М.В. Либанов

КТП I. Введение

Содержание

Система единиц

★ Естественная (натуральная) система единиц

$$c = \hbar = 1 \qquad (1)$$

★ Единственная нетривиальная размерность при этом --- это размерность массы или энергии. Длина и время имеют размерность обратной массы. Действительно,

$$[c] = \frac{L}{T}\,; \quad [\hbar] = M\frac{L^2}{T} \Rightarrow L = T = \frac{1}{M}\,. \qquad (2)$$

- Физически $1/M$ --- это комптоновская длина волны частицы массы M. Энергия и импульс также имеют размерность массы (т.к. скорость безразмерна).

- В физике частиц в качестве единицы измерения массы и (или) энергии принят электрон-вольт.

- Электрон-вольт (эВ) --- энергия, которую приобретает электрон, пройдя разность потенциалов в 1 В.

★ В физике фундаментальных взаимодействий имеется по крайней мере 4 фундаментальных параметра с размерностью массы:

- Масса Планка -- характеризует масштаб гравитационных взаимодействий (квантовой гравитации)

$$M_{PL} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} \approx 1.2 \cdot 10^{19}\text{ГэВ} \approx 2.2 \cdot 10^{-5}\text{г} \quad (3)$$

$$L_{PL} = T_{PL} \cdot c = \frac{\hbar}{c M_{PL}} \approx 1.6 \cdot 10^{-33}\text{см} \approx 5.4 \cdot 10^{-44}\text{с} \quad (4)$$

- Черная дыра с массой M_{PL} имеет радиус Шварцшильда $2L_{PL}$
- Вакуумное среднее поля Хиггса

$$\upsilon_H \approx 240\text{ГэВ} \Rightarrow L_H = \frac{1}{\upsilon_H} = L_{PL}\frac{M_{PL}}{v_H} \approx 10^{-16}\text{см} \quad (5)$$

-- определяет масштаб нарушения электрослабого взаимодействия и массы кварков, заряженных лептонов, $W^{\pm}$, Z-бозонов ($\sim \upsilon_H$)

- Этот масштаб изучается на ускорителях: энергия БАК (LHC) $\sim 10^4$ ГэВ

- Масштабный параметр квантовой хромодинамики (КХД)

$$\Lambda_{QCD} \sim 0.2\text{ГэВ} \Rightarrow L_{QCD} = \frac{1}{\Lambda_{QCD}} \approx 10^{-13}\text{см} = 1\text{фм} \qquad (6)$$

-- определяет масштаб сильных взаимодействий и массы адронов

- Плотность темной энергии (или плотность энергии вакуума, или космологическая постоянная)

$$\Lambda = 4 \cdot 10^{-6}\frac{\text{ГэВ}}{\text{см}^3} \approx 3.1 \cdot 10^{-47}\text{ГэВ}^4 \qquad (7)$$

-- определяет темп современного ускоренного расширения Вселенной

- Есть надежда, что эти масштабы определяются одним массовым параметром (массой Планка?; теория струн?), но как объяснить столь огромную

$$M_{PL} : \upsilon_H : \Lambda_{QCD} : \sqrt[4]{\Lambda} \sim 10^{19} : 10^2 : 10^{-1} : 10^{-12} \qquad (8)$$

энергетическую иерархию???

Обозначения

★ Метрический тензор (плоского) пространства Минковского $g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu}$ в основном отрицательный (mostly negative)

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1\dots) \tag{9}$$

★ В пространстве-времени с $(d+1)$ измерениями (одним временны́м и d пространственными) индексы из середины греческого алфавита $\mu, \nu, \dots$ нумеруют пространственно-временные координаты и изменяются от 0 до d; 0 соответствует времени.

★ Индексы из середины латинского алфавита $i, j\dots$ нумеруют пространственные координаты и изменяются от 1 до d.

★ Контравариантные векторы

$$a = (a^0, a^1, a^2, a^3, \dots) = (a^0, \mathbf{a}) \tag{10}$$

Скалярное произведение

$$ab \equiv \sum_{0 \le \mu, \nu \le d} g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - \mathbf{ab}\ . \tag{11}$$

Ковариантные векторы

$$a_\mu = \sum_{0\le\nu\le d} g_{\mu\nu} a^\nu = (a^0, -\mathbf{a})\ . \qquad (12)$$

★ В дальнейшем будем использовать правило Эйнштейна -- опускать знак суммирования, подразумевая суммирование по повторяющимся индексам (не только пространственным(-временным)) в области их изменения.

★ *Не будем* различать пространственные векторы с верхним и нижним индексами, т.е. $a^i = a_i$.

