М.В. Либанов

КТП IV. Спинорное поле

Содержание

Сринорное поле

Уравнение Дирака в квантовой механике

- Уравнение Шредингера -- не релятивистское!

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}\psi = -\hbar^2\frac{\triangle}{2m}\psi\ . \qquad (1)$$

- Релятивистский аналог мог бы быть (ψ -- волновая функция)

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \sqrt{\hat{\mathbf{p}}^2c^2 + m^2c^4}\ \psi\ . \qquad (2)$$

-- содержит все производные $\Rightarrow$ необходимо задание бесконечного числа начальных условий, нелокальность.

- "Возведем (2) в квадрат"

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \left(\hat{\mathbf{p}}^2c^2 + m^2c^4\right)\psi\ , \qquad (3)$$

  - Это ур. КГ -- неинтересно
  - Существует $\psi^{\pm}$; решение $\psi^{+} \sim \mathrm{e}^{+iEt/\hbar}$ -- с точки зрения КМ соответствует состояниям с отрицательной энергией $\Rightarrow$

- Уравнение первого порядка

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}\left(\alpha_1\frac{\partial\psi}{\partial x^1} + \alpha_2\frac{\partial\psi}{\partial x^2} + \alpha_3\frac{\partial\psi}{\partial x^3}\right) + \beta mc^2\psi \equiv \hat{H}\psi\ , \qquad (4)$$

где α_i и β некоторые постоянные коэффициенты.

- Переходя обратно к системе единиц $c = \hbar = 1$ и вводя новые обозначения $\gamma^0 = 1/\beta$, $\gamma^i = \alpha^i/\beta$, $p_\mu = i\partial_\mu$, получаем уравнение Дирака

$$p_\mu\gamma^\mu\psi - m\psi = 0 \quad \Leftrightarrow (i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi = 0 \qquad (5)$$

- Должна получиться связь $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \Rightarrow \psi$ -- решение уравнения Клейна-Гордона $\Rightarrow$ подействуем “сопряженным” оператором

$$0 = (p^2 - m^2)\psi \stackrel{?}{=} (p_\nu\gamma^\nu + m)(p_\mu\gamma^\mu - m)\psi = (p_\mu p_\nu\gamma^\nu\gamma^\mu - m^2)\psi = \qquad (6)$$

$$p_\mu p_\nu\left(\frac{\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu}{2} + \frac{\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu}{2}\right)\psi - m^2\psi \equiv \left(\frac{p_\mu p_\nu}{2}(\{\gamma^\mu\gamma^\nu\} + [\gamma^\nu\gamma^\mu]) - m^2\right)\psi \qquad (7)$$

- $\Rightarrow$

$$\frac{p_\mu p_\nu}{2}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\} = p^2 = g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu \Rightarrow \tag{8}$$

$$\boxed{\{\gamma^\mu\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}} \tag{9}$$

NB: γ_μ -- Гиперкомплексные числа!. Можно представить в виде матриц -- матриц Дирака $\Rightarrow$ ψ -- многокомпонентная волновая функция

NB: $p_\mu\gamma^\mu \equiv \hat{p}$

NB: $[(\hat{p}+m),(\hat{p}-m)] = 0 \Rightarrow$ знак m не фиксирован $\Rightarrow$

$$(i\hat{\partial} - m)\psi = 0 \text{ либо } (i\hat{\partial} + m)\psi = 0\,. \tag{10}$$

NB: $(\partial^2 - m^2)\psi = 0 \Rightarrow$ если ψ -- волновая функция, то останется проблема отрицательной энергии $\Rightarrow$ теория Дирака: море, дырки $\Leftrightarrow$ позитроны и т.п. А что делать с фотонами, пионами и т.д.?

Алгебра матриц Дирака

- Алгебра над полем комплексных чисел: линейные комбинации $c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2$, $c_i \in$ комплексные числа + всевозможные произведения $\gamma\gamma\gamma\ldots$
- Если D -- размерность алгебры, то ранг γ-матриц $\sqrt{D}$
- С линейными комбинациями ясно, построим всевозможные произведения. Их 16

$$
\begin{array}{rl}
\text{1 матрица} & \mathbf{I} = g^{\mu\mu}\gamma^\mu\gamma^\mu \ \text{(нет суммирования)}\ ; \\
\text{4 матрицы} & \gamma^\mu \ (\mu = 0,1,2,3)\ ; \\
\text{6 матриц} & \sigma^{\mu\nu} = i\dfrac{\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu}{2} \ (\mu < \nu)\ ; \\
\text{4 матрицы} & D^\mu = \gamma^\mu\gamma^5 \ (\mu = 0,1,2,3) \\
\text{1 матрица} & \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\dfrac{i}{24}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho \ (\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} = +1)\ ;
\end{array}
$$

NB: Что за числа $1, 4, 6, 4, 1$?

