М.В. Либанов

КТП V. Релятивистский метод квантования

Содержание

Релятивистский (операторный) метод квантования

- "Классические" поля становятся операторами $u(x) \Rightarrow$
- Матричные элементы, в частности, средние, этих операторов становятся наблюдаемыми или связаны с ними $\Rightarrow$
- Матричные элементы должны образовывать представления группы Лоренца $\Rightarrow$
- Возникают дополнительные условия -- какие?
- Рассмотрим среднее значения оператора поля $u(x)$ в некотором состоянии Φ,

$$\bar{u}(x) = \Phi^* u(x) \Phi \ . \tag{1}$$

- Для наблюдателя в другой системе отсчета, связанной с первой преобразованиями Лоренца

$$x \mapsto x' = L(\Omega, a)x, \quad x^\mu = \Omega^\mu_{\cdot\nu} x^\nu + a^\mu, \quad u(x) \mapsto u'(x') = \Lambda_L u(x), \tag{2}$$

амплитуда (1) равна

$$\bar{u}'(x') = \Phi'^* u(x')\Phi' \ , \tag{3}$$

- Должно выполняться

$$\bar{u}'(x') = \Lambda_L \bar{u}(x) \quad \Rightarrow \quad \Phi'^* u(x')\Phi' = \Lambda_L \Phi^* u(x)\Phi \ . \tag{4}$$

- Принцип суперпозиции $\Rightarrow$ преобразование Φ линейно:

$$\Phi \mapsto \Phi' = U(\Omega, a)\Phi \ . \tag{5}$$

U -- некоторое (бесконечномерное) представление группы Пуанкаре

- Норма состояния должна сохраняться $\Rightarrow$ унитарность

$$U^\dagger(\Omega, a)U(\Omega, a) = 1 \ . \tag{6}$$

- Из (4) и (6) следуют искомые условия

$$\boxed{U(\Omega, a)u(x)U^{-1}(\Omega, a) = \Lambda^{-1}u(Lx)} \qquad (7)$$

NB: Уравнение (4) можно также переписать в следующей форме

$$\Phi'^{*}u(x)\Phi' = \Phi^{*}u'(x)\Phi\ , \qquad (8)$$

NB: (4) и (8) справедливы не только для $u(x)$, но и для любого оператора, в том числе операторов $P^{\mu}, M^{\mu\nu}, Q\ldots$

NB: (8) означает, что для вычисления среднего от оператора в точке x в новой системе координат необходимо вычислить среднее от преобразованного оператора, взятого в точке x, по непреобразованной амплитуде состояния, либо вычислить среднее от непреобразованного оператора по преобразованному вектору состояния. (Что напоминает?)

- Частный случай -- трансляции $u'(x+a) = u(x) \Rightarrow$

$$U(a) = \exp(ia^{\mu}P_{\mu}) \quad \Leftarrow \text{представление} \tag{9}$$

- $U^{\dagger}U = 1 \Rightarrow P_{\mu} = P_{\mu}^{\dagger}$
- $\Lambda(1,a) = 1 \Rightarrow$ (7)

$$e^{ia^{\mu}P_{\mu}}u(x)e^{-ia^{\mu}P_{\mu}} = u(x+a)\ . \tag{10}$$

Раскладываем по a

$$\cancel{u}(x) + ia_{\mu}(P^{\mu}u(x) - u(x)P^{\mu}) + \mathcal{O}(a^2) = \cancel{u}(x) + a_{\mu}\partial^{\mu}u(x) + \mathcal{O}(a^2) \quad \Rightarrow \tag{11}$$

$$\boxed{i\frac{\partial u}{\partial x^{\mu}} = [u(x), P_{\mu}]} \tag{12}$$

- $\mu = 0 \Rightarrow$

$i\dfrac{\partial u(x)}{\partial t} = [u, P_0]$ -- похоже на ур. Гейзенберга $\Rightarrow +$принцип соответствия $\Rightarrow$

(13)

$$P_0 = H = E \quad \Rightarrow \quad P_{\mu}\text{-- вектор импульса} \tag{14}$$

