М.В. Либанов

КТП VI. Особенности квантования различных полей

Содержание

Квантование скалярного и массивного векторного полей

- Все предыдущие результаты переносятся на случай действительного скалярного поля, которое необходимо квантовать по Бозе-Эйнштейну

$$[a^-(\mathbf{k}), a^+(\mathbf{q})] = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \ , \tag{1}$$

$$[\varphi^-(x), \varphi^+(y)] = \frac{1}{i}D^-(x-y) = iD^+(y-x) \ , \tag{2}$$

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \frac{1}{i}D(x-y) \ . \tag{3}$$

NB: Из (3) следуют одновременные канонические коммутационные соотношения (Показать!)

$$[\pi_\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})]\big|_{x_0=y_0} = [\dot{\varphi}(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})]\big|_{x_0=y_0} = -i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{4}$$

- Единственная нетривиальная наблюдаемая -- оператор импульса

$$P^\mu = \int d\mathbf{k} k^\mu a^+(\mathbf{k}) a^-(\mathbf{k}) \ . \tag{5}$$

- Пример квантовых вычислений. Проверим правильность нормировки полей (1).

- Рассмотрим среднее значение P^μ по одночастичному состоянию

$$|1\rangle = \int c(\mathbf{k}) a^+(\mathbf{k}) d\mathbf{k} |0\rangle \ , \tag{6}$$

где $c(\mathbf{k})$ характеризует распределение по импульсам в этом состоянии. При $c(\mathbf{k}) \to \delta(\mathbf{k}-\mathbf{p})$ мы должны получить

$$\langle P_\mu \rangle_1 = \frac{\langle 1|P_\mu|1\rangle}{\langle 1|1\rangle} \to p_\mu \tag{7}$$

- Вычислим сперва знаменатель (7) -- нормировку одночастичного состояния

- Предположим, мы ошиблись и (1) имеет вид

$$[a^-(\mathbf{k}), a^+(\mathbf{q})] = Z_\varphi \delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \ \Rightarrow a^-(\mathbf{k})a^+(\mathbf{q}) = Z_\varphi \delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) + a^+(\mathbf{q})a^-(\mathbf{k}) \quad (8)$$

где Z_φ некоторая константа -- нормировка поля.

- $$\langle 1|1\rangle = \langle 0| \int d\mathbf{k} c^*_\mathbf{k} a^-_\mathbf{k} \int d\mathbf{q} c_\mathbf{q} a^+_\mathbf{k} |0\rangle = \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} c^*_\mathbf{k} c_\mathbf{q} \langle 0|a^-_\mathbf{k} a^+_\mathbf{q}|0\rangle \stackrel{(8)}{=} \quad (9)$$

$$\int d\mathbf{k} d\mathbf{q} c^*_\mathbf{k} c_\mathbf{q} \left(\langle 0|Z_\varphi \delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) + a^+_\mathbf{q} a^-_\mathbf{k}|0\rangle\right) \stackrel{\mathbf{k}=\mathbf{q};\ a^-|0\rangle=0}{=} Z_\varphi \langle 0|0\rangle \int d\mathbf{k} |c_k|^2 \quad (10)$$

т.е. с помощью (8) мы “тащим” a^+ налево, а a^- -- направо, пока они не подействуют на вакуум и дадут 0.

- Аналогично (Проверить!)

$$\langle 1|P_\mu|1\rangle = Z^2_\varphi \langle 0|0\rangle \int d\mathbf{k} k_\mu |c_\mathbf{k}|^2 \Rightarrow \quad (11)$$

- В итоге

$$\langle P_\mu\rangle_1 = \frac{\langle 1|P_\mu|1\rangle}{\langle 1|1\rangle} = \frac{Z_\varphi^{\cancel{2}}\langle 0\cancel{|}0\rangle \int d\mathbf{k}k_\mu |c_\mathbf{k}|^2}{\cancel{Z_\varphi}\langle 0\cancel{|}0\rangle \int d\mathbf{k} |c_\mathbf{k}|^2} \xrightarrow{c_\mathbf{k}\to\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p})} \frac{Z_\varphi p_\mu \cancel{\delta}(0)}{\cancel{\delta}(0)} = Z_\varphi p_\mu \qquad (12)$$

NB: $Z_\varphi = 1$ -- отлично! -- так должно быть

NB: $Z_\varphi < 0$ -- плохо!: норма 1-состояния (10) отрицательна

NB: Можно попытаться поменять смысл операторов рождения и уничтожения: сделать a^- оператором рождения, т.е. $a^-|0\rangle$ -- одночастичное состояние, но такая интерпретация приводит к отрицательной энергии состояния.

NB: Состояния с $Z_\varphi < 0$ называются *духами* (*ghosts*)

NB: Для ЭМП $[a_a^-(\mathbf{k})a_b^+(\mathbf{k})] = -g_{ab}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \Rightarrow$ "временной" фотон a_0 -- дух. (С этим надо что-то делать...).

Результаты для комплексного скалярного поля

$$[\overset{*}{a}{}^{-}(\mathbf{k}), a^{+}(\mathbf{q})] = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \ , \tag{13}$$

$$P^{\mu} = \int d\mathbf{k} k^{\mu} (\overset{*}{a}{}^{+}(\mathbf{k}) a^{-}(\mathbf{k}) + a^{+}(\mathbf{k}) \overset{*}{a}{}^{-}(\mathbf{k})) \ , \tag{14}$$

$$Q = \int d\mathbf{k} (\overset{*}{a}{}^{+}(\mathbf{k}) a^{-}(\mathbf{k}) - a^{+}(\mathbf{k}) \overset{*}{a}{}^{-}(\mathbf{k})) \ . \tag{15}$$

NB: Видим, что операторы $a^{-}(\mathbf{k})$ и $\overset{*}{a}{}^{+}(\mathbf{k})$ являются операторами уничтожения и рождения частиц с импульсом k и зарядом $+1$, тогда как операторы $\overset{*}{a}{}^{-}(\mathbf{k})$ и $a^{+}(\mathbf{k})$ являются операторами уничтожения и рождения античастиц с импульсом k и зарядом -1.