NB: Произведения

$$\gamma_{\nu_1}\dots\gamma_{\nu_n}, \quad n > 4 \tag{11}$$

обязательно! содержат две (и более) одинаковых матрицы (принцип Дирихле) $\Rightarrow$ с помощью антикоммутационных соотношений переставляем их, чтобы они встали рядом и используем $\gamma^2 = \pm 1$:

$$\gamma_{\nu_1}\dots\gamma_a\dots\gamma_a\dots\gamma_{\nu_n} \sim \gamma_{\nu_1}\dots\gamma_a^2\dots\gamma_{\nu_n} \sim \gamma_{\nu_1}\dots\cancel{\gamma_a}\dots\cancel{\gamma_a}\dots\gamma_{\nu_n} \tag{12}$$

-- произведение $n-2$ матриц $\Rightarrow$ в итоге сводится к 16 указанным матрицам Γ^A, $A = 1,\dots,16$.

NB: По этой же причине произведение 4-х γ-матриц сводится к линейной комбинации $\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}, \mathbf{I}$, а 3-х -- к D^μ и γ^μ

NB: Γ^A -- линейно независимы (доказать!) $\Rightarrow$ базис $\Rightarrow D = 16 \Rightarrow$ минимальный ранг в $4d$ пространстве-времени равен 4 -- не число измерений!

- Получим этот же результат другим способом
- $\gamma_0^2 = 1 \Rightarrow \lambda_{\gamma_0} = \pm 1$ -- собственные значения $\Rightarrow \gamma_0$ эрмитова
  $\gamma_i^2 = -1 \Rightarrow \lambda_{\gamma_i} = \pm i \Rightarrow \gamma_i$ -- антиэрмитовы. Можно объединить для запоминания
$$\gamma^\mu = \gamma_\mu^\dagger \tag{13}$$
- $\gamma^{\mu\dagger}\gamma^\mu = \gamma_\mu \gamma^\mu = 1$ (нет суммирования)-- унитарные
- $\gamma_\mu \gamma_0 = \gamma_0 \gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma^\mu$. -- полезное свойство!
- След ($\mu \neq \nu$; нет суммирования)
$$\sum_{i=1}^{\sqrt{D}} \lambda_{\gamma_\nu}^{(i)} = Tr\gamma_\nu = Tr\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\mu \overset{\text{цикл.}}{=} Tr\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma_\mu \overset{\text{антиком.}}{=} -Tr\gamma_\nu\gamma^\mu\gamma_\mu = -Tr\gamma_\nu = 0 \tag{14}$$
-- сумма ± 1 ($\pm i$) $\Rightarrow \sqrt{D}$ -- четное. $\sqrt{D} = 2$ -- не годится (слишком мало: алгебра двумерных матриц -- 3 матрицы Паули + единичная матрица -- не могут быть γ^μ (почему?))

- Свойства γ^5:

$$\{\gamma_5\gamma_\mu\} = 0\ , \quad \gamma_5^2 = 1\ , \tag{15}$$

поэтому в закон антикоммутации γ-матриц (9) можно формально включить также матрицу γ^5:

$$\{\gamma^\mu\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\ , \quad \mu,\nu = 0,\ldots 5\ , \tag{16}$$

$$g^{55} \equiv +1\ . \tag{17}$$

- $Tr 1 = 4$

- Все индексы изменяются от 0 до 5

$$
\begin{aligned}
Tr\gamma^{\mu} &= 0 \\
Tr\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\rho} &= 0 \\
Tr\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} &= 4g^{\mu\nu} \\
Tr\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\lambda} &= 4g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda} + 4g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho} - 4g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda} \,,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

и т.д. для следа произведения четного числа γ-матриц. А также имеем следующие соотношения (все индексы изменяются от 0 до 3)

$$
\begin{aligned}
Tr\ \underbrace{\gamma^{\nu_1}\dots\gamma^{\nu_n}}_{n \text{ -- нечет}} &= 0 \\
Tr\gamma^{5}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\lambda} &= -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \,.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

- Представление γ-матриц -- как выглядят?
- Антикоммутатор (9) (единственное условие) инвариантен при

$$\gamma^\mu \mapsto U\gamma^\mu U^{-1} \ : \tag{20}$$

$$\{U\gamma^\mu U^{-1}, U\gamma^\nu U^{-1}\} = U\{\gamma^\mu\gamma^\nu\}U^{-1} = 2g^{\mu\nu}U \cdot 1 \cdot U^{-1} = 2g^{\mu\nu} = \{\gamma^\mu\gamma^\nu\} \Rightarrow \tag{21}$$

Все свойства инвариантны! $\Rightarrow$ выбор (представление) γ-матриц неоднозначен

- Стандартное или дираковское представление: γ_0 диагональна

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \,, \;\; \gamma^i = -\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \,, \;\; \gamma^5 = \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \,, \qquad (22)$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \,, \;\; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \,, \;\; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \,, \qquad (23)$$

-- матрицы Паули

- *Спинорное, спиральное, киральное* или *вейлевское*: γ_5 диагональна

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \,, \;\; \gamma^i = -\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \,, \;\; \gamma^5 = \gamma_5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \,. \qquad (24)$$

- Введем $\sigma^0 = \sigma_0 = 1$, тогда $\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^i)$, $\sigma_\mu = (\sigma^0, -\sigma^i) \Rightarrow$ для спирального представления

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \sigma_\mu & 0 \end{pmatrix} \,, \;\; \gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \text{-- “криво!”} \qquad (25)$$

- Далее увидим, что ψ -биспинор -- приводимое представление группы Лоренца. В спиральном представлении

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \\ \bar{\xi}^{\dot\alpha} \end{pmatrix}, \quad (\alpha, \dot\alpha = 1, 2)\,. \tag{26}$$

χ и ξ -- двухкомпонентные вейлевские спиноры -- преобразуются независимо при преобразованиях Лоренца -- неприводимые представления: χ -- спинорное представление, ξ -- сопряженное (к спинорному) представление $\Rightarrow$ индексы α и $\dot\alpha$ -- независимы.

