М.В. Либанов

КТП VII. Взаимодействующие поля. S-матрица

Содержание

Взаимодействующие поля

- Взаимодействующие поля: $\mathscr{L}(u^2) \to \mathscr{L}(u^{n>2})$:

$$\mathscr{L}(u^{n>2}) = \mathscr{L}_0(u^2) + g_3 u^3 + g_4 u^4 + \ldots + \kappa_3 u^2 \partial u + \ldots \Rightarrow \tag{1}$$

- В принципе возможны все слагаемые ⇨ Какие могут быть ограничения?
  - По-прежнему $E > -\infty$
  - По-прежнему $\mathscr{L}^\dagger = \mathscr{L}$
  - По-прежнему симметрии (Пуанкаре, внутренние глобальные и калибровочные симметрии, ...)
  - Отсутствие паталогий, связанных с высшими производными (духи, тахионы)
  - Перенормируемость теории

Унитарность, причинность, ковариантность ...

- Перенормируемость → отсутствие констант $g_n, \kappa_i \ldots$ с отрицательной размерностью в массовых единицах ⇨
- d -- размерность пространства-времени ⇨

$$[S] = 0 \Rightarrow [\mathscr{L}] = d \overset{[\mathscr{L}_0]=d}{\Rightarrow} [u] = \nu_u \Rightarrow [g_n] = d - n \cdot \nu_u \overset{\text{должно быть}}{\geq} 0 \Rightarrow n < \infty \qquad (2)$$

и аналогично для κ_i ($[\partial] = 1$)

- $d = 4$

$u = \varphi \Rightarrow [\varphi] = 1 \Rightarrow n \leq 4$ и $i = 0$ (с учетом ЛИ) ⇨

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{g}{3!}\varphi^3 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - V(\varphi) \qquad (3)$$

- $E > -\infty \Rightarrow \lambda > 0$
- m^2, g -- любые! ⇨ спонтанное нарушение симметрии ($m^2 < 0$, $g = 0$)
- m -- не масса
- масса μ: $\dfrac{\partial V}{\partial\varphi} = 0 \Rightarrow \varphi_V$ -- вакуум; $\left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_V} = \mu^2$
- Z_2-симметрия $\varphi \to -\varphi \Rightarrow g = 0 \Rightarrow \lambda\varphi^4$-теория

- $u = A_\mu$ ⇨ $[A_\mu] = 1$ ⇨ возможно

$$\mathscr{L}_{\text{int}} = \kappa_3 (A)^2 \partial A + g_4 A^4 \tag{4}$$

- Если A_μ -- абелево ($U(1)$) калибровочное поле (фотон) ⇨ $g_4 = \kappa_3 = 0$
- Если A_μ -- неабелево (например, $SU(N)$) калибровочное поле (глюон)

  $g_4 \neq 0$, $\kappa_3 \neq 0$ и есть связь! $g_4 \sim \kappa_3^2$
- Если A_μ -- массивное некалибровочное поле, то более тонкий анализ приводит к требованию $g_4 = \kappa_3 = 0$, а также к отсутствию взаимодействий с другими полями, т.е. только свободная теория для такого поля является непротиворечивой
- Если A_μ -- массивное калибровочное поле, получившее массу в результате спонтанного нарушения калибровочной симметрии $\leftrightarrow$ механизма Хиггса $\leftrightarrow$ механизма Браута-Энглера-Хиггса (Z и $W^\pm$-бозоны), то всё, как для безмассового случая.
- $u = \psi$ ⇨ $[\psi] = 3/2$ ⇨ только свободная теория

- Теория Ферми $\mathscr{L}_{\text{int}} \sim G_F(\bar{\psi}\Gamma\psi)^2$ противоречива!: $[G_F] = -2$

$u_1 = \psi$, $u_2 = \varphi$ ⇨

$$\mathscr{L}_{\text{int}} = g_S\varphi\bar{\psi}\psi + ig_P\varphi\bar{\psi}\gamma_5\psi \text{ -- юкавское взаимодействие} \tag{5}$$

- Если $g_S \neq 0$ и $g_P \neq 0$, то нарушается P-инвариантность
- Расширение состава полей и требование *изотопической инвариантности* приводит к *теории Юкавы* взаимодействия пионов и нуклонов

