен единичному:

$$A = \lambda \times I$$

Если есть 2 неприводимых и не эквивалентных представления $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ группы G в пространстве $V^{(1)}$ и $V^{(2}$, и имеется оператор, который переводит

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

пространство $V^{(1)}$ в пространство $V^{(2}$ такое, что этот оператор коммутирует со всеми матрицами представления.

Тогда, оператор должен равняться 0.

$$A : V^{(1)} \to V^{(2)}$$

$$\forall g \in G \quad T^{(1)}(g) \times A = A \times T^{(2)}(g) \to A = 0$$

Доказательство.

Доказывается первая часть леммы. Необходимо доказать, что A — невырожденный оператор. Пусть существует $\vec{x}$ в пространстве V представления такой, что:

$$A\vec{x} = 0$$

Рассматривается множество всех векторов — $Ker(A)$ (ядро оператора A). Записывается действие условия на элемент ядра:

$$\vec{x} \in Ker(A) \quad 0 = T(g)A\vec{x} = AT(g)\vec{x} \to T(g)\vec{x} \in Ker(A)$$

Это означает, что $Ker(A)$ инвариантное подпространство в пространстве V. Так как представление неприводимое, возникают 2 условия:

$$Ker(A) = \varnothing$$

$$Ker(A) = V$$

Второй случай не подходит, так как $A \neq 0$. Первое условие эквивалентно тому, что A — невырожденный оператор. Тогда существует $\vec{y}$ в пространстве представления V такой, что:

$$A\vec{y} = \lambda\vec{y} \quad \lambda \neq 0$$

Рассматривается оператор $(A-\lambda I)$ и его ядро $Ker(A-\lambda I)$. Если подействовать соотношением на $\vec{y}$, то можно увидеть, что ядро $Ker(A-\lambda I)$ является инвариантным подпространством. Таким образом, появляются следующие 2 случая:

$$Ker(A-\lambda I) = \varnothing$$

$$Ker(A-\lambda I) = V$$

Первый случай не подходит, так как ядро не может быть пустым (есть $\vec{y}$). Подходит второй случай. Это означает, что если ядро совпадает со всем пространством, то оператор получается следующим: ■

$$A = \lambda I$$

Доказательство.

Доказывается вторая часть леммы. Пусть есть оператор A, который отображает представление пространства $V^{(1)}$ в пространство $V^{(2}$. Записывается инвариантное подпространство:

$$Ker(A) \subset V^{(2)}$$

Образ оператора A тоже является инвариантным:

$$Img(A) \subset V^{(1)}$$

$$T^{(1)}(g) \times A\vec{y} = A \times T^{(2)}(g)\vec{y} \in Img(A)$$

Так как представления являются неприводимыми, то инвариантные подпространства являются тривиальными. Записываются 2 случая для каждого подпространства:

$$Ker(A) = \varnothing$$

$$Ker(A) = V^{(2)}$$

$$Img(A) = \varnothing$$

$$Img(A) = V^{(1)}$$

Для ядра выбирается следующий случай: ■

$$Ker(A) = V^{(2)} \to A = 0$$

Следствия из леммы Шура

Все неприводимые комплексные представления абелевой группы одномерны. Это доказывается следующим образом:

$$g, h \in G \quad T(g)T(h) = T(h)T(g)$$

Пусть h — фиксированный элемент группы G, а g — произвольный элемент группы G.

$$T(h) = \lambda(h) \times I$$

Записывается вещественное представление комплексной группы $SO(2) = U(1)$:

$$G_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Это представление является неприводимым. Чтобы найти матрицы преобразования эквивалентности, необходимо заметить, что группа $U(1)$ действует в комплексном пространстве C.

$$z \to e^{i\varphi} z$$

Рассматривается группа $C_3 = Z_3$. Регулярное представление записывается следующим образом:

$$T^R(g_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^R(g_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$T^R(g_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Регулярное представление — это сумма трех одномерных представлений.

Свойства представлений компактных групп Ли

Конечные группы можно рассматривать как случай компактных групп. Конечные группы — это компактные группы Ли нулевой размерности. Если G — конечная группа, то получается:

$$\sum_{g\in G} X(g) = \sum_{g\in G} X(g\times h) = \sum_{g\in G} X(h\times g)$$

Объем компактных групп всегда конечен:

$$\int_G d\mu(g) = V$$

$$\int_G d\mu(g) X(g) = \int_G d\mu(g) X(g\times h)$$

Если объем групп конечен, то группа является компактной. На конечных и компактных группах есть инвариантное суммирование.

Утверждение 11.1. *Любое приводимое представление T компактной группы разложимо.*

Представление, которое разлагается в прямую сумму неприводимых называется вполне приводимыми.

Утверждение 11.2. *Любое представление T компактной группы эквивалентно унитарному представлению.*

Доказательство.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пусть комплексное представление T действует в пространстве V и пусть в пространстве задано эрмитово скалярное произведение.