-

$$\gamma^\mu \psi = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \sigma_\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sigma^\mu \bar{\xi})_\alpha \\ (\sigma_\mu \chi)^{\dot\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi'_\alpha \\ \bar{\xi}'^{\dot\alpha} \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^\mu = \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha},\ \sigma_\mu = \sigma_\mu^{\dot\alpha\alpha} \Rightarrow \tag{27}$$

Правильно:

$$\sigma_\mu^{\dot\alpha\alpha} \equiv \bar{\sigma}^{\mu\dot\alpha\alpha} \quad \Rightarrow \quad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Уравнение Дирака и трансформационные свойства спиноров

- Обычно знак массы выбирается так:

$$(i\hat{\partial} - m)\psi = 0\,. \tag{29}$$

-- 4 комплексных уравнения на 8 действительных функций $\Rightarrow$ удобно написать сопряженные уравнения

$$-i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^{\dagger\mu} - m\psi^\dagger = -i\sum_\mu g^{\mu\mu}\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^\mu - m\psi^\dagger = 0 \quad \text{-- “криво”} \Rightarrow \times\gamma^0 \Rightarrow \tag{30}$$

$$-i\sum_\mu g^{\mu\mu}\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^\mu \gamma^0 - m\psi^\dagger \gamma^0 = -i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu - m\psi^\dagger \gamma^0 = 0\,. \tag{31}$$

- Дираковски-сопряженный спинор $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \Rightarrow$

$$i\bar{\psi}\overset{\leftarrow}{\hat{\partial}} + m\bar{\psi} \equiv i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \tag{32}$$

-- сопряженное уравнение

Ковариантность уравнения Дирака

- Два наблюдателя $\mathscr{O}$ ($\psi(x)$) и $\mathscr{O}'$ ($\psi'(x')$). $\psi(x)$ и $\psi'(x')$ описывают одну и ту же физическую ситуацию, но в разных системах отсчета $\Rightarrow$
  - Должно быть правило $\psi(x) \to \psi'(x')$ и $\psi'(x') \to \psi(x)$
  - $\psi'(x')$ -- решение

$$\left(i\gamma'^{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} - m\right)\psi'(x') = 0 \quad \Rightarrow \tag{33}$$

NB: Должно $\{\gamma'_\mu \gamma'_\nu\} = 2g'_{\mu\nu} = 2g_{\mu\nu}$

NB: Есть эквивалентность $\gamma'_\mu = U\gamma_\mu U^{-1} \Rightarrow$

  - $\gamma_\mu = \gamma'_\mu \Rightarrow$

$$(i\hat{\partial}' - m)\psi'(x') = 0 \quad (\hat{\partial}' \equiv \gamma^\mu \partial'_\mu)\ . \tag{34}$$

- Пусть преобразования Лоренца

$$x \to x' = Lx\ , \tag{35}$$

$$x'^{\mu} = \Omega^{\mu}_{\cdot\nu}x^{\nu} + a^{\mu} = \Omega^{\mu\nu}x_{\nu} + a^{\mu}\ ; \quad g_{\mu\nu}\Omega^{\mu\lambda}\Omega^{\nu\rho} = g^{\lambda\rho}\ , \tag{36}$$

- Принцип суперпозиции -- преобразование $\psi(x)$ линейное:

$$\psi'_\alpha(x') = \psi'_\alpha(Lx) = \Lambda_{\alpha\beta}(L)\psi_\beta(x) = \Lambda_{\alpha\beta}(L)\psi_\beta(L^{-1}x'), \tag{37}$$

$$\alpha, \beta \ldots = 1, \ldots, 4 \text{ -- спинорные индексы} \tag{38}$$

- Должно существовать $\psi'(x') \to \psi(x) \Rightarrow \exists\, \Lambda^{-1}(L)$:

$$\psi(x) = \Lambda^{-1}(L)\psi'(x') = \Lambda^{-1}\psi'(Lx)\ . \tag{39}$$

- С другой стороны, из (37) следует, что

$$\psi(x) = \Lambda(L^{-1})\psi'(Lx)\ . \tag{40}$$

-- поменяли "штрихи" $\leftrightarrow$ "не штрихи" и $L \leftrightarrow L^{-1}$

- Сравнивая (40) и (39), видим

$$\Lambda(L^{-1}) = \Lambda^{-1}(L)\ . \tag{41}$$

- Аналогично (показать!)

$$\Lambda(1) = 1\ , \quad \Lambda(L_1L_2) = \Lambda(L_1)\Lambda(L_2) \quad \Rightarrow \tag{42}$$