$u_1 = \psi$, $u_2 = A_\mu$ + калибровочная инвариантность ⇨ *КЭД*

$$\mathscr{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\hat{D}\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{6}$$

$u_1 = \varphi, \varphi^*$, $u_2 = A_\mu$ + калибровочная инвариантность ⇨ *С(калярная)КЭД*

$$\mathscr{L}_{\text{SQED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + |D_\mu\varphi|^2 - m^2|\varphi|^2 - \frac{\lambda}{4}|\varphi|^4 \tag{7}$$

- В последних 2-х случаях для частиц с отрицательным электрическим зарядом $-e$

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \tag{8}$$

-- *ковариантная* или *длинная* производная

Теория возмущений в КТП

- ☞ Взаимодействующие поля: $\mathscr{L}(u^2) \to \mathscr{L}(u^{n>2})$ ⇨ нелинейные уравнения
- ☞ Как решать? ⇨ Теория возмущений (ТВ)
- ☞ В квантовой механике

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi(t) \equiv (H_0 + H_1)\psi(t)\ , \tag{9}$$

  - ☞ H_0 -- *свободный* гамильтониан; при $H_1 = 0$ задача (9) точно решается
  - ☞ H_1 -- гамильтониан *взаимодействия*; характеризуется малым параметром α (например, в КЭД $\alpha = e^2/4\pi = 1/137$) -- рассматривается как *возмущение*
- ☞ В теории поля проблема : даже одиночная "свободная" частица взаимодействует с вакуумом, если $H_1 \neq 0$
- ☞ Лучше, чем ТВ, обычно предложить не удается. Поэтому будем предполагать

- существует предел слабой связи $\alpha \to 0$ у физических решений. Такие решения называются *адиабатическими*
- аналитичность или слабую неаналитичность у адиабатических решений

Эти предположения, строго говоря, необоснованны

- В скалярной теории $\lambda\varphi^4$ при $\lambda > 0$ энергия ограничена снизу, и это "хорошая" устойчивая теория.
- При $\lambda < 0$ энергия неограничена снизу ⇨ теория неустойчива (А что в КЭД?) ⇨
- $\lambda = 0$ -- особая точка
- Пример: 0-мерная теория φ^4. Функциональный интеграл (который дает ответы в КТП) для такой теории имеет вид

$$\int \mathscr{D}\varphi \mathrm{e}^{-\varphi^2 - \frac{\lambda}{8}\varphi^4} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathrm{e}^{-x^2 - \frac{\lambda}{8}x^4} \tag{10}$$