Результаты для массивного заряженного векторного поля

✓ Нужно удовлетворить условие $\partial B = 0 \Rightarrow$ квантуются 3 амплитуды a_i:

$$\mathbf{B}^{\pm}(\mathbf{k}) = \mathbf{e}_i a_i^{\pm}(\mathbf{k}) + \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\frac{k^0}{m} a_3^{\pm}(\mathbf{k}) \ . \tag{16}$$

✓ Ответ:

$$[\overset{*}{B}{}^{\mu}(x), B^{\nu}(y)] = \left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right) iD(x-y) \ . \tag{17}$$

✓ При этом операторы $a_i^{\pm}(\mathbf{k})$, точнее их линейные комбинации, приобретают смысл рождения и уничтожения частиц с определенным зарядом, с тремя возможными проекциями спина на направление движения: $+1$, 0 и -1, и с определенным импульсом. Таким образом, частицы, описываемые массивными векторными полями имеют спин равный единице.

Квантование спинорного поля

- В соответствии с теоремой Паули это поле должно быть проквантовано по Ферми-Дираку.
- Из явного вида импульса

$$P^\mu = \int d\mathbf{k} k^\mu \left(\overset{*}{a}{}_n^+(\mathbf{k}) a_n^-(\mathbf{k}) - \overset{*}{a}{}_n^-(\mathbf{k}) a_n^+(\mathbf{k}) \right) , \qquad (18)$$

видим, что могут быть проквантованы независимые амплитуды a_n. Имеем

$$\begin{aligned} \{\overset{*}{a}{}_n^+(\mathbf{k}), a_m^-(\mathbf{q})\} &= \delta_{mn}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) , \\ \{\overset{*}{a}{}_n^-(\mathbf{k}), a_m^+(\mathbf{q})\} &= \delta_{mn}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) , \end{aligned}$$

все остальные антикоммутаторы равны нулю.

- В координатном пространстве

$$\{\psi^-_\alpha(x), \bar{\psi}^+_\beta(y)\} \;=\; (i\hat{\partial}+m)_{\alpha\beta}\frac{1}{i}D^-(x-y) \equiv \frac{1}{i}S^-_{\alpha\beta}(x-y)\,,$$

$$\{\psi^+_\alpha(x), \bar{\psi}^-_\beta(y)\} \;=\; (i\hat{\partial}+m)_{\alpha\beta}\frac{1}{i}D^+(x-y) \equiv \frac{1}{i}S^+_{\alpha\beta}(x-y)\,,$$

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} \;=\; (i\hat{\partial}+m)_{\alpha\beta}\frac{1}{i}D(x-y) \equiv \frac{1}{i}S_{\alpha\beta}(x-y)\,, \qquad (19)$$

- В импульсном пространстве функция $S(x)$ имеет следующий вид

$$S(x) = (i\hat{\partial}+m)D(x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int dk e^{ikx}\delta(k^2-m^2)\varepsilon(k^0)(\hat{k}-m)\,. \qquad (20)$$

NB: Заметим, что функция $S(x)$ удовлетворяет уравнениям движения поля:

$$(i\hat{\partial}-m)S(x) = (i\hat{\partial}-m)(i\hat{\partial}+m)D(x) = -(\partial^2+m^2)D(x) = 0\,. \qquad (21)$$

- Операторы динамических величин представляются в виде

$$P^\mu = \int d\mathbf{k} k^\mu (\overset{*}{a}{}_n^{+}(\mathbf{k}) a_n^{-}(\mathbf{k}) + a_n^{+}(\mathbf{k}) \overset{*}{a}{}_n^{-}(\mathbf{k})) \ , \tag{22}$$

$$Q = \int d\mathbf{k} (\overset{*}{a}{}_n^{+}(\mathbf{k}) a_n^{-}(\mathbf{k}) - a_n^{+}(\mathbf{k}) \overset{*}{a}{}_n^{-}(\mathbf{k})) \ , \tag{23}$$

$$S_3 \sim \frac{1}{2} (\overset{*}{a}{}_1^{+}(\mathbf{k}) a_1^{-}(\mathbf{k}) - \overset{*}{a}{}_2^{+}(\mathbf{k}) a_2^{-}(\mathbf{k}) - a_1^{+}(\mathbf{k}) \overset{*}{a}{}_1^{-}(\mathbf{k}) + a_2^{+}(\mathbf{k}) \overset{*}{a}{}_2^{-}(\mathbf{k})) \ . \tag{24}$$

Из этих выражений следует, что операторы $\overset{*}{a}{}_n^{+}(\mathbf{k})$ и $a_n^{-}(\mathbf{k})$ --- операторы рождения и уничтожения частиц с импульсом $\mathbf{k}$, массой m, зарядом $+1$ и проекцией спина $+\frac{1}{2}$ при $n = 1$ и $-\frac{1}{2}$ при $n = 2$. Аналогично, операторы $a_n^{+}(\mathbf{k})$ и $\overset{*}{a}{}_n^{-}(\mathbf{k})$ --- операторы рождения и уничтожения частиц с импульсом $\mathbf{k}$, массой m, зарядом -1 ($\Rightarrow$ античастиц) и проекцией спина $-\frac{1}{2}$ при $n = 1$ и $+\frac{1}{2}$ при $n = 2$.

Зарядовое сопряжение спинорного поля

- Зарядовое сопряжение -- замена $u \to u^*$
- Тензорные представления г. Пуанкаре -- действительные

$$\overset{*}{u}{}'_T = \Lambda_T^* \overset{*}{u}_T = \Lambda_T \overset{*}{u}_T \tag{25}$$

Поэтому замена $u_T \to \overset{*}{u}_T$ не приводит к трудностям

- Спинорные -- нет:

$$\overset{*}{u}{}'_S = \Lambda_S^* \overset{*}{u}_S \neq \Lambda_S \overset{*}{u}_S \Rightarrow \tag{26}$$

- Необходимо построить такое поле u_S^C, что

✓ $u_S^C \sim \overset{*}{u}_S$

✓ $u_S^{C\prime} = \Lambda_S u_S^C \Rightarrow$

- Напишем

$$\psi^C = C\left(\overline{\psi}^T\right)\ , \quad \overline{\psi^C} = \psi^T (C^T)^{-1} = \left(C^{-1}\psi\right)^T\ , \tag{27}$$

где C --- некоторая матрица, которую мы будем называть *оператором зарядового сопряжения*.