Λ -- линейное представление группы Пуанкаре

- Построим его:

$$i\hat{\partial}\psi(x) - m\psi(x) \overset{((40),\ (41))}{=} i\hat{\partial}\Lambda^{-1}\psi'(x') - m\Lambda^{-1}\psi'(x') = 0\,. \tag{43}$$

- Примем во внимание, что, согласно (36),

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} = \Omega^{\nu}_{\cdot\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}\,, \tag{44}$$

- И умножим (43) на Λ слева. Имеем,

$$\left(i\Lambda(L)\gamma^{\mu}\Lambda^{-1}(L)\Omega^{\nu}_{\cdot\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} - m\right)\psi'(x') = 0\,. \tag{45}$$

- Для того чтобы придать этому уравнению вид нештрихованного уравнения Дирака, необходимо и достаточно потребовать, чтобы

$$\Lambda(L)\gamma^{\mu}\Lambda^{-1}(L)\Omega^{\nu}_{\cdot\mu} = \gamma^{\nu}\,, \tag{46}$$

или

$$\boxed{\gamma^{\mu}\Omega^{\nu}_{\cdot\mu} = \Lambda^{-1}\gamma^{\nu}\Lambda\,.} \tag{47}$$

- Сдвиги $x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$: $\Omega^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \Rightarrow \Lambda$ -- преобразования подобия, не зависящие от $a^{\mu} \Rightarrow \Lambda = 1 \Rightarrow$

$$\psi'(x') = \psi(x) \tag{48}$$

- Вращения (инфинитозимальные)

$$\Omega^{\nu}_{\cdot\mu} = \delta^{\nu}_{\mu} + \omega^{\nu}_{\cdot\mu}\ . \tag{49}$$

Так как $\Omega^{\mu}_{\cdot\nu}\Omega^{\nu}_{\cdot\rho} = \delta^{\mu}_{\rho}$, то тензор $\omega^{\mu\nu}$ антисимметричен:

$$\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}\ . \tag{50}$$

- (47):

$$\gamma^{\nu} + \gamma^{\mu}\omega^{\nu}_{\cdot\mu} = \Lambda^{-1}\gamma^{\nu}\Lambda\ . \tag{51}$$

- Пусть

$$\Lambda = 1 + \lambda^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}\ , \quad \lambda^{\mu\nu} = -\lambda^{\nu\mu}\ . \tag{52}$$

Подставляя это разложение в (51), находим

$$\gamma^\nu + \gamma^\mu \omega^{\nu}_{\cdot\mu} = (1 - \lambda^{\mu\rho}\omega_{\mu\rho})\gamma^\nu(1 + \lambda^{\lambda\sigma}\omega_{\lambda\sigma}) = \gamma^\nu + \omega_{\mu\rho}[\gamma^\nu\lambda^{\mu\rho}] + \mathscr{O}(\omega^2)\,. \quad (53)$$

Отсюда находим

$$\gamma^\mu \omega^{\nu}_{\cdot\mu} = \gamma^\mu \omega_{\rho\mu} g^{\rho\nu} = \gamma^\mu g^{\rho\nu}\frac{(\omega_{\rho\mu} - \omega_{\mu\rho})}{2} = \frac{[\gamma^\mu g^{\rho\nu} - \gamma^\rho g^{\mu\nu}]\omega_{\rho\mu}}{2} = \omega_{\mu\rho}[\gamma^\nu\lambda^{\mu\rho}]\,, \quad (54)$$

или, т.к. $\omega_{\mu\rho}$ --- произвольный (но антисимметричный) тензор,

$$\gamma^\rho g^{\mu\nu} - \gamma^\mu g^{\rho\nu} = 2[\gamma^\nu\lambda^{\mu\rho}]\,. \quad (55)$$

- С учетом антикоммутационных соотношений (заменяем метрику на антикоммутатор), а также явной антисимметрии левой части по индексам μ и ρ, левую часть этого равенства можно переписать

$$g^{\mu\nu}\gamma^\rho - \gamma^\mu g^{\rho\nu} = \frac{\gamma^\nu(\gamma^\mu\gamma^\rho) - (\gamma^\mu\gamma^\rho)\gamma^\nu}{2} = \frac{\gamma^\nu[\gamma^\mu\gamma^\rho] - [\gamma^\mu\gamma^\rho]\gamma^\nu}{4} = \frac{[\gamma^\nu[\gamma^\mu\gamma^\rho]]}{4}\,. \quad (56)$$

Приравнивая это выражение к правой части (55), получаем

$$\lambda^{\mu\rho} = \frac{[\gamma_\mu\gamma_\rho]}{8} = -\frac{i}{4}\sigma^{\mu\rho}\,, \quad (57)$$

и, соответственно,

$$\Lambda = 1 - \frac{i}{4}\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} \,, \tag{58}$$

-- Λ в инфинитозимальной форме.