★ Таким образом, скалярное произведение запишется в следующем виде

$$ab = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^\nu b_\nu = a_\nu b^\nu = a^0 b^0 - a_i b^i, \qquad (13)$$

$$\mathbf{ab} = a_i b_i = a^i b^i\ . \qquad (14)$$

- Помимо метрического тензора $g_{\mu\nu}$ с нижними индексами существует также метрический тензор с верхними индексами, определяемый равенством

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho\ , \tag{15}$$

где δ_μ^ρ --- символ Кронекера. В пространстве Минковского $g^{\mu\nu}$ по виду совпадает с $g_{\mu\nu}$. С помощью $g^{\mu\nu}$ можно поднимать индексы: $a^\mu = g^{\mu\nu}a_\nu$.

- Чему равен $Tr(g) =?$

- Четырёхмерный полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты определен как $\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} = +1$.

- Символ $\hat{a}$ обозначает свертку вектора a с γ-матрицами Дирака: $\hat{a} \equiv a^\mu\gamma_\mu$. (Иногда, где это не приводит к недоразумениям, мы будем обозначать величиной с «крышкой» квантовомеханические операторы, например в следующей формуле $\hat{p}_i$ --- квантовомеханический оператор импульса).

★ Производную функции по x будем обозначать следующими способами

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\vec{\nabla}\right) f = \left(\frac{1}{i}\hat{p}^0, \frac{1}{i}\hat{p}^i\right) f = -i\hat{p}^\mu f = \partial^\mu f = f^{;\mu} , \qquad (16)$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla}\right) f = \left(\frac{1}{i}\hat{p}^0, -\frac{1}{i}\hat{p}^i\right) f = -i\hat{p}_\mu f = \partial_\mu f = f_{;\mu} , \qquad (17)$$

где $\hat{p}^i = -i\vec{\nabla}$ --- обычный квантовомеханический оператор импульса в координатном представлении, а $\hat{p}_0 = i\partial_0$ по определению.

★ $(d+1)$-мерная дивергенция в этих обозначениях имеет следующий вид $\partial^\mu a_\mu = \partial a = -i\hat{p}a$. Оператор Даламбера

$$\Box = \partial_0^2 - \triangle = \partial^\mu \partial_\mu = \partial^2 .$$

★ Индексы, обозначаемые буквами из начала алфавита (как греческого, так и латинского), будут относиться к внутренним симметриям или нести другой (оговоренный) смысл, например, часто буквами из начала греческого алфавита мы будем обозначать спинорные индексы. Для этих индексов также выполняется правило суммирования.

Лагранжев формализм

- Объект изучения

> Квантовое (квантованное) поле -- это фундаментальная физическая концепция, в рамках которой формулируются и описываются свойства элементарных частиц и их взаимодействия.

- Метод квантовых полей позволяет описывать систему многих частиц единым физическим объектом --- квантовым полем. При этом, в отличие от квантовой механики, квантовая теория поля позволяет описывать такое важное свойство частиц, как взаимопревращение.

- Начнем с классических полей.
- Поле можно описать функцией $u(x)$ (набором функций для многокомпонентных полей), заданной на пространстве-времени.
- Как увидим в дальнейшем, поле -- это обычная механическая система с бесконечным числом степеней свободы. Поэтому для описания полей можно (и нужно) использовать методы теоретической механики.

- Два подхода:
  - Гамильтонов (канонический) формализм: введение обобщенных координат и импульсов, гамильтониана.
    - Удобен для описания систем со связями (большинство полей!)
    - Выделенная роль времени ➠ плохо совместим с релятивистским описанием ➠
    - Не будем пользоваться, но будем прибегать время от времени.
  - Лагранжев формализм: принцип наименьшего действия
    - Есть некоторые сложности при описании систем со связями (особенно при квантовании)
    - Прекрасно совместим с релятивистским описанием ➠
    - Будем им пользоваться, но иногда будем апеллировать к гамильтонову описанию.
- Наблюдение: при одинаковых условиях движение повторяется ➠
- Существуют законы движения ➠

★ Всегда можно ввести некоторую величину, принимающую свое экстремальное значение для реализуемого движения, например,

$$\begin{cases} 0 & \text{-- для реализуемого движения} \\ 1 & \text{-- для нереализуемого движения} \end{cases} \qquad (18)$$

★ ➠ Тривиально и не несет никакого (гносеологического) смысла

★ Однако если есть возможность построить такую величину, -- действие S, -- исходя из некоторых общих физических принципов, то мы получаем мощнейший принцип -- принцип наименьшего (стационарного) действия:

Для истинного движения действие экстремально

★ Итак, наша задача научиться строить действие.

