Геологический факультет МГУ
Кафедра динамической геологии
Лаборатория тектонофизики и геотектоники

Тектонофизика

Курс лекций вед. научн. сотр., канд. геол.-минер. наук
Н.С. Фроловой

Лекция 5

Лекция 5

Напряженное состояние сплошной среды (продолжение)

- Общее напряжение как сочетание равномерного всестороннего сжатия и девиаторного напряжения

Упругая деформация

Пластическая деформация

Общее напряжение как сочетание равномерного всестороннего сжатия и девиаторного напряжения

- **Общее** напряжение можно разложить на два компонента: напряжение **равномерного** всестороннего сжатия (σ_m) и **девиаторное** напряжение (σ').

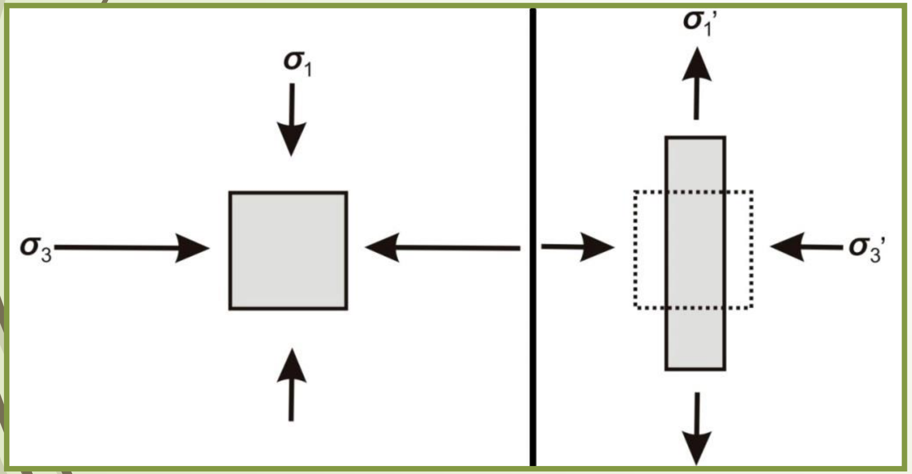
$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

Компонента равномерного всестороннего сжатия в теле при трехосном напряженном состоянии ***(давление)***

σ_m – это то напряжение, которое ответственно за уменьшение **объема**, без изменения **формы** тела.

Вычтем теперь из общего напряжения напряжение равномерного всестороннего сжатия:

$\boldsymbol{\sigma_1' = \sigma_1 - \sigma_m}$; $\boldsymbol{\sigma_2' = \sigma_2 - \sigma_m}$; $\boldsymbol{\sigma_3' = \sigma_3 - \sigma_m}$ *Это компонента девиаторного напряжение в теле при трехосном напряженном состоянии.*



Этот «остаток» – девиаторное напряжение - ответственно за изменение **формы** тела, т.е. за **деформацию**.

Плоское напряженное состояние

- Примем, что главное нормальное напряжение σ_2 по одной из осей равно напряжению равномерного всестороннего сжатияσ σ_m , которое не вызывает деформации $\sigma_2 = \sigma_m$. Подставим это условие в формулы

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \qquad \sigma_1' = \sigma_1 - \sigma_m; \quad \sigma_2' = \sigma_2 - \sigma_m; \quad \sigma_3' = \sigma_3 - \sigma_m$$

После несложных преобразований, с учетом того, что $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, получаем:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2};$$

$$\sigma_1' = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_{max}; \quad \sigma_2' = 0; \quad \sigma_3' = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = -\tau_{max}.$$

Поскольку $\boldsymbol{\sigma_1}$ и $\boldsymbol{\sigma_3}$ представляют собой, соответственно, алгебраически максимальное и минимальное главное нормальное напряжение, то из формулы следует: $\boldsymbol{\sigma_1'}$ больше 0; $\boldsymbol{\sigma_3}'$ меньше 0; $\boldsymbol{\sigma_2'}$ равно 0.

Напряженное состояние, охарактеризованное этими формулами, называется также напряженным состоянием чистого сдвига

Задача 22

Если $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 26{,}8$ МПа, чему равно τ_{max}?

Задача 23

Тело находится в плоском напряженном состоянии.
$\sigma_1 = -78$ МПа, $\tau_{max} = 0$. Чему равно σ_3?

Задача 24

Дано: $\boldsymbol{\sigma_1} = -290$ МПа; $\boldsymbol{\sigma_2} = -340$ МПа; $\boldsymbol{\sigma_3} = -420$ МПа.
Найти: $\boldsymbol{\sigma_m}$; $\boldsymbol{\sigma'_1}$; $\boldsymbol{\sigma'_2}$; $\boldsymbol{\sigma'_3}$.
Какие главные нормальные напряжения, фигурирующие в задаче, являются растягивающими, а какие - сжимающими?

Задача 25

Дано: $\boldsymbol{\sigma_3} = -146$ МПа; $\boldsymbol{\sigma_2} = -124$ МПа; $\boldsymbol{\sigma_1} = -86$МПа.
Найти: $\boldsymbol{\tau}_{max}$

Задача 26.

Напряженное состояние чистого сдвига. $\sigma_3' = -87$ МПа. Чему равно σ_1'?

Задача 27.

Напряженное состояние чистого сдвига.

$\sigma_1 = -111$ МПа, $\sigma_3 = -333$ МПа. Чему равно σ_2?

Задача 28.

Напряженное состояние чистого сдвига. $\sigma_3' = -50$ МПа. $\sigma_1' = 50$ МПа. Чему равно σ_2'?

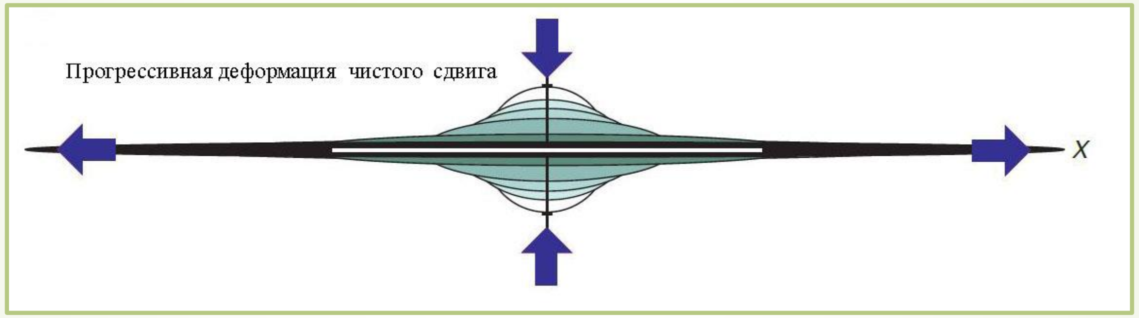
Задача 29.