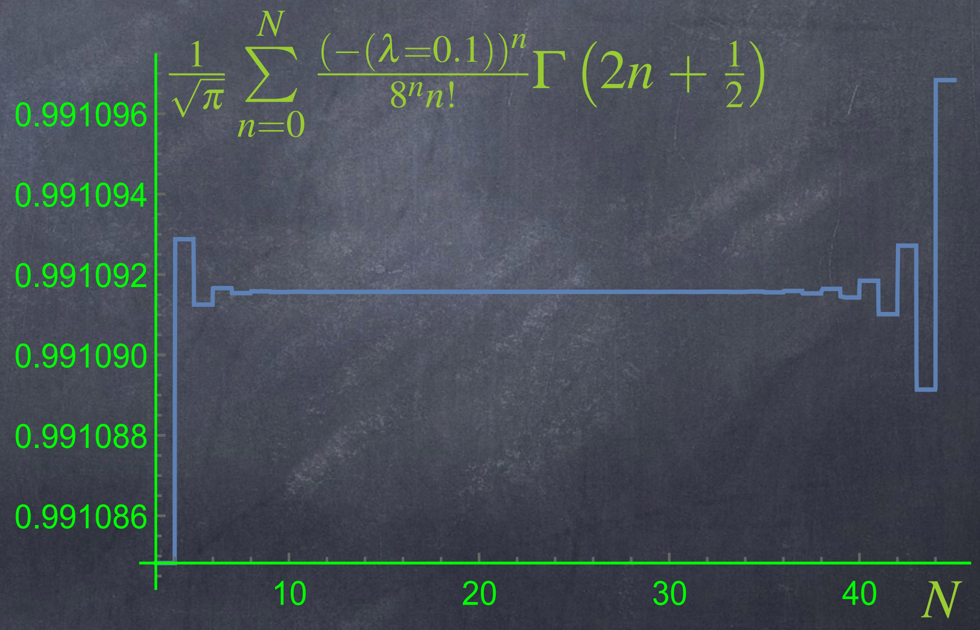
Вычислим его по ТВ

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2-\frac{\lambda}{8}x^4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{8^n n!}\int_{-\infty}^{\infty} dx\cdot x^{4n} e^{-x^2} \overset{y=x^2}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{8^n n!}\int_{0}^{\infty} dy\cdot y^{\frac{4n+1}{2}-1} e^{-y} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{8^n n!}\Gamma\left(2n+\frac{1}{2}\right) \tag{11}$$

При больших n члены ряда ведут себя как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-\lambda)^n}{8^n n!}\Gamma\left(2n+\frac{1}{2}\right) \sim (-\#\lambda n)^n \tag{12}$$

При фиксированном λ частичная сумма сначала при $N < \frac{1}{\#\lambda}$ стремится к определенному правильному пределу, а затем, при $N > \frac{1}{\#\lambda}$, ряд взрывается



Асимптотический ряд

Ответ для интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2-\frac{\lambda}{8}x^4} = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{1}{\lambda}}K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\sqrt{\lambda}}$$

(K -- *функция Макдональда*)

Представление взаимодействия

☞ Пусть $H = H_0 + H_1$ ⇨ для свободной системы

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H_0\Psi(t)\ , \qquad (13)$$

☞ Уравнение (13) можно формально проинтегрировать

$$\Psi(t) = \mathrm{e}^{-iH_0t}\Phi\ , \qquad (14)$$

где Φ --- постоянная амплитуда.

☞ Решение (14) не удовлетворяет уравнению Шредингера с включенным взаимодействием ⇨

☞ Решение уравнения Шредингера с включенным взаимодействием удобно искать в виде (14), считая, что Φ зависит от времени:

$$i\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} = \mathrm{e}^{iH_0t}H_1\mathrm{e}^{-iH_0t}\Phi(t)\ . \qquad (15)$$

☞ Гамильтониан взаимодействия имеет вид

$$H_1 = \int d\mathbf{x} \mathscr{H}_1(\mathbf{x}) \ . \tag{16}$$

☞ Плотность гамильтониана $\mathscr{H}_1(\mathbf{x})$ выражается через произведение полей, поэтому можно написать

$$\mathrm{e}^{iH_0t} \mathscr{H}_1(\mathbf{x}) \mathrm{e}^{-iH_0t} \simeq \mathrm{e}^{iH_0t} u_{\alpha_1}(\mathbf{x}) \dots u_{\alpha_i}(\mathbf{x}) \mathrm{e}^{-iH_0t} = \mathrm{e}^{iH_0t} u_{\alpha_1}(x) \dots u_{\alpha_i}(x) \mathrm{e}^{-iH_0t}\Big|_{x_0=0} = \tag{17}$$

$$\mathrm{e}^{iH_0t} u_{\alpha_1}(x) \mathrm{e}^{-iH_0t} \dots \mathrm{e}^{iH_0t} u_{\alpha_i}(x) \mathrm{e}^{-iH_0t}\Big|_{x_0=0} = u_{\alpha_1}(x) \dots u_{\alpha_i}(x) \simeq \mathscr{H}_1(x) \ , \tag{18}$$

☞ В последних двух равенствах поля $u(x)$ --- это поля, а $\mathscr{H}_1(x)$ --- гамильтонова плотность взаимодействия в представлении Гейзенберга относительно свободного гамильтониана.

☞ Уравнение (15) можно представить теперь в виде

$$i\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} = H_1(t)\Phi(t)\ , \tag{19}$$

где

$$H_1(t) = \int d\mathbf{x}\mathscr{H}_1(t,\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}\mathscr{H}_1(x)\ . \tag{20}$$

☞ Представление, в котором уравнение Шредингера имеет вид (19) называется *представлением взаимодействия*.