- ★ Нужно выбрать динамические величины, описывающие движение
  - ★ В классической механике -- это $\vec{r}_a(t)$ -- радиус вектор a-ой материальной точки
  - $\vec{r}_a(t)$ можно рассматривать как набор полей в $(1+0)$-мерном пространстве
  - В теории поля -- это сами поля $u(x)$
- ★ Действие должно зависеть от u, но не может быть функцией полей, т.к. принцип наименьшего действия требует

$$\frac{\partial S}{\partial u} = 0 \Rightarrow u(x) = \text{const} \Rightarrow \tag{19}$$

- ★ Действие -- функционал $u(x)$ ➡ в общем случае

$$S[u(x)] = \int d^4x d^4y \ldots \mathscr{L}(u(x), u(y) \ldots ; \partial_x u(x), \partial_y u(y) \ldots ; \partial_x^n u(x), \partial_y^n u(y) \ldots ;$$
$$\partial_x^\infty u(x), \partial_y^\infty u(y) \ldots ; x, y, \ldots) \tag{20}$$

- ★ $\mathscr{L}$ -- лагранжиан или лагранжева плотность -- (пока) общая функция от полей, взятых в разных точках, их производных (в том числе "бесконечного" порядка) и координат. Ограничим его вид.

★ $\partial_x^\infty u(x) \Leftrightarrow u(y)$: ряд Тейлора

$$u(y \equiv x + \triangle x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u(x)}{\partial x^n} (\triangle x)^n \Rightarrow \tag{21}$$

колличество производных поля в лагранжиане ограничено: $n < \infty$

★ Если лагранжиан зависит от полей (производных) взятых в разных точках, то изменение поля в точке x должно приводить к мгновенному изменению поля в точке y для того, чтобы скомпенсировать изменение действия, которое должно оставаться минимальным. Это противоречит принципу близкодействия или локальности, говорящему, что взаимодействие передается от точки к точке с конечной скоростью ⇒ общее локальное действие

$$S[u] = \int d^4x \mathscr{L}(u(x), \partial u(x), \ldots \partial^{n<\infty} u(x), x) \Rightarrow \tag{22}$$

$$L(t) = \int d^3x \mathscr{L}(u(x), \partial u(x), \ldots \partial^{n<\infty} u(x), x) \text{-- функция Лагранжа} \tag{23}$$

★ Хотим построить “теорию всего сущего”, т.е. теорию, описывающую какую-либо систему в целом, а не ее части (подсистемы) ➠ лагранжиан не зависит явно от x. Явная зависимость от x означала бы, что есть другие поля (со своей динамикой), задающие эту зависимость, т.е. рассматриваемая система является подсистемой более общей системы, либо нарушалась бы трансляционная инвариантность: точки пространства-времени были бы неравноправны.

★ Хотим, чтобы согласно принципу соответствия воспроизводилась ньютоновская механика, т.е. уравнения движения, полученные из S, были максимум второго порядка по времени, а значит (релятивистская инвариантность) и по координате. Более того, старшие (> 2) производные по времени в уравнениях приводят в общем случае к патологиям, т.е. несостоятельным теориям ➠ (увидим) лагражиан (с точностью до полных производных) зависит только от поля и его первых производных:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(u(x), \partial u(x)) \tag{24}$$

- Хотим, чтобы теория соответствовала наблюдаемым симметриям ➠ действие должно быть инвариантным по отношению к преобразованиям симметрий ➠ $\mathscr{L}$ -- скалярная (с точностью до полных производных) фунция полей по отношению к соответствующим преобразованиям ➠
- Если преобразования симметрии являются непрерывными и глобальными (не зависят от x), то выполняется теорема Нетер, которая утверждает, что каждому такому преобразованию соответствует сохраняющейся заряд. Эти заряды
  - являются наблюдаемыми величинами ➠ действительные (эрмитовы) функционалы полей
  - выражаются линейно из лагранжиана ➠
- Лагранжиан (действие) -- действительная функция (эрмитов оператор) полей.

- ★ Важнейшая симметрия -- *релятивистская инвариантность* или инвариантность относительно *полной неоднородной группы Лоренца*. Эта симметрия является набором преобразований координат (трансляции, вращения, отражения), оставляющим инвариантным действие.
- ★ Частный случай -- трансляции по времени ➠ (теорема Нетер) сохраняющейся заряд -- энергия
- ★ Энергия E должна быть ограничена снизу, иначе система будет неустойчива: вакуум -- состояние с минимальной энергией -- будет распадаться. ➠
- ★ Лагранжиан должен приводить к ограниченной снизу энергии.
- ★ Лагранжиан (в квантовом случае) должен приводить к унитарной теории $\Leftrightarrow$ полная вероятность сохраняется. В частности, теория должна быть (?) перенормируемой -- очень грубо: в лагранжиане не должно быть констант с отрицательной размерностью в единицах массы.