- Конечные преобразования. Рассмотрим поворот в какой-нибудь одной плоскости $x_\mu x_\nu$ сначала на угол ϕ, а затем на $d\phi$: $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} = d\phi$. Поскольку Λ образует представление группы Лоренца, то имеем

$$\Lambda(\phi + d\phi) = \Lambda(\phi)\Lambda(d\phi) \,, \quad \frac{\Lambda(\phi + d\phi) - \Lambda(\phi)}{d\phi} = \Lambda(\phi)\frac{\Lambda(d\phi) - 1}{d\phi} \,. \tag{59}$$

Или, используя (58),

$$\frac{d\Lambda(\phi)}{d\phi} = 2\Lambda(\phi)\lambda_{\mu\nu} \,, \quad \Lambda(0) = 1 \tag{60}$$

- Решая это уравнение, находим

$$\Lambda^{(\mu\nu)}(\phi) = \mathrm{e}^{-i\sigma^{\mu\nu}\frac{\phi}{2}} \,. \tag{61}$$

Это равенство надо понимать как оператор вращения в плоскости $(\mu\nu)$ на угол ϕ от оси x_μ к оси x_ν.

- Его можно переписать в другом виде, если ввести генератор вращения вектора вокруг оси с направлением n:

$$\omega^{\mu}_{\cdot\nu} = \phi (I_n)^{\mu}_{\cdot\nu} \ . \tag{62}$$

Тогда имеем

$$\Lambda(\phi) = \mathrm{e}^{-i\sigma^{\mu\nu}(I_n)_{\mu\nu}\frac{\phi}{4}} \ . \tag{63}$$

- Закон преобразования поля имеет вид

$$\begin{aligned} \psi'(x') &= \mathrm{e}^{-i\sigma^{\mu\nu}(I_n)_{\mu\nu}\frac{\phi}{4}}\psi(x) \ , \\ x'^{\mu} &= (\mathrm{e}^{\phi I_n})^{\mu}_{\cdot\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \ . \end{aligned} \tag{64}$$

- Частные случаи
  - Чисто пространственные вращения. Получаем

$$\Lambda_{(ij)} = \cos\frac{\phi}{2} - i\sigma_{ij}\sin\frac{\phi}{2} \ . \tag{65}$$

NB: При повороте на угол 2π поле ψ не переходит в себя !, а меняет знак. Нужен поворот на $4\pi \Rightarrow$ представление спинорное; наблюдаемыми могут быть только четные степени поля.

NB: Повороты - унитарные преобразования:

$$\Lambda^{\dagger}_{(ij)} = \Lambda^{-1}_{(ij)} \,. \tag{66}$$

- "Повороты" в плоскости $x_0 x_i =$ *бусты*. "Угол" поворота η -- *быстрота*

$$\Lambda_{(0i)} = \operatorname{ch}\frac{\eta}{2} - i\sigma_{0i}\operatorname{sh}\frac{\eta}{2} \,. \tag{67}$$

NB: Бусты не унитарны, но

$$\Lambda^{-1}_{(0i)} = \gamma_0 \Lambda^{\dagger}_{(0i)} \gamma_0 \,. \tag{68}$$

- Но условия (66), (68) можно объединить:

$$\Lambda^{-1}_{(\mu\nu)} = \gamma_0 \Lambda^{\dagger}_{(\mu\nu)} \gamma_0 \,. \tag{69}$$

- Несобственные преобразования Лоренца. Инфинитозимальная форма условий на генераторы неверна, но остается в силе

$$\boxed{\gamma^{\mu}\Omega^{\nu}_{\cdot\mu} = \Lambda^{-1}\gamma^{\nu}\Lambda\ .} \tag{70}$$

- Рассмотрим отражение нечетного числа пространственных осей $\vec{x} \to -\vec{x}$.

- Матрица преобразований формально по виду совпадает с метрикой,

$$\Omega^{\mu}_{\cdot\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu}\ . \tag{71}$$

- Оператор инверсии координат $\mathsf{P} = \Lambda$. Тогда уравнение (47) примет вид (нет суммирования по μ)

$$\mathsf{P}^{-1}\gamma^{\mu}\mathsf{P} = g^{\mu\mu}\gamma^{\mu}\ . \tag{72}$$

Его можно удовлетворить, если положить

$$\mathsf{P} = e^{i\phi}\gamma_0 \,. \tag{73}$$

NB: Фазовый множитель в этом равенстве не представляет интереса, и его значения сводятся либо к ± 1, либо к $\pm i$, что соответствует тому, что при четырехкратной инверсии спинор должен переходить в себя.

NB: Очевидно, что оператор P унитарен и удовлетворяет уравнению (69).

- Итак, из (73) следует, что

$$\psi'(x') = \psi'(t, -\mathbf{x}) = e^{i\phi}\gamma_0\psi(t, \mathbf{x}) \,. \tag{74}$$

- Закон преобразования дираковски-сопряженного спинора легко получить, взяв эрмитово сопряжение, из (64) с учетом (69). Имеем,

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'^{\dagger}(x')\gamma^0 = \psi^{\dagger}(x)\Lambda^{\dagger}\gamma^0 = \psi^{\dagger}(x)\gamma^0\gamma^0\Lambda^{\dagger}\gamma^0 = \bar{\psi}(x)\Lambda^{-1} \,. \tag{75}$$

NB: Из этого равенства видно, что важен именно дираковски-, а не эрмитово-сопряженный спинор (так как он преобразуется по обратному закону).

