М.В. Либанов

КТП VIII. Функции Грина

Содержание

Запаздывающая функция Грина скалярного поля

- Неоднородное уравнение Клейна-Гордона

$$(\partial^2 + m^2)\varphi_j(x) = -j(x)\ , \qquad (1)$$

где $j(x)$ --- фиксированная функция координат, которая называется источником.

- Решение уравнения (1) может быть найдено в виде

$$\varphi_j(x) = \varphi_0(x) - \int dy G(x-y) j(y)\ , \qquad (2)$$

  - $\varphi_0(x)$ --- решение свободного (однородного) уравнения КГ
  - $G(x-y)$ --- функция Грина уравнения Клейна-Гордона, удовлетворяющая уравнению

$$(\partial^2 + m^2)G(x) = \delta(x)\ . \qquad (3)$$

Действительно

$$(\partial_x^2+m^2)\varphi_j \overset{(2)}{=} \hat{\mathcal{O}}_x\varphi_0 - \int dy\, j(y)\hat{\mathcal{O}}_x G(x-y) \overset{(3)}{=} -\int dy\, j(y)\delta(x-y) = -j(x) \qquad (4)$$

☞ Фурье-преобразование

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \mathrm{e}^{-ikx} G(k), \quad \delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk \mathrm{e}^{-ikx} \Rightarrow \tag{5}$$

(3):

$$(-k^2 + m^2) G(k) = 1 \ , \Rightarrow \tag{6}$$

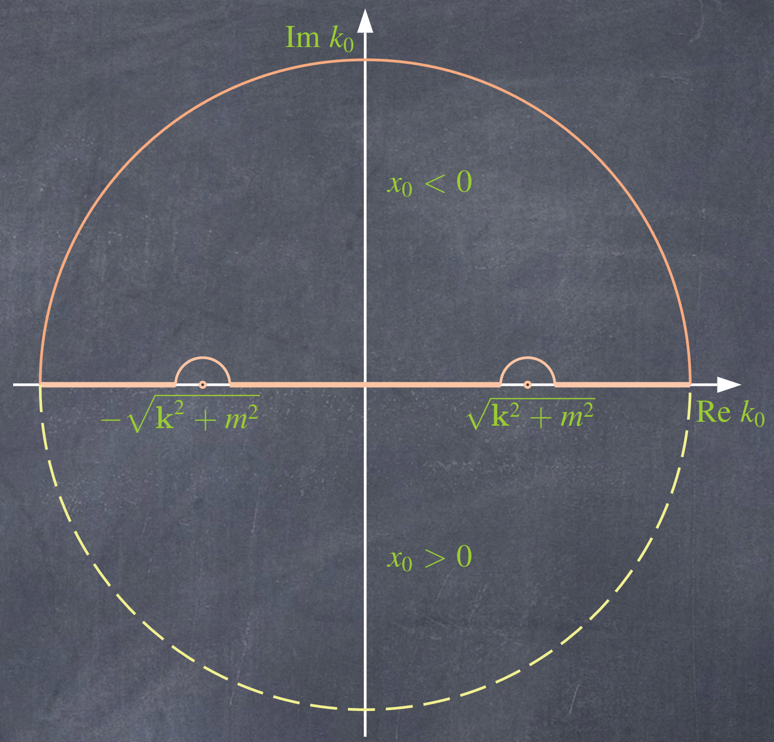
$$G(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{\mathrm{e}^{-ikx}}{k^2 - m^2} \tag{7}$$

Формула (7) недоопределена, т.к. неясно, что делать с полюсами при $k^2 = m^2$? ⇨ Нужны начальные/граничные условия.