NB: $u(x)$ -- оператор поля в представлении Гейзенберга

- Можно написать в представлении Шредингера: (10)

$$\mathrm{e}^{ix^\mu P_\mu} u(0) \mathrm{e}^{-ix^\mu P_\mu} = u(x) \;\Rightarrow \tag{15}$$

$$u_S(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{-i\mathbf{x}\mathbf{P}} u(0) \mathrm{e}^{i\mathbf{x}\mathbf{P}} \;\; = u(x)\big|_{x^0=0} \;\Rightarrow \tag{16}$$

$$u_H(x) = \mathrm{e}^{iHt} u_S(\mathbf{x}) \mathrm{e}^{-iHt} \; . \tag{17}$$

-- связь между представлением Шредингера и Гейзенберга

- Для инфинитезимальных вращений $x'_\mu = x_\mu + \omega_\mu^{\cdot\nu} x_\nu$ запишем U в виде

$$U(\omega_{\mu\nu}) = 1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\ , \tag{18}$$

где $J_{\mu\nu}$ --- эрмитов оператор, который следует отождествить с тензором момента.

- Подставляя это выражение в (7), получаем следующее уравнение для оператора $J_{\mu\nu}$:

$$u(x) + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}[J_{\mu\nu}, u(x)] = \Lambda^{-1}(\omega^{\mu\nu})u(x+\omega x)\ . \tag{19}$$

- Учитывая, что

$$\Lambda_a^b(\omega) = \delta_a^b + \frac{1}{2}\Sigma^b_{a\rho\sigma}\omega^{\rho\sigma}\ , \tag{20}$$

получаем

$$i\left(x_\nu\partial_\mu u_a - x_\mu\partial_\nu u_a - \Sigma^b_{a\mu\nu}u_b\right) = [u_a, J_{\mu\nu}]. \tag{21}$$

- Помимо требования инвариантности теории относительно преобразований Лоренца, можно также требовать инвариантность теории относительно других преобразований. Например, если потребовать инвариантности теории относительно фазовых вращений, то можно получить следующие уравнения

$$u(x) = [u(x), Q] \ , \quad -u^*(x) = [u^*(x), Q] \ . \tag{22}$$

NB: Естественно интерпретировать оператор Q, фигурирующий в (22), как оператор заряда.

Итог

Постулат квантования: *Операторы четырех-импульса P, тензора момента M, заряда Q и т.п., являющиеся генераторами бесконечно малых преобразований векторов состояний, выражаются теми же соотношениями, что и в классической теории, с установлением при этом надлежащего порядка операторного умножения.*

Физический смысл $\mathbf{u}^{\pm}$

- $u(x)$ -- оператор $\Rightarrow u^{\pm}(\mathbf{k})$ -- оператор

$$u(x) = u^{+}(x) + u^{-}(x)\ , \qquad (23)$$

$$u^{\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} \mathrm{e}^{\pm ikx} u^{\pm}(\mathbf{k}) \Big|_{k^0=\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}\ . \qquad (24)$$

- Релятивистское ур. Гейзенберга (12)

$$[u^{\pm}(x), P^{\mu}] = \mp \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} k^{\mu} \mathrm{e}^{\pm ikx} u^{\pm}(\mathbf{k}) \Big|_{k^0=\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} \Rightarrow \qquad (25)$$

$$[u^{\pm}(\mathbf{k}), P^{\mu}] = \mp k^{\mu} u^{\pm}(\mathbf{k}), \quad k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \qquad (26)$$

- Φ_p -- состояние с определенным импульсом:

$$P^{\mu}\Phi_p = p^{\mu}\Phi_p \qquad (27)$$

- Действуем (26) на Φ_p:

$$u^{\pm}(\mathbf{k})P^{\mu}\Phi_p - P^{\mu}u^{\pm}(\mathbf{k})\Phi_p = u^{\pm}(\mathbf{k})p^{\mu}\Phi_p - P^{\mu}u^{\pm}(\mathbf{k})\Phi_p = \mp k^{\mu}u^{\pm}(\mathbf{k}) \quad \Rightarrow \qquad (28)$$

$$P^{\mu}\left\{u^{\pm}(\mathbf{k})\Phi_p\right\} = (p^{\mu} \pm k^{\mu})\left\{u^{\pm}(\mathbf{k})\Phi_p\right\} \quad \Rightarrow \qquad (29)$$

$$u^{\pm}(\mathbf{k})\Phi_p = \Phi_{p\pm k}, \quad k^0 = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \qquad (30)$$

-- оператор $u^{+}(\mathbf{k})$ добавляет в систему энергию k^0 и импульс $\vec{k}$. Т.к. $k^2 = m^2$, то можно считать, что $u^{+}(\mathbf{k})$ рождает частицу с 4-импульсом k^{μ} и массой m. Аналогично $u^{-}(\mathbf{k})$ уничтожает такую частицу.