- $\Rightarrow$ Билинейные формы различной тензорной размерности:

$$\bar{\psi}\psi \text{ --- скаляр} , \tag{76}$$

$$i\bar{\psi}\gamma^5\psi \text{ --- псевдоскаляр} , \tag{77}$$

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \text{ --- вектор} , \tag{78}$$

$$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi \text{ --- псевдовектор} , \tag{79}$$

$$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi \text{ --- антисимметричный тензор второго ранга} . \tag{80}$$

Лагранжев формализм и динамические инварианты

- Квадратичный $+$ скалярный $+$ $U(1)$-инвариантный лагранжиан:

$$\mathscr{L} = a\partial_\mu \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\partial_\nu \psi + b\partial_\mu \bar{\psi}\partial^\mu \psi + ic\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - ic'\bar{\psi}\overleftarrow{\hat{\partial}}\psi - m\bar{\psi}\psi \,. \qquad (81)$$

  - $\sim a$ -- полная дивергенция $\Rightarrow a = 0$
  - $\sim b$ -- УКГ $+$ неограниченная энергия $\Rightarrow b = 0$
  - Эрмитовость $\Rightarrow c = c'$ и $m = m^*$ (с точность до интегрирования по частям и киральных, включающих γ_5, фазовых вращений)

- $\Rightarrow$

$$\mathscr{L} = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - \bar{\psi}\overleftarrow{\hat{\partial}}\psi) - m\bar{\psi}\psi \overset{\text{инт. по ч.}}{\simeq} \qquad (82)$$

$$\boxed{i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi \equiv \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi \,.} \qquad (83)$$

- Тензор энергии-импульса

$$T^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma^{\nu}\partial^{\mu}\psi \; ; \tag{84}$$

- Тензор спинового момента

$$S^{\mu\nu,\rho} = -\frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^{\rho}\sigma^{\mu\nu}\psi \; . \tag{85}$$

$$S_i = \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\int d\mathbf{x}\;\bar{\psi}\gamma^0\sigma^{jk}\psi = -\frac{1}{2}\int d\mathbf{x}\;\psi^{\dagger}\gamma^5\gamma^i\gamma^0\psi \tag{86}$$

NB: Если волна/частица распространяется вдоль 3-ей оси $\Rightarrow \psi(x) = \psi(t, x_3)$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial S^{12,\rho}}{\partial x^{\rho}} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_3 = \int d\mathbf{x} S^{21,0} \quad \text{-- сохраняется} \tag{87}$$

- Вектор тока

$$j^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \; ; \tag{88}$$

Решение уравнений Дирака

- $$(i\hat{\partial} - m)\psi = 0 \quad \Rightarrow \tag{89}$$

- $$(\partial^2 + m^2)\psi = 0 \quad \Rightarrow \tag{90}$$

- $$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk \mathrm{e}^{ikx} \delta(k^2 - m^2)\psi(k)\ , \tag{91}$$
$$(\hat{k} + m)\psi(k)\Big|_{k^2=m^2} = 0\ . \tag{92}$$

- $$\psi(x) = \psi^+(x) + \psi^-(x)\ ; \tag{93}$$
$$\psi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}} \mathrm{e}^{\pm ikx} \psi^\pm(\mathbf{k})\Big|_{k^0=\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} \quad \Rightarrow \tag{94}$$

- $$(\pm\hat{k} + m)\psi^{\pm}(\mathbf{k}) = 0 \quad \Rightarrow \tag{95}$$

- В системе покоя ($m \neq 0$)

$$(\gamma^0 k^0 + m)\psi(k^0)\Big|_{k_0^2=m^2} = 0\,, \tag{96}$$

или

$$(\gamma^0 \pm 1)\psi^{\pm}(\mathbf{0}) = 0\,. \tag{97}$$

- В стандартном представлении для γ-матриц решения этих уравнений имеют вид:

$$\psi^- = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}. \tag{98}$$

- Решение в произвольной системе можно получить с помощью бустов, а можно и решить явно (не будем делать)

$$(\pm\gamma^0 k^0 - \gamma_i k_i + m)\psi^{\pm}(\pm\mathbf{k}) = 0\,, \quad k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}\,. \tag{99}$$

NB: Важно! Для каждого знака $\pm$ уравнения имеют два решения: можно (и нужно!) их выбрать собственными векторами оператора спина, который сохраняется вдоль $\vec{k}$.

- Обозначим эти решения $\upsilon^{n,\pm}$ -- базис в пространстве решений УД в импульсном пространстве -- аналог репера e^{α}_{μ}. $n = 1, 2$ -- нумеруют *поляризации* -- удвоенную проекцию спина на направление движения

$$2\frac{S_i k_i}{|\vec{k}|}\cdot \upsilon^{n,\pm} = \pm(-1)^n \upsilon^{n,\pm} \tag{100}$$

NB: $\bar{\psi}$ тоже (независимо!) имеет два решения $\Rightarrow$ есть античастицы!