☞ Среднее от произвольного оператора:

$$\bar{B}_t = \Psi^*(t)B\Psi(t) = \Phi^*(t)\mathrm{e}^{iH_0t}B\mathrm{e}^{-iH_0t}\Phi(t) = \Phi^*(t)B_{\text{вз}}\Phi(t), \tag{21}$$

где

$$B_{\text{вз}} \equiv \mathrm{e}^{iH_0t}B\mathrm{e}^{-iH_0t}\ , \tag{22}$$

--- произвольный оператор в представлении взаимодействия.

В представлении взаимодействия все операторы должны рассматриваться как функции операторов поля в представлении Гейзенберга для свободных полей, удовлетворяющих свободным уравнениям движения.

Матрица рассеяния

- Задача рассеяния: Пусть в отдаленном прошлом все частицы находились далеко друг от друга и не взаимодействовали. Состояние системы описывалось амплитудой $\Phi(-\infty)$. Требуется найти вероятность, что в отдаленном будущем система будет также состоять из отдаленных частиц и описываться амплитудой $\Phi(\infty)$.

- Математическая формулировка заключается в следующем: Пусть адиабатически

$$H_1(t) \overset{t\to\pm\infty}{\to} 0\ . \tag{23}$$

Решая уравнение Шредингера

$$i\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} = H_1(t)\Phi(t)\ , \tag{24}$$

требуется найти такой оператор S, что

$$\Phi(\infty) = S\Phi(-\infty)\ . \tag{25}$$

- Такой оператор характеризуется своими матричными элементами

$$S_{\alpha\beta} = \langle\alpha|S|\beta\rangle \ , \tag{26}$$

и называется *S-матрицей* или *матрицей рассеяния.*

- Требование T-инвариантности приводит к условию на S-матрицу

$$S_{\alpha\beta} = S_{\mathrm{T}\beta,\mathrm{T}\alpha} \ . \tag{27}$$

- Чтобы построить S-матрицу, рассмотрим переходы между моментом t_0 и t. Тогда

$$\Phi(t) = S(t,t_0)\Phi(t_0) \ . \tag{28}$$

- Подставляя это выражение в (24), находим, что $S(t,t_0)$ удовлетворяет следующему операторному уравнению

$$i\frac{\partial S(t,t_0)}{\partial t} = H_1(t)S(t,t_0) \ , \quad S(t_0,t_0) = 1 \ . \tag{29}$$

Считая, что H_1 мало, можно найти решение этого уравнения в виде ряда теории возмущений

☞ Напишем $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n$, где $S_n \sim H_1^n$, тогда

$$i\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty} S_n = H_1 \sum_{n=0}^{\infty} S_n \quad \Rightarrow \quad i\frac{\partial S_{n+1}}{\partial t} = H_1 S_n, \tag{30}$$

или

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial S_0}{\partial t} &= 0, \quad S_0(t_0,t_0) = 1 \quad \Rightarrow \quad S_0(t) = 1 \\
i\frac{\partial S_1}{\partial t} &= H_1 \cdot 1, \quad S_1(t_0,t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1(t) = (-i)\int_{t_0}^{t} dt' H_1(t') \\
i\frac{\partial S_2}{\partial t} &= H_1 \cdot S_1, \quad S_2(t_0,t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2(t) = (-i)^2 \int_{t_0}^{t} dt' H_1(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' H_1(t'') \\
&\vdots \\
S_n(t) &= (-i)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 H_1(t_1) \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1(t_2) \ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1(t_n)
\end{aligned} \tag{31}$$

☞ Рассмотрим второй член в формуле (31):

$$\int_{t_0}^{t} H_1(t')dt' \int_{t_0}^{t'} H_1(t'')dt'' = \int_{t_0}^{t} H_1(t')H_1(t'')\theta(t'-t'')dt'dt'' = \tag{32}$$

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt'dt'' \left\{H_1(t')H_1(t'')\theta(t'-t'') + H_1(t'')H_1(t')\theta(t''-t')\right\} \equiv \tag{33}$$

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1 dt_2 T\left\{H_1(t_1)H_1(t_2)\right\} \ , \tag{34}$$

где мы ввели символ *хронологического произведения*:

$$T\left\{H_1(t_1)H_1(t_2)\right\} \equiv \begin{cases} H_1(t_1)H_1(t_2) & t_1 > t_2 \ , \\ H_1(t_2)H_1(t_1) & t_2 > t_1 \ . \end{cases} \tag{35}$$