- Еще раз перечислим требования к лагранжиану. Лагражиан должен
  - зависеть только от полей и их первых производных, взятых в одной точке

$$\mathscr{L}(x) = \mathscr{L}(u_a(x), \partial_\mu u_a(x)) \; ; \tag{25}$$

  - быть (псевдо)скалярной относительно преобразований из полной группы Пуанкаре функцией;
  - быть действительной функцией, в квантовом случае --- эрмитовым оператором;
  - обеспечивать ограниченность снизу энергии;
  - приводить к действию, инвариантному относительно других возможных симметрий;
  - обеспечивать унитарность (и перенормируемость) соответствующей квантовой теории.
- Строго говоря, все эти требования необязательны -- природа не знает о наших требованиях

Уравнения движения $\Leftrightarrow$ уравнения Эйлера-Лагранжа

★ Зададим вариацию поля $u_a(x) \to u_a(x) + \delta u_a(x)$

★ Вычислим вариацию действия

$$\delta S = S[u+\delta u] - S[u] = \int d^4x \mathscr{L}(u+\delta u, \partial(u+\delta u)) - \mathscr{L}(u, \partial u) \tag{26}$$

★ Для этого разложим лагранжиан в ряд Тейлора по δu вплоть до первого порядка:

$$\mathscr{L}(u+\delta u, \partial_\mu(u+\delta u)) = \mathscr{L}(u, \partial_\mu u) + \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_a}\delta u_a + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu u_a}\partial_\mu \delta u_a\right) + \mathscr{O}(\delta u^2) \tag{27}$$

★ Вариация (26)

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_a}\delta u_a + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu u_a}\partial_\mu \delta u_a\right) \tag{28}$$

★ Производная от вариации $\partial_\mu \delta u_a(x)$ не является независимой: изменение $\delta u(x)$ очевидно влечет и изменение производной

★ Проинтегрируем по частям второе слагаемое в (28) и "перекинем" производную с вариации с тем, чтобы эту вариацию можно было вынести за скобку. Для этого используем формулу дифференцирования произведения и формулу Гаусса-Грина-Ньютона-Лейбница -- интеграл от дивергенции (полной производной) по объему V равен интегралу по поверхности Σ, окружающей объем

$$\int\limits_V d^4x \partial^\mu F_\mu = \oint\limits_\Sigma d\Sigma^\mu F_\mu \tag{29}$$

★ Имеем

$$\delta S = \oint d\Sigma_\mu \delta u \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu u} + \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu u_a} \right) \delta u_a \tag{30}$$

★ Первое слагаемое -- поверхностный член -- исчезает в силу того, что $\delta u(x)\big|_\Sigma \equiv 0$, т.к. считается, что граничные и начальные условия заданы (фиксированы) ➠

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu u_a} \right) \delta u_a \tag{31}$$

★ Принцип наименьшего действия требует, чтобы для реального движения $\delta S = 0$ ➠ в силу произвольности вариации δu в объеме

$$\boxed{\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu u_a} = 0} \tag{32}$$

-- уравнения Эйлера-Лагранжа или уравнения движения (УД).

★ Как видно из вывода

- К ларганжиану всегда можно добавить дивергенцию (полную производную) произвольного вектора, в том числе константу ($\sim \partial_\mu x^\mu$). Это не повлияет на уравнения движения
- Так как лагранжиан локален и содержит только первые производные полей, то уравнения движения являются дифференциальными уравнениями максимум второго порядка.

- Если бы действие было нелокальным, то уравнения движения стали бы интегро-дифференциальными, что означало бы, что производные поля в точке определялись бы значением полей во всем пространстве $\Leftrightarrow$ нелокальность
- Если бы лагранжиан содержал старшие производные, то (с точность до полных производных) при выводе УД нам бы пришлось несколько раз перекидывать производные с вариации поля, что
  - модифицировало вывод и УД
  - привело к появлению старших (> 2) производных в УД
- В некоторых случаях граница Σ может быть не задана (гравитация), тогда поверхностный член не исчезает. Но в силу локальности следует приравнять к нулю оба интеграла в (30) по отдельности. Приравнивание к нулю поверхностного члена дает уравнение движения границы.
- В этих случаях добавление полной дивергенции также может привести к наблюдаемым последствиям и должно быть обосновано физическими соображениями.

