Геологический факультет МГУ
Кафедра динамической геологии
Лаборатория тектонофизики и геотектоники

Тектонофизика

Курс лекций вед. научн. сотр., канд. геол.-минер. наук
Н.С. Фроловой

Лекция 4

Лекция 4

Напряженное состояние сплошной среды (продолжение)

- Нормальные и касательные напряжение
- Главные оси напряжений, эллипсоид напряжений

Напряжение

- **«Механическое напряжение – это мера внутренних сил, возникающих при деформации материала»** (Физический энциклопедический словарь).

  Что же это за мера?

  Напряжение - это нагрузка, отнесенная к единице площади, то есть

  $$\sigma = F/S$$

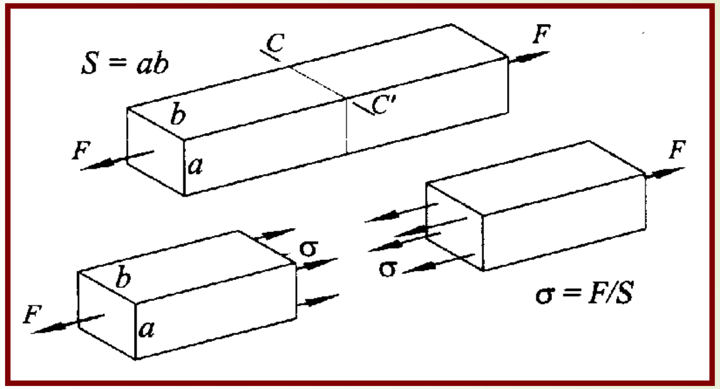
- Величина напряжения измеряется в паскалях. Паскаль – давление, вызываемое силой в 1 Н (ньютон), равномерно распределенной по поверхности площадью 1 $м^2$
- Напряжение и давление – это одно и то же
- Растягивающее напряжение считается положительным, сжимающее - отрицательным

Нормальные напряжения

В учебниках любят приводить пример с растягивающимся стержнем. Рассмотрим площадку перпендикулярную оси стержня и направлению действующей силы

$$\sigma = F/S$$

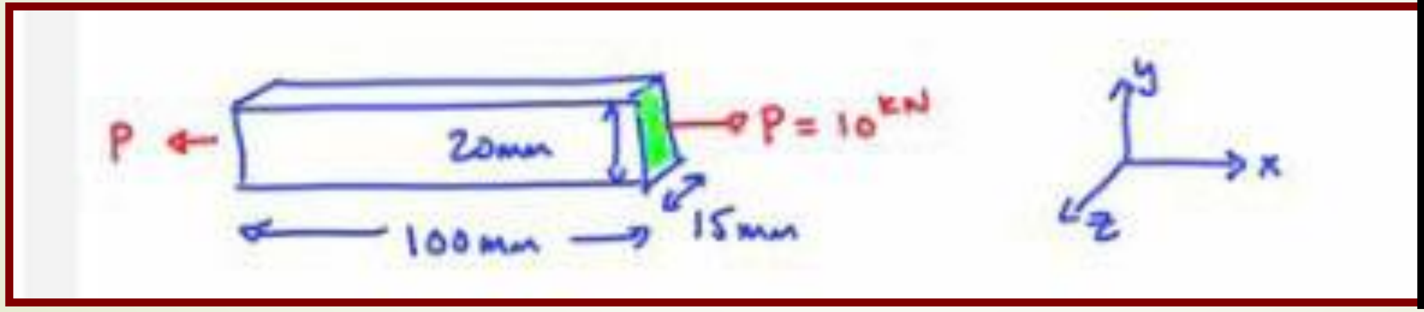
Здесь **σ – нормальное** напряжение.



Определение напряжений в растягивающемся стержне

.