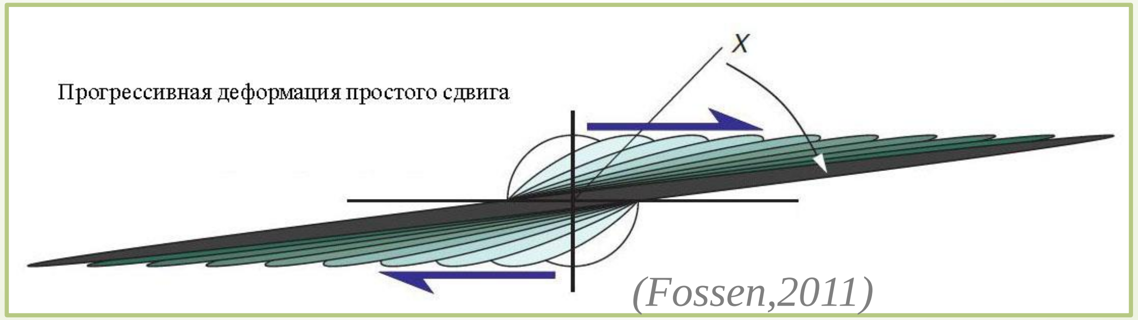
<u>Дано</u>: $\sigma_2 = -300$ МПа; $\tau_{max} = 0$. <u>Найти</u>: σ_1; σ_3; σ'_1; σ'_2; σ'_3.

Чем характерна общая деформация?

О соосных и несоосных деформациях

Конечная деформация накапливается в результате последовательных малых приращений при прогрессивной деформации. Если в процессе прогрессивной деформации оси эллипсоидов малых приращений сохраняют свои направления, то такая деформация называется *соосной*.
Так, деформация чистого сдвига (удлинения-укорочения) является соосной.

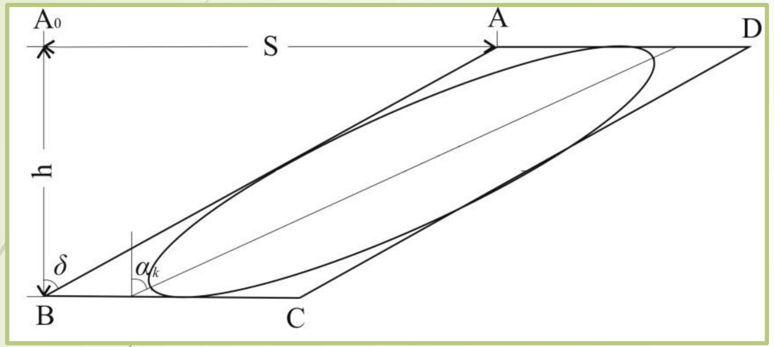




Простой сдвиг. Оси деформации поворачиваются.

А что происходит с осями напряжений?

Ориентировка осей напряжений при деформации простого сдвига

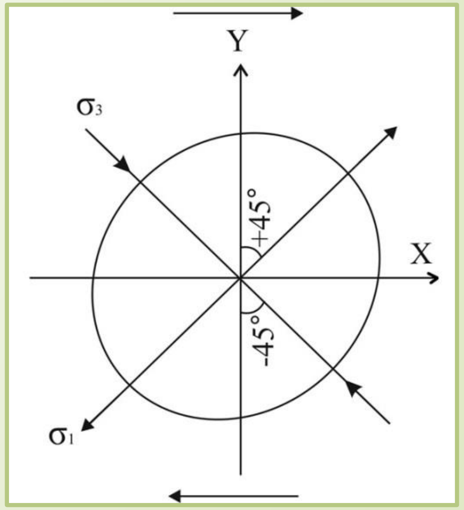


При фиксированной деформации сдвига (δ) единичный радиус круга испытывает максимальное удлинение при некотором угле наклона длинной оси эллипса деформации (α_k).
Можно показать, что $tg\ 2\alpha_k = -2/tg\ \delta$ (для вывода этой зависимости используются формулы (1) и (2) и решается задача на максимум).

$tg\alpha = tg\ \alpha_0 + tg\delta$ (1)
$l = l_0 \cos \alpha_0 / \cos \alpha$ (2)

$$\boxed{tg\ 2\alpha_k = -2/tg\ \delta}$$

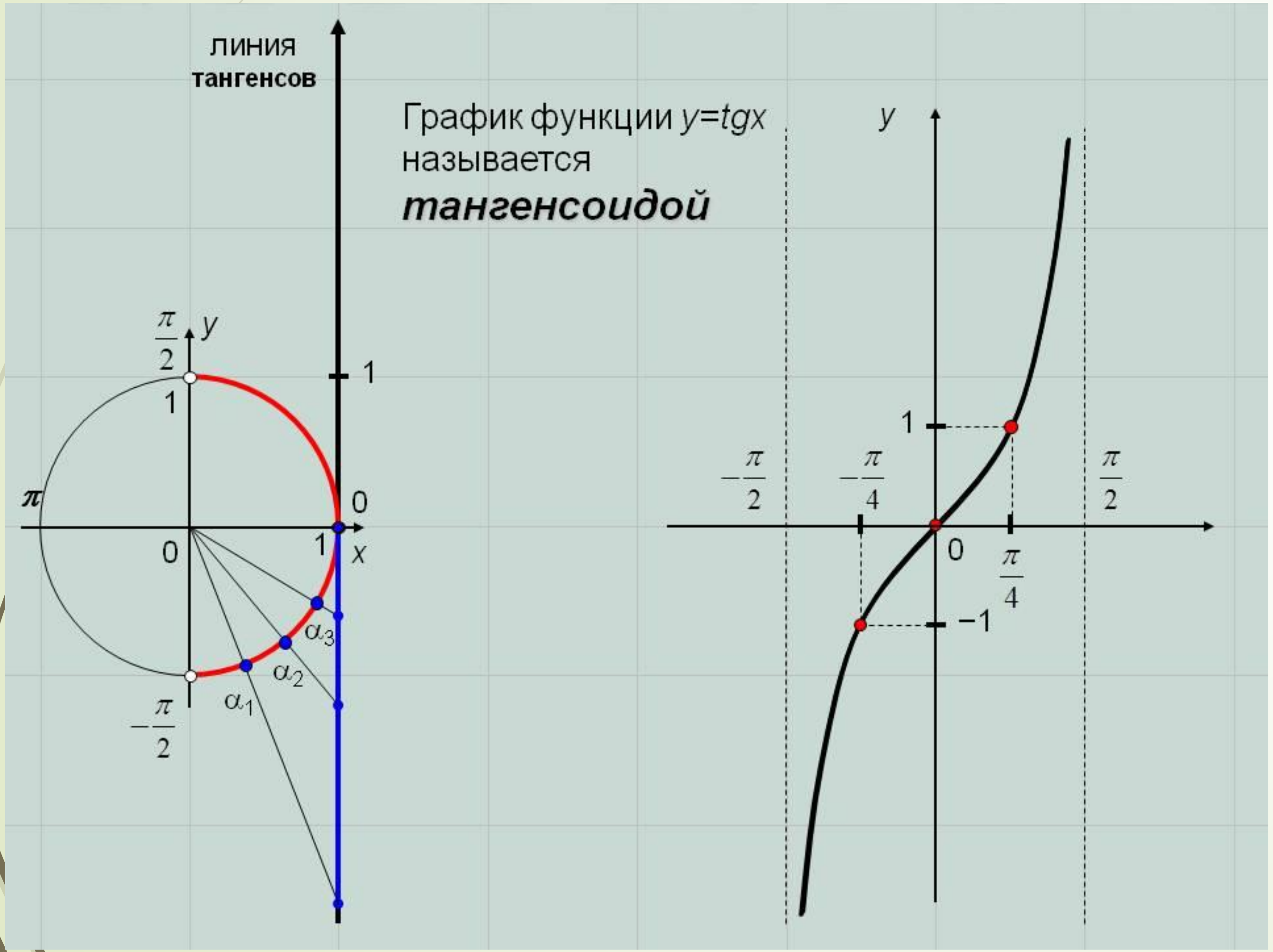
Известно, что оси эллипсов малых приращений деформации совпадают с осями напряжений.
При малом приращении деформации угол сдвига ничтожно мал:
$\delta \to 0$, и следовательно, $tg\delta \to 0$,
при этом $tg\ 2\alpha_k \to -\infty$, а $2\alpha_k \to -\pi/2 + \pi n$.
Тогда $\alpha_k \to -\pi/4 + \pi/2 \cdot n$.
При $n = 0$ $\alpha_k \to -\pi/4$; При $n = 1$ $\alpha_k \to \pi/4$.