- В итоге

$$\psi_\alpha^\pm(\mathbf{k}) = \sum_{n=1,2} a_n^\pm(\mathbf{k})\upsilon_\alpha^{n,\pm}(\mathbf{k}) \equiv a_n^\pm(\mathbf{k})\upsilon_\alpha^{n,\pm}(\mathbf{k}) \ , \tag{101}$$

$$\bar{\psi}_\alpha^\pm(\mathbf{k}) = \sum_{n=1,2} \overset{*}{a}{}_n^\pm(\mathbf{k})\bar{\upsilon}_\alpha^{n,\pm}(\mathbf{k}) \equiv \overset{*}{a}{}_n^\pm(\mathbf{k})\bar{\upsilon}_\alpha^{n,\pm}(\mathbf{k}) \ . \tag{102}$$

NB: $a^\pm$ -- антикоммутируют, $\upsilon^\pm$ -- обычные C -- числовые столбцы $\Rightarrow \psi^\pm$ -- антикоммутируют.

- Сопряжение

$$(\upsilon^{n,\pm}(\mathbf{k}))^* = \overset{*}{\upsilon}{}^{n,\mp}(\mathbf{k}), \quad (a^+)^* = \overset{*}{a}{}^- \ , \quad (a^-)^* = \overset{*}{a}{}^+ \tag{103}$$

- Условие нормировки для спиноров удобно выбрать в виде

$$\upsilon^{\dagger n,\pm}(\mathbf{k})\upsilon^{m,\mp}(\mathbf{k}) = 2k^0\delta^{nm} \quad \Rightarrow \tag{104}$$

$$\bar{\upsilon}^{n,\pm}(\mathbf{k})\upsilon^{m,\mp}(\mathbf{k}) = \pm 2m\delta^{nm} \ ; \tag{105}$$

- Условие взаимной ортогональности спиноров, с аргументами, отличающимися знаками,

$$\upsilon^{\dagger n,\pm}(\mathbf{k})\upsilon^{m,\pm}(-\mathbf{k}) = 0\ ; \qquad (106)$$

- Соотношения

$$\upsilon^{\dagger n,\pm}(\mathbf{k})[k^i\gamma^j - k^j\gamma^i \pm m\gamma^i\gamma^j]\upsilon^{m,\pm}(-\mathbf{k}) = 0\ ,$$
$$k^i[\upsilon^{\dagger n,\pm}(\mathbf{k})(\gamma^i\gamma^j - \gamma^j\gamma^i)\upsilon^{m,\mp}(\mathbf{k})] = 0\ , \qquad (107)$$

- Важная формула суммирования по спиновому индексу

$$\upsilon^{m,+}_{\alpha}(\mathbf{k})\bar{\upsilon}^{m,-}_{\beta}(\mathbf{k}) = (\hat{k} - m)_{\alpha\beta}\ , \qquad (108)$$

$$\upsilon^{m,-}_{\alpha}(\mathbf{k})\bar{\upsilon}^{m,+}_{\beta}(\mathbf{k}) = (\hat{k} + m)_{\alpha\beta}\ , \qquad (109)$$

- Решение

$$\psi^{\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}} \mathrm{e}^{\pm ikx} a_n^{\pm}(\mathbf{k}) \upsilon^{n,\pm}(\mathbf{k}) \ , \tag{110}$$

$$\bar{\psi}^{\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}} \mathrm{e}^{\pm ikx} \overset{*}{a}{}_n^{\pm}(\mathbf{k}) \bar{\upsilon}^{n,\pm}(\mathbf{k}) \ . \tag{111}$$

- Вектор импульса

$$P^{\mu} = \int d\mathbf{k} k^{\mu} (\overset{*}{a}{}_n^{+}(\mathbf{k}) a_n^{-}(\mathbf{k}) - \overset{*}{a}{}_n^{-}(\mathbf{k}) a_n^{+}(\mathbf{k})) \ . \tag{112}$$

- Спин (проекция на определенный импульс)

$$S_3 = \frac{1}{2} (\overset{*}{a}{}_1^{+}(\mathbf{k}) a_1^{-}(\mathbf{k}) - \overset{*}{a}{}_2^{+}(\mathbf{k}) a_2^{-}(\mathbf{k}) + \overset{*}{a}{}_1^{-}(\mathbf{k}) a_1^{+}(\mathbf{k}) - \overset{*}{a}{}_2^{-}(\mathbf{k}) a_2^{+}(\mathbf{k})) \ . \tag{113}$$

- Заряд

$$Q = \int d\mathbf{k} (\overset{*}{a}{}_n^{+}(\mathbf{k}) a_n^{-}(\mathbf{k}) + \overset{*}{a}{}_n^{-}(\mathbf{k}) a_n^{+}(\mathbf{k})) \ . \tag{114}$$

Безмассовое спинорное поле

- Безмассовое поле $m = 0$. Уравнение Дирака

$$i\hat{\partial}\psi = 0 \,. \tag{115}$$

NB: При $m = 0$ оператор Дирака антикоммутирует с γ_5

- Введем два проекционных оператора

$$P_L = \frac{1-\gamma^5}{2}\,, \quad P_R = \frac{1+\gamma^5}{2}\,. \tag{116}$$

- Подействуем операторами (116) на (115) и получим

$$P_{L(R)} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = i\gamma^\mu P_{R(L)} \partial_\mu \psi \,, \tag{117}$$

т.е. два отдельных уравнения для функций $\psi_{L(R)} = P_{L(R)}\psi$

$$i\hat{\partial}\psi_{L(R)} = 0 \,. \tag{118}$$

- Спиральное представление γ-матриц $\Rightarrow$

$$\text{если } \psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix}, \quad \text{то} \quad \psi_L = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix} \Rightarrow \tag{119}$$