Элементы теории групп

- Непустое множество G с заданной на нём бинарной операцией "$*$" -- групповое умножение: $G \times G \to G$ называется группой $(G, *)$ если выполнены следующие аксиомы:
  - ассоциативность: $\forall(a, b, c \in G) : (a * b) * c = a * (b * c)$
  - наличие единичного (нейтрального) элемента: $\exists e \in G \; \forall a : e * a = a * e = a$
  - наличие обратного элемента: $\forall a \in G \; \exists a^{-1} : a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$
- Если $\forall(a, b \in G) : a * b = b * a$, то группа коммутативная или абелева
- Подгруппой H группы G называется нетривиальное (не состоящее из единичного элемента) подмножество G, замкнутое относительно операции группового умножения: $\forall(a, b \in H) : a * b \in H$
- Примеры:
  - Множество Z целых чисел образуют группу с групповой оперцией "$+$" (обычное сложение)

М. Либанов

- ★ Множество Z целых чисел не образуют группу с групповой оперцией "$*$" (обычное умножение)
- ★ Множество N натуральных чисел не образуют группу ни с групповой оперцией "$+$" (обычное сложение), ни с обычным умножением
- ★ Группа Z целых чисел не имеет подгрупп с групповой оперцией "$+$" (обычное сложение), но множество Z имеет (тривиальное) подмножество, состоящее из одного элемента 1, образующего группу с групповой операцией умножение.
- ★ Пусть $n \in N$, тогда решения уравнения $x^n = 1$ образуют группу Z_n с групповой операцией обычное умножение. Могут ли быть подгруппы?
- ★ Множество комплексных квадратных $N \times N$ матриц с отличным от нуля детерминантом образуют группу $GL(N, C)$ -- полная линейная группа с групповой операцией "матричное умножение"
- Далее для матричных групп будем считать, что групповая опера-

ция -- это матричное умножение.

★ Множество действительных квадратных $N \times N$ матриц с отличным от нуля детерминантом образуют группу $GL(N,R)$ -- подгруппу $GL(N,C)$.

★ Множество унитарных матриц образуют подгруппу $U(n)$ группы $GL(N,C)$. Каким свойством обладает определитель унитарной матрицы?

★ Множество унитарных матриц с определителем $= 1$ образуют подгруппу $SU(n)$ группы $U(n)$ (S-- special, специальные).

★ Множество ортогональных матриц образуют подгруппу $O(n)$ группы $GL(n,R)$.

★ Множество ортогональных матриц с определителем $= 1$ образуют подгруппу $SO(n)$ группы $O(n)$.

Какие из перечисленных групп являются абелевыми?

- Представлением (линейным) группы называется отображение элементов группы, ставящее в соответствие элементу $a \in G$ линейный оператор Λ_a, действующий на некотором векторном пространстве V, и совместное с групповым умножением, т.е. должны выполняться свойства
  - $\Lambda_a \Lambda_b = \Lambda_{ab}$
  - $\Lambda_{a^{-1}} = \Lambda_a^{-1}$ ⇒ $\Lambda_e = 1$
- Пространство V называется пространством представления
- Размерностью представления называется размерность пространства представления
- Представление называется приводимым, если существует подпространство $U \in V$, замкнутое относительно действия операторов представления, т.е. $\forall u \in U, \forall a \in G : \Lambda_a u \in U$.
- В противном случае представление называется неприводимым. Очевидно, что изучение приводимых представлений сводится к изучению неприводимых.

★ Пример: рассмотрим группу $SO(N)$.

★ Рассмотрим N-мерное векторное пространство V столбцов $\vec{\upsilon} = (\upsilon_1, \ldots, \upsilon_N)^{\mathrm{T}}$

Для $\forall$ матрицы $M \in SO(N)$ мы можем ввести оператор $\Lambda(M) = M$, действующий в рассматриваемом пространстве по формуле

$$\Lambda_{\alpha\beta}(M)\upsilon_\beta = M_{\alpha\beta}\upsilon_\beta = u_\alpha \;\Leftrightarrow M\vec{\upsilon} = \vec{u} \in V \tag{33}$$

★ Очевидно, что построенная система операторов удовлетворяет свойствам представления. Таким образом мы построили векторное или фундаментальное представление $\mathbb{V}$ группы $SO(N)$. Это представление является неприводимым (почему?). Его размерность N.

★ Далее, расмотрим прямые произведения двух любых векторов из V: $w_{\alpha\beta} = \upsilon_\alpha u_\beta$. Очевидно, что такие объекты при действии фундаментального представления будут также преобразовываться по формуле

$$M_{\alpha\gamma}M_{\beta\delta}\upsilon_\gamma u_\delta = \upsilon'_\alpha u'_\beta \Leftrightarrow MwM^{\mathrm{T}} = w' \tag{34}$$

★ Однако преобразование (34) не является представлением, т.к. матрицы w не образуют векторного пространства (почему?).