Вывод

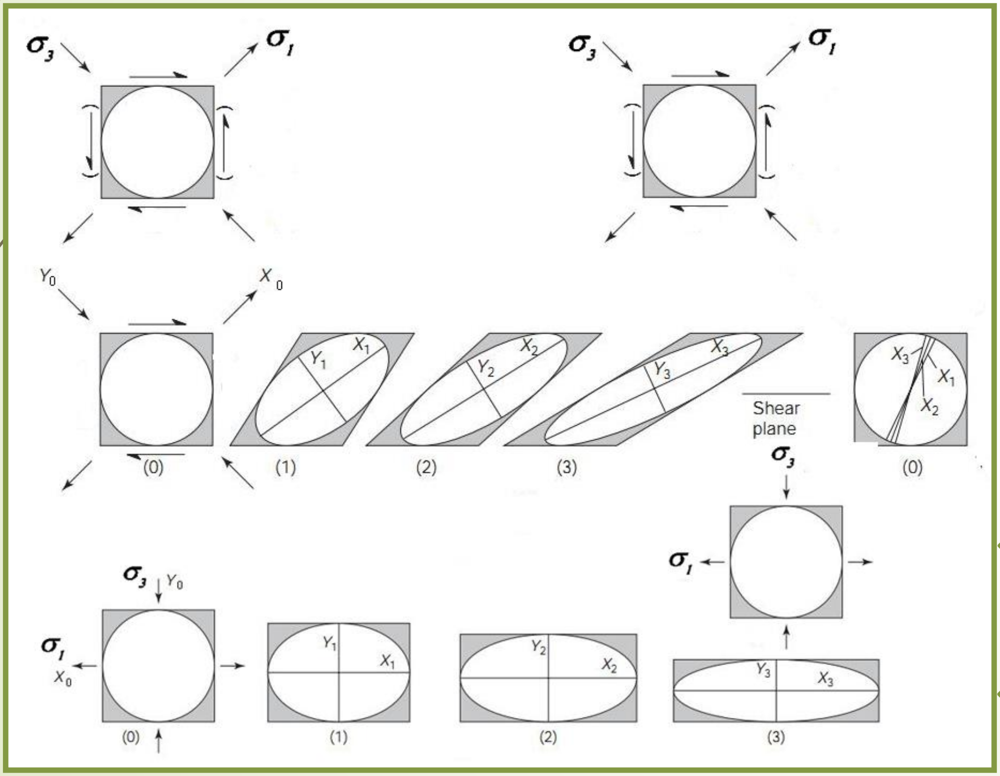
Справка

Если $tg\ 2\alpha_k \to -\infty$, то $2\alpha_k \to -\pi/2 + \pi n$.
Тогда $\alpha_k \to -\pi/4 + \pi/2 \cdot n$.
При $n = 0$ $\alpha_k \to -\pi/4$; При $n = 1$ $\alpha_k \to \pi/4$.



Итак, при малой деформации короткая ось эллипса деформации будет располагаться под ⌄-45°к осям X и Y (ось Y является направлением сдвига), следовательно, так же будет ориентирована ось максимального сжатия σ_3. При этом ориентировка последней не изменяется в процессе деформации.

Однако мы видели, что оси эллипсоида **прогрессивной <u>деформации</u>** будут последовательно поворачиваться. Такая деформация является *несоосной*.



Простой сдвиг

Ориентировка осей напряжений не меняется

Оси деформации поворачиваются

Чистый сдвиг

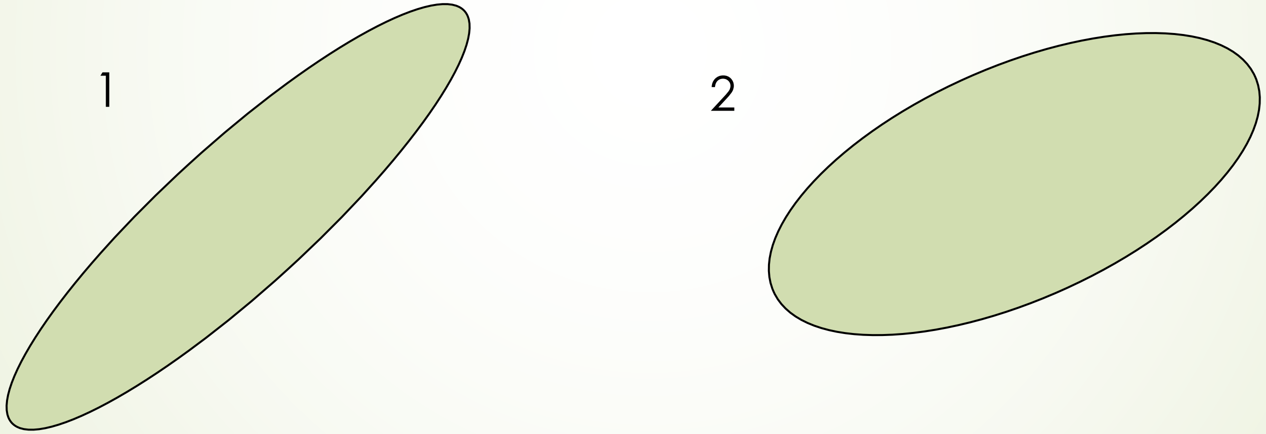
Ориентировка осей напряжений не меняется.