Задача 18

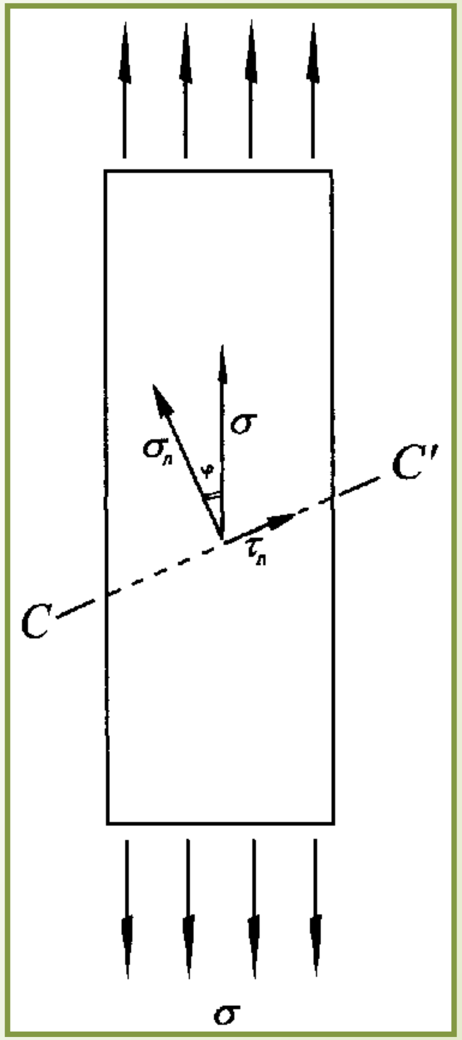


Найти нормальное напряжение σ_x

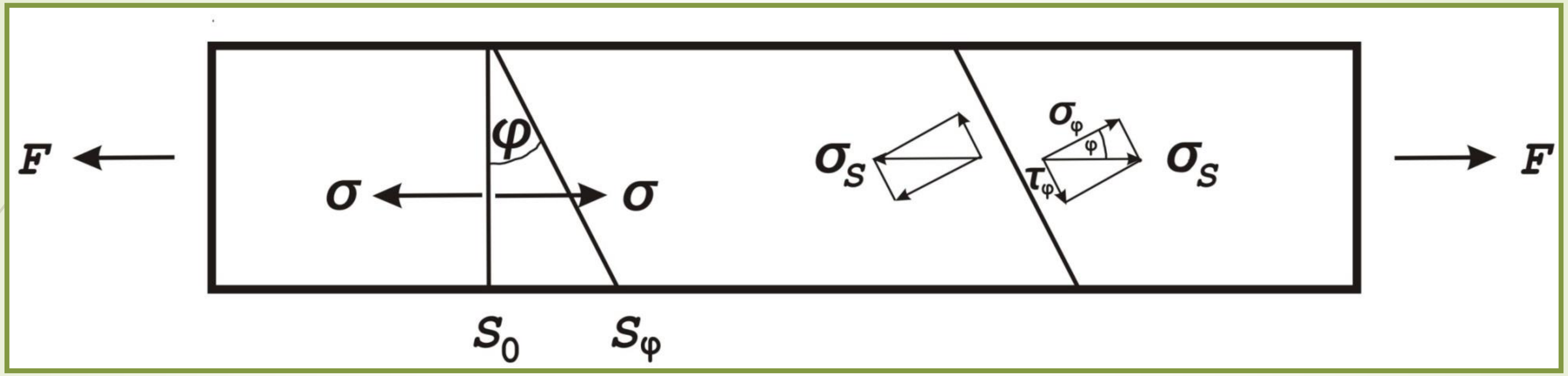
Касательные напряжения

Но стержень можно рассечь и наклонной плоскостью. Внутренние силы на месте разреза будут иметь в общем случае не только нормальную составляющую, но и **касательную**, направленную вдоль плоскости разреза.

Такое касательное напряжение обозначают $\boldsymbol{\tau}$



Одноосное напряженное состояние



$$\sigma_S = \frac{F}{S\varphi} = \sigma \cos \varphi;$$

учтем, что $S\varphi = S_0 / \cos \varphi$; тогда $\sigma_S = F / S_0 = \cos \varphi$, но $F / S_0 = \sigma$

Напряжение в косом (по отношению к направлению действующей силы) сечении тела.

$$\sigma_\varphi = \sigma_s \cos\varphi = \sigma \cos^2\varphi$$

Нормальное напряжение в косом сечении тела

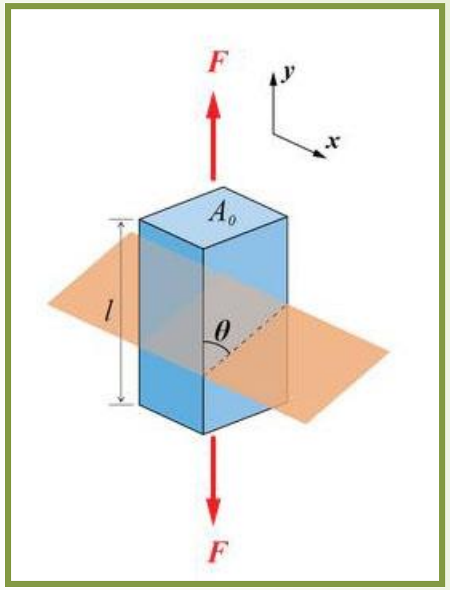
$$\tau_\varphi = \sigma_s \sin\varphi = \sigma \sin\varphi \cos\varphi = (\sigma/2) \sin 2\varphi$$

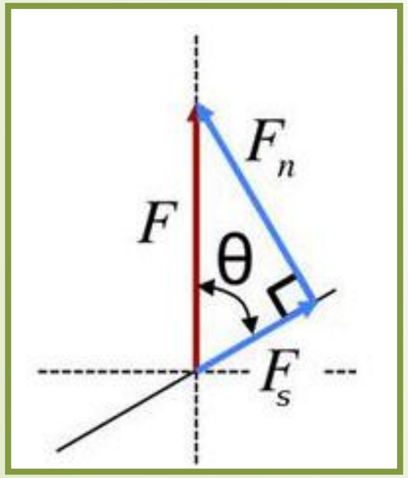
Касательное напряжение в косом сечении тела

Из формул следует, что в сечениях, наклоненных к оси под углом ±45°, действуют касательные напряжения, величина которых максимальна.