★ Тем не менее мы можем рассмотреть произвольные матрицы $N \times N$ $t_{\alpha\beta}$, образующие векторное пространство T. Очевидно, что $w \in T$.

★ Определим действие группы на элементы T по формуле (34):

$$M_{\alpha\gamma} M_{\beta\delta} t_{\gamma\delta} = t'_{\alpha\beta} \Leftrightarrow M t M^{\mathrm{T}} = t', \quad (35)$$

т.е. на каждый индекс матрицы t действует матрица группы M.

★ Таким образом мы построили отображение элементов группы M в множество линейных операторов $M \to \Lambda^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}(M)$, действующих на t по формуле

$$\Lambda^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} t_{\gamma\delta} = t'_{\alpha\beta} \quad (36)$$

★ Эти операторы образуют представление группы (почему?) $\mathbb{T}$. Такое представление называется тензорным, а элементы $t_{\alpha\beta} \in T$ -- тензорами 2-го ранга (т.к. 2 индекса). Размерность T равна N^2.

★ Построенное тензорное представление является приводимым. Действительно, представим произвольную матрицу t в виде

$$t = \frac{1}{2}\left(t + t^{\mathrm{T}}\right) + \frac{1}{2}\left(t - t^{\mathrm{T}}\right) \equiv s + a, \quad s = s^{\mathrm{T}},\ a = -a^{\mathrm{T}} \tag{37}$$

★ Матрицы s и a образуют подпространства S симметричных матриц и A антисимметричных (кососимметричных) матриц пространства T (почему?)

★ Посмотрим, как действует построенное нами представление на указанных подпространствах:

$$s'^{\mathrm{T}} = (MsM^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = Ms^{T}M^{T} = MsM^{T} = s' \tag{38}$$

$$a'^{\mathrm{T}} = (MaM^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = Ma^{T}M^{T} = -MaM^{T} = -a', \tag{39}$$

т.е. при действии представления $S \to S$, а $A \to A$ ➠ представление $\mathbb{T}$ приводимо: $\mathbb{T} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{A}$

★ Представление $\mathbb{A}$ неприводимо (доказать!). Его размерность $N(N-1)/2$

★ Представление $\mathbb{S}$ (размерность $N(N+1)/2$) приводимо. Действительно, напишем для $\forall s \in S$

$$s = \left(s - \mathbb{1}\frac{Tr(s)}{N}\right) + \mathbb{1}\frac{Tr(s)}{N} \equiv s_T + \tau \tag{40}$$

★ Очевидно, что $Tr(s_T) = 0$, т.е. s_T -- бесследовые (Traseless) симметричные матрицы, образующие подпространство S_T размерности $N(N+1)/2 - 1$ пространства T (почему?).

★ Матрицы τ пропорциональны $\mathbb{1}$ и образуют подпространство S_S размерности 1.

★ Как действуют операторы Λ на s_T и τ?:

$$Tr(s'_T) = Tr(M s_T M^{\mathrm{T}}) \overset{\text{цикл.}}{=} Tr(M^{\mathrm{T}} M s_T) \overset{\text{орт.}}{=} Tr(s_T) = 0 \tag{41}$$

$$Tr(\tau') = \frac{Tr(s)}{N} Tr(M\mathbb{1}M^{\mathrm{T})} = Tr(s) = Tr(\tau) \tag{42}$$

т.е. действие операторов Λ на подпространстве S разбивается на два представления $\mathbb{S}_T$ и $\mathbb{S}_S$, действующих на подпространствах S_T и S_S соответственно. Показать, что эти представления неприводимы.

★ Таким образом

$$\mathbb{T} = \mathbb{A} \oplus \mathbb{S}_T \oplus \mathbb{S}_S \tag{43}$$

$$\dim\mathbb{T} = N^2 = \dim\mathbb{A} + \dim\mathbb{S}_T + \dim\mathbb{S}_S = \frac{N(N-1)}{2} + \frac{N(N+1)}{2} - 1 + 1 \tag{44}$$

Заметим

$$Tr(t') = t'_{\alpha\alpha} = Tr(MtM^{\mathrm{T}}) = Tr(t) = Tr(s) = t_{\alpha\alpha}, \tag{45}$$

т.е. след (или свертка двух индексов) не изменяется при действии представления.

Для матриц $w = \vec{\upsilon} \otimes \vec{u}$ след

$$Tr(w) = w_{\alpha\alpha} = \upsilon_\alpha u_\alpha = \vec{\upsilon}\vec{u}, \tag{46}$$

т.е. является скалярным произведением векторов, не изменяющимся при поворотах пространства. Таким образом, группа $SO(N)$ изоморфна группе поворотов N-мерного пространства.