- Последнее равенство в уравнении (27) можно записать также в следующем виде:

$$\overline{\psi^C} = \left(\overset{*}{\psi}{}^C\right)^T \gamma_0 = \left(C^* \left(\psi^T \gamma_0^*\right)^T\right)^T \gamma_0 = \left(C^* \gamma_0 \psi\right)^T \gamma_0 = \psi^T \gamma_0^T C^\dagger \gamma_0 = \psi^T \gamma_0 C^\dagger \gamma_0\ . \tag{28}$$

- Из этого равенства и из (27) следует следующее свойство матрицы C,

$$\left(C^T\right)^{-1} = \gamma_0 C^\dagger \gamma_0 \quad \Rightarrow \quad C^T \gamma_0 C^\dagger \gamma_0 = 1\ . \tag{29}$$

- Кроме прямых преобразований (27) существуют также обратные

$$\psi = C\left(\overline{\psi^C}\right)^T\ , \quad \overline{\psi} = \left(C^{-1}\psi^C\right)^T\ ; \tag{30}$$

видим, что прямое преобразование (27) совпадает с обратным (30).

- Чтобы найти явный вид матрицы C, воспользуемся тем фактом, что при зарядовом сопряжении все динамические величины, кроме тока, не должны изменяться, а ток должен изменить знак:

$$\mathscr{L}(\psi) = \mathscr{L}(\psi^C)\;, \quad T_{\mu\nu}(\psi) = T_{\mu\nu}(\psi^C)\;, \quad J_\mu(\psi) = -J_\mu(\psi^C)\;. \tag{31}$$

- Для этого достаточно потребовать, чтобы

$$:\overline{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2 := -:\overline{\psi_2^C}\gamma_\mu\psi_1^C: \tag{32}$$

$$:\overline{\psi}\psi :=: \overline{\psi^C}\psi^C:\,, \tag{33}$$

где $\psi_{1(2)}$ --- либо само поле, либо его производная.

- Рассмотрим уравнение (32). Используя обратные преобразования (30), получаем

$$: \bar{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_2 :=: \left(C^{-1}\psi_1^C\right)^T \gamma_\mu C \left(\overline{\psi_2^C}\right)^T :=: \psi_1^{C\alpha} C^{-1T}_{\alpha\beta} \gamma_\mu^{\beta\gamma} C_{\gamma\rho} \overline{\psi_2^C}^\rho : \overset{\text{антиком.}}{=} \tag{34}$$

$$- : \overline{\psi_2^C}^\rho C^T_{\rho\gamma} \gamma_\mu^{T\gamma\beta} C^{-1}_{\beta\alpha} \psi_1^{C\alpha} := - : \overline{\psi_2^C} C^T \gamma_\mu^T C^{-1} \psi_1^C : \overset{?}{=} - : \overline{\psi_2^C} \gamma_\mu \psi_1^C : \tag{35}$$

- Сравнивая полученное выражение с правой частью (32), получаем

$$C^T \gamma_\mu^T C^{-1} = \gamma_\mu \quad \Rightarrow \quad (C^{-1})^T \gamma_\mu C = \gamma_\mu^T\,. \tag{36}$$

- Аналогично из (33) имеем

$$: \bar{\psi}\psi := - : \overline{\psi^C} C^T C^{-1} \psi^C : \Rightarrow \tag{37}$$

$$C^T C^{-1} = -1 \quad \Rightarrow \quad C = -C^T\,. \tag{38}$$

- Из уравнений (29), (36) и (38) легко получить унитарность матрицы C

$$C^+ C = 1\,. \tag{39}$$

- Из (36) и (38) следует, что

$$C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T\,. \tag{40}$$

- В стандартном и киральном представлениях γ-матриц

$$\gamma_\mu^T = (-1)^\mu \gamma_\mu \ \Rightarrow \tag{41}$$

- $C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T \Rightarrow$

$$\{\gamma_0 C\} = \{\gamma_2 C\} = 0\ , \tag{42}$$

$$[\gamma_1 C] = [\gamma_3 C] = 0\ . \tag{43}$$

- Эти уравнения определяют матрицу C с точностью до константы. Действительно, легко убедиться, что матрица

$$C = \alpha\gamma^0\gamma^2 \tag{44}$$

удовлетворяет уравнениям.

- Постоянную α можно определить из условия унитарности (39). Из этого условия следует, что

$$|\alpha| = 1 \tag{45}$$

- В остальном выбор константы α произволен. Обычно выбирают $\alpha = -i$. Таким образом, матрица зарядового сопряжения имеет вид

$$C = i\gamma^2\gamma^0 \; . \tag{46}$$

- Переход к другому представлению γ-матриц

$$\gamma^\mu \mapsto U\gamma^\mu U^{-1} \; , \tag{47}$$

приводит к новой матрице зарядового сопряжения

$$C \mapsto UCU^T \; . \tag{48}$$

Квантование безмассового нейтринного поля

- Нейтрино является левовинтовым:

$$\nu = \psi_L = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi\,; \quad \frac{1+\gamma_5}{2}\nu = 0\,. \tag{49}$$

- Выражение для операторов импульса и компоненты спина легко получить из соответствующих выражений для массивного поля опусканием суммирования по спиновым индексам. Имеем,

$$P_\mu = \int dk k_\mu \left(\overset{*}{a}{}^{+}_{-1} a^{-}_{-1} + a^{+}_{-1} \overset{*}{a}{}^{-}_{-1}\right)\ , \tag{50}$$

$$S_3 \sim -\frac{1}{2}\overset{*}{a}{}^{+}_{-1} a^{-}_{-1} + \frac{1}{2} a^{+}_{-1} \overset{*}{a}{}^{-}_{-1}\ . \tag{51}$$

- Из выражений (50), (51) видно что у нейтрино два состояния: одно описывает нейтрино с отрицательной спиральностью, другое описывает антинейтрино с положительной спиральностью.

- Можно добиться того, что у частицы будет два состояния, а античастица не добавляет новых состояний, т.е. частица тождественна античастице. Для этого введем *Майорановский спинор*:

$$\chi^C = \chi \,. \tag{52}$$

Из определения зарядового сопряжения следует, что

$$C\overline{\chi^T} = \chi \,. \tag{53}$$

- Ток майорановских спиноров $= 0$, $\Rightarrow$ действительно частица, описываемая таким спинором, тождественна своей античастице.