Задача 19

Рассмотрим блок некоторого материала в виде параллелепипеда с длиной $\boldsymbol{l_0}$ и площадью сечения $\boldsymbol{A_0}$. Равные и противоположно направленные силы величиной $\boldsymbol{F}$ приложены вдоль оси $\boldsymbol{y}$.
Показанная на фигуре плоскость наклонена под углом $\boldsymbol{\theta}$ к оси $\boldsymbol{y}$.
Найдите выражение для нормального напряжения $\boldsymbol{\sigma}_n$ и касательного напряжения $\boldsymbol{\sigma}_s$ через $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{A_0}$, $\boldsymbol{\theta}$, а также через $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\theta}$.





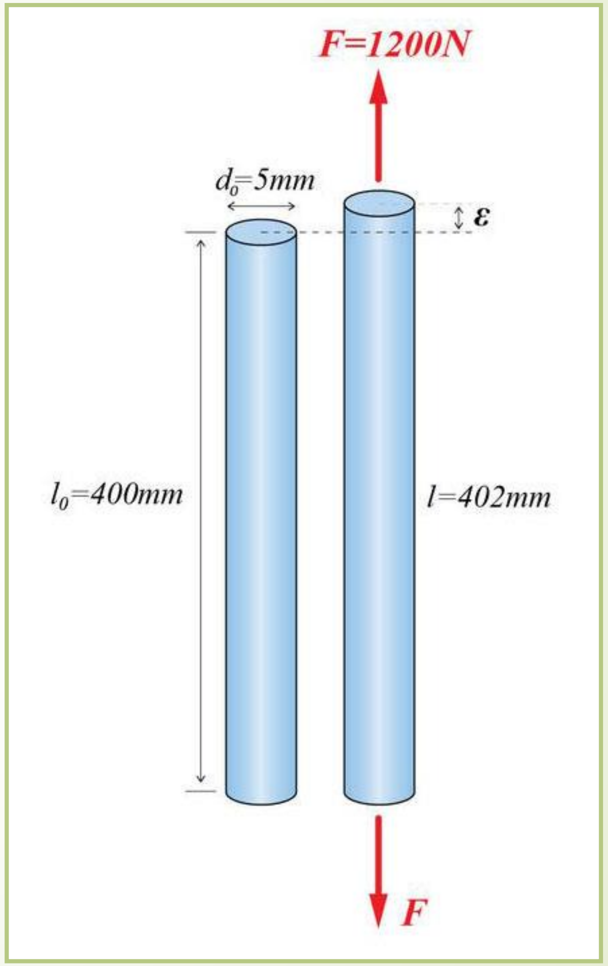
Изобразим эту задачу на плоскости и выведем те же соотношения, что и в предыдущем примере

Обратите внимание, что угол θ здесь является дополнительным по отношению к углу φ в предыдущем примере

https://courses.edx.org/courses/MITx/3.032x/3T2014

Задача 20

Растягивающийся цилиндрический образец имеет первоначальный диаметр и длину d_0 = 5 мм и l_0 = 400 мм, соответственно.
Он подвергается нагрузке в осевом направлении с силой F = 1200N. Длина образца после его растяжения 402 мм.
Предполагая, что материал линейно упругий, вычислите величину напряжения и величину деформации.



https://courses.edx.org/courses/MITx/3.032x/3T2014

Еще раз о напряжениях

К **разноориентированным** площадкам приложены **разные** напряжения.
В этом напряжения отличаются от сил.

Сила приложена к **точке**, которая не имеет ориентировки.

Напряжение приложено к единичной **площадке** с определенной ориентировкой.

В физике существуют **скалярные** и **векторные** величины.

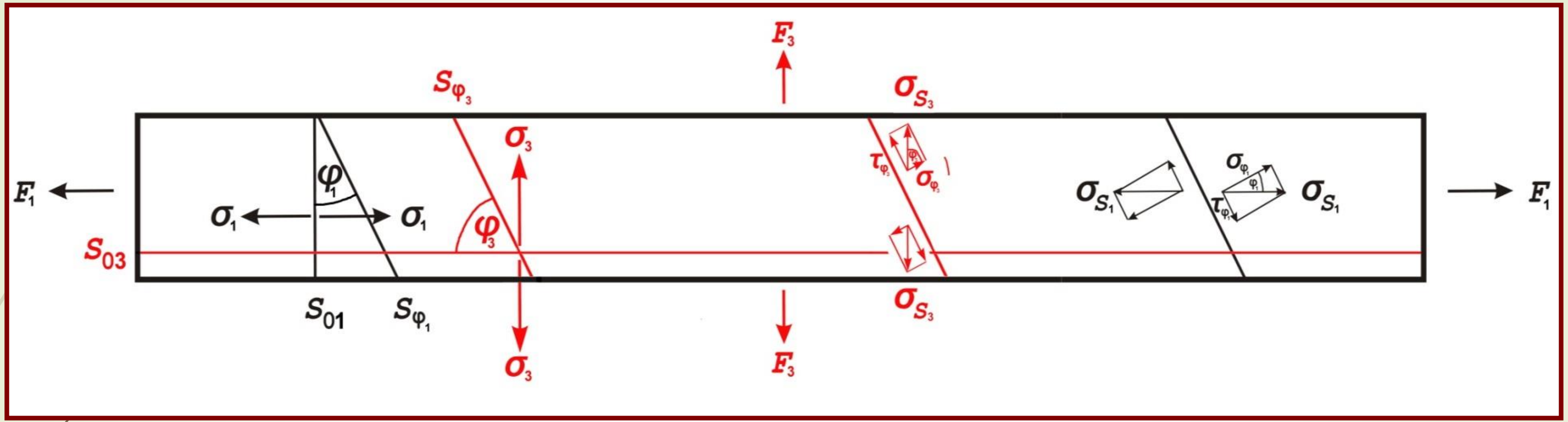
Скаляр – это только сама величина, поэтому он выражается только **одним** числом; пример – температура.