- Следы $Tr(w)$ образуют 1-мерное векторное пространство, на котором действует представление $SO(N)$: $\Lambda(M) = 1$. Такое представление называется скалярным, а соответствующие элементы пространства -- скалярами или тензорами 0-го ранга
- Векторы υ_α являются тензорами 1-го ранга.
- ★ По аналогии можно рассмотреть векторные пространства объектов с n индексами $t_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$, на каждый из которых действует матрица M:

$$t'_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = M_{\alpha_1\beta_1}\ldots M_{\alpha_n\beta_n} t_{\beta_1\ldots\beta_n} \equiv \Lambda^{\beta_1\ldots\beta_n}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} t_{\beta_1\ldots\beta_n} \tag{47}$$

- ★ Можно проверить, что операторы $\Lambda^{\beta_1\ldots\beta_n}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ образуют представление группы $SO(N)$ размерности N^n, называемым тензорным представлением n-го ранга, а соответствующие элементы $t_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ -- тензорами n-ранга
- ★ Эти представления приводимы. Разбиение на неприводимые представления осуществляется путем симметризации и антисимметризации по индексам ➠ схемы Юнга

- ★ Свертка (упрощение) по двум индексам понижает ранг тензора на 2 ➠ способ строить скалярные величины (лагранжиан)
- ★ Итак, мы построили тензорные представления группы $SO(N)$. Они являются однозначными: $M \to \Lambda(M)$.
- ★ Существуют ли другие представления? Существуют двузначные $M \to \pm\Lambda(M)$ (более обще -- многозначные), такие представления называются спинорными. Мы их построим в дальнейшем для группы Лоренца.
- ★ Других представлений (кроме тензорных и спинорных) не существует.
- ★ Для других матричных групп представления можно строить аналогичным способом.

Релятивистская инвариантность и трансформационные свойства полей

★ КТП должна быть *релятивистски инвариантной* или инвариантной относительно преобразований из *полной неоднородной группы Лоренца.*

★ Нужно уметь строить инвариантные (скалярные) лагранжианы, т.к. мера d^4x инвариантна (показать!)

★ Нужно знать трансформационные свойства полей.

★ *Полной группой Лоренца* называется группа однородных линейных преобразований координат четырехмерного ($(d+1)$-мерного в общем случае) пространства-времени, которые оставляют инвариантной квадратичную форму $x^2 = x_0^2 - \vec{x}^2$ и не меняют направления времени, т.е. она включает вращения во всех плоскостях (6 преобразований) и отражения пространственных осей. При этом детерминанты преобразований поворотов равны $+1$, а детерминанты отражения осей -1. Обозначается $O_{\uparrow}(1,3)$. Стрелка $\uparrow$ означает, что знак времени не меняется (ортохронные преобразования). O означает, что преобразования являются (псевдо)ортогональными, т.к. пространство Минковского псевдоевклидово, $(1,3)$ подчеркивает псевдоевклидовость пространства: 1 временная координата и 3 -- пространственных.

★ Выделяют *собственную группу Лоренца* преобразований с детерминантом $+1$, включающую шесть поворотов и отражения относительно четного числа пространственных осей, сводящихся к поворотам. Обозначают $SO_{\uparrow}(1,3)$.

★ Если полную группу Лоренца дополнить преобразованиями трансляций по всем четырем осям, то мы придем к *полной неоднородной группе Лоренца* или к *полной группе Пуанкаре*. Инвариантность относительно этой группы называется релятивистской или лоренцевой инвариантностью.

★ Наконец, включение операции отражения времени приводит нас к *общей группе Пуанкаре*.

★ Запишем преобразования координат из полной группы Пуанкаре (далее для краткости -- преобразования Лоренца) в виде

$$x \to x' = Lx \ , \tag{48}$$

$$x'^{\mu} = \Omega^{\mu}_{\cdot\nu} x^{\nu} + a^{\mu} = \Omega^{\mu\nu} x_{\nu} + a^{\mu} \tag{49}$$

$$g_{\mu\nu}\Omega^{\mu\lambda}\Omega^{\nu\rho} = g^{\lambda\rho} \text{ или } \Omega^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda}\Omega^{\lambda\cdot}_{\cdot\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{50}$$

Условие (50) -- это условие псевдоортогональности. Из него следует, что $\det \Omega = \pm 1$. Благодаря этому условию сохраняется интервал $(x-y)^2$.