NB: Этот результат не зависит ни от типа поля, ни от коммутационных соотношений между полями.

- Для заряда

$$Q\Phi_q = q\Phi_q \; , \tag{31}$$

получаем из (22)

$$Qu\Phi_q = (q-1)u\Phi_q \; , \quad Qu^*\Phi_q = (q+1)u^*\Phi_q \; . \tag{32}$$

Видно, что оператор u, так же как и его положительно и отрицательно частотные части, понижает заряд системы на единицу, а оператор u^* --- повышает.

- Другими словами:

✓ u^+ рождает античастицу : $(k^0\uparrow, q\downarrow)$

✓ $\overset{*}{u}{}^+$ рождает частицу: $(k^0\uparrow, q\uparrow)$

✓ u^- уничтожает частицу : $(k^0\downarrow, q\downarrow)$

✓ $\overset{*}{u}{}^-$ уничтожает античастицу: $(k^0\downarrow, q\uparrow)$

NB: Нет! состояний с отрицательной энергией

- Аналогично для момента: нужно разложить по с.ф. момента и поляризации

Представление Фока

- $u_1, u_2, \ldots u_m$ -- поля, включая сопряженные.
- *Вакуум* -- состояние в котором нет частиц $\Rightarrow$ энергия минимальна, а 3-импульс равен 0 $\Rightarrow$

$$u_i^-(x)\Phi_0 \equiv u_i^-(x)|0\rangle = 0\ , \tag{33}$$

- В импульсном пространстве

$$u_i^-(k_i)|0\rangle = 0 \ \text{ при } \ k_i^2 = m_i^2\ . \tag{34}$$

Сопрягая это уравнение, получаем

$$\langle 0|\overset{*}{u}{}_i^+(k_i) = 0 \ \text{ при } \ k_i^2 = m_i^2\ . \tag{35}$$

Нормировка

$$\langle 0|0\rangle = 1\ , \tag{36}$$

Уравнения (34), (35) (36) -- математическое определение вакуума.

- Амплитуда состояния, содержащего n частиц $s_1, \ldots, s_n$ сортов:

$$\Phi \equiv |s_1, \ldots, s_n\rangle = \int F_n(k_1 \ldots k_n) \prod_{i=1}^{n} \left\{ \delta(k_i^2 - m_{s_i}^2) u_{s_i}^{+}(k_i) dk_i \right\} |0\rangle \;, \qquad (37)$$

  где F_n --- функция, характеризующая распределение частиц по отношению к непрерывным параметрам состояний таким как энергия и импульс, а индексы $s_1, \ldots, s_n$ соответствуют дискретным характеристикам состояний такими как заряд, спин и т.п..

- Общая амплитуда для произвольного состояния является суперпозицией таких n-частичных состояний

- Проинтегрируем (37) по k_i^0

$$\Phi = \int F_n(\mathbf{k_1} \dots \mathbf{k_n}) \prod_{i=1}^{n} \left\{ u^+_{s_i}(\mathbf{k}_i) d\mathbf{k}_i \right\} |0\rangle \ , \tag{38}$$

где, как обычно,

$$u^+(\mathbf{k}) = \frac{u^+(k)}{\sqrt{2k_0}} \quad \left(k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \right) \ , \tag{39}$$

и мы ввели обозначение

$$F_n(\mathbf{k_1}, \dots, \mathbf{k}_n) = \frac{F_n(k_1, \dots, k_n)}{\prod\limits_{1 \le i \le n} \sqrt{2k_i^0}} \quad \left(k_i^0 = \sqrt{\mathbf{k}_i^2 + m_i^2} \right) \ . \tag{40}$$