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V \quad (\vec{x}, \vec{y})_1 \in C$$

$$(x, y)_1^* = (y, x)_1$$

Определяется следующее скалярное произведение:

$$< x, \vec{y} >_2 = \frac{1}{N} \sum_{h \in G} < T(h) \times \vec{x}, T(h) \times \vec{y} >_1$$

Это скалярное произведение является инвариантным по отношению к действию:

$$< T(g)\vec{x}, T(g)\vec{y} >_2 = < \vec{x}, \vec{y} >_2 \quad \forall g \in G$$

$$\frac{1}{N} \sum_{h \in G} < T(h)T(g)\vec{x}, T(h)T(g)\vec{y} >_1$$

Таким образом, было доказано, что любое представление компактное группы является унитарным. ■

Доказательство.

пусть есть нетривиальное подпространство $W \subset V$. Происходит разложение V на подпространство W.

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

$$\vec{z} \in V \quad \vec{x} \in W \quad \vec{y} \in W^{\perp}$$

$$\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$$

$$< \vec{x}, \vec{y} > = 0 \quad \forall \vec{x} \in V \quad \vec{y} \in W^{\perp}$$

Записывается скалярное произведение:

$$< T(g)\vec{x}, T(g)\vec{y} > = < x, y >$$

$$T(g)\vec{y} \in W^{\perp}$$

Таким образом, ортогональное дополнение к инвариантному подпространству тоже является инвариантным подпространством. Это означает, что представление разложимо. ■

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Выделение неприводимых представлений из прямого произведения определяющих представлений

Пример 11.1. *Пусть T — разложимое представление группы G.*

$$T(g) = \begin{pmatrix} T^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & T^{(2)}(g) \end{pmatrix} \quad \forall g \in G$$

Это означает, что существует следующий оператор:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_n & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_m \end{pmatrix} \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$$

Эта матрица не единичная, не нулевая и коммутирует со всеми матрицами представления. Этот пример иллюстрирует то, что если есть матрица такого типа, то представление обязательно будет разложимым.

Пример 11.2. *Рассматривается определяющее (фундаментальное) представление группы $SU(N)$ в пространстве C^N. Есть два представления и прямое произведение:*

$$(T \otimes T)(g)$$

Матрица имеет размерность $N^2 \times N^2$. Если в пространстве C^N есть базис $\{\vec{e}_i\}$, то любой элемент вектор разлагается по этому базису. Определяющее представление T действует в пространстве C^N следующим образом:

$$T(g)\vec{e}_i = \vec{e}_j g_{ji}$$

$$T^{\otimes 2}(g)(\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{j_2}) = \vec{e}_{k_1} \otimes \vec{e}_{l_2} g_{k_2 i_1} g_{l_2 j_2}$$

$$[T^{\otimes 2}(g)z]_{ij} = g_{ik} g_{il} z_{kl}$$

Если оператор нетривиальный, непропорциональный единичному и коммутирует с матрицами, то представление приводимое.

$$I(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) = (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) I_{ij}^{kl}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$I_{ij}^{kl} = \delta_i^k \delta_j^l$$

Записывается оператор перестановки:

$$P(\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2)\vec{v}_2 \otimes \vec{v}_1$$

Матричная структура этого оператора выглядит следующим образом:

$$P(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) = (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l)P_{ij}^{kl}$$
$$P_{ij}^{kl} = \delta_j^k \delta_i^l$$

$$P(A \otimes B)(v_1 \otimes v_2) = P(Av_1 \otimes Bv_2) = Bv_2 \otimes Av_1 = (B \otimes A)(v_1 \otimes v_2)$$
$$P(A \otimes B)P(v_2 \otimes v_2)$$

Сравнивая результаты прямого произведения, получится следующее соотношение:

$$P(A \otimes B) = (B \otimes A)P$$

$$T^{\otimes 2}(g) = (\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{j_2}) = \vec{e}_{k_1} \otimes \vec{e}_{l_2} g_{k_2 i_1} g_{l_2 j_2} \to z \to z' = (g \otimes g)z$$

Вводятся 2 проектора:

$$P^{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm P)$$
$$(P^{\pm})^2 = P^{\pm} \quad P^+ = P^- = I$$

Записывается действие проекторов на тензор второго ранга:

$$\left(\frac{1}{2}(I \pm P)z\right)_{ij} = \frac{1}{2}\left(I_{ij}^{kl} \pm P_{ij}^{kl}\right) z_{kl} = \frac{1}{2}(z_{ij} \pm z_{ji}) = z^{\pm}$$

Пространство представления $T^{\otimes 2}$ разбивается на 2 инвариантных подпространство: инвариантное подпространство симметричных тензоров и подпространство антисимметричных тензоров.

Размерность тензорного произведения записывается следующим образом:

$$N^2 = \frac{N(N+1)}{2} + \frac{N(N-1)}{2}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