☞ Физическая постановка: В момент $t = 0$ камень кидают в спокойную воду или в темноте включают на мгновение лампочку. Описать распространения волны или найти *запаздывающую функцию Грина*

☞ Математическая постановка:

$$G^{\mathrm{ret(arded)}}(x)|_{x_0<0} = 0 \tag{8}$$



- Будем интегрировать по k_0.
- Распространим интеграл на комплексную плоскость k_0.
- В случае $x_0 > 0$ мы можем замкнуть контур интегрирования в нижней полуплоскости --- в этом случае мы имеем под интегралом падающую экспоненту $\mathrm{e}^{-|\mathrm{Im} k_0| x_0}$, и интеграл по бесконечноудаленной полуокружности будет равен нулю в силу леммы Жордана.
- В случаю отрицательных x_0 мы можем замкнуть в верхней полуплоскости. Поскольку в этом случае мы должны получить ноль, то, согласно теории вычетов, внутри контура не должно существовать полюсов.

☞ Однако, существует два полюса подынтегрального выражения при каждом фиксированном $\mathbf{k}$:

$$k_0^{\pm} = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}\,. \tag{9}$$

Таким образом, в этом случае мы должны обойти оба полюса сверху.

☞ Это можно формализовать, если в интеграле (7) заменить

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \to \left.\frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon \cdot \mathscr{E}(k^0)}\right|_{\varepsilon \to +0}, \tag{10}$$

- ☞ ε --- бесконечно малая положительная величина,
- ☞ $\mathscr{E}(k^0) = \theta(k^0) - \theta(-k^0)$.

Действительно, в этом случае полюса будут находиться в точках

$$k_0^{\pm} = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2 - i\varepsilon \cdot \mathscr{E}(k^0)} \overset{\varepsilon \to 0}{=} \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} - i\varepsilon\,, \tag{11}$$

т.е. ниже действительной оси.

☞ Пользуясь произвольностью ε, интеграл для запаздывающей функции обычно записывают в виде

$$G^{\mathrm{ret}}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{\mathrm{e}^{-ikx}}{k^2 - m^2 + 2i\varepsilon k^0} \,. \tag{12}$$

☞ Проинтегрируем теперь это выражение по k_0 при $x_0 > 0$. Имеем

$$G^{\mathrm{ret}} = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int dk^0 d\mathbf{k}\frac{\mathrm{e}^{-ik_0x_0+i\mathbf{kx}}}{k_0^2 - k_0^{+2}} = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int dk^0 d\mathbf{k}\frac{\mathrm{e}^{-ik_0x_0+i\mathbf{kx}}}{2k_0^+}\left(\frac{1}{k_0 - k_0^+} - \frac{1}{k_0 + k_0^+}\right) = \tag{13}$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{e}^{i\mathbf{kx}}}{2k_0^+}\left(\mathrm{e}^{-ik_0^+x_0} - \mathrm{e}^{ik_0^+x_0}\right)d\mathbf{k} \overset{\mathbf{k}\to-\mathbf{k}}{=} \frac{1}{(2\pi)^3 i}\int \frac{\mathrm{e}^{-i\mathbf{kx}}}{2k_0^+}\left(\mathrm{e}^{ik_0^+x_0} - \mathrm{e}^{-ik_0^+x_0}\right)d\mathbf{k} = D(x) \,, \tag{14}$$

где последнее равенство следует из определения функции Паули-Йордана

☞ Таким образом,

$$G^{\mathrm{ret}}(x) = \theta(x^0)D(x)\ . \tag{15}$$

☞ Аналогично можно построить опережающую функцию Грина, равную нулю при $x^0 > 0$:

$$G^{\mathrm{adv(anced)}} = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int dk \frac{\mathrm{e}^{-ikx}}{k^2 - m^2 - 2i\varepsilon k_0} = -\theta(-x^0)D(x)\ . \tag{16}$$

Запаздывающая функция Грина имеет широкое применение в классической теории излучения. Опережающая функция описывает процессы, обращенные во времени, поэтому она не имеет столь широкого применения. Сейчас мы построим функцию Грина, которая не имеет классической интерпретации, но зато необходима в квантовой теории поля.

Причинная функция Грина. Пропагатор.