- Перейдем к координатному пространству

$$F_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \prod \left(\sqrt{2k_i^0} \right) = \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}} \int d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_n \mathrm{e}^{-i \sum\limits_j \mathbf{k}_j \mathbf{x}_j} \phi_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \ , \tag{41}$$

$$\frac{u^+(\mathbf{k})}{\sqrt{2k^0}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{x} \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} u^+(0, \mathbf{x}) \ , \quad u^+(0, \mathbf{x}) = u^+(x)\Big|_{x^0=0} \ . \tag{42}$$

- Тогда (38) примет вид

$$\Phi = \int \phi_n(\mathbf{x_1} \ldots \mathbf{x_n}) \prod_{i=1}^{n} \left\{ u_{s_i}^{+}(0, \mathbf{x}_i) d\mathbf{x_i} \right\} |0\rangle \ . \qquad (43)$$

NB: Функции $\phi_n(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ имеют смысл обычных волновых функций системы n частиц в координатном пространстве. Состояние, содержащее точно n частиц, полностью характеризуется одной функцией ϕ_n.

NB: Для определение произвольной амплитуды необходимо задать всю цепочку функций ϕ_n.

NB: Представление амплитуд в виде (43) или (38) называется *фоковским представлением* амплитуд.

NB: Временная зависимость в (43) исчезла. Это вполне естественно, так как для невзаимодействующих полей амплитуда состояния должна быть постоянной.

Перестановочные соотношения

- (Анти)скобки Пуассона не зависят от обобщенных координат и импульсов + принцип соответствия $\Rightarrow$ в квантовом случае

$$[u_\alpha(x), u_\beta(y)] \equiv \{u_\alpha(x), u_\beta(y)\}_- \equiv u_\alpha(x)u_\beta(y) - u_\beta(y)u_\alpha(x) = \Delta_{\alpha\beta}(x, y) \ , \quad (44)$$

-- соотношение Бозе-Эйнштейна либо

$$\{u_\alpha(x), u_\beta(y)\} \equiv \{u_\alpha(x), u_\beta(y)\}_+ \equiv u_\alpha(x)u_\beta(y) + u_\beta(y)u_\alpha(x) = \Delta_{\alpha\beta}(x, y) \ . \quad (45)$$

-- соотношение Ферми-Дирака

NB: $\Delta_{\alpha\beta}(x, y)$ -- обычные (не операторы) C-числовые функции

- Покажем, что $\Delta(x, y) = \Delta(x - y)$ -- следствие трансляционной инвариантности $\Rightarrow$ используем собственные состояния импульса.
- Перейдем в импульсное пространство
- Докажем, что C-числовой анти- либо коммутатор двух операторов рождения (уничтожения) должен быть равен нулю, т.е. операторы рожде-

ния (уничтожения) (анти)коммутируют:

$$\{u_\alpha^\pm(\mathbf{k}), u_\beta^\pm(\mathbf{q})\}_\pm = 0 \,. \tag{46}$$

- Пусть $|p\rangle$ -- с.с. импульса:

$$P^\mu|p\rangle = p^\mu|p\rangle \tag{47}$$

- Подействуем на него $u_\alpha^+(\mathbf{k})$ и $u_\beta^+(\mathbf{q})$ в различной последовательности:

$$|p_1\rangle = u_\alpha^+(\mathbf{k})u_\beta^+(\mathbf{q})|p\rangle \,, \quad |p_2\rangle = u_\beta^+(\mathbf{q})u_\alpha^+(\mathbf{k})|p\rangle \,, \tag{48}$$

- В соответствии с (29) новые состояния удовлетворяют уравнению

$$P_\mu|p_{1,2}\rangle = (p_\mu + k_\mu + q_\mu)|p_{1,2}\rangle \,, \tag{49}$$

-- т.е. имеют одинаковый импульс $p^\mu + k^\mu + q^\mu$

- Сложим и вычтем (48)

$$P_\mu(|p_1\rangle \pm |p_2\rangle) = P_\mu\{u_\alpha^+(\mathbf{k}), u_\beta^+(\mathbf{q})\}_\pm|p\rangle = (p_\mu + k_\mu + q_\mu)\{u_\alpha^+(\mathbf{k}), u_\beta^+(\mathbf{q})\}_\pm|p\rangle \,. \tag{50}$$