Ориентировка осей деформации всегда совпадает с ориентировкой осей напряжений

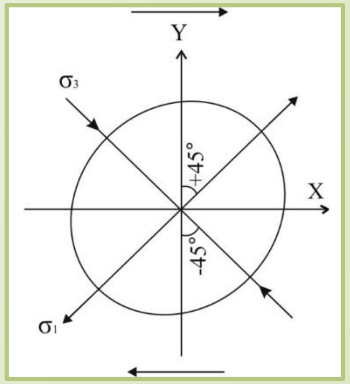
(Fossen, 2011)

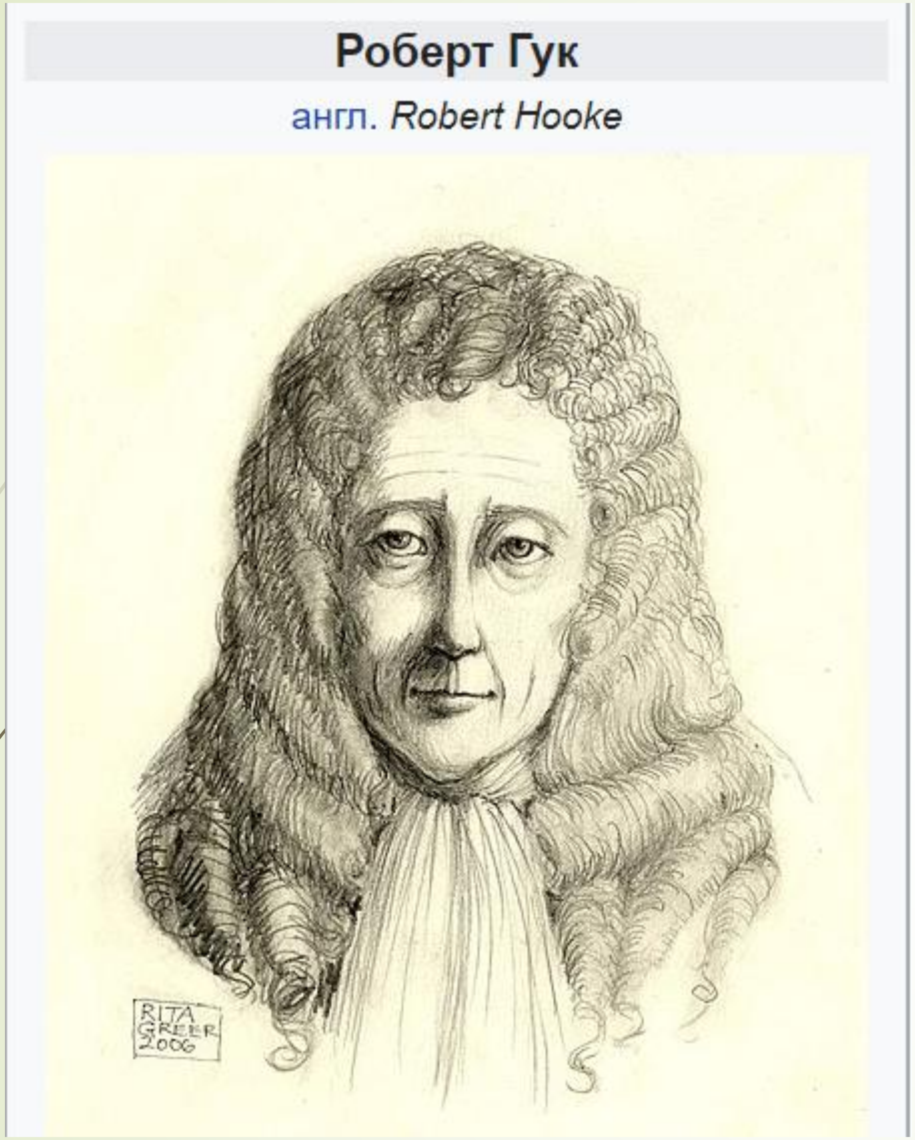
Задача 30

<u>Дано:</u> Два эллипса деформации. Первый образовался из круга в результате деформации простого сдвига, а второй – в результате деформации чистого сдвига.
<u>Найти</u> ориентировку осей напряжений и деформации в каждом случае.



Пусть для первого эллипса
а=10 см; с=2,5 см





1635-1703

Упругая деформация

Взаимоотношение напряжений и деформаций

Геологические тела, как и другие твердые тела, реагируют на приложение к ним напряжений по-разному.

Возможны 3 варианта реакции:

1) упругая деформация (пример – сейсмичность);
2) пластическая (в широком смысле) деформация (пример – складкообразование);
3) разрушение (пример – формирование трещин и разрывов).

Наиболее общим свойством твердых тел является ***упругость***: будучи деформированным под нагрузкой, тело полностью восстанавливает свою исходную форму после снятия нагрузки

Горную породу нельзя упруго растянуть больше чем на 1%.

Величина как будто бы небольшая, но достаточная для возникновения землетрясения .

В очаге шириной, например, 10 км это даст увеличение размера на 100 м, а при снятии нагрузки уменьшение на те же 100 м.
Вот это колебание и есть землетрясение