☞ Аналогично, общий член

$$S_n(t) = \frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t} dt_1 \ldots \int_{t_0}^{t} dt_n T\left\{H_1(t_1)\ldots H_1(t_n)\right\} \ , \tag{36}$$

где символ $T\left\{H_1(t_1)\ldots H_1(t_n)\right\}$ для любого взаимного расположения временных аргументов равен произведению гамильтонианов в порядке невозрастания аргументов слева направо:

$$T\left\{H_1(t_1)\ldots H_1(t_n)\right\} = H_1(t_a)H_1(t_b)\ldots H_1(t_r), \quad t_a \geq t_b \geq \ldots \geq t_r\,. \tag{37}$$

Представляя каждый член S_n в ряде с помощью T-произведения и вынося (формально) символ T из-под знаков интегрирования, получаем

$$S(t,t_0) = T\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\left(\int_{t_0}^{t} H_1(t')dt'\right)^n\right\} = T\left\{\exp\left(-i\int_{t_0}^{t} H_1(t')dt'\right)\right\} =$$
$$T\left\{\exp\left(-i\int_{t_0}^{t} dt'\int d\mathbf{x}\mathscr{H}_1(t',\mathbf{x})\right)\right\}\,. \tag{38}$$

Хронологическое произведение

- Определим хронологическое произведение n операторов поля $u_1(x_1)$, $\ldots$, $u_n(x_n)$ как произведение этих операторов в порядке, соответствующем невозрастанию временных аргументов слева направо, с учетом общего знака, который может меняться в случае, если часть полей квантована по Ферми-Дираку.
- Это определение не вполне корректно: временная последовательность двух точек x_i, x_j не является релятивистски инвариантным в случае, если эти точки пространственно подобны $x_i \sim x_j$ ⇨
- Определение хронологического произведения будет лоренц-инвариантным, если операторы (анти)коммутируют вне светового конуса:

$$u_i(x_i)u_j(x_j) = \pm u_j(x_j)u_i(x_i)\ , \quad x_i \sim x_j\ , \tag{39}$$

Такие операторы мы будем называть *локальными*.

- Операторы поля являются локальными, а их частотные части -- нет
- По определению для локальных операторов

$$T\left\{u_1(x_1)\ldots u_n(x_n)\right\} = (-1)^p u_{i_1}(x_{i_1}) u_{i_2}(x_{i_2})\ldots u_{i_n}(x_{i_n})\ ,$$
$$x_{i_1} \gtrsim x_{i_2} \gtrsim \ldots \gtrsim x_{i_n}\ . \tag{40}$$

- Здесь символ $x \gtrsim y$ означает, что точка x лежит в верхнем световом конусе точки y или пространственноподобно ей, а p --- четность перестановки ферми-операторов при переходе от порядка $(1, 2, \ldots n)$ к порядку $(i_1, i_2, \ldots i_n)$.
- Хронологическое произведение локальных операторных выражений $A_1(x_1), \ldots, A_n(x_n)$

$$T\left\{A_1(x_1)\ldots A_n(x_n)\right\} = (-1)^p A_{i_1}(x_{i_1}) A_{i_2}(x_{i_2})\ldots A_{i_n}(x_{i_n})\ ,$$
$$x_{i_1} \gtrsim x_{i_2} \gtrsim \ldots \gtrsim x_{i_n}\ . \tag{41}$$

☞ Локальным операторным выражением $A(x)$ относительно поля $u(x)$ называется операторное выражение, зависящее от полей и их производных в целом и (анти)коммутирующее с оператором поля при пространственноподобных аргументах

$$\{A(x), u(y)\}_{\pm} = 0\,, \quad x \sim y\,. \tag{42}$$

☞ Из определения локальных операторных выражений следуют, что такие операторы (анти)коммутируют при пространственноподобных аргументах

$$\{A_i(x), A_j(y)\}_{\pm} = 0\,, \quad x \sim y\,, \tag{43}$$

вследствие чего определение (41) непротиворечиво.

Отметим, что (анти)коммутаторы типа (43) обычно имеют сингулярности при $x = y$. Поэтому хронологические произведения (40), (41) оказываются неопределенным при совпадающих аргументах. Этой неопределенностью можно воспользоваться по-разному.