- Уравнение Вейля

$$\begin{aligned} (\partial_0 - \partial_i \sigma_i)\chi &= 0 \\ (\partial_0 + \partial_i \sigma_i)\xi &= 0. \end{aligned} \tag{120}$$

- В импульсном пространстве эти уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} (p_0 - p_i \sigma_i)\xi(p) &= 0 \\ (p_0 + p_i \sigma_i)\chi(p) &= 0 \end{aligned}, \quad p_0 = |\,\mathbf{p}|\,, \Leftrightarrow \begin{aligned} &\frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{|\vec{p}|}\xi = +\xi \text{-- правый “винт”} \\ &\frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{|\vec{p}|}\chi = -\chi \text{-- левый “винт”} \end{aligned} \tag{121}$$

NB: Спиральность -- *helicity*

- Считалось, что нейтрино безмассовое $\Rightarrow \nu = \psi_L$ -- экспериментальный факт

$$\frac{1+\gamma_5}{2}\nu = P_R \nu = 0 \quad \Rightarrow \tag{122}$$

$$\mathscr{L} = i\bar{\nu}\hat{\partial}\frac{1-\gamma^5}{2}\nu \ , \tag{123}$$

-- здесь ν -- дираковский биспинор

- Если $m_\nu \neq 0$ и массовый член диракоского типа

$$m_\nu \bar{\nu}\nu = m_\nu(\bar{\nu}_L \nu_R + \bar{\nu}_R \nu_L) \tag{124}$$

то необходимо (!) иметь правое нейтрино.

NB: Это легко понять: спиральность не лоренц-инвариант. Если в какой-то системе отсчета спиральность, скажем, $+1$, то, садясь на ракету, можно обогнать нейтрино -- в новой системе импульс нейтрино поменяет знак, а спин -- нет $\Rightarrow$ спиральность станет -1.

NB: Еще одно квантовое число *киральность -- chirality*

$$\gamma_5 \psi_{L,R} = \mp \psi_{L,R} \tag{125}$$

NB: Для безмассовых частиц спиральность $\Leftrightarrow$ киральности

NB: Для массивных это не так. В СМ киральность нейтрино, взаимодействующих с полями СМ, -- левая, т.е. активное нейтрино СМ левое (в смысле киральности). Но должно существовать правое нейтрино в смысле спиральности. Оно непосредственно не взаимодействует с полями СМ $\Rightarrow$ стерильное

- Можно отказаться от симметрии относительно фазовых $U(1)$-вращений, т.к. нейтрино -- нейтральные частицы. Тогда существует еще лоренцев скаляр (проверить!) -- *Майорановская масса*

$$\bar{\psi}\gamma_2\psi^* + \text{э.с.}\,. \tag{126}$$

NB: Не смешивает левые и правые киральные поля (проверить!)

NB: Нарушает *лептонное* число $\Rightarrow$ возможен двойной безнейтринный β-распад

$${}^A_Z X \to {}^A_{Z+2} Y + 2e^- \tag{127}$$

Итог

- Для любого поля уравнения движения

$$\hat{\mathscr{O}}(\partial, m)u(x) = 0 \tag{128}$$

- Сдвиговая симметрия $x \to x + a \Rightarrow$ базис в функциональном пространстве e^{ikx} -- плоские волны
- Следствием (128) должно быть $k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \Rightarrow$

$$u_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4k\delta(k^2 - m^2)\mathrm{e}^{ikx}u_\alpha(k) \tag{129}$$

- Группа Лоренца двусвязна $\Rightarrow$ можно проинтегрировать (129) по k_0

$$u(x) = u^+(x) + u^-(x) \tag{130}$$

$$u_\alpha^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k^0}} \mathrm{e}^{\pm ikx} a_a^\pm(\mathbf{k}) u_\alpha^{\pm,a}(\mathbf{k})\Big|_{k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} \tag{131}$$

где

✓ $u_\alpha^{\pm,a}(\vec{k})$ -- базис в пространстве решений (128) в импульсном пространстве. Его удобно искать в виде собственных векторов оператора проекции спина на направление движения (поляризации) $\vec{S}\vec{k}/|\vec{k}|$, который сохраняется $\Rightarrow$ коммутирует с $\mathscr{O}(k,m)$.

✓ $a_a^{\pm}(\vec{k})$ -- числовые коэффициенты (могут быть грассмановыми), которые становятся операторами после квантования.

- Динамические инварианты $\Leftrightarrow$ наблюдаемые в импульсном пространстве имеют вид квадратичных форм по a, например,

$$P^\mu \sim \int d^3k k^\mu \overset{*}{a}{}_a^{+}(\mathbf{k}) a_a^{-}(\mathbf{k}) + \dots \qquad (132)$$

- $\overset{*}{a}{}_a^{+}(\mathbf{k}) a_a^{-}(\mathbf{k})$ (нет суммирования по a) можно интепретировать как плотность числа частиц с импульсом $\mathbf{k}$ и поляризацией (и/или другими квантовыми числами) с номером a.