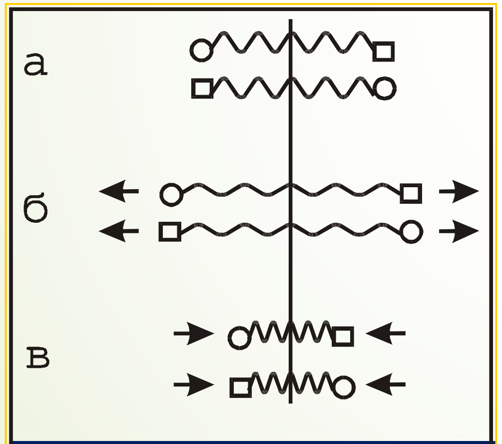


Рис. 1.15

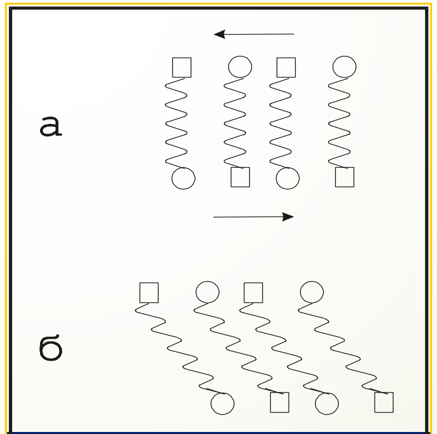


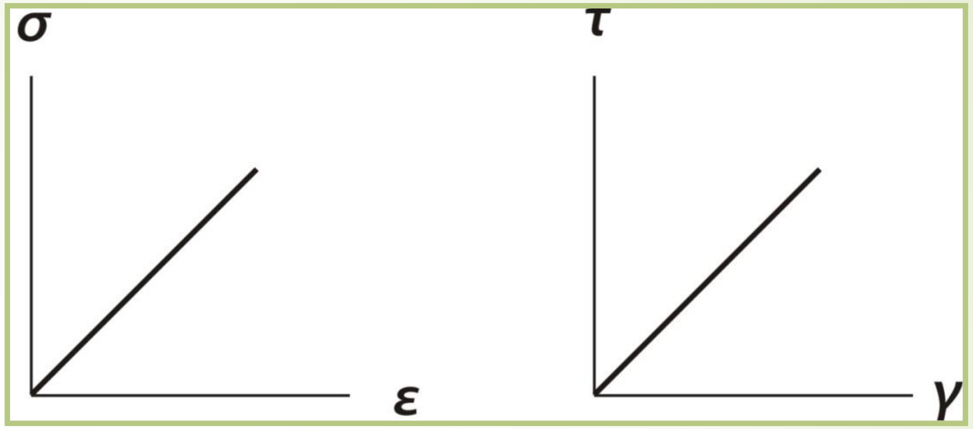
Рис. 1.19

Зависимость между напряжениями и упругими деформациями обычно линейная, т.е. величина упругой деформации пропорциональна напряжению.

Закон Гука:

$\sigma = E\,\varepsilon$; $\tau = G\,\gamma$

Где E – модуль Юнга (модуль упругости)
G – модуль сдвига



Например, у гранита модуль упругости *E = 30 000 МПа = 300 кбар.*
В 2 раза гранит растянуть или сжать невозможно, а вот на 1% – можно.
Для этого требуется напряжение в 300 МПа = 3 кбар.

Физический смысл модуля Юнга состоит в том, что он показывает, какое нормальное напряжение σ нужно приложить к телу, чтобы его деформация ε, выраженная "процентной" мерой, оказалась равной единице (т.е. 100 %). Следовательно, этот модуль имеет размерность напряжения (поскольку деформация безразмерна) и может быть количественно оценен в уже известных нам единицах – МПа или кбар.

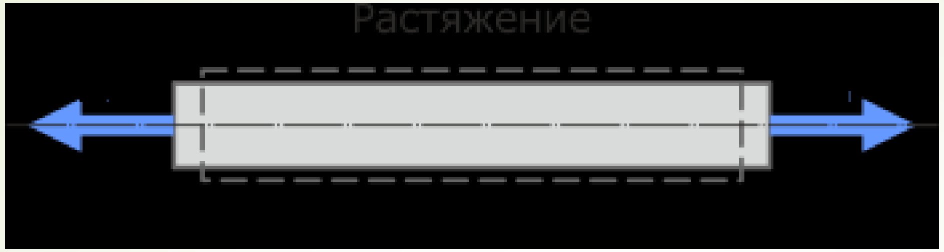
Задача 31

Определить величину напряжения, которое вызывает в граните (E=45 ГПа) упругое удлинение на 0,5%. .

Задача 32

Определить величину максимально возможного упругого удлинения в песчанике (E=20 ГПа; **σ** =76 МПа).

Коэффициент Пуассона



Растянем **упругий брусок**. Он удлинится в продольном направлении и укоротится в поперечном. Соотношение между продольными и поперечными деформациями было установлено Пуассоном (эмпирически)

$\varepsilon_3 = -\nu\varepsilon_1$ (1), где ε_3 – поперечная деформация, а ε_1 – продольная;

ν – *коэффициент Пуассона*, отражающий свойства материала.

Если материал не испытывает поперечной деформации, то коэффициент Пуассона равен 0. Если объем материала при деформации не меняется, то коэффициент Пуассона равен 0,5. Реальные горные породы меняют объем при деформации. Среднее значение коэффициента Пуассона для изотропных горных пород в интервале **упругого поведения** составляет около 0,3

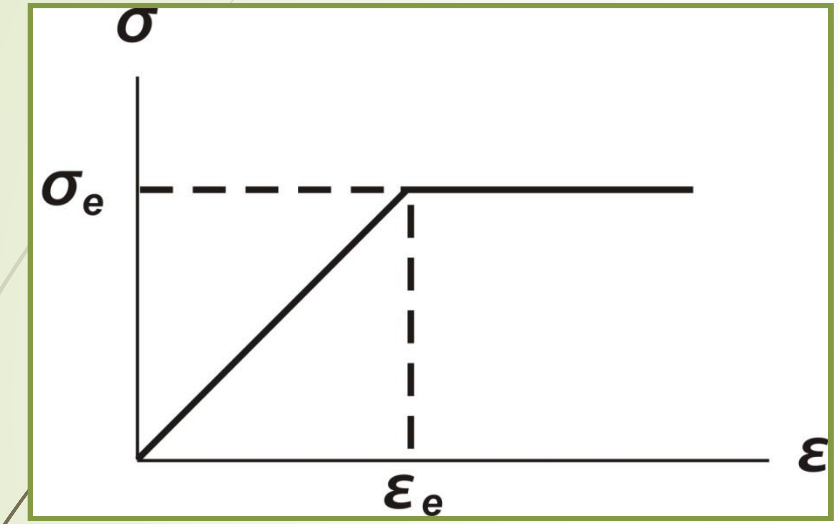
Выражение (1) выполняется и при пластических деформациях, однако в таком случае коэффициент Пуассона зависит от величины деформации.

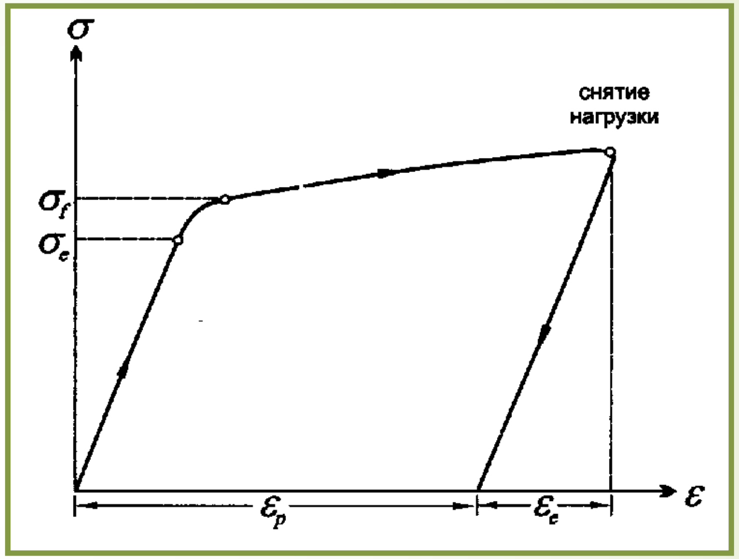
С ростом деформации и возникновении существенных пластических деформаций $\nu(\varepsilon) \longrightarrow 0{,}5$.