- Причинная функция $G^{\mathrm{c(ausal)}}(x-y)$ описывает причинную связь процессов рождения и уничтожения частиц в различных точках.
- Рассмотрим процесс рождения частицы в точке x и уничтожения ее в точке y. Очевидно, что при этом $y_0 > x_0$. Такой процесс описывается матричным элементом

$$\Phi_1^*(y)\Phi_1(x) = \langle 0|\varphi^-(y)\varphi^+(x)|0\rangle = -iD^-(y-x) = iD^+(x-y)\,. \tag{17}$$

- Аналогично для процесса рождения в y и уничтожения в x при $x^0 > y^0$ имеем

$$\Phi_1^*(x)\Phi_1(y) = \langle 0|\varphi^-(x)\varphi^+(y)|0\rangle = -iD^-(x-y) = iD^+(y-x)\,. \tag{18}$$

- Эти два выражения можно объединить в одно, написав

$$G^{\mathrm{c}}(x-y) \equiv i\langle 1|1\rangle = i(\theta(y^0-x^0)\Phi_1^*(y)\Phi_1(x)+\theta(x^0-y^0)\Phi_1^*(x)\Phi_1(y)) = i\langle T(\varphi(y)\varphi(x))\rangle_0 \tag{19}$$

$$= \theta(x_0 - y_0)D^-(x-y) - \theta(y_0 - x_0)D^+(x-y) = G^{\mathrm{ret}}(x-y) - D^+(x-y)\,. \quad (20)$$

☞ Очевидно, что $G^{\mathrm{c}}(x)$ является решением уравнения (3). Действительно, она является линейной комбинацией запаздывающей функции Грина G^{ret} и решения свободного уравнения D^+.

☞ Эта функция также называется *Фейнмановской* или *пропагатором*[1].

☞ Из (20) следует, что пропагатор содержит только отрицательные частоты при положительных временах, и положительные частоты при отрицательных временах. Эти условия являются граничными условиями.

☞ Такие граничные условия называются *вакуумными*. Такое название соответствует тому, что наличие частиц в будущем определяется положительно частотной частью, а в прошлом --- отрицательно частотной

[1] В действительности пропагатором называют T-спаривание, которое отличается от функции Грина дифференциального уравнения лишь множителем. В дальнейшем мы будем применять это понятие как к спариванию, так и к функции Грина.

частью. Таким образом, пропагатор удовлетворяет «безчастичным» граничным условиям, т.е. вакуумным.

- Найдем теперь фурье-образ для фейнмановского пропагатора. Для этого заметим, что фурье-образ для запаздывающей функции Грина может быть записан в виде

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + 2i\varepsilon k^0} = \frac{P}{k^2 - m^2} - \varepsilon(k^0)\pi i\delta(k^2 - m^2) \ , \tag{21}$$

где равенство понимается в интегральном смысле, P --- символ главного значения.

- Используя определение (20) и преобразование Фурье для функции D^+, находим

$$G^c(k) = \frac{1}{m^2 - k^2 - 2i\varepsilon k^0} + 2\pi i\theta(-k^0)\delta(k^2 - m^2) = \tag{22}$$

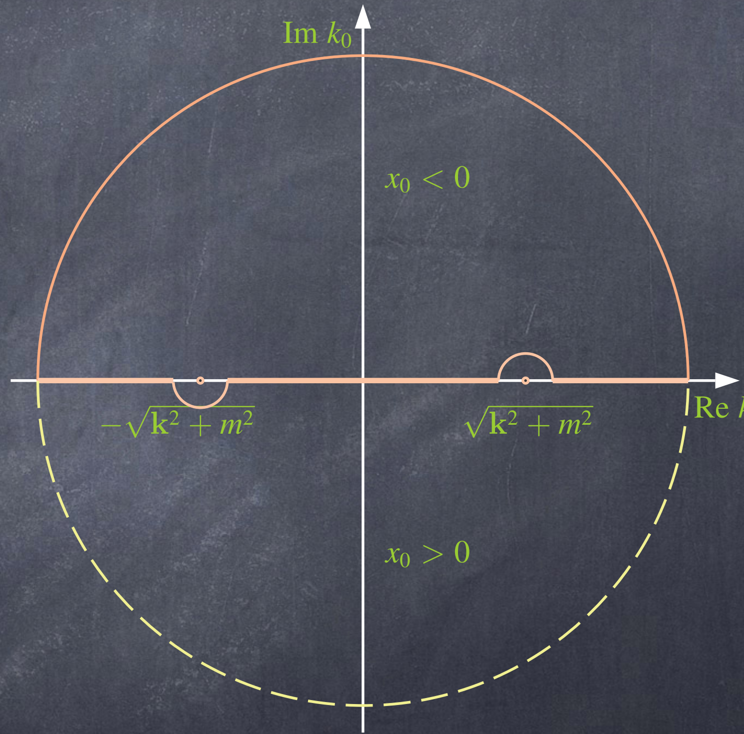
$$\frac{P}{m^2 - k^2} + (2\theta(-k^0) + \varepsilon(k^0))\pi i\delta(k^2 - m^2) = \frac{P}{m^2 - k^2} + i\pi\delta(k^2 - m^2) = \frac{-1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \ ⇨ \tag{23}$$