Вектор (например, сила) – это не только сама величина, но и ее направление, поэтому вектор на плоскости выражен **двумя** числами.

Напряжение – это не только сама величина, и не только ее направление, но и направление единичной площадки, к которой напряжение приложено, поэтому на плоскости напряжение выражено **тремя** числами.
Такие величины называются **тензорами**.

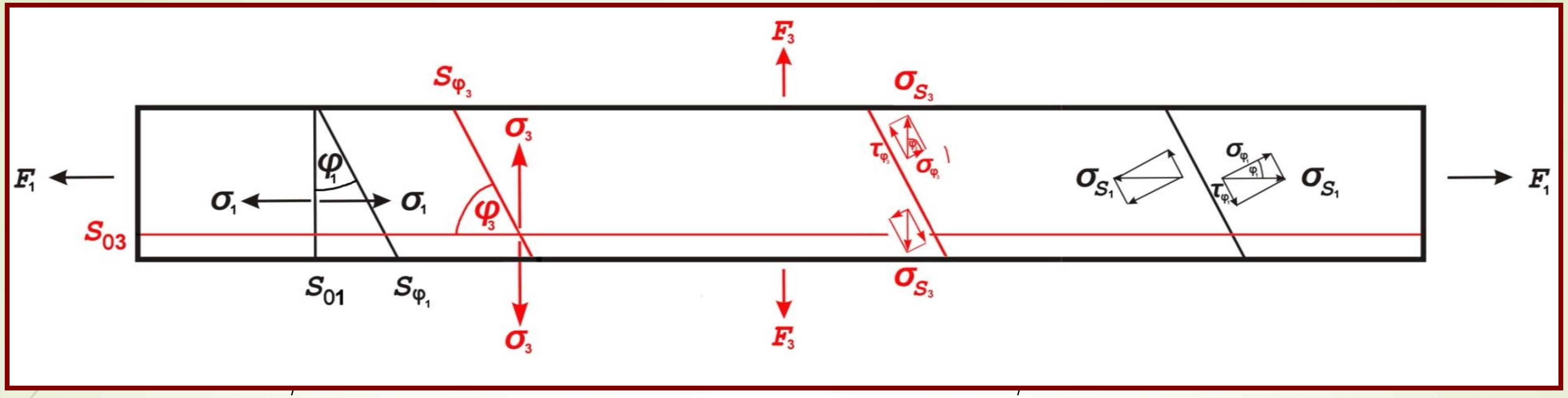
Двухосное напряженное состояние

Сила (F_3) приложена также к диной стороне бруска.



Вертикальное поперечное сечение бруса (S_1), как и прежде, окажется под воздействием нормального напряжения $\sigma_1 = F_1 / S_1$.
В горизонтальном продольном сечении с площадью S_3 будет действовать нормальное напряжение $\sigma_3 = F_3 / S_3$.
Если мы проведем произвольное сечение под углом φ к вертикальной стороне бруса, то на этом сечении мы обнаружим действие не только нормального и касательного напряжений, обусловленных горизонтальными силами F_1 и выражаемых формулами

$$\sigma_\varphi = \sigma \cos^2\varphi;$$ и $$\tau_\varphi = \frac{\sigma}{2} \sin 2\varphi$$



$$\sigma_{\varphi} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \tau_{max} \cdot \cos \cdot 2\varphi;$$

$$\tau_{\varphi} = \tau_{max} \cdot \sin \cdot 2\varphi;$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Для двухосного напряженного состояния τ_{max} действует в сечении, образующем угол 45^0 со сторонами бруса, т.е. с направлением сил F_1 и F_3 , <u>независимо</u> от соотношения величины этих сил (см. формулу)

Из этой же формулы следует, что при φ = 0 ° и φ = 90 ° касательное напряжение τ в соответствующем сечении, перпендикулярном направлению F_1 ии F_3, равно нулю.

Нормальные напряжения σ_{φ}, приложенные к сечениям, перпендикулярным направлению F_1 и F_3 и параллельные направлению сил F_1 и F_3, по формулам, приведенным выше, равны, соответственно, σ_1 и σ_3.

Рассмотрим случай, когда $\sigma_1 = \sigma_3$.

При этом, по формуле

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$\boldsymbol{\tau_{max} = 0}$**,**

что влечет за собой $\sigma_\varphi = \sigma_1 = \sigma_3$ и $\tau_\varphi = 0$ при любом значении угла φ .