- Можно связать майорановский спинор со спинором ν соотношением

$$\chi = \frac{\nu + \nu^C}{2} = \frac{\psi_L + \psi_L^C}{2} \,, \tag{54}$$

где

$$\psi_L^C \equiv (\psi_L)^C = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi^C = (\psi^C)_R \,. \tag{55}$$

При этом лагранжиан нейтринного поля примет вид

$$\mathscr{L} = i\bar{\chi}\hat{\partial}\chi \,. \tag{56}$$

Квантование электромагнитного поля

- $A_\mu^\pm \sim \int d\mathbf{k} e^{\pm ikx} a_\alpha^\pm e_\mu^\alpha$.
- При квантовании $a_\alpha^\pm$ становятся 4 операторами, но физических степеней свободы только 2.
- Причина: калибровочная инвариантость
- Надо сохранить ЛИ, КИ и получить две физических степени свободы
- Еще проблема:

$$[a_\alpha^-(\mathbf{k}), a_\beta^+(\mathbf{p})] = -g_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \Rightarrow \tag{57}$$

$$[a_0^-(\mathbf{k}), a_0^+(\mathbf{p})] = -\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \Rightarrow \text{“временной” фотон -- дух} \tag{58}$$

- Еще проблема: есть калибровочное условие Лоренца

$$\partial A = 0 \tag{59}$$

-- не может быть выполнено как операторное равенство. Покажем это.

✓ В импульсном пространстве условие Лоренца имеет вид

$$k^{\mu}A_{\mu}^{\pm}(\mathbf{k}) = k^{\mu}e_{\mu}^{\alpha}(\mathbf{k})a_{\alpha}^{\pm}(\mathbf{k}) = 0\ . \qquad (60)$$

✓ Удобно ввести новый неортонормированный базис (поперечные векторы остаются теми же).

$$\varepsilon_{\mu} = \frac{e_{\mu}^{0} + e_{\mu}^{3}}{2}\ , \quad \zeta_{\mu} = \frac{e_{\mu}^{0} - e_{\mu}^{3}}{2}\ , \qquad (61)$$

✓ ε_{μ} параллелен импульсу k_{μ} и, следовательно, $k^{\mu}\varepsilon_{\mu} = 0$, в то время как $k^{\mu}\zeta_{\mu} \neq 0$. Кроме того, $k^{\mu}e_{\mu}^{\sigma} = 0$, где здесь и далее $\sigma = 1, 2$ и нумерует поперечные (к трехмерному импульсу) поляризации.

✓ Используя (61), условие Лоренца (60) запишется в виде

$$a_{0}^{\pm} - a_{3}^{\pm} = 0\ . \qquad (62)$$

✓ Но $[a_{0}^{-}(\mathbf{k}), a_{0}^{+}(\mathbf{p})] = -\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p})$, а $[a_{3}^{-}(\mathbf{k}), a_{3}^{+}(\mathbf{p})] = +\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p})$ -- противоречие

- Потребуем выполнения в среднем

$$\Psi^* \partial A \Psi = 0 \tag{63}$$

-- это уравнение на Ψ -- пространство физических состояний

NB: Итак, наша задача --- проквантовать ЭМП таким образом, чтобы, во-первых, a_0 можно было интерпретировать в терминах частиц, во-вторых, чтобы выполнялось условие Лоренца. Такой метод квантования был предложен независимо Гуптом и Блэйером в 1950 году. Суть его заключается в следующем.

- Пусть классическое поле A_0 является антиэрмитовым:

$$(A_0)^* = -A_0\ . \tag{64}$$

И соответственно для амплитуд имеем

$$(a_0^-)^* = -a_0^+\ . \tag{65}$$

-- противоречит действительности ЭМП.

- Однако, в квантовой теории поля наблюдаемыми являются не сами поля, а их средние.

- Определим операцию усреднения так, что среднее от A_0 станет эрмитовым. На первый взгляд такого не может быть: среднее от антиэрмитового оператора является эрмитовым. Тем не менее, мы сейчас увидим как это сделать.
- Введем эрмитов оператор η со следующими свойствами

$$\eta^2 = 1\ , \quad \eta^\dagger = \eta\ . \tag{66}$$

NB: Если η записать в виде диагональной матрицы, то его элементы ± 1.

- Определим вместо обычного скалярного произведения в пространстве состояний новое произведение следующим образом

$$(\Psi_i^* \eta \Psi_j)\ . \tag{67}$$

- Для ортонормированных векторов имеем

$$(\Psi_i^* \eta \Psi_j) = \pm\delta_{ij} \equiv N_i \delta_{ij}\ , \quad N_i^2 = 1\ . \tag{68}$$

NB: Оператор η будем называть *метрическим*.

- Определим теперь матричные элементы операторов. Для любого оператора $\hat{\mathscr{O}}$ матричный элемент имеет вид:

$$\mathscr{O}_{ij} = N_i(\Psi_i^* \eta \hat{\mathscr{O}} \Psi_j) \ . \tag{69}$$

$$\langle \hat{\mathscr{O}} \rangle_i = (\Psi_i^* \eta \hat{\mathscr{O}} \Psi_i) = N_i \mathscr{O}_{ii} \ . \tag{70}$$

NB: Видим, что определение среднего отличается от диагонального матричного элемента.

- Заменим также условие полноты:

$$\sum_i \Psi_i^*(x)\Psi_i(x') = \delta(x - x') \ \rightarrow \ \sum_i N_i \Psi_i^*(x) \eta \Psi_i(x') = \delta(x - x') \ . \tag{71}$$

Очевидно, что для двух операторов при этом выполняется правило матричного умножения:

$$(\hat{\mathscr{O}} \hat{\mathscr{P}})_{ij} = \sum_k \mathscr{O}_{ik} \mathscr{P}_{kj} \ . \tag{72}$$

- Кроме того, для эрмитова оператора (с обычным определением эрмитова сопряжения $(\Psi^* \hat{\mathcal{O}} \Phi)^* = (\Phi^* \hat{\mathcal{O}}^\dagger \Psi)$) имеем $\mathcal{O}_{ij}^* = \mathcal{O}_{ji}$.

NB: Так как норма в пространстве с таким скалярным произведением не положительно определена, то невозможно ее интерпретировать как вероятность. Однако, это не страшно.

- Пусть $\hat{\mathcal{O}}$ --- эрмитов и антикоммутирует с η

$$\eta \hat{\mathcal{O}} = -\hat{\mathcal{O}} \eta \ . \qquad (73)$$

- Вычислим среднее от такого оператора. Имеем

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_i^* = (\Psi_i^* \eta \hat{\mathcal{O}} \Psi_i)^* = (\Psi_i^* \hat{\mathcal{O}}^\dagger \eta^\dagger \Psi_i) = (\Psi_i^* \hat{\mathcal{O}} \eta \Psi_i) = -\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_i \ , \qquad (74)$$

т.е. среднее является чисто мнимым.

- Обратно, если $\hat{\mathcal{O}}$ --- антиэрмитов, то среднее будет действительным. Этого нам и хотелось.

