М.В. Либанов

КТП III. Векторные поля

Содержание

Безмассовое векторное поле

- Рассмотрим действительное векторное поле и напишем наиболее общий вид квадратичного (псевдо)скалярного лагранжиана

$$\mathscr{L} = a\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + b\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + \frac{m^2}{2}(A_\mu)^2 + \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\partial^\mu A^\nu \partial^\rho A^\lambda \qquad (1)$$

NB: Не выписаны слагаемые, представляющие собой полные производные, либо эквивалентные с точностью до полных производных выписанным слагаемым.

NB: Последнее слагаемое также представляет собой полную производную (доказать!) и может быть отброшено.

- Потребуем, чтобы теория (лагранжиан) была инвариантна относительно *калибровочных* или *градиентных* преобразований

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha(x), \quad \alpha \text{ -- произвольная функция} \qquad (2)$$

- Тогда $a = -b$ и $m^2 = 0$
- Введем тензор напряженности

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{3}$$

и выберем $a = -1/4$. Знак a диктуется $E > -\infty$ (проверить!).

- Тогда из (1) получим действие безмассового векторного поля (электромагнитного поля)

$$S = -\frac{1}{4}\int dx F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \ . \tag{4}$$

- Уравнения движения (вариация по A^ν)

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \partial^2 A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = 0 \ . \tag{5}$$

соответствуют первой паре уравнений Максвелла (УМ)

- Вторая пара УМ $\Leftrightarrow$ *тождества Бьянки*

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\partial^\nu F^{\lambda\rho} = 0 \quad \Leftarrow \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{6}$$

- Преобразование Фурье $\Leftrightarrow$ переход в импульсное пространство

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk \mathrm{e}^{ikx} A_\mu(k) \;\Rightarrow \tag{7}$$

- Уравнения Максвелла в импульсном пространстве

$$k^2 A_\nu(k) - k_\nu(kA(k)) = 0\ . \tag{8}$$

- Чтобы их решить воспользуемся известной теоремой

- Теорема Гельмгольца:

$$A_\mu = \partial_\mu b(x) + A_\mu^\perp = A_\mu^\parallel + A_\mu^\perp, \quad \partial^\mu A_\mu^\perp = 0 \tag{9}$$

- В имульсном пространстве

$$A_\mu^\parallel(k) = k_\mu b(k), \quad k^\mu \tilde{A}_\mu^\perp = 0, \quad A_\mu^\parallel \tilde{A}^{\mu\perp} = 0 \tag{10}$$

$\tilde{A}_\mu^\perp(k)$ -- Фурье-образ для $A_\mu^\perp(x)$

NB: Отсюда обозначения и названия

- $A_\mu^\parallel$ -- продольное (вдоль импульса k_μ) поле
- $A_\mu^\perp$ -- поперечное (ортогональное 4-х импульсу) поле

NB:

$$\partial^\mu A_\mu(x) = \partial^\mu A_\mu^\parallel = \partial^2 b(x) \Leftrightarrow kA = kA^\parallel = k^2 b(k) \tag{11}$$

- Два случая:
  - $k^2 \neq 0 \Rightarrow$ УМ

$$k^2(b-b) + k^2\tilde{A}^{\perp}_{\mu} = k^2\tilde{A}^{\perp}_{\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} b(k)\text{-- произвольная} \\ \tilde{A}^{\perp}_{\mu} = 0 \end{array} \tag{12}$$

  - $k^2 = 0 \Rightarrow b(k)$ и $\tilde{A}^{\perp}_{\mu}$ -- произвольные
- Объединяем два случая

$$A_{\mu}(k) = k_{\mu}b(k) + \tilde{A}^{\perp}_{\mu}(k) = k_{\mu}b(k) + \delta(k^2)A^{\perp}_{\mu}(k) \tag{13}$$

- $k_{\mu}b = A^{\parallel}_{\mu}(k)$ -- ничем не фиксируется -- *чистая калибровка*

$$\alpha(x) \sim -i\int dk\mathrm{e}^{ikx}b(k) \tag{14}$$

$$A^{\parallel}_{\mu}(x) = \partial_{\mu}\alpha \sim \int dkk_{\mu}\mathrm{e}^{ikx}b(k) \tag{15}$$

NB: Так должно быть!, т.к. есть калибровочная свобода: к любому решению можно добавить $\partial_{\mu}\alpha$ и получить новое решение.