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \tau_{max} \cdot \cos \cdot 2\varphi;$$

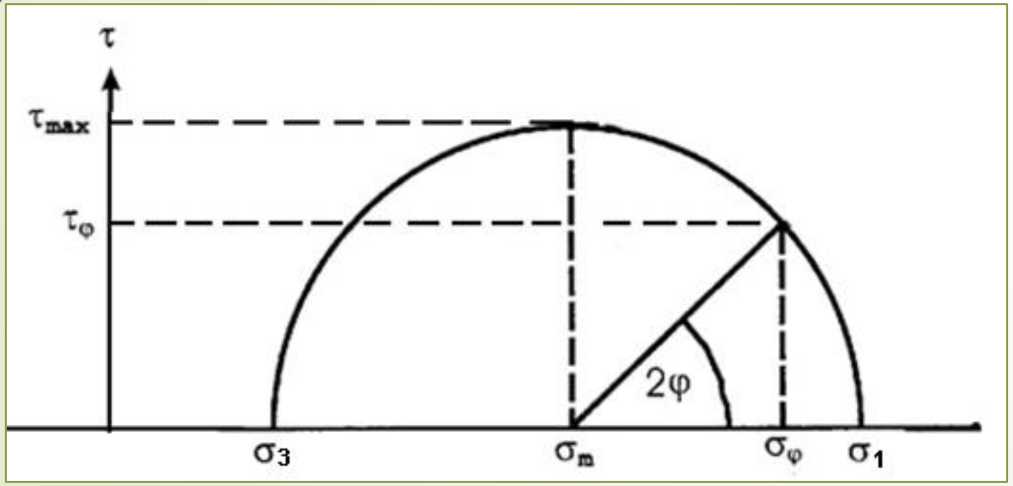
$$\tau_\varphi = \tau_{max} \cdot \sin \cdot 2\varphi;$$

.

Другими словами, хотя мы и прикладывали силы F_1 и F_3 только с двух сторон, тем не менее, в любом сечении (а не только перпендикулярном к направлению действия этих сил) будет сохраняться одно и то же значение нормального напряжения, при отсутствии касательных напряжений.

Диаграмма Мора

Формулы наглядно изображаются с помощью так называемой диаграммы Мора.
На ней по оси абсцисс откладываются значения нормальных (с учетом правила знаков), а по оси ординат – касательных напряжений. Центр полукруга располагается на оси абсцисс в точке, равноудаленной от <u>алгебраически</u> максимального σ_1 и минимального σ_3 напряжений. Нормальное σ_φ и касательное τ_σ напряжения находятся как, соответственно, абсцисса и ордината конца радиуса-вектора, проведенного под углом *2*φ к оси абсцисс.

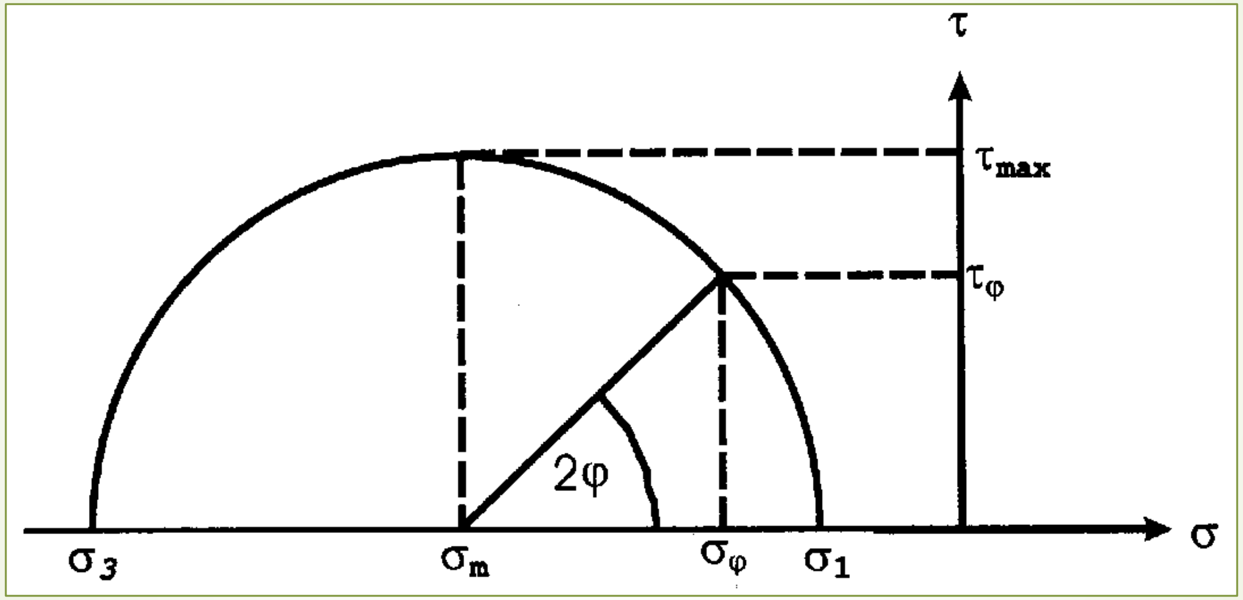


$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \tau_{max} \cdot \cos \cdot 2\varphi;$$

$$\tau_\varphi = \tau_{max} \cdot \sin \cdot 2\varphi;$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Круг Мора для ситуации, когда все напряжения - сжимающие



Задача 21.