- Пусть A_0 --- антиэрмитово. Введем новое поле (и соответственно новую амплитуду):

$$A_4 = iA_0\ , \quad a_4^{\pm} = ia_0^{\pm}\ . \tag{75}$$

Это поле будет эрмитовым, а $(a_4^-)^* = a_4^+$.

- При этом коммутационные соотношения для a_4 примут правильную форму:

$$[a_4^-(\mathbf{p}), a_4^+(\mathbf{k})] = +\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k})\ . \tag{76}$$

- Пусть A_4 ($a_4^{\pm}$) антикоммутируют с η, а A_i (пространственные компоненты) --- коммутируют:

$$\eta A_4 = -A_4\eta\ , \quad \eta A_i = A_i\eta\ . \tag{77}$$

$$\eta a_4^{\pm} = -a_4^{\pm}\eta\ , \quad \eta a_i^{\pm} = a_i^{\pm}\eta\ . \tag{78}$$

Тогда среднее от A_4, $\langle A_4\rangle$, будет чисто мнимым, а это значит, что среднее от A_0 будет действительным. Для A_i все остается по-прежнему. Метрика η с такими свойствами называется *индефинитной*.

- Благодаря новым коммутационным соотношениям (76) мы можем на равных рассматривать a_4 с остальными операторами и интерпретировать a_4^+ как оператор рождения временного фотона, а a_4^- --- уничтожения.

- Остается, однако, проблема, связанная с отрицательностью нормы. Действительно, легко убедиться, что

$$(\prod_k \Psi^*_{n_{4k}} \eta \prod_k \Psi_{n_{4k}}) \sim (-1)^{n_4} \ , \quad n_4 = \sum_k n_{4k} \ , \tag{79}$$

где $\Psi_{n_{4k}}$ --- состояние, содержащее n_{4k} временных фотонов с импульсом k.

- Покажем, что в физическом подпространстве, т.е. в подпространстве, определяемом условием Лоренца, отрицательно нормированных состояний нет.

- Итак, мы хотим построить пространство состояний, для которых выполняется условие Лоренца:

$$\Psi_P^* \eta \partial A \Psi_P = 0\ , \tag{80}$$

или в импульсном пространстве для отрицательно и положительно частотных компонент

$$(a_3^-(\mathbf{k}) + i a_4^-(\mathbf{k}))\Psi_P = 0\ , \tag{81}$$

$$\Psi_P^*(a_3^+(\mathbf{k}) - i a_4^+(\mathbf{k})) = 0\ . \tag{82}$$

NB: Решение этих уравнений легко построить. Достаточно разложить Ψ_P по состояниям с фиксированным числом n_4 временных фотонов и n_3 продольных с импульсом k. Подставляя это разложение в (81) или (82), можно найти коэффициенты разложения.

- Мы же запишем решение в несколько другом виде.
- Пусть $\Psi_P^{(0)}$ --- состояние, не содержащее временных и продольных фотонов. Очевидно, это состояние удовлетворяет уравнениям (81), (82).

- Тогда состояние, содержащее $n = n_3 + n_4$ фотонов с импульсом k и являющееся решением (81), (82), имеет вид

$$\Psi_P^{(n)} = (a_3^+(\mathbf{k}) + ia_4^+(\mathbf{k}))^n \Psi_P^{(0)} \,. \tag{83}$$

NB: Для того чтобы получить состояния с разными импульсами, нужно взять несколько операторов, действующих на $\Psi_P^{(0)}$ в этом уравнении, зависящими от разных импульсов. Далее мы будем опускать импульсную зависимость операторов.

- Убедимся, что (83) является решением (81). Заметим, что, например,

$$a_3^-(a_3^+)^k \Psi_P^{(0)} = \delta(0) k (a_3^+)^{k-1} \Psi_P^{(0)} = \delta(0) \frac{\partial}{\partial a_3^+} (a_3^+)^k \Psi_P^{(0)} \,, \tag{84}$$

и аналогично для a_4.

- Введем оператор $z = a_3^+ + ia_4^+$. Тогда УЛ (81) примет вид

$$0 = (a_3^-(\mathbf{k}) + ia_4^-(\mathbf{k}))\Psi_P = \left(\frac{\partial}{\partial a_3^+} + i \frac{\partial}{\partial a_4^+} \right) \Psi_P = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Psi_P \tag{85}$$

$$\Rightarrow \Psi_P = \Psi_P(z) \Rightarrow \Psi_P^{(n)} = z^n \Psi_P^{(0)} \blacksquare \tag{86}$$

NB: Вообще говоря, выполнения условия (80) еще недостаточно для того чтобы полностью фиксировать физическое подпространство. Необходимо также, чтобы выполнялись условия вида

$$\Psi_P^* \eta (\partial A)^k \Psi_P = 0 \ . \tag{87}$$

Однако на подпространстве, построенном нами, такие условия выполняются автоматически.

- Найдем теперь норму $\Psi_P^{(n)}$ при $n \neq 0$. Имеем,

$$\Psi_P^{(n)*} \eta \Psi_P^{(n)} \overset{(83)}{=} \Psi_P^{(0)*} (a_3^- - i a_4^-)^n \eta \Psi_P^{(n)} \overset{(78)}{=} \Psi_P^{(0)*} \eta (a_3^- + i a_4^-)^n \Psi_P^{(n)} \overset{(81)}{=} 0 \ . \tag{88}$$

NB: Это очень важный результат.

✓ Во-первых, мы видим, что состояния с отрицательной нормой в физическом подпространстве отсутствуют. Это значит что мы можем использовать вероятностную интерпретацию.

✓ Во-вторых, из (88) следует, что вероятность обнаружить продольные и временные фотоны равна 0! Что и требовалось, так как мы знаем, что классическое ЭМП имеет всего две, а не четыре, степени свободы.

- Однако помимо нормы мы еще должны уметь вычислять средние от операторов. Возникает вопрос, не могут ли временные и продольные фотоны давать вклад в средние операторов и тем самым становиться наблюдаемыми? Ответ на этот вопрос отрицательный.

- Именно, пусть $\hat{\mathscr{O}}$ --- калибровочно-инвариантный оператор, тогда можно показать, что

$$\langle \hat{\mathscr{O}} \rangle_P = (\Psi_P^{(n)*} \eta \hat{\mathscr{O}} \Psi_P^{(n)}) = (\Psi_P^{(0)*} \hat{\mathscr{O}} \Psi_P^{(0)}) \,, \tag{89}$$

NB: Т.е. при вычислении средних от калибровочно-инвариантных операторов можно забыть о существовании временных и продольных фотонов и об индефинитной метрики.