Опытным путем установлено, что пластическая деформация происходит без изменения объема вещества.

Пластическая деформация

Предел упругости. Необратимая деформация





Начиная с некоторого напряжения, называемого пределом упругости или пропорциональности, зависимость между напряжением и деформацией перестает быть линейной. При дальнейшем нагружении материал переходит в пластическое состояние.
В области пластической деформации при снятии нагрузки в теле исчезает только упругая часть деформации

Здесь σ_e - предел пропорциональности, или предел упругости; σ_f – предел текучести (после его достижения тело лишь необратимо деформируется («течет»)

Диаграммы напряжение-деформация для упруго-пластического поведения пород

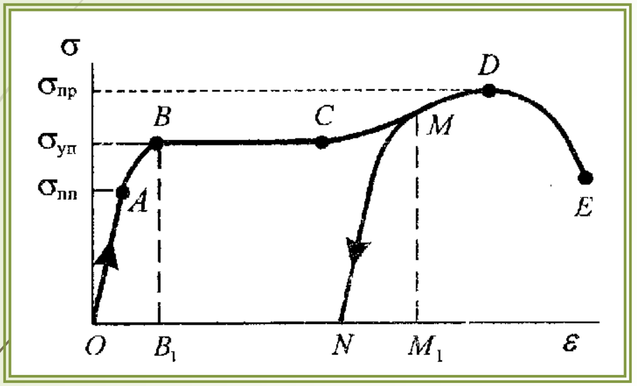
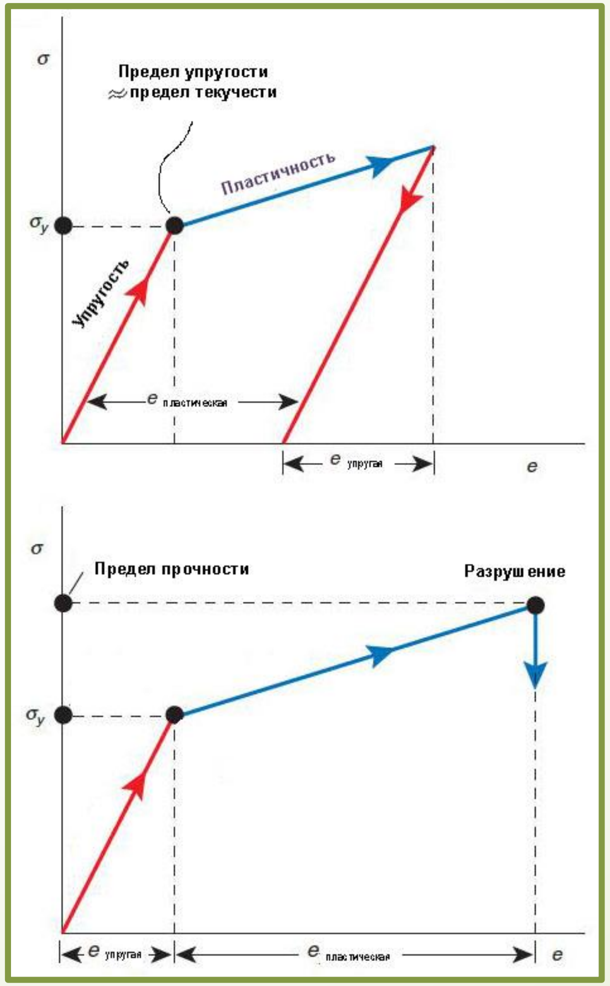


Диаграмма для металла
в условиях растяжения
(имеет место структурная
перестройка деформиру-
емого материала)



Предел прочности,
разрушение

(из Fossen, 2011)

Релаксация и ползучесть

Релаксация

Что происходит, если напряжения (**ниже предела упругости!!!**) действуют длительное время?

Деформация любого тела , находящегося под нагрузкой, в общем случае в каждый момент времени имеет две составляющие

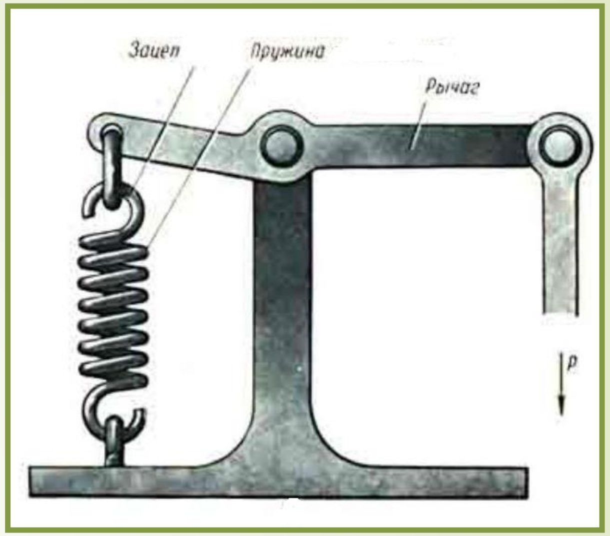
$$\varepsilon = \varepsilon_{упр} + \varepsilon_{ост}$$

- **А. Первый вариант**.

Если телу задать некоторую небольшую деформацию ε, то в момент приложения нагрузки практически вся деформация будет упругой. Со временем упругая деформация постепенно переходит в остаточную:

$\varepsilon_{упр}$ уменьшается, а $\varepsilon_{ост}$ соответственно растет.

Возьмем пружину и зафиксируем ее на некоторое время.



.

Спустя это время мы вдруг обнаруживаем, что для фиксации пружины в данном положении (т. е. для сохранения данной величины упругой деформации) требуется уже **меньшее** напряжение.

В то же время, если мы это напряжение снимем, то пружина не вернется полностью к исходному положению, а сохранит некоторую **остаточную** деформацию.
Другими словами, за это время часть упругой (обратимой) деформации перешла в пластическую (необратимую).

Скорость перехода упругой деформации в остаточную удобно характеризовать ***временем релаксации***

Хороший пример – лук с тетивой, пролежавший несколько десятков или сотен лет на чердаке.

Если вы найдете такой лук на чердаке особняка в вашем фамильном поместье, сможете ли вы из него пострелять? Что произошло?

Существует величина – ***время релаксации*** (ϑ).
Это такой отрезок времени, когда при фиксации упругой деформации напряжение, необходимое для ее поддержания, уменьшается в е $\approx 2{,}7$ раз (е – основание натурального логарифма).

$$\sigma = \sigma_0 e^{-t/\vartheta}$$

Ползучесть

Повторим вопрос: что происходит, если напряжения действуют длительное время?