Хронологическая экспонента

- Вернемся к S-матрице
- Если лагранжиан взаимодействия не содержит производных от полей, то $\mathscr{H}_1(t, \mathrm{x}) = -\mathscr{L}_{\mathrm{int}}(x)$.
- Устремим в выражении (38) $t \to \infty$, $t_0 \to -\infty$ ⇨

$$S = T\exp\left(i\int dx \mathscr{L}_{\mathrm{int}}(x)\right) = T\mathrm{e}^{i\mathscr{A}_{\mathrm{int}}}\,, \tag{44}$$

где $\mathscr{A}_{\mathrm{int}}$ --- действие взаимодействия.

- Запись (44) несколько условна. Правильно эту запись нужно трактовать также, как и формулу (38), т.е. разложить экспоненту в ряд и внести знак T-произведения под интегралы.
- Если лагранжиан взаимодействия содержит производные от полей, то все равно формула (44) остается справедливой. Фактически, различие в формулах (38) и (44) сводится в этом случае к доопределению T-произведения при совпадающих аргументах.

Свойства S-матрицы

☞ S-матрица может быть построена без обращения к уравнению Шредингера. При этом построение опирается на явно сформулированные физические условия -- аксиомы:

✍ причинности,

✍ унитарности,

✍ релятивистской ковариантности,

✍ принцип соответствия.

☞ Придадим этим условиям математическое выражение ⇨

☞ Введем понятие о «включенном взаимодействии»: заменим лагранжиан взаимодействия на лагранжиан с «включенным взаимодействием»

$$\mathscr{L}_{\text{int}} \to g(x)\mathscr{L}_{\text{int}} \, , \tag{45}$$

$$0 \leq g(x) \leq 1 \, . \tag{46}$$

☞ Функция $g(x)$ характеризует степень включения взаимодействия, при этом предполагают, что на бесконечности взаимодействие выключено:

$$g(x) \to 0 \ \text{при} \ x \to \infty \,. \tag{47}$$

☞ Состояния характеризуются обычными постоянными векторами состояний:

$$\Phi(-\infty) = \Phi\,, \quad \Phi(\infty) = \Phi(g) = S(g)\Phi\,. \tag{48}$$

☞ Реальная физическая ситуация включенного полностью взаимодействия воспроизводится в результате предельного перехода:

$$\Phi = \lim_{g\to 1} \Phi(g)\,, \quad S(1) = \lim_{g\to 1} S(g)\,. \tag{49}$$

☞ Математическая формулировка аксиом (см. БШ):

✍ Причинность:

$$\frac{\delta}{\delta g(x)}\left(\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)}S^{\dagger}(g)\right)=0 \quad \text{при} \quad x \lesssim y\,. \tag{50}$$

✍ Унитарность:

$$\Phi^{*}\Phi=\Phi^{*}(g)\Phi(g) \quad \Rightarrow S^{\dagger}(g)S(g)=1\,. \tag{51}$$

✍ Релятивистская ковариантность:

$$x\to x'=Lx\,, \quad \Lambda g=g(L^{-1}x)\,, \quad \Phi'=U\Phi\Rightarrow \tag{52}$$

$$S(\Lambda g)=USU^{\dagger}\,. \tag{53}$$

✍ Принцип соответствия:

$$S=1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}\int S_n(x_1,\ldots,x_n)g(x_1)\ldots g(x_n)\;dx_1\ldots dx_n\,, \tag{54}$$

$$S_1(x)=i\mathscr{L}_{\text{int}}(x)\,. \tag{55}$$

☞ Итог: S-матрица дается выражением (44), однако к лагранжиану взаимодействия можно добавить цепочку *квазилокальных* эрмитовых операторов $\Lambda_n(x, x_1, \dots x_{n-1})$:

$$\mathscr{L}_{\text{int}}(x) \mapsto \mathscr{L}_{\text{int}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \int \Lambda_{n+1}(x, x_1, \dots x_n) dx_1 \dots dx_n \,. \tag{56}$$

Квазилокальным оператором называется оператор, отличный от нуля только, если все его аргументы совпадают. Такой произвол в построении S-матрицы фактически сводится к произволу в выборе параметризации теории ⇨ *перенормировки*.