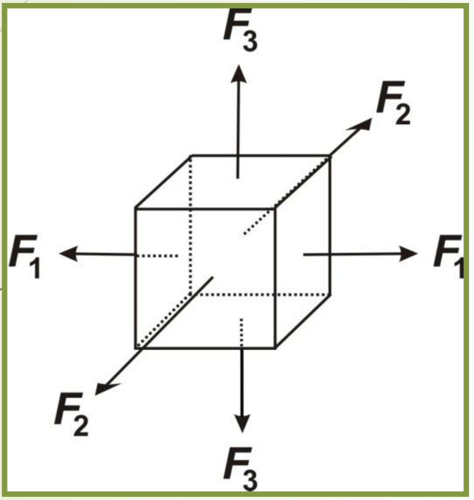
<u>Дано</u>: тело находится в двухосном напряженном состоянии.
σ_1= -26 МПа, σ_3 = -74 МПа.

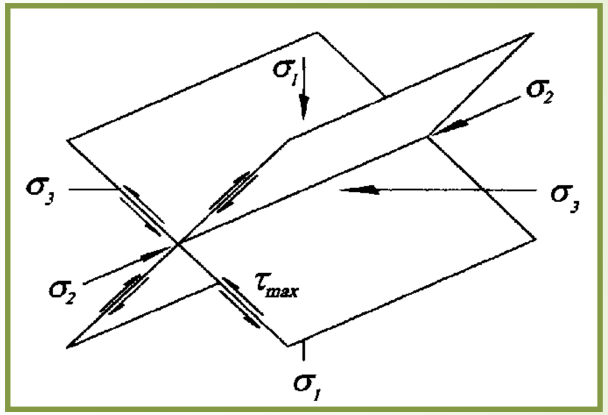
<u>Найти</u>: величину нормальных и касательных напряжений на площадке, ориентированной под углом 30° к оси σ_3.

Решить задачу (а) с помощью формул;
(б) с помощью диаграммы Мора

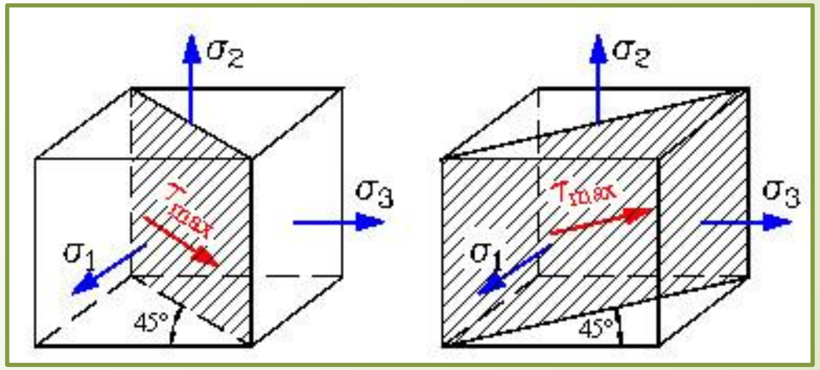
Трехосное напряженное состояние

Сочетание трех одноосных напряженных состояний





Плоскости максимальных касательных напряжений τ_{max}



И в этом случае плоскость максимальных касательных напряжений ориентирована под углом 45^{O} к осям максимального и минимального нормальных напряжений, а само максимальное касательное напряжение таково:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Максимальное касательное напряжение в теле

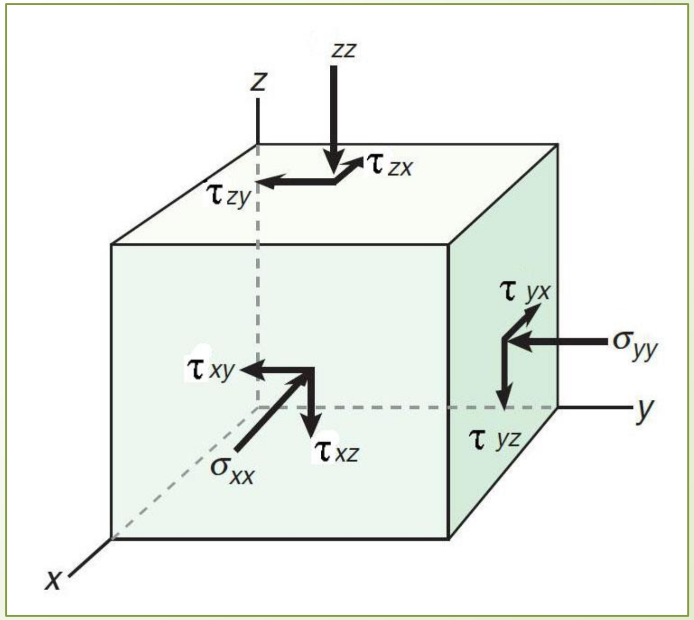
Главные оси напряжений

Для напряженного состояния возможны 2 случая:

1. На всех разноориентированных площадках, проходящих через точку тела, действует одно и то же и только нормальное сжимающее напряжение, при отсутствии касательного напряжения.
Это – ***равномерное всестороннее сжатие*** (например, под поверхностью воды).