- Степени свободы -- сколько функций надо задать, чтобы фиксировать вектор $A_\mu^\perp$? $\Rightarrow$ разложим по базису:

$$k^\mu A_\mu^\perp = 0 \Rightarrow \tag{16}$$

Существует 3 вектора, ортогональных в 4-х мерном смысле к $A_\mu^\perp$:

- k^μ: $k_\mu k^\mu = 0$ -- вклад от него мы уже учли в продольной части
- Два других можно выбрать чисто пространственными и ортогональными в 3-х мерном смысле к $\vec{k}$ и друг к другу:

$$e_0^{(\alpha)} = 0\ ;\ \ e_i^{(\alpha)} k_i = 0\ ;\ \ e_i^{(\alpha)} e_i^{(\beta)} = \delta^{\alpha\beta}\ ;\ \ \alpha = 1,2 \tag{17}$$

$$(e_\mu^{(\alpha)})^* \neq e_\mu^{(\alpha)} \quad \text{-- в общем случае} \tag{18}$$

- Окончательно

$$A_\mu(k) = k_\mu b(k) + e_\mu^{(\alpha)}(k) a_\alpha(k) \delta(k^2) \tag{19}$$

-- содержит 1 калибровочную функцию $b(k)$ и 2 физические степени свободы $a_\alpha(k)$ -- 2 поляризации, имеющие закон дисперсии $k_0 = |\vec{k}|$ и распространяющиеся со скоростью света.

- Для дальнейшего удобно распространить суммирование по $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Нужно фиксировать или выбрать калибровку.
- Способы выбора калибровки
  - $A_0 = 0$ -- гамильтонова или темпоральная калибровка. Удобна при построении гамильтонова формализма. Остаточные калибровочные преобразования (ОКП):

$$0 = A_0 = A_0' = 0 + \partial_0 \alpha(x) \quad \Rightarrow \quad \alpha(x) = \alpha(\vec{x}) \tag{20}$$

  - $A_3 = 0$ -- аксиальная калибровка. Удобна при решении аксиально-симметричных задач. ОКП:

$$0 = A_3 = A_3' = 0 + \partial_3 \alpha(x) \quad \Rightarrow \quad \alpha(x) = \alpha(t, x^1, x^2) \tag{21}$$

  - $\partial_i A_i = \mathrm{div}\vec{A} = 0$ -- калибровка Кулона. Удобна при решении задач статики. ОКП:

$$0 = \partial_i A_i' = \partial_i A_i + \partial_i^2 \alpha(x) \quad \Rightarrow \quad \triangle\alpha(x) = 0 \;\; (\alpha(\infty) < \infty) \Rightarrow \quad \alpha = \alpha(t) \tag{22}$$

- $\partial^\mu A_\mu = 0$ -- калибровка Лоренца (КЛ). Лоренц-инвариантна!. ОКП:

$$0 = \partial_\mu A'_\mu = \partial_\mu A_\mu + \partial^2_\mu \alpha(x) \quad \Rightarrow \quad \partial^2 \alpha(x) = 0 \quad \Rightarrow \tag{23}$$

α -- решение безмассового уравнения Клейна-Гордона

- В импульсном пространстве КЛ

$$k^\mu A_\mu = 0 \;\; \Rightarrow \;\; A_\mu = \delta(k^2)\left(k_\mu b'(k) + a_\alpha e^{(\alpha)}_\mu\right) \tag{24}$$

- Введем локальный репер или тетраду

$$e^\alpha_\mu = \begin{cases} e^{(\alpha)}_\mu & \alpha = 1,2 \\ e^3_\mu = \left(0, -\dfrac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\right) & \alpha = 3 \\ e^0_\mu = \delta_{\mu 0} = (1, \vec{0}) & \alpha = 0\,. \end{cases} \tag{25}$$

- Свойство

$$e^\alpha_\mu e^{\beta\mu} = g^{\alpha\beta}\,. \tag{26}$$

- Взаимная тетрада

$$e^{\alpha}_{\mu}e^{\mu}_{\beta}=\delta^{\alpha}_{\beta}\ \stackrel{?}{\Rightarrow} \tag{27}$$

$$e^{\alpha}_{\nu}e^{\mu}_{\alpha}=\delta^{\mu}_{\nu}\ . \tag{28}$$

Кроме того, имеем (?) правила поднимания и опускания тетрадных индексов

$$e^{\alpha}_{\mu}=g^{\alpha\beta}e_{\beta\mu}\ ,\qquad e_{\alpha\mu}=g_{\alpha\beta}e^{\beta}_{\mu}\ . \tag{29}$$

NB: С индексами типа “α” (тетрадными индексами) и типа “μ” (лоренцевыми индексами) теперь можно работать на равных. Далее их не будем различать.

- Окончательно

$$A_{\mu}(k)=\delta(k^2)a_{\nu}(k)e^{\nu}_{\mu}(k) \tag{30}$$

- Подставляем в интеграл Фурье и интегрируем по k^0. Итог

$$A_\mu(x) = A_\mu^+(x) + A_\mu^-(x)\ , \tag{31}$$

$$A_\mu^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}} a_\alpha{}^\pm(\mathbf{k}) e_\mu{}^\alpha(k) \mathrm{e}^{\pm ikx}\Big|_{k^0=|\,\mathbf{k}|} \tag{32}$$

NB: Сравните

$$\varphi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}} a^\pm(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{1} \cdot \mathrm{e}^{\pm ikx}\Big|_{k^0=+\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}\ . \tag{33}$$

- Вектор импульса

$$P_\mu = -\int d\mathbf{k} k_\mu a_\nu^+(\mathbf{k}) a^{\nu -}(\mathbf{k}) \ . \qquad (34)$$