- Если же оператор не калибровочно-инвариантный, то результат иной. Напомним, что условие Лоренца не полностью фиксирует калибровку. Остается еще калибровочная свобода

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha \ , \tag{90}$$

$$\partial^2 \alpha = 0 \ . \tag{91}$$

Поэтому калибровочно-неинвариантный оператор будет преобразовываться соответствующим образом при остаточных калибровочных преобразованиях.

✓ Можно показать, что среднее от калибровочно-неинвариантного оператора по произвольному состоянию Ψ_P отличается от среднего по $\Psi_P^{(0)}$ на калибровочное преобразование.

- Таким образом, продольные и временные фотоны не проявляются в средних от операторов.

NB: Далее во всех вычислениях мы будем опускать η и в состояниях не будем учитывать примесь нефизических фотонов. Однако следует всегда помнить об их существовании и важной роли в развитом формализме.

- Подведем итог сказанному.
  - Физическими состояниями ЭМП можно считать состояния, содержащие только поперечные фотоны.
  - При этом ЭМП имеет только две степени свободы --- две проекции спина ± 1 на направление движения.
  - Если же включать в рассмотрение и нефизические (временные и продольные фотоны), то физическое одночастичное состояние имеет вид (здесь мы снова переходим к a_0)

$$(a_0^+(\mathbf{k}) - a_3^+(\mathbf{k}))\Psi_P^{(0)} \ , \qquad (92)$$

при этом $(a_0^+)^* = -a_0^-$, $A_0^*(x) = -A_0(x)$, и скалярное произведение в пространстве состояний определено с индефинитной метрикой.

  - Коммутационные соотношения в координатном пространстве выглядят следующим образом

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = ig_{\mu\nu}D_0(x-y) \ . \qquad (93)$$

Инверсия координат и обращение времени

- Запишем несобственные преобразования из полной г. Пуанкаре

$$x'^{\mu} = \mathscr{P}^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \equiv g^{\mu\nu} x^{\nu} = (x^0, -\vec{x}) \ \text{(отражение координат)}$$
$$x'^{\mu} = \mathscr{T}^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \equiv -g^{\mu\nu} x^{\nu} = (-x^0, \vec{x}) \ \text{(отражение времени).}$$

NB: Считалось, что теория квантованных полей должна быть инвариантна относительно преобразований четности и отражения времени, т.е. относительно полной группы Пуанкаре.

NB: В 1956 году выяснилось, что слабые взаимодействия нарушают четность, т.е. P-*инвариантность*.

NB: В 1964 году появились косвенные данные, что обращение времени, т.е. T-*инвариантность*, также нарушается в слабых взаимодействиях. В настоящее время ведутся эксперименты по прямому обнаружению нарушения T-инвариантности.

NB: Электромагнитные, сильные и гравитационные взаимодействия в настоящее время считаются T и P-инвариантными. Поэтому мы также будем считать, что квантовая теория должна быть T и P инвариантной, помня, однако, что это лишь аппроксимация.

- Как преобразуются вектора состояний при P и T преобразованиях?
- Преобразования P и T -- симметрии $\Rightarrow$

$$\Phi \mapsto \Phi' = U(\Lambda, a)\Phi \quad \Lambda = (\Omega, \mathscr{P}, \mathscr{T}) \tag{94}$$

- Обозначим

$$\mathsf{P} \equiv U(\mathscr{P}, 0) \quad \mathsf{T} \equiv U(\mathscr{T}, 0)\ . \tag{95}$$

- Поскольку эти операторы принадлежат представлению, то для них выполняется общий закон умножения операторов

$$U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)\ . \tag{96}$$

- Используя этот закон, мы можем написать

$$\mathsf{P}U(\Lambda, a)\mathsf{P}^{-1} = U(\mathscr{P}\Lambda\mathscr{P}^{-1}, \mathscr{P}a)\ , \tag{97}$$

$$\mathsf{T}U(\Lambda, a)\mathsf{T}^{-1} = U(\mathscr{T}\Lambda\mathscr{T}^{-1}, \mathscr{T}a)\ . \tag{98}$$

- Пусть

$$U = 1 + ia_\mu P^\mu + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} \overset{(97),(98)}{\Rightarrow} \quad (99)$$

$$\mathsf{P}iJ^{\rho\sigma}\mathsf{P}^{-1} = i\mathscr{P}_\mu^\rho \mathscr{P}_\nu^\sigma J^{\mu\nu}\,, \quad (100)$$

$$\mathsf{P}iP^\rho\mathsf{P}^{-1} = i\mathscr{P}_\mu^\rho P^\mu\,, \quad (101)$$

$$\mathsf{T}iJ^{\rho\sigma}\mathsf{T}^{-1} = i\mathscr{T}_\mu^\rho \mathscr{T}_\nu^\sigma J^{\mu\nu}\,,$$

$$\mathsf{T}iP^\rho\mathsf{T}^{-1} = i\mathscr{T}_\mu^\rho P^\mu\,. \quad (102)$$

NB: На i сократить нельзя!:

✓ Рассмотрим сперва уравнение (101) при $\rho = 0$. Имеем,

$$\mathsf{P}iP^0\mathsf{P}^{-1} = iP^0\,. \quad (103)$$

✓ Сократим на $i \Leftrightarrow$ P -- линейный оператор $\Rightarrow$

$$\mathsf{P}P^0\mathsf{P}^{-1} = P^0 \quad \Rightarrow \quad (104)$$

если состояние имеет энергию p^0, то состояние, полученное в результате P-преобразования также будет иметь энергию p^0.

✓ Никакого противоречия здесь нет и мы можем считать P линейным унитарным оператором (унитарность необходима для сохранения нормы состояния).

- Рассмотрим теперь уравнение (102) при $\rho = 0$. Имеем,

$$\mathsf{T} i P^0 \mathsf{T}^{-1} = -i P^0 \, . \tag{105}$$

- Если считать T линейным, то мы получим

$$\mathsf{T} P^0 \mathsf{T}^{-1} = -P^0 \quad \Rightarrow \tag{106}$$

T-преобразованное состояние имеет отрицательную энергию. Но таких состояний нет в гильбертовом пространстве физических состояний.

- С другой стороны, для сохранения нормы мы по-прежнему должны считать T унитарным: $\mathsf{T}^\dagger \mathsf{T} = 1$.