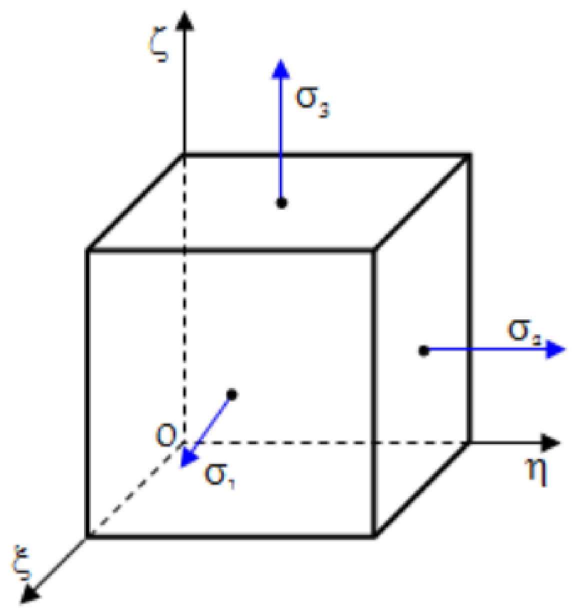
2. Если же это не так, то на подавляющем большинстве площадок, помимо нормального, действует также и касательное

В общем случае напряженное состояние в любой точке можно описать с помощью шести величин – нормальными напряжениями σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz} и касательными напряжениями τ_{xy},τ_{xz},τ_{yz} (действует закон парности касательных напряжений $\tau_{xy}= \tau_{yx}$ и т.д.)



Главные оси напряжений

Еще раз рассмотрим случай, когда на всех разноориентированных площадках, проходящих через точку тела, действуют разные нормальные сжимающие напряжения. Тогда на подавляющем большинстве площадок, помимо нормального, действует также и касательное напряжение.
Но **всегда** найдутся 3 (и только 3!) взаимно перпендикулярные площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения, а действуют только нормальные.
Нормали к этим 3 площадкам – ***главные оси напряжений***. А сами напряжения, действующие по нормали к этим площадкам, – **главные** нормальные напряжения:

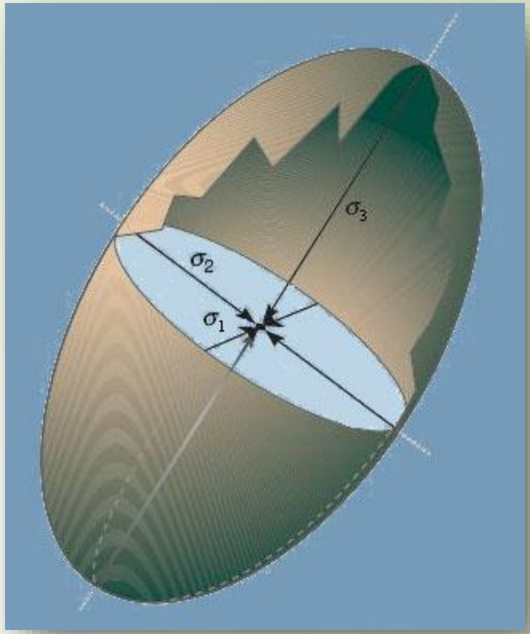


ξ, η, ζ – главные оси

Правило знаков – как для деформации: растяжение «+», сжатие «–».

Эллипсоид напряжений

- Геометрическое представление о напряженном состоянии дает эллипсоид напряжений, три полуоси которого ориентированы вдоль главных напряжений и равны им.



(Fossen, 2011)

Представление о главных осях напряжений лежит в основе понимания того, что какой бы сложной системой сил не вызывалось это напряженное состояние, оно всегда может быть сведено к нормальным напряжениям сжатия и растяжения, действующих по взаимно перпендикулярным осям.

Напряженное состояние, когда главные оси напряжений равны ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), а касательные напряжения отсутствуют, определяется сферой; напряжение в любом направлении будет главным. Это случай *равномерного всестороннего сжатия или растяжения*

Общее напряжение как сочетание равномерного всестороннего сжатия и девиаторного напряжения

- **Общее** напряжение можно разложить на два компонента: напряжение **равномерного** всестороннего сжатия (σ_m) и **девиаторное** напряжение (σ').