Окончательно

$$\overbrace{\varphi(x)\varphi}(y) = \langle T(\varphi(x)\varphi(y))\rangle_0 = -iG^c(x) = \int \frac{dk}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \,. \quad (24)$$

Таким образом, правило обхода полюсов для получения пропагатора следующее:

- положительный полюс необходимо обходить сверху
- отрицательный --- снизу.



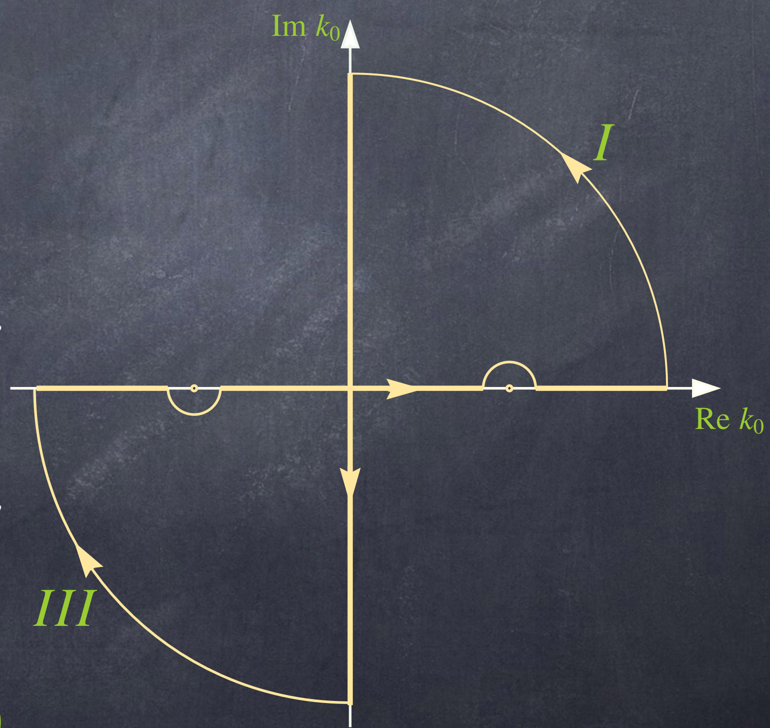
Обходя полюса в обратном порядке (положительный снизу, а отрицательный сверху), получим еще одну функцию Грина --- антипричинную. Она описывает процесс распространения частиц обратно во времени и не находит широкого применения.

Явный вид и особенности пропагатора

- Найдем явный вид $G^c(x)$
- Можно вычислить интеграл (24), а можно решить ур.(3)
- Пойдем по второму пути в $(d+1)$-мерном пространстве-времени
- Сделаем аналитическое продолжение в область чисто мнимого времени

- Контур интегрирования (действительную ось k_0) в интеграле (24) можно повернуть на 90^o градусов против часовой стрелки не пересекая при этом сингулярностей:
- Действительно, интеграл по замкнутому контуру равен нулю

$$I_{\rm Re} + I_I - I_{\rm Im} + I_{III} = 0 \qquad (25)$$



☞ Рассмотрим случай $x_0 > 0$. Тогда интеграл I_{III} обращается в ноль ⇨

$$I_{\rm Re} + I_I - I_{\rm Im} = 0\ . \tag{26}$$

☞ Продолжим теперь это равенство аналитически в область чисто мнимого x_0 таким образом, чтобы интеграл I_I обратился в ноль.