- Из этого затруднения есть выход: для этого достаточно считать, что Т **антикоммутирует** с i, но **коммутирует** с действительными числами. Таким образом, для любого комплексного числа c имеем

$$c\mathsf{T} = \mathsf{T}c^* \quad \Leftrightarrow \tag{107}$$

оператор Т сопрягает комплексные числа. Такой оператор **не** является линейным. Он называется *антилинейным* или *антиунитарным*.

NB: Несмотря на последнее название, надо помнить, что по-прежнему $\mathsf{T}^\dagger\mathsf{T} = 1$, т.е. в этом смысле оператор T-сопряжения унитарен и сохраняет норму.

- Т -- антиунитарый $\Rightarrow \mathsf{T}P^0\mathsf{T}^{-1} = +P^0$ --- энергия у T-сопряженного состояния положительна.

- Рассмотрим теперь законы преобразования оставшихся генераторов группы Лоренца (100) --- (102)

$$\mathsf{P}J^{ij}\mathsf{P}^{-1} = +J^{ij}\,, \tag{108}$$

$$\mathsf{P}J^{i0}\mathsf{P}^{-1} = -J^{i0}\,,$$

$$\mathsf{P}P^{i}\mathsf{P}^{-1} = -P^{i}\,, \tag{109}$$

$$\mathsf{T}J^{ij}\mathsf{T}^{-1} = -J^{ij}\,, \tag{110}$$

$$\mathsf{T}J^{i0}\mathsf{T}^{-1} = +J^{i0}\,,$$

$$\mathsf{T}P^{i}\mathsf{T}^{-1} = -P^{i}\,. \tag{111}$$

- Из этих формул следует, что как P, так и T меняют направление импульса.

- P не меняет направление трехмерного вектора момента импульса

NB: Поскольку антисимметричный тензор ε^{ijk} является псевдотензором, т.е. не меняет знак при пространственных отражениях, то трехмерный оператор момента импульса $J^{i} = -1/2\varepsilon^{ijk}J^{jk}$ с учетом (100) не меняет знак.

- T -- меняет $\vec{p} \to -\vec{p}$.

NB: Эти результаты находятся в полном согласии с классическим результатом.

✓ Действительно, момент импульса равен $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$, при этом $\mathbf{p} = md\mathbf{r}/dt$. Поэтому, так как при пространственных отражениях $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$, то импульс меняет знак (см. (109)), а момент импульса -- нет (108).

✓ При отражении времени $\mathbf{r} \to \mathbf{r}$, поэтому импульс также меняет знак (см. (111)), и момент импульса меняет знак (см. (110)).

Все же как преобразуются вектора состояний при P и T преобразованиях?

- Пусть

$$|\,\mathbf{k},\sigma\rangle = a_\sigma^+(\mathbf{k})|0\rangle \ , \tag{112}$$

$$P_\mu|\,\mathbf{k},\sigma\rangle = k_\mu|\,\mathbf{k},\sigma\rangle, \ \ S_3|\,\mathbf{k},\sigma\rangle = \sigma|\,\mathbf{k},\sigma\rangle \ , \tag{113}$$

где S_3 --- оператор третьей проекции спина.

- Подействуем на это состояние оператором P, а затем операторами P_μ и S_3. Имеем

$$P_\mu(\mathsf{P}|\,\mathbf{k},\sigma\rangle) \stackrel{(109)}{=} \mathscr{P}_\mu^\nu k_\nu \mathsf{P}|\,\mathbf{k},\sigma\rangle \ , \tag{114}$$

$$S_3(\mathsf{P}|\,\mathbf{k},\sigma\rangle) \stackrel{(108)}{=} \sigma\mathsf{P}|\,\mathbf{k},\sigma\rangle \ . \tag{115}$$

- Из первого уравнения следует (мы пренебрегаем возможностью вырождения), что $\mathsf{P}|\,\mathbf{k},\sigma\rangle$ --- собственный вектор оператора импульса с собственным значением $(k^0,-\mathbf{k})$,
- Из второго уравнения следует, что этот же вектор является собственным вектором S_3 с собственным значением σ.

- Таким образом, вектор $\mathsf{P}|\,\mathbf{k},\sigma\rangle$ лишь множителем отличается от $|-\mathbf{k},\sigma\rangle$. Этот множитель по модулю должен быть равен единице (в силу унитарности P) и в принципе может зависеть от σ:

$$\mathsf{P}|\,\mathbf{k},\sigma\rangle = \eta_\sigma|-\mathbf{k},\sigma\rangle\ ,\quad |\eta_\sigma| = 1\ . \qquad (116)$$

- Зависит ли η_σ от σ?:

✓ Подействуем операторами $S_1 \pm iS_2$, где $S_i = -1/2\varepsilon_{ijk}S^{jk}$ --- трехмерный вектор спина, на состояние.

✓ Согласно известной формуле квантовой механики, имеем

$$(S_1 \pm iS_2)|\,\mathbf{k},\sigma\rangle = \sqrt{(s\mp\sigma)(s\pm\sigma+1)}|\,\mathbf{k},\sigma\pm 1\rangle\ , \qquad (117)$$

где s --- спин частицы.

✓ Действуя теперь на обе части формулы (117) оператором четности и учитывая, что P коммутирует с моментом (и спином) (108), получаем

$$\eta_\sigma = \eta_{\sigma\pm 1}\ , \qquad (118)$$

✓ Это доказывает, что η не зависит от σ.

- Итак,

$$\mathsf{P}|\mathbf{k},\sigma\rangle = \eta|-\mathbf{k},\sigma\rangle \ . \tag{119}$$

- Фаза η называется *внутренней четностью частицы*. Ее значение можно фиксировать лишь вводя взаимодействие с другими частицами.

NB: Для всех известных на сегодняшний день частиц эта фаза может быть выбрана равной ± 1. Исключение составляет майорановское нейтрино (если оно существует). Для него фаза должна быть равна $\pm i$.

NB: Интересно отметить, что если частица безмассовая и теория P-инвариантна, то, поскольку P изменяет направление импульса и не изменяет направления спина, т.е. изменяет спиральность, то с необходимостью должна существовать точно такая же частица, но с противоположной спиральностью. Таким образом, теория с одним только левым нейтрино не является P-инвариантной.

- Аналогично для T:

$$\mathsf{T}|\,\mathbf{k},\sigma\rangle = \xi(-1)^{j-\sigma}|-\mathbf{k},-\sigma\rangle\ , \tag{120}$$

где ξ --- фаза, не зависящая от σ.