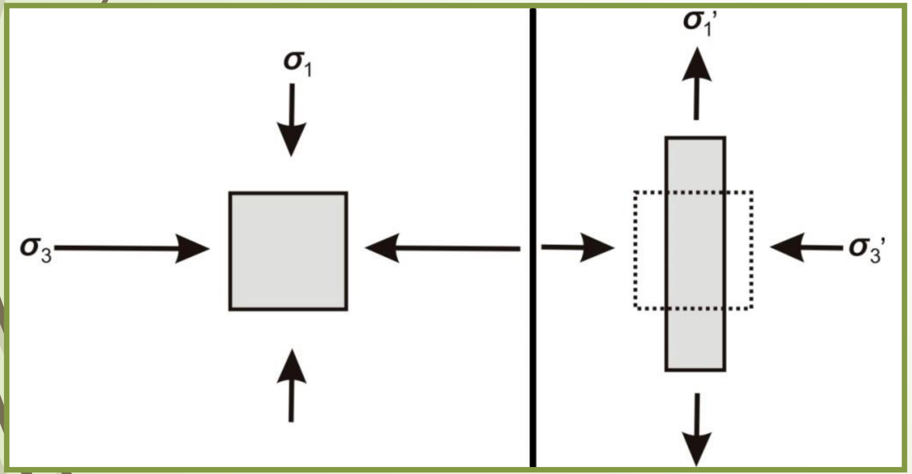
$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

*Компонента равномерного всестороннего сжатия в теле при трехосном напряженном состоянии **(давление)***

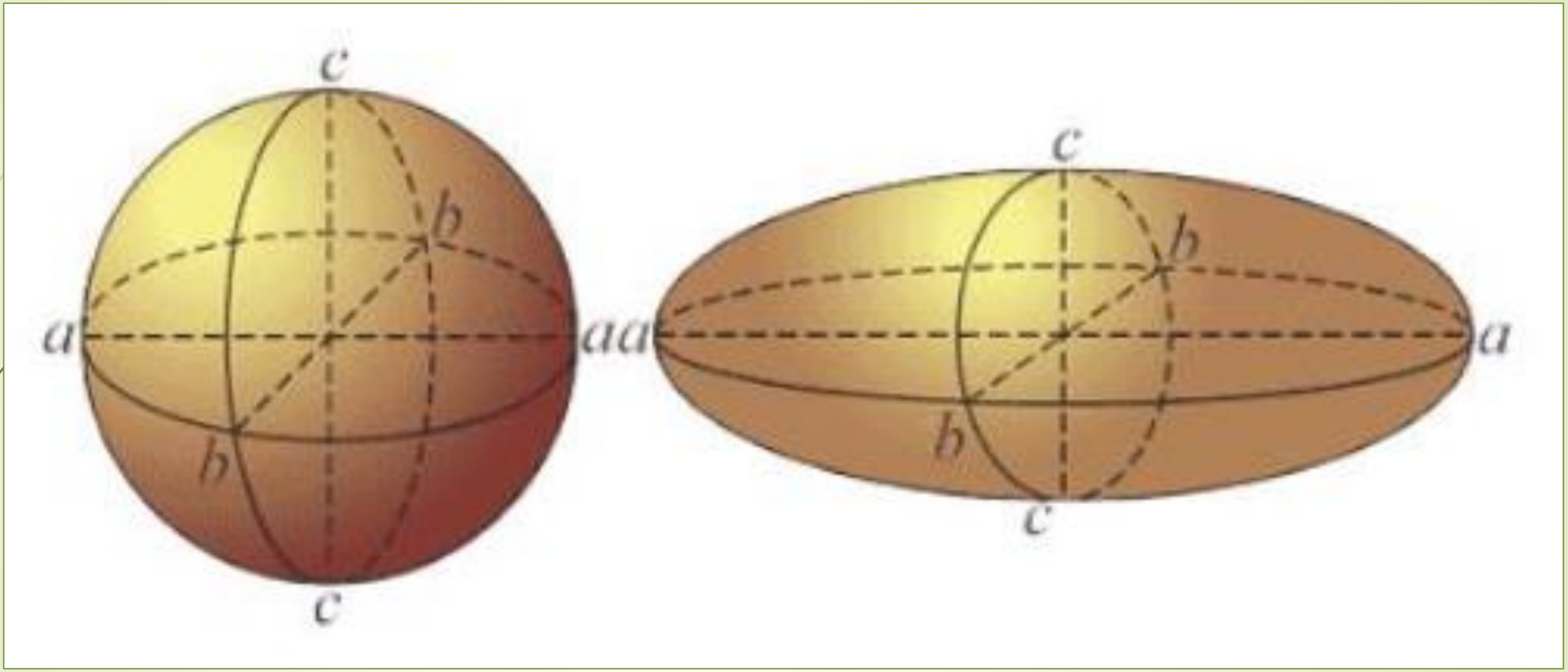
σ_m – это то напряжение, которое ответственно за уменьшение **объема**, без изменения **формы** тела.

Вычтем теперь из общего напряжения напряжение равномерного всестороннего сжатия:

$\sigma_1' = \sigma_1 - \sigma_m$; $\sigma_2' = \sigma_2 - \sigma_m$; $\sigma_3' = \sigma_3 - \sigma_m$ *Это компонента девиаторного напряжение в теле при трехосном напряженном состоянии.*



Этот «остаток» – девиаторное напряжение - ответственно за изменение **формы** тела, т.е. за **деформацию**.


c
b
a
a
b
c
c
b
a
a
b
c