☞ Для этого надо положить $x_0 = -ix_{d+1}$ и считать $x_{d+1} > 0$. Действительно, в этом случае в подынтегральном выражении для I_I стоит

$$\mathrm{e}^{-i(\mathrm{Re}\,k_0 + i\mathrm{Im}\,k_0)x_0} = \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}\,k_0\cdot x_{d+1} - i\mathrm{Im}\,k_0\cdot x_{d+1}}\ , \tag{27}$$

т.е. падающая экспонента ($\mathrm{Re}\,k_0 > 0$ в первой четверти).

☞ Таким образом имеем аналитическое продолжение для интеграла $I_{\rm Re}$ (т.е. для пропагатора) из области $x_0 > 0$ в область мнимого времени $x_0 = -ix_{d+1}$, $x_{d+1} > 0$:

$$I_{\rm Re}(x_0 > 0) \to I_{\rm Im}(x_{d+1} > 0)\ . \tag{28}$$

☞ Аналогично для отрицательных времен получаем

$$I_{\mathrm{Re}}(x_0 < 0) \to I_{\mathrm{Im}}(x_{d+1} < 0)\ . \tag{29}$$

☞ Окончательно для пропагатора имеем

$$G^{\mathrm{c}}(x_0, \mathbf{x}) \to G^{\mathrm{E}}(x_{d+1}, \mathbf{x}) \equiv \frac{i}{(2\pi)^{d+1}} \int d^{d+1}k \frac{\mathrm{e}^{-ikx}}{k^2 + m^2}\ , \tag{30}$$

- ☞ $d^{d+1}k \equiv d\mathbf{k}dk_{d+1}$ --- *евклидова* мера интегрирования,
- ☞ $k^2 = \mathbf{k}^2 + k_{d+1}^2 \equiv k_\mu^2$ (суммирование ведется с евклидовой метрикой! от 1 до $d+1$),
- ☞ $k_{d+1} \equiv \mathrm{Im}\ k_0$.

✍ Функция $G^{\mathrm{E}}(x)$ называется *евклидовой функцией Грина* или *евклидовым пропагатором*.

☞ Уравнение для G^{E} получается аналитическим продолжением (3)

$$(\partial_{\mathrm{E}}^2 - m^2)G^{\mathrm{E}}(x) = -i\delta(x) \,, \tag{31}$$

где $\partial_{\mathrm{E}}^2 \equiv \triangle_d + \partial_{d+1}^2 = \triangle_{d+1}$ --- оператор Лапласа в $d+1$ измерении.

☞ Граничные условия:

$$G^{\mathrm{c}}(x^0 \to \pm\infty) \to \mathrm{e}^{\mp i x^0 m} \;\Rightarrow\; G^{\mathrm{E}}(x^{d+1} \to \pm\infty) \to \mathrm{e}^{-|x^{d+1}| m} \;\Rightarrow\; G^{\mathrm{E}}(x)\Big|_{x^2\to\infty} \to 0 \tag{32}$$

☝ Таким образом, для евклидова пропагатора мы имеем хорошо поставленную граничную задачу эллиптического типа

☝ Задача обладает сферической симметрией $\Rightarrow$ $G^{\mathrm{E}}(x) = G^{\mathrm{E}}(r = \sqrt{\mathbf{x}^2 + x_{d+1}^2})$ $\Rightarrow$

☞ При $r \neq 0$

$$\frac{1}{r^d}\frac{\partial}{\partial r} r^d \frac{\partial}{\partial r} G^{\mathrm{E}}(r) - m^2 G^{\mathrm{E}}(r) = 0 \,, \tag{33}$$

$$G^{\mathrm{E}}(r \to \infty) \to 0 \,. \tag{34}$$

☞ Это уравнение заменой

$$G^{\mathrm{E}}(r) = \frac{F(r)}{(mr)^{\frac{d-1}{2}}} \tag{35}$$

приводится к уравнению Бесселя:

$$r^2F'' + rF' - F\left(\frac{(d-1)^2}{4} + m^2r^2\right) = 0\,, \tag{36}$$

решением которого являются функции Инфельда и Макдональда $(d-1)/2$ - порядка.