- Если $\{u_\alpha^+(\mathbf{k}), u_\beta^+(\mathbf{q})\} = C$-число $\neq 0$, то сокращаем и получаем

$$P_\mu|p\rangle = (p_\mu + k_\mu + q_\mu)|p\rangle \ , \tag{51}$$

-- противоречит (47), если $k_\mu + q_\mu \neq 0$. Вопрос: может ли $k + q = 0$? $\Rightarrow$

- Либо коммутатор, либо антикоммутатор (тот, который является C-числовым) $\{u_\alpha^+(\mathbf{k}), u_\beta^+(\mathbf{q})\} = 0$
- Аналогично $\{u_\alpha^-(\mathbf{k}), u_\beta^-(\mathbf{q})\} = 0$ ■

- Аналогично, подействовав $u^- u^+$ в разном порядке, получим

$$P_\mu|p\rangle = (p_\mu + k_\mu - q_\mu)|p\rangle \ , \tag{52}$$

что не противоречит (47), если $k = q \Rightarrow$

$$\{u_\alpha^\mp(\mathbf{k}), u_\beta^\pm(\mathbf{q})\} \sim \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \quad \Rightarrow \tag{53}$$

$$\{u_\alpha^+(x), u_\beta^-(y)\}_\pm = \Delta^+_{\alpha\beta}(x-y) ,$$
$$\{u_\alpha^-(x), u_\beta^+(y)\}_\pm = \Delta^-_{\alpha\beta}(x-y) ,$$
$$\{u_\alpha(x), u_\beta(y)\}_\pm = \Delta^-_{\alpha\beta}(x-y) + \Delta^+_{\alpha\beta}(x-y) = \Delta_{\alpha\beta}(x-y) , \qquad (54)$$
$$\{u(x), \overset{*}{u}(y)\}_\pm = \Delta^-(x-y) + \Delta^+(x-y) = \Delta(x-y) \text{-- заряженное поле} .$$

- Найдем Δ. Воспользуемся

$$i\partial_\mu u = [u(x), P_\mu] . \qquad (55)$$

- Постулат квантования $\Rightarrow$

$$P^\mu = \sum_{a,b} G^{ab} \int d\mathbf{k} k^\mu (\overset{*}{a}{}_a^+(\mathbf{k}) a_b^-(\mathbf{k}) \pm \overset{*}{a}{}_a^-(\mathbf{k}) a_b^+(\mathbf{k})) , \qquad (56)$$

NB: G^{ab} -- квадратичная форма, с которой идет суммирование по “поляризациям”. Например, для ЭМП $G^{ab} = -g^{ab}$, для спиноров $G^{ab} = \delta^{ab}$.

NB: “$+$” -- тензорные поля; “$-$” -- спинорное поле

- $$u_\alpha^\pm(\mathbf{k}) = \upsilon^\pm_{\alpha b}(\mathbf{k}) a_b^\pm(\mathbf{k}) , \qquad (57)$$

$$\left(a^\pm(\mathbf{k})\right)^* = \overset{*}{a}{}^\mp(\mathbf{k}); \quad \left(\upsilon^\pm(\mathbf{k})\right)^* = \overset{*}{\upsilon}{}^\mp(\mathbf{k}) \qquad (58)$$

- Пригодится (следствие (53), (57))

$$[a^+(\mathbf{k}), \overset{*}{a}{}^+(\mathbf{q})a^-(\mathbf{q})] = [a^-(\mathbf{k}), \overset{*}{a}{}^-(\mathbf{q})a^+(\mathbf{q})] = 0 \,,$$
$$[a^+(\mathbf{k}), \overset{*}{a}{}^-(\mathbf{q})a^+(\mathbf{q})] = \{a^+(\mathbf{k}), \overset{*}{a}{}^-(\mathbf{q})\}_\pm a^+(\mathbf{q}) \,,$$
$$[a^-(\mathbf{k}), \overset{*}{a}{}^+(\mathbf{q})a^-(\mathbf{q})] = \{a^-(\mathbf{k}), \overset{*}{a}{}^+(\mathbf{q})\}_\pm a^-(\mathbf{q}) \,, \tag{59}$$