Б. Второй вариант

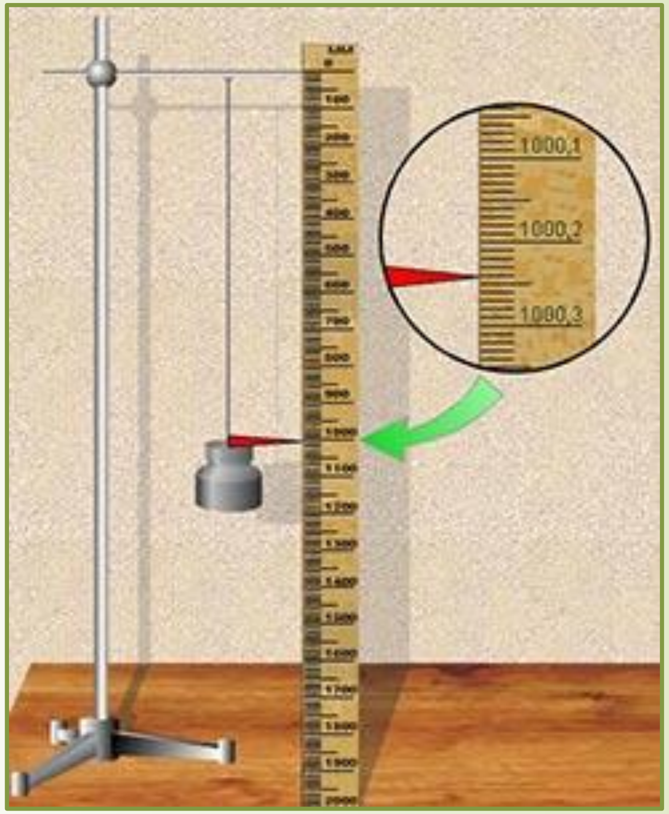
Приложить к телу напряжение **ниже предела упругости**, вызвать этим упругую деформацию, а затем **поддерживать** это напряжение.
Пример – постоянный груз, подвешенный к проволоке.

С течением времени, как говорилось ранее, часть упругой деформации переходит в пластическую, но, поскольку напряжение **постоянно,** в отличие от ситуации с луком и тетивой, то оно все время будет восполнять недостаток упругой деформации, в соответствии с законом Гука.

Т.е. с течением времени будет постоянно нарастать величина пластической деформации, хотя напряжение и остается ниже предела упругости.

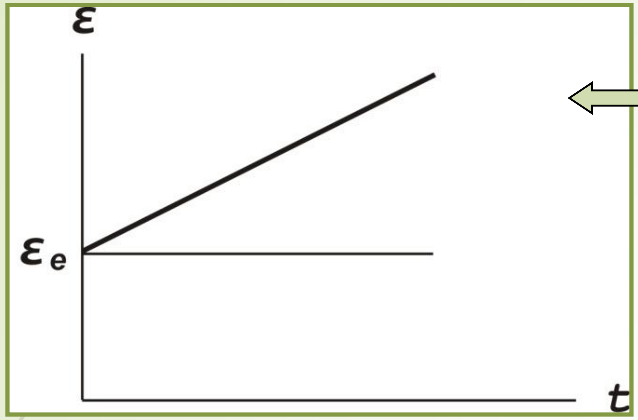
Это явление получило название **ползучести.**

Ползучесть и крип – это одно и то же



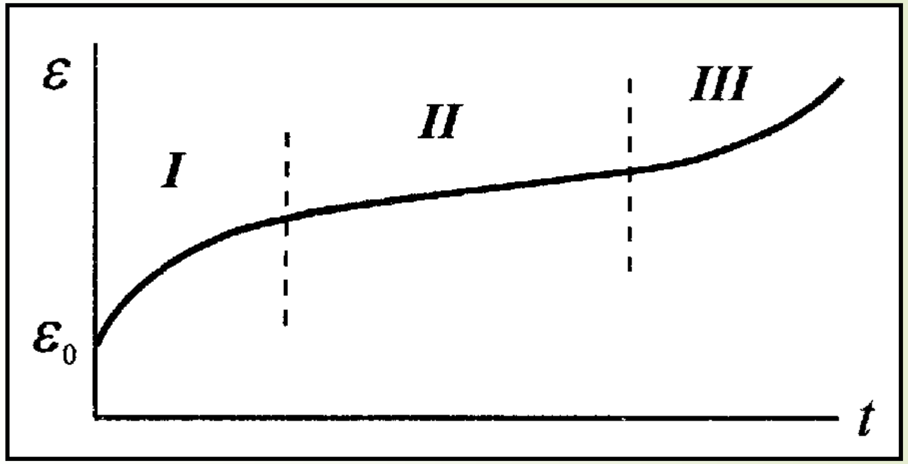
Величина деформации зависит от времени

Скорость деформации зависит от напряжения



В случае ползучести величина деформации зависит не только от величины напряжения, но и от времени, в течение которого осуществляется воздействие

Обобщенная кривая ползучести (зависимость величины деформации от времени)



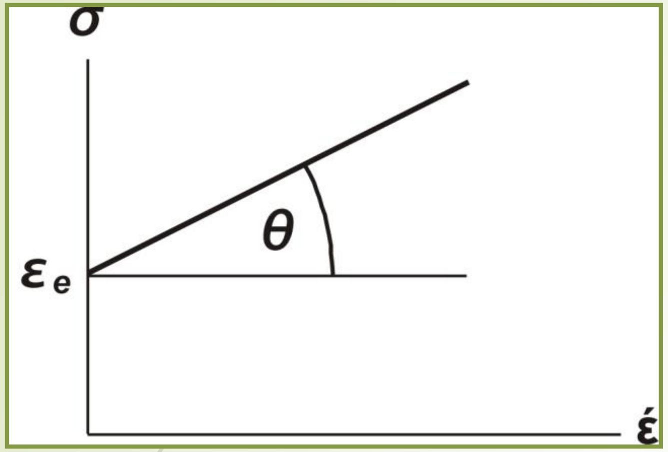
Мгновенная, возникающая при приложении нагрузки, деформация ε_0 может быть как чисто упругой, так включать и пластическую деформацию.

I – скорость ползучести убывает (упрочнение)

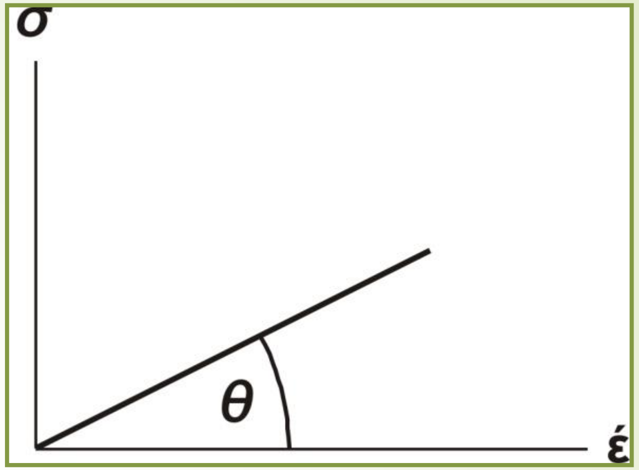
II – установившаяся ползучесть

III – скорость ползучести возрастает (появление микротрещин)

На следующем слайде показана скорость деформации при ползучести



Деформация идет с определенной скоростью, которая определяется как **$\dot{\varepsilon} = \Delta\varepsilon/\Delta t$**



Предполагается, что деформация ползучести может идти и при сколь угодно малых напряжениях.