Теоремы Вика

- Для вычисления матричных элементов произведений операторов удобно их привести к нормальной форме, т.к. среднее по вакууму от нормального произведения равно 0.
- Пусть $A = C_+ u^+ + C_- u^-$; $C_\pm$ -- C-числа
- Рассмотрим сперва произведение двух операторов:

$$A(x)B(y) \equiv :A(x)B(y): + \underbracket{A(x)B(y)}\ . \tag{57}$$

- Коммутаторы полей являются C-числами ⇨

$$\underbracket{A(x)B(y)} \tag{58}$$

является C-числом.

- Это выражение называется *нормальным спариванием* двух операторов.
- Имеем
$$\langle 0|A(x)B(y)|0\rangle = \underbracket{A(x)B(y)}\ . \tag{59}$$

☞ Приведем несколько примеров.

☞ Для скалярного поля имеем

$$\varphi(x)\varphi(y) =: \varphi(x)\varphi(y) : -iD^{-}(x-y) \quad ⇨ \tag{60}$$

$$\underbrace{\varphi(x)\varphi(y)}_{} = \underbrace{\varphi^{-}(x)\varphi^{+}(y)}_{} = -iD^{-}(x-y)\,; \quad \underbrace{\varphi^{+}(x)\varphi^{-}(y)}_{} = ?\,. \tag{61}$$

☞ Аналогично для электромагнитного

$$\underbrace{A_{\nu}(x)A_{\mu}(y)}_{} = ig_{\nu\mu}D_0^{-}(x-y)\,, \tag{62}$$

☞ и спинорного полей:

$$\underbrace{\psi_{\alpha}(x)\bar{\psi}_{\beta}(y)}_{} = -iS^{-}_{\alpha\beta}(x-y)\,, \tag{63}$$

$$\underbrace{\bar{\psi}_{\alpha}(x)\psi_{\beta}(y)}_{} = -iS^{+}_{\beta\alpha}(y-x)\,, \tag{64}$$

$$\underbrace{\psi_{\alpha}(x)\psi_{\beta}(y)}_{} = \underbrace{\bar{\psi}_{\alpha}(x)\bar{\psi}_{\beta}(y)}_{} = 0\,. \tag{65}$$

Определим теперь *нормальное произведение со спариванием*. По определению:

$$:A_1 \dots \underbrace{A_i \dots A_j} \dots A_n :\equiv \eta \, \underbrace{A_i A_j} \cdot \, :A_1 \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_{j-1} A_{j+1} \dots A_n: , \qquad (66)$$

и аналогично с несколькими спариваниями. Здесь и далее в этом разделе η --- четность перестановки ферми-операторов от порядка $1, \dots, n$ к порядку $i, j, 1, \dots, \cancel{i}, \dots, \cancel{j}, \dots n$.

Первая теорема Вика. *Обычное произведение линейных операторов равно сумме всевозможных нормальных произведений этих операторов со всевозможными спариваниями:*

$$A_1 \dots A_n =: A_1 \dots A_n : + \sum_{i \neq j} :A_1 \dots \underbrace{A_i \dots A_j} \dots A_n: + \qquad (67)$$

$$+ \sum_{i,j,k,l} :A_1 \dots \underbrace{A_i \dots A_j} \dots \underbrace{A_k \dots A_l} \dots A_n: + \dots . \qquad (68)$$

- Рассмотрим теперь произведение двух нормальных произведений:

$$:A_1 \dots A_j::A_{j+1} \dots A_i: \quad . \tag{69}$$

Произведения такого вида также надо уметь приводить к нормальной форме. Очевидно, что к произведениям такого вида применима первая теорема Вика, однако при этом не надо включать спаривания операторов, стоящих под знаком нормального произведения, или, другими словами, нужно принимать во внимание только спаривания операторов, принадлежащих к разным группам.

- Поскольку поля в координатном представлении являются линейными комбинациями операторов рождения и уничтожения $a^{\pm}_{\sigma}(\mathbf{k})$ (интегралами Фурье), и, обратно, операторы рождения и уничтожения являются линейными комбинациями полей, то теорема Вика применима к произведениям, содержащим в качестве сомножителей операторы $a^{\pm}_{\sigma}(\mathbf{k})$.