- Подставляем (56), (57), (59) в (55)

$$k^\mu a_a^-(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{q}\, q^\mu \{a_a^-(\mathbf{k}), \overset{*}{a}{}_b^+(\mathbf{q})\}_\pm a_c^-(\mathbf{q}) G^{bc} \,, \tag{60}$$

$$-k^\mu a_a^+(\mathbf{k}) = \pm \int d\mathbf{q}\, q^\mu \{a_a^+(\mathbf{k}), \overset{*}{a}{}_b^-(\mathbf{q})\}_\pm a_c^+(\mathbf{q}) G^{bc} \,, \quad \Rightarrow \tag{61}$$

- С учетом $G^{ab}G_{bc} = \delta^a_c$

$$\{a_a^-(\mathbf{k}), \overset{*}{a}{}_b^+(\mathbf{q})\}_\pm = G_{ab}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \,, \tag{62}$$

$$\{a_a^+(\mathbf{k}), \overset{*}{a}{}_b^-(\mathbf{q})\}_\pm = \mp G_{ab}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \,. \tag{63}$$

NB: Важно: зеленые $\pm$ не скоррелированны с красными $\pm$

- Определим соответствие зеленых и красных знаков. Потребуем симметрии (62), (63) относительно замены

$$a_a^{\pm}(\mathbf{k}) \leftrightarrow \overset{*}{a}{}_a^{\pm}(\mathbf{k})\ . \tag{64}$$

NB: Где ставить звездочку или, что то же самое, что называть частицами, а что античастицами -- это вопрос соглашения.

NB: Такая симметрия называется *зарядовой*, а замена -- *зарядовым сопряжением*.

- Имеем

$$(62):\{a_a^-(\mathbf{k}),\overset{*}{a}{}_b^+(\mathbf{q})\}_\pm \to G_{ab}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) = \{\overset{*}{a}{}_a^-(\mathbf{k}),a_b^+(\mathbf{q})\}_\pm = \pm\{a_b^+(\mathbf{q}),\overset{*}{a}{}_a^-(\mathbf{k})\}_\pm \Rightarrow \tag{65}$$

$$\{a_b^+(\mathbf{q}),\overset{*}{a}{}_a^-(\mathbf{k})\}_\pm = \pm G_{ab}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \overset{?}{=} (63) = \{a_a^+(\mathbf{k}),\overset{*}{a}{}_b^-(\mathbf{q})\}_\pm = \mp G_{ab}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \Rightarrow \tag{66}$$

- Видим, что красный $+$ соответствует зеленому $-$, и наоборот. Другими словами, приходим к ...

- *Теорема Паули о связи спина со статистикой:* Непротиворечиво квантовать поля с целым спином, т.е. тензорные поля, по Бозе-Эйнштейну:

$$[a_a^-(\mathbf{k}), \overset{*}{a}{}_b^+(\mathbf{q})] = G_{ab}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \ , \quad [\overset{*}{a}{}_a^-(\mathbf{k}), a_b^+(\mathbf{q})] = G_{ab}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \ , \tag{67}$$

а поля с полуцелым спином, т.е. спинорные поля, по Ферми-Дираку:

$$\{a_a^-(\mathbf{k}), \overset{*}{a}{}_b^+(\mathbf{q})\} = G_{ab}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \ , \quad \{\overset{*}{a}{}_a^-(\mathbf{k}), a_b^+(\mathbf{q})\} = G_{ab}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \ . \tag{68}$$

NB: Можно доказать (доказать!) теорему Паули, исходя из положительности метрики в гильбертовом пространстве

$$\Phi^* A^\dagger A \Phi = \Phi^* |A|^2 \Phi > 0 \ , \tag{69}$$

а также из других предположений.

- Коммутационные соотношения в координатном пространстве. *Частотные функции Паули-Йордона*

$$\{u^-_\alpha(x), \overset{*}{u}{}^+_\beta(y)\}_\pm = \Delta^-_{\alpha\beta}(x-y)\ , \tag{70}$$

$$u^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk \sqrt{2k^0}\,\theta(k^0) \mathrm{e}^{\pm ikx} \delta(k^2 - m^2) u^\pm(\mathbf{k})\ , \tag{71}$$

$$u^\pm_\alpha(\mathbf{k}) = \upsilon^\pm_{\alpha b}(\mathbf{k}) a^\pm_b(\mathbf{k})\ . \tag{72}$$