NB: В отличие от η, фаза ξ не имеет физического смысла: Переопределим

$$|\,\mathbf{k},\sigma\rangle' = \sqrt{\xi}|\,\mathbf{k},\sigma\rangle\ . \tag{121}$$

Тогда имеем

$$\mathsf{T}|\,\mathbf{k},\sigma\rangle' = \sqrt{\xi^*}\mathsf{T}|\,\mathbf{k},\sigma\rangle = \sqrt{\xi^*}\xi(-1)^{j-\sigma}|-\mathbf{k},-\sigma\rangle = (-1)^{j-\sigma}|-\mathbf{k},-\sigma\rangle'\ . \tag{122}$$

CPT-теорема

- ✓ В слабых взаимодействиях участвует только левое нейтрино, то P-инвариантность сильно нарушается этими взаимодействиями.
- ✓ Инвариантность относительно P-преобразований и одновременной замены частиц на античастицы, т.е. зарядового сопряжения C, является более лучшей, хотя и тоже нарушенной, симметрией слабого взаимодействия.
- ✓ Возникает вопрос, является ли симметрией T преобразования?
- Экспериментально на этот вопрос ответить достаточно сложно. Однако существует теорема, утверждающая, что любая лоренц-инвариантная унитарная квантовая теория поля должна быть CPT-инвариантной. Эта теорема называется *CPT-теоремой*.

NB: Следствием из этой теоремы является то, что если теория слабых взаимодействий удовлетворяет ее требованиям (а современные экспериментальные данные указывают именно на это), то, поскольку CP нарушается слабыми взаимодействиями, то и T-инвариантность также должна нарушаться.

NB: Заметим, что CPT теорема имеет отношение к взаимодействующим полям Тем не менее, выясним здесь вопрос о том, что означает инвариантность относительно CPT преобразований.

- Как мы увидим, основной интерес с точки зрения экспериментальной физики представляют собой вероятности переходов состояний, содержащих n частиц, в состояния, содержащие m частиц.
- CPT-теорема утверждает, что если мы
  - ✓ рассмотрим обратные процессы, т.е. $m \to n$,
  - ✓ заменим все частицы на античастицы,
  - ✓ изменим направления спинов (но не импульсов, так как PT-преобразо
    сохраняет направление импульсов),

  то вероятность (матричный элемент) такого процесса будет совпадать с вероятностью процесса $n \to m$.

Итог

- Для любого поля $\mathscr{L}(u, \partial u)$ $+$ симметрии $+$ доп. требования
- Уравнения движения

$$\hat{\mathscr{O}}(\partial, m)u(x) = 0 \tag{123}$$

- Сдвиговая симметрия $x \to x + a \Rightarrow$ базис в функциональном пространстве e^{ikx} -- плоские волны
- Следствием (123) должно быть $k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \Rightarrow$

$$u_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4k\delta(k^2 - m^2)\mathrm{e}^{ikx} u_\alpha(k) \tag{124}$$

- Группа Лоренца двусвязна $\Rightarrow$ можно проинтегрировать (124) по k_0

$$u(x) = u^+(x) + u^-(x) \tag{125}$$

$$u^{\pm}_{\alpha}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k^0}} \mathrm{e}^{\pm ikx} a^{\pm}_{a}(\mathbf{k}) u^{\pm,a}_{\alpha}(\mathbf{k}) \Big|_{k^0=\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} \tag{126}$$

где

✓ $u^{\pm,a}_{\alpha}(\vec{k})$ -- базис в пространстве решений (123) в импульсном пространстве. Его удобно искать в виде собственных векторов оператора проекции спина на направление движения (поляризации) $\vec{S}\vec{k}/|\vec{k}|$, который сохраняется $\Rightarrow$ коммутирует с $\mathscr{O}(k,m)$.

✓ $a^{\pm}_{a}(\vec{k})$ -- числовые коэффициенты (могут быть грассмановыми), которые становятся операторами после квантования.

- Квантование: Симметрии $\Phi' = U(\Lambda, a)\Phi$ (аналогично для других симметрий)

$$\boxed{U(\Omega, a)u(x)U^{-1}(\Omega, a) = \Lambda^{-1}u(Lx)} \Rightarrow \tag{127}$$

- Квантовые уравнения:

✓

$$i\frac{\partial u}{\partial x^\mu} = [u(x), P_\mu] \ . \tag{128}$$

✓

$$i\left(x_\nu \partial_\mu u_a - x_\mu \partial_\nu u_a - \Sigma^b_{a\mu\nu} u_b\right) = [u_a, J_{\mu\nu}]. \tag{129}$$

✓

$$u(x) = [u(x), Q] \ , \quad -u^*(x) = [u^*(x), Q] \ . \tag{130}$$

$\ldots$

- Постулат квантования: P_μ, $M_{\mu\nu}$, $Q, \ldots$ -- генераторы преобразований симметрии даются теоремой Нетер
- Из (128) $\Rightarrow a^+$, a^- -- операторы рождения и уничтожения
- Фоковский базис

$$|\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n\rangle = a^+_{\mathbf{k_1}} \ldots a^+_{\mathbf{k_n}} |0\rangle \tag{131}$$

- Из (128) (например) можно получить коммутаторы и Теорему Паули

$$[a_a^-(\mathbf{k}), \overset{*}{a}{}_b^+(\mathbf{q})] = G_{ab}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q})\ ,\ [\overset{*}{a}{}_a^-(\mathbf{k}), a_b^+(\mathbf{q})] = G_{ab}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \quad \text{-- целый спин} \tag{132}$$

$$\{a_a^-(\mathbf{k}), \overset{*}{a}{}_b^+(\mathbf{q})\} = G_{ab}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q})\ ,\ \{\overset{*}{a}{}_a^-(\mathbf{k}), a_b^+(\mathbf{q})\} = G_{ab}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \quad \text{-- полуцелый спин} \tag{133}$$

- Динамические инварианты $\Leftrightarrow$ наблюдаемые в импульсном пространстве имеют вид квадратичных форм по a, например,

$$P^\mu \sim \int d^3k k^\mu \overset{*}{a}{}_a^+(\mathbf{k}) a_a^-(\mathbf{k}) + \dots \tag{134}$$

- $\overset{*}{a}{}_a^+(\mathbf{k}) a_a^-(\mathbf{k})$ (нет суммирования по a) можно интепретировать как плотность числа частиц/античастиц с импульсом $\mathbf{k}$ и поляризацией (и/или другими квантовыми числами) с номером a.