- (Наивно) энергия не ограничена снизу!:

$$a_i(\mathbf{k}) = 0 \quad \Rightarrow P^0 = E = -\int d\mathbf{k} k^0 a_0^+ a_0^- < 0 \text{ с учетом } (a_\mu^+)^* = a_\mu^- \qquad (35)$$

- Но есть условие Лоренца

$$0 = k^\mu a_\nu^\pm e_\mu^\nu = k^0 a_0^\pm - \frac{\vec{k}^2}{|\vec{k}|} a_3^\pm \Big|_{k^0=|\mathbf{k}|} \quad \Rightarrow \quad a_0^\pm = a_3^\pm, \qquad (36)$$

т.е., если $a_0 \neq 0$, то и $a_3 \neq 0$. Более того, вклады от временных (a_0) фотонов в вектор импульса в точности сокращается вкладом от продольных (a_3) фотонов. В итоге

$$P_\mu = -\int d\mathbf{k} k_\mu a_\nu^+(\mathbf{k}) a^{\nu -}(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{k} k_\mu a_\alpha^+(\mathbf{k}) a_\alpha^-(\mathbf{k}) \Big|_{\alpha=1,2} . \qquad (37)$$

- Проекция спина на направление движения также зависит только от физических степеней свободы и (при подходящем выборе e_μ^α) соответствует ± 1.

Массивное векторное поле

- Наиболее общий вид лагранжиана (с точностью до полных производных)

$$\mathscr{L} = a\partial^{\mu}B_{\nu}\partial_{\mu}B^{\nu} + b\partial^{\mu}B_{\nu}\partial^{\nu}B_{\mu} + \frac{m^2B_{\mu}^2}{2} \tag{38}$$

NB: Если $m^2 \neq 0$, то нет калибровочной инвариантности

- Теорема Гельмгольца

$$B_{\mu} = \partial_{\mu}\pi + B_{\mu}^{\perp} \tag{39}$$

- Поле π -- динамическое скалярное поле (не калибровочная функция!). Если $a \neq -b$, то лагранжиан будет содержать старшие производные этого поля, что приведет к патологиям (отрицательная энергия и т.п.) Проверить!.

- Поэтому $a = -b = -1/4$, $m^2 > 0$
- Введем напряженность

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \tag{40}$$

Тогда лагранжиан принимает вид

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}\left(B^{\perp}_{\mu\nu}\right)^2 + \frac{m^2}{2}\left(B^{\perp}_{\mu}\right)^2 + \frac{m^2}{2}(\partial\pi)^2 \tag{41}$$

NB: Лагранжиан поля π отщепляется и является лагранжианом свободного безмассового скалярного поля, которое мы уже изучали, и в данном контексте оно не представляет интереса. Хотелось бы от него избавиться.

- Уравнения движения для поля $B^{\perp}_{\mu}$:

$$\partial^{\mu} B^{\perp}_{\mu\nu} + m^2 B^{\perp}_{\nu} = 0 \tag{42}$$

- Вычислим дивергенцию

$$\partial^\nu \partial^\mu B^\perp_{\mu\nu} + m^2 \partial^\nu B^\perp_\nu = m^2 \partial^\nu B^\perp_\nu = 0 \tag{43}$$

NB: Первое слагаемое тождественно обратилось в 0 из-за свертки симметричного $\partial^\mu \partial^\nu$ и антисимметричного $B_{\mu\nu}$ тензоров.

NB: Второе слагаемое тождественно обратилось в 0 в силу $\perp B^\perp_\mu$

- Но если мы сделаем в уравнениях замену $B^\perp_\mu \to B_\mu$

$$\partial^\mu B_{\mu\nu} + m^2 B_\nu = 0 \tag{44}$$

и вычислим дивергенцию, то получим условие непротиворечивости уравнений

$$\partial^\mu B_\mu = 0, \tag{45}$$

то есть условие поперечности.

- Поэтому последовательно выбрать лагранжиан поля B_μ (нет разложения на поперечную и продольную части!) в виде

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} B^2_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} B^2_\mu \tag{46}$$

- Этот лагранжиан приводит к уравнениям (44), (45), гарантирующим поперечность B_μ, т.е. отсутствие π
- Подставим (45) в (44) и получим

$$\partial^2 B_\nu - \partial_\nu \partial B + m^2 B_\nu = \partial^2 B_\nu + m^2 B_\nu = 0 \, , \tag{47}$$

т.е. окончательно систему уравнений Фо́ка-Прока́

$$\begin{cases} \partial^2 B_\nu + m^2 B_\nu = 0 \\ \\ \partial B = 0 \, . \end{cases} \tag{48}$$

NB: Первое уравнение представляет собой 4 уравнения Клейна-Гордона для каждой компоненты $B_\mu \Rightarrow B_\mu$ будет (после квантования) описывать частицу с массой m и 3-мя степенями свободы (благодаря условию поперечности), соответствующими 3 возможным проекциям спина на направление движения $0, \pm 1$.