- Подставляя (72) в (71) и затем в (70), получаем

$$\Delta^-_{\alpha\beta}(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk dq \sqrt{2k^0 2q^0}\,\theta(k^0)\theta(q^0) \mathrm{e}^{-ikx + iqy} \delta(k^2 - m^2)\delta(q^2 - m^2) \times$$

$$\upsilon^-_{\alpha a}(\mathbf{k}) \overset{*}{\upsilon}{}^+_{\beta b}(\mathbf{q}) \{a^-_a(\mathbf{k}), \overset{*}{a}{}^+_b(\mathbf{q})\}_\pm =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int dk dq \sqrt{2k^0 2q^0}\,\theta(k^0)\theta(q^0) \mathrm{e}^{-ikx + iqy} \delta(k^2 - m^2)\delta(q^2 - m^2) \times$$

$$\upsilon^-_{\alpha a}(\mathbf{k}) \overset{*}{\upsilon}{}^+_{\beta b}(\mathbf{q}) G^{ab} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) =$$

$$\Delta^-_{\alpha\beta}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk \mathrm{e}^{-ik(x-y)} \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) \upsilon^-_{\alpha a}(\mathbf{k}) \overset{*}{\upsilon}{}^+_{\beta b}(\mathbf{k}) G^{ab}\ . \tag{73}$$

- $$P_{\alpha\beta}(k_\mu) = \upsilon^{-}_{\alpha a}(\mathbf{k})\overset{*}{\upsilon}{}^{+}_{\beta b}(\mathbf{k})G^{ab} \tag{74}$$

-- является в общем случае полиномом по четырех-импульсу k.

- В координатном представлении этот полином превращается в полином по производным $P_{\alpha\beta}(i\partial/\partial x^\mu)$.
- Поэтому формула (73) принимает вид:

$$\Delta^{-}_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{i}P_{\alpha\beta}\left(i\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)D^{-}(x)\ , \tag{75}$$

где

$$D^{-}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int dk\mathrm{e}^{-ikx}\theta(k^0)\delta(k^2-m^2) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int dk\mathrm{e}^{ikx}\theta(-k^0)\delta(k^2-m^2)\ , \tag{76}$$

--- отрицательно частотная функция Паули-Йордана.

- Аналогично введем положительно частотную функцию

$$D^{+}(x) = -D^{-}(-x) = \frac{1}{i(2\pi)^3}\int dk\mathrm{e}^{ikx}\theta(k^0)\delta(k^2-m^2)\ , \tag{77}$$

- и полную функцию

$$D(x) = D^+(x) + D^-(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int dk \mathrm{e}^{ikx} \varepsilon(k^0) \delta(k^2 - m^2) \, . \qquad (78)$$

NB: Какому уравнению удовлетворяют $D, D^\pm$?

NB: Показать, что вне светового конуса $D(x)$ обращается в ноль, а $D^\pm(x)$ -- нет.

- Как переходить от классических произведений полей к квантовым?
- Один из способов -- *нормальное произведение*. Рассмотрим

$$\overset{*}{u}_x u_y = (\overset{*}{u}_x^+ + \overset{*}{u}_x^-)(u_y^+ + u_y^-) = \overset{*}{u}^+ u^+ + \overset{*}{u}^+ u^- + \overset{*}{u}^- u^- + \overset{*}{u}^- u^+ = \tag{79}$$

$$\overset{*}{u}^+ u^+ + \overset{*}{u}^+ u^- + \overset{*}{u}^- u^- + u^+ \overset{*}{u}^- + \Delta^-(x-y) \equiv \,:\overset{*}{u}u:\, + \Delta^-(x-y) \tag{80}$$

$:\overset{*}{u}u:$ -- нормальное произведение двух полей.

- Более обще $:u_1 \dots u_n:$ -- все операторы уничтожения u^- расставлены справа от операторов рождения u^+ без учета, что их (анти)коммутатор нетривиальный, но с учетом Ферми-статистики.
- Свойства
  - ✓ $:u_1 \dots u_n: = (-1)^P :u_{s_1} \dots u_{s_n}$, где P -- четность перестановки Ферми-операторов от порядка $1, \dots, n$ к порядку $s_1, \dots s_n$
  - ✓ $\langle 0| :u_1 \dots u_n: |0\rangle = 0 \Rightarrow$ будем (какое-то время) считать, что наблюдаемые записаны в виде нормального произведения