☞ Функция Инфельда, однако, экспоненциально растет на бесконечности и не удовлетворяет граничным условиям.

☞ Таким образом имеем

$$G^{\mathrm{E}}(r) = C\frac{1}{(mr)^{\frac{d-1}{2}}}K_{\frac{d-1}{2}}(mr)\,, \tag{37}$$

где C --- константа, которую надлежит определить.

- C определяется из того, что функция Грина удовлетворяет неоднородному уравнению:
- Проинтегрируем уравнение (31) по шару с центром в начале координат и радиусом r_0 и устремим r_0 к нулю.
- В правой части благодаря δ-функции мы получим $-i$.
- В левой части разложим функцию Макдональда в ряд Лорана и ограничимся наиболее сингулярным членом:

$$K_{\frac{d-1}{2}}(mr) = \frac{\alpha_d}{(mr)^{\frac{d-1}{2}}} + \dots\,, \tag{38}$$

где

$$\alpha_d = \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) 2^{\frac{d-3}{2}} \tag{39}$$

- Подставляя это разложение в левую часть и используя формулу Грина (теорему Гаусса) для первого члена, получаем

$$C\alpha_d\Omega_{d+1}\left(r^d\partial_r\frac{1}{(mr)^{d-1}}\bigg|_{r=r_0} - m^2\int\limits_0^{r_0}\frac{r^d}{(mr)^{d-1}}dr\right)_{r_0\to 0} = -\frac{C\alpha_d\Omega_{d+1}(d-1)}{m^{d-1}} = -i\,, \tag{40}$$

или

$$C = \frac{im^{d-1}}{(d-1)\alpha_d\Omega_{d+1}}\,, \tag{41}$$

где Ω_{d+1} --- полный телесный угол в $(d+1)$ измерении.

☞ Вычислим Ω_{d+1}:

☞ Рассмотрим n-мерный гауссов интеграл

$$\int \mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}\prod_{i=1}^{n} dx_i\,. \tag{42}$$

☞ С одной стороны этот интеграл равен произведению n однократных гауссовых интегралов

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\mathrm{e}^{-x^2}\right)^n = (\pi)^{\frac{n}{2}}\,. \tag{43}$$

☞ С другой стороны, перейдем в (42) к сферическим координатам. Имеем

$$\int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2} r^{n-1} dr \int d\Omega_n = \frac{\Omega_n}{2} \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} dt = \frac{\Omega_n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\,, \tag{44}$$

где мы воспользовались интегральным представлением для Γ-функции Эйлера.

☞ Сравнивая последнее выражение с (43), находим

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,. \tag{45}$$

☞ Окончательно для евклидова пропагатора имеем

$$G^{\mathrm{E}}_{d+1}(x) = \frac{i m^{d-1}\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2(d-1)\pi^{\frac{d+1}{2}}} \cdot \frac{K_{\frac{d-1}{2}}(mr)}{\alpha_d (mr)^{\frac{d-1}{2}}} \,. \qquad (46)$$

Эта формула непосредственно неприменима при $d = 0, 1$.

☞ Найдем теперь предел $m \to 0$. Имеем, используя (38),

$$G^{\mathrm{E}}_{d+1}(x, m = 0) = \frac{i\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2(d-1)\pi^{\frac{d+1}{2}}} \cdot \frac{1}{r^{d-1}} \,, \qquad (47)$$

т.е. с точностью до множителя $-i$ хорошо известный закон Кулона/Ньютона в $(d+1)$ измерении.

☞ Вернемся теперь обратно в пространство Минковского, т.е. сделаем аналитическое продолжение (46) при $x_{d+1} \to i x_0$.

☞ При этом надо иметь в виду, что положительным значениям x_{d+1} соответствуют положительные x_0, а отрицательным --- отрицательные ⇨

$$r_{\mathrm{E}} \to \sqrt{-\lambda} = i\sqrt{\lambda} \;\; \text{при} \;\; \lambda > 0 \,, \qquad (48)$$

где $\lambda = x_0^2 - \mathbf{x}^2$ --- минковский интервал.