☞ Рассмотрим теперь T-произведение двух полевых операторов

$$T\left(u_1(x)u_2(y)\right) = \begin{cases} u_1(x)u_2(y) = :u_1(x)u_2(y): + \underbracket{u_1(x)u}{}_2(y) & x^0 > y^0 \\ \eta\, u_2(y)u_1(x) = :u_1(x)u_2(y): + \eta\, \underbracket{u_2(y)u}{}_1(x) & x^0 < y^0 \end{cases} . \tag{70}$$

☞ Таким образом

$$T\left(u_1(x)u_2(y)\right) = :u_1(x)u_2(y): + \overbracket{u_1(x)u}{}_2(y)\ , \tag{71}$$

где

$$\overbracket{u_1(x)u}{}_2(y) \equiv \begin{cases} \underbracket{u_1(x)u}{}_2(y) & x^0 > y^0 \\ \eta\, \underbracket{u_2(y)u}{}_1(x) & x^0 < y^0 \end{cases} \tag{72}$$

хронологическое спаривание.

☞ Из этого определения следуют очевидные свойства:

$$\langle T\left(u_1(x)u_2(y)\right)\rangle_0 = \overbracket{u_1(x)u}{}_2(y)\ , \tag{73}$$

$$\overbracket{u_1(x)u}{}_2(y) = \eta\, \overbracket{u_2(y)u}{}_1(x)\ . \tag{74}$$

Для скалярного, электромагнитного и спинорного полей имеем соответственно:

$$i\,\overline{\varphi(x)\varphi}(y) = i\langle T(\varphi(x)\varphi(y))\rangle_0 = \theta(x_0-y_0)D^-(x-y) - \theta(y_0-x_0)D^+(x-y)\,, \tag{75}$$

$$i\,\overline{A_\nu(x)A}_\mu(y) = i\langle T(A_\nu(x)A_\mu(y))\rangle_0 = -g_{\nu\mu}\theta(x_0-y_0)D_0^-(x-y)+g_{\nu\mu}\theta(y_0-x_0)D_0^+(x-y)\,, \tag{76}$$

$$i\,\overline{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}}_\beta(y) = i\langle T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y))\rangle_0 = \theta(x_0-y_0)S^-_{\alpha\beta}(x-y) - \theta(y_0-x_0)S^+_{\alpha\beta}(x-y)\,. \tag{77}$$

Заметим, что как и T-произведение, хронологическое спаривание не определено при совпадающих временных аргументах.

Аналогично нормальному произведению со спариванием определим нормальное произведение с хронологическим спариванием:

$$:A_1\ldots\overline{A_j\ldots A}_i\ldots A_n:\equiv \eta\,\overline{A_jA}_i\cdot :A_1\ldots A_{j-1}A_{j+1}\ldots A_{i-1}A_{i+1}\ldots A_n:\ . \tag{78}$$

Вторая теорема Вика. *T-произведение n линейных операторов равно сумме их нормальных произведений со всевозможными хронологическими спариваниями.*

$$T(A_1 \ldots A_n) =: A_1 \ldots A_n : + \sum_{i \neq j} : A_1 \ldots \overbracket{A_i \ldots A_j} \ldots A_n : + \tag{79}$$

$$+ \sum_{i,j,k,l} : A_1 \ldots \overbracket{A_i \ldots A_j} \ldots \overbracket{A_k \ldots A_l} \ldots A_n : + \ldots \, . \tag{80}$$

Аналогично случаю с обычным произведением, если под знаком T-произведения стоит несколько нормальных произведений (как, например, для n-ого элемента S-матрицы), то нужно хронологически спаривать лишь операторы, принадлежащие к разным группам.

Третья теорема Вика. *Вакуумное среднее от T произведения равно сумме вакуумных средних от хронологических произведений с одним спаренным оператором*

$$\langle T(AB_1 \dots B_n)\rangle_0 = \sum_{i=1}^{n} \langle T(\overline{AB_1 \dots B_i} \dots B_n)\rangle_0 \,. \tag{81}$$

Итак, мы видим, что любое T-произведение линейных операторов сводится к сумме произведений спариваний полевых операторов (см. (75), (76), (77)) на операторы, приведенные к нормальной форме. Таким образом, основным элементом, необходимым при вычислении матричных элементов, является хронологическое спаривание полевых операторов. К изучению этих хронологических спариваний мы и переходим.