Как видно из графика, скорость деформации при ползучести возрастает с увеличением напряжений; она определяется соотношением

$$\sigma = 2\eta\dot{\varepsilon}$$

η - **коэффициент вязкости, или просто вязкость**

Закон вязкого течения

Исаак Ньютон

1642-1727

$$\sigma = 2\eta\acute{\varepsilon}$$

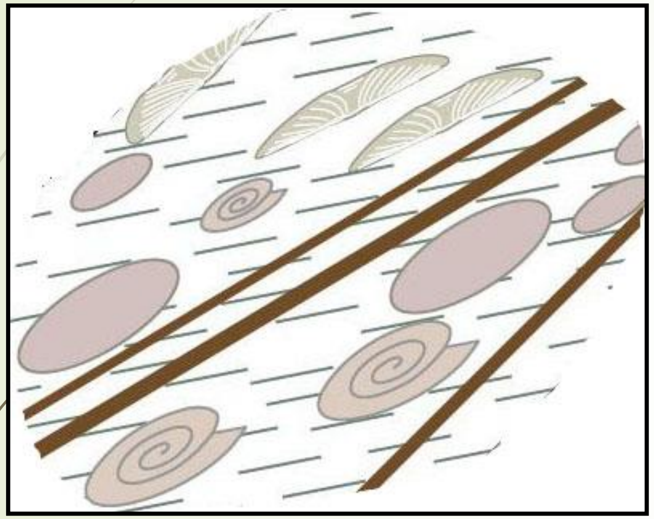
Эта зависимость имеет такое же математическое выражение, как и зависимость от напряжения скорости течения вязких жидкостей.

Этот закон называют законом вязкого (ньютоновского) течения для деформации удлинения-укорочения. Здесь $\boldsymbol{\eta}$ ***-*** *вязкость.*

Применительно к твердым телам говорят об их эффективной вязкости: чем выше вязкость, тем медленнее идет деформация, т.е. ***вязкость*** – это свойство материала оказывать сопротивление пластической деформации

Геологическое время очень велико, поэтому даже ниже предела упругости горные породы ведут себя как **вязкие** жидкости.
Если говорить точнее, то для этого нужно, чтобы длительность действия напряжений превосходила время релаксации.
У горных пород это 1000÷5000 лет.

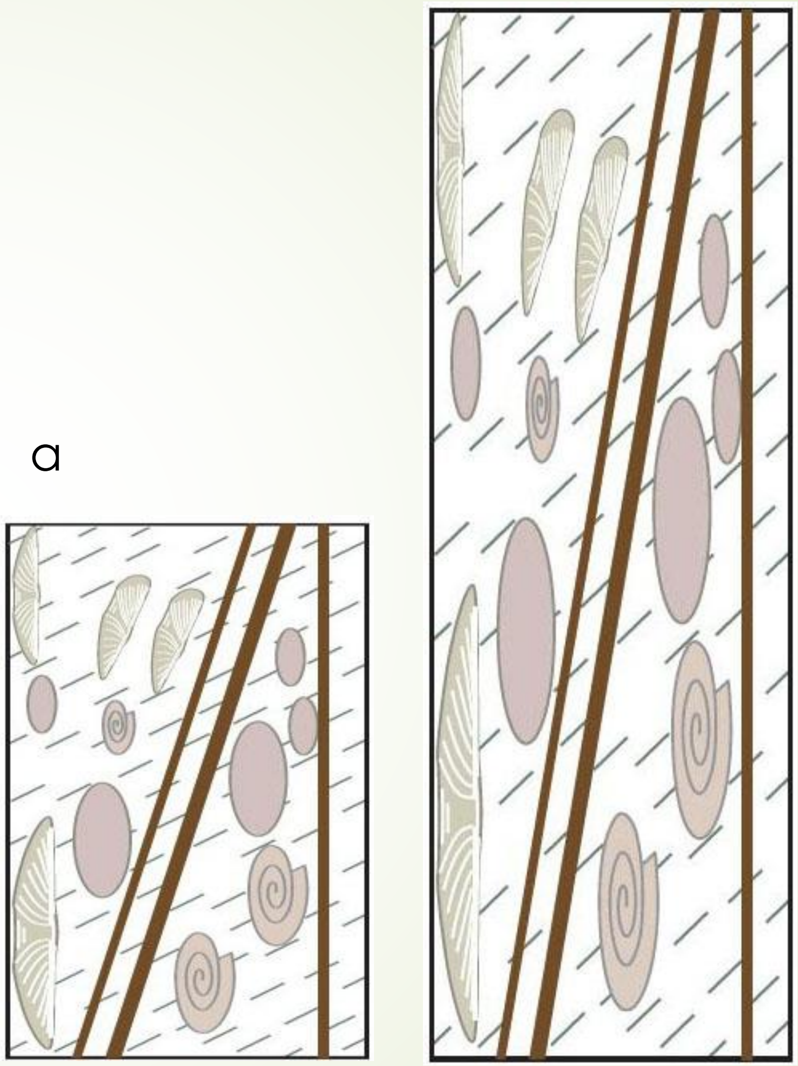
Два вопроса



1. Как ориентированы оси напряжений?

а

б



В каком случае напряжения были больше?

Задание на деформационные свойства пород

Ниже приведено сравнение деформационных свойств двух тел на языке "больше-меньше". Построить по этим данным две сугубо качественные диаграммы в координатах $\dot{\varepsilon}$, σ.

- **Первое тело:** Более мягкое, Менее пластичное, Более вязкое, Менее прочное
- **Второе тело:** Более твердое, Более пластичное, Менее вязкое, Более прочное

Следует воспользоваться формулой $\sigma=\sigma_e+2\eta\,\dot{\varepsilon}$, где σ_e – предел упругости тела.

- Более «мягкое» тело имеет предел упругости ниже, чем более «твердое.
- У более прочного тела предел прочности (σ_p) выше, чем у менее прочного.
- Под пластичностью здесь подразумевается разность между пределами прочности и упругости. У более пластичного тела эта разность выше.
- Вязкость определяет тангенс угла наклона прямых к оси абсцисс ($\dot{\varepsilon}$).
- Не во всех предложенных вариантах выполняются все условия.

Интернет-ресурс