☞ Имея это в виду, мы можем считать, что λ имеют всюду отрицательную мнимую добавку:

$$\sqrt{-\lambda + i\varepsilon} = i\sqrt{\lambda} \quad \text{при} \quad \lambda > 0\,. \tag{49}$$

☞ Тогда пропагатор в (3+1) измерениях имеет вид

$$G^{c}(x) = \frac{im}{4\pi^2} \cdot \frac{K_1(m\sqrt{-\lambda + i\varepsilon})}{\sqrt{-\lambda + i\varepsilon}}\,. \tag{50}$$

✍ Из этого выражения видно, что все особенности пропагатора лежат на световом конусе $\lambda = 0$:

$$G^{c} \overset{\lambda\to 0}{=} \frac{1}{4\pi^2 i}\frac{P}{\lambda} + \frac{1}{4\pi}\delta(\lambda) - \frac{m^2}{16\pi}\theta(\lambda) + \frac{im^2}{8\pi^2}\ln\frac{m|\lambda|}{2} + \mathscr{O}(\sqrt{|\lambda|}\ln|\lambda|)\,. \tag{51}$$

☞ Наиболее сильные сингулярности ($1/\lambda$ и $\delta(\lambda)$) не зависят от массы, что уже следует из размерных соображений. Этим фактом можно воспользоваться для регуляризации пропагатора.

☝ Другой интересной особенностью фейнмановского пропагатора является то, что он отличен от нуля вне светового конуса. Вне светового конуса ($\lambda < 0$) он экспоненциально спадает с характерной длиной $1/m$.

Функции Грина других полей

- Зная пропагатор скалярного поля можно без труда получить пропагаторы других полей, действуя соответствующими дифференциальными операторами на G^{c}.
- Имеем, например, для спинорного поля

$$S^{\mathrm{c}}(x) = \theta(x^0)S^{-}(x) - \theta(-x^0)S^{+}(x) = (i\hat{\partial} + m)D^{\mathrm{c}}(x) = \tag{52}$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^4}\int dk \frac{(\hat{k}+m)\mathrm{e}^{-ikx}}{k^2-m^2+i\varepsilon} = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int dk \frac{\mathrm{e}^{-ikx}}{\hat{k}-m+i\varepsilon}\,. \tag{53}$$

- Особого рассмотрения требует электромагнитное поле.
- Введем взаимодействие ЭМП с внешним током $j_\mu(x)$.
- Лагранжиан взаимодействия имеет вид

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu\,. \tag{54}$$

☞ Уравнение движения, следующее из этого лагранжиана будет

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \ . \tag{55}$$

Заметим сразу что, для того чтобы у этого уравнения существовали решения необходимо, чтобы ток сохранялся $\partial_\nu j^\nu = 0$. Действительно, беря дивергенцию от обеих частей уравнения (55) и учитывая антисимметричность $F_{\mu\nu}$, получаем условие сохранения тока.

☞ Если попытаться написать частное решение уравнения (55) в виде, аналогичном (2),

$$A_\mu(x) = -\int dy G_\mu^\nu(x-y) j_\nu(y) \ , \tag{56}$$

то функция Грина $G_{\mu\nu}(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$(g_{\mu\rho}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\rho)G^\rho_\nu(x) \equiv K_{\mu\rho}G^\rho_\nu(x) = -g_{\mu\nu}\delta(x) \ , \tag{57}$$

или в импульсном представлении

$$(g_{\mu\rho}k^2 - k_\mu k_\rho)G^\rho_\nu(k) \equiv K_{\mu\rho}(k)G^\rho_\nu(k) = g_{\mu\nu} \; . \tag{58}$$

- Легко убедиться, однако, что уравнение (58) не имеет решения, т.е. оператор $K_{\mu\nu}$ не имеет обратного.
- Действительно, этот оператор поперечный, т.е. $\partial^\mu K_{\mu\nu} = 0$. Это означает, что его действие на произвольную функцию переводит последнюю в подпространство поперечных функций, т.е. $K_{\mu\nu}$ является проектором на поперечные физические состояния (в чем можно убедиться, проверив, что $K_{\mu\nu}K^\nu_\rho \sim K_{\mu\rho}$). Однако, как хорошо известно, не существует оператора, обратного к проектору.
- Ясно, что причина этого кроется в калибровочной инвариантности теории.
- Действительно, к функции Грина всегда можно добавить производную

от произвольного вектора, при этом, в силу закона сохранения тока, вектор потенциал (56) не изменится.

☞ Чтобы явно учесть эту свободу, поступим следующим образом. Фиксируем калибровку Лоренца

$$\partial A = 0 \, . \tag{59}$$

☞ Это дополнительное условие можно явно учесть при выводе уравнений движения путем добавления в лагранжиан (54) *члена, фиксирующего калибровку*, который обычно записывается в следующем виде

$$\mathscr{L} \to \mathscr{L} - \frac{1}{2\xi}(\partial A)^2 \, , \tag{60}$$

где ξ --- произвольная постоянная, называемая *калибровочным параметром*.

☞ Новый лагранжиан уже не обладает калибровочной инвариантностью, но условие сохранения тока по-прежнему остается в силе.

☞ Тогда уравнение на функцию Грина можно написать в виде (пишем сразу в импульсном пространстве)

$$\left(g_{\mu\rho}k^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k_\mu k_\rho\right) G^\rho_\nu(k) \equiv K^\xi_{\mu\rho}(k) G^\rho_\nu(k) = g_{\mu\nu} \ . \qquad (61)$$

☞ Оператор $K^\xi_{\mu\rho}(k)$ уже является обратимым.

☞ Для того чтобы найти функцию Грина, примем во внимания, что она является симметричным тензором второго ранга (в силу симметричности K), зависящим только от k_μ.

☞ Напишем поэтому

$$G_{\mu\nu}(k) = a(k^2) g_{\mu\nu} + b(k^2) k_\mu k_\nu \ . \qquad (62)$$

☞ Подставляя это выражение в (61), находим

$$G^{c}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2 + i\varepsilon}\left(g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) . \qquad (63)$$

☞ Существует два наиболее распространенных выбора калибровочного параметра ξ.

✍ $\xi = 1$ --- *калибровка Фейнмана*. В этом случае пропагатор диагонален, что удобно для вычислений;

✍ $\xi = 0$ --- *калибровка Ландау*. В этом случае пропагатор поперечен.

☝ Очевидно, что физические величины не должны зависеть от калибровочного параметра.

☞ Итог. Выражения для T-спариваний:

$$\overbracket{\varphi(x)\varphi}(y) \;=\; -iG^{\mathrm{c}}(x-y) = \int \frac{dk}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}\,\mathrm{e}^{-ik(x-y)}\,, \tag{64}$$

$$\overbracket{A_\mu(x)A}_{\nu}(y) \;=\; -iG^{\mathrm{c}}_{0\mu\nu}(x-y) =$$
$$\int \frac{dk}{(2\pi)^4}\frac{-i}{k^2+i\varepsilon}\left(g_{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\mathrm{e}^{-ik(x-y)}\,, \tag{65}$$

$$\overbracket{B_\mu(x)B}_{\nu}(y) \;=\; -iG^{\mathrm{c}}_{\mu\nu}(x-y) =$$
$$\int \frac{dk}{(2\pi)^4}\frac{-i}{k^2-m^2+i\varepsilon}\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{m^2}\right)\mathrm{e}^{-ik(x-y)}\,, \tag{66}$$

$$\overbracket{\psi(x)\bar\psi}(y) \;=\; -iS^{\mathrm{c}}(x-y) =$$
$$\int \frac{dk}{(2\pi)^4}\frac{i(\hat k+m)}{k^2-m^2+i\varepsilon}\,\mathrm{e}^{-ikx} = \int \frac{dk}{(2\pi)^4}\frac{i}{\hat k-m+i\varepsilon}\,\mathrm{e}^{-ik(x-y)} \tag{67}$$