★ Переход от одной системы отсчета x к другой x' по закону (49) порождает однородное линейное преобразование компонент полевой функции

$$u(x) \to u'(x') = \Lambda u(x) \ .$$

- Действительно, для малых полей должен выполняться принцип суперпозиции, который совместен только с линейными преобразованиями полей.
- Кроме того, если бы преобразования полей были бы неоднородны, то переход в другую систему отсчета порождал бы появление нефизического поля (если бы этот вклад был физическим, т.е. наблюдаемым, то существовала бы выделенная система отсчета, в которой поле, например, исчезало, что противоречит принципу релятивистской инвариантности), которое, не теряя общности, можно положить равным нулю.

★ Матрица преобразования Λ целиком определяется матрицей лоренцева преобразования L: $\Lambda = \Lambda_L$, кроме того,

$$\Lambda_{L_1}\Lambda_{L_2} = \Lambda_{L_1 L_2} \text{ и } \Lambda_{L^{-1}} = \Lambda_L^{-1} \tag{51}$$

т.е. Λ_L образуют некоторое линейное представление полной группы Пуанкаре, а поля $\in$ пространству представления. Будем считать, что поля принадлежат конечномерному представлению группы Пуанкаре (и имеют конечное число компонент).

★ Тензорные (однозначные) представления строятся в полной аналогии с примером с группой $SO(N)$.

★ Закон преобразования контрвариантного (псевдо)тензора N-го ранга при преобразованиях координат имеет вид

$$T'^{\mu_1,\mu_2\dots\mu_N}(x') = P\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\nu_1}}\dots\frac{\partial x'^{\mu_N}}{\partial x^{\nu_N}}T^{\nu_1,\nu_2\dots\nu_N}(x) = P\Omega^{\mu_1}_{.\nu_1}\dots\Omega^{\mu_N}_{.\nu_N}T^{\nu_1,\nu_2\dots\nu_N}(x)\ , \tag{52}$$

где

$$P = \begin{cases} 1 & \text{тензор} \\ \det L & \text{псевдотензор} \end{cases} . \tag{53}$$

★ В частности, при преобразованиях трансляций имеем

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} \quad u(x) \to u'(x') = u(x)\ . \tag{54}$$

Этот же закон трансляций справедлив и для спинорных полей. Однако, в случае $\Omega^{\mu\nu} \neq g^{\mu\nu}$ закон преобразований спинорных полей более сложен.

★ Ковариантный (псевдо)тензор N-го ранга преобразуется по обратному закону

$$T'_{\mu_1,\mu_2\ldots\mu_N}(x') = P\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}}\ldots\frac{\partial x^{\nu_N}}{\partial x'^{\mu_N}}T_{\nu_1,\nu_2\ldots\nu_N}(x) = P\Omega^{\cdot\nu_1}_{\mu_1\cdot}\ldots\Omega^{\cdot\nu_N}_{\mu_N\cdot}T_{\nu_1,\nu_2\ldots\nu_N}(x)\ , \quad (55)$$

★ Примеры:

★ Тензор нулевого ранга преобразуется по закону

$$u'(x') = Pu(x)\ , \quad (56)$$

и называется *скаляром* или *псевдоскаляром*. А именно, при отражении нечетного числа пространственных осей

$$u'(x') = \begin{cases} u(x) & \text{скаляр} \\ -u(x) & \text{псевдоскаляр}\ . \end{cases} \quad (57)$$

Тензор первого ранга преобразуется по закону

$$u'^{\mu}(x') = P\Omega^{\mu}_{\cdot\nu}u^{\nu}(x)\ , \quad (58)$$

и называется *контравариантным вектором (псевдовектором)*.

★ *Ковариантный вектор*

$$u_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu \tag{59}$$

преобразуется по закону

$$u'_\mu(x') = P\Omega_{\mu\cdot}^{\ \nu} u_\nu(x)\ . \tag{60}$$

★ При этом при отражении нечетного числа пространственных осей соответствующие компоненты вектора меняют знак, а псевдовектора --- нет. В частности для отражения трёх пространственных осей $u^0(x') = u^0(x)$, а

$$u'^i(x') = \begin{cases} -u^i(x) & \text{вектор} \\ u^i(x) & \text{псевдовектор.} \end{cases} \tag{61}$$

★ Спинорное (двузначное $L \to \pm\Lambda_L$) представление построим позже.

Теорема Нётер

- Мы уже упоминали, что симметрии системы порождают некоторые сохраняющиеся величины. Взаимосвязь между симметриями и сохраняющимися величинами дает известная теорема Нётер. Мы не будем приводить здесь доказательство этой теоремы, а лишь приведем ее формулировку:
- *Всякому конечно-параметрическому (зависящему от s постоянных параметров) непрерывному преобразованию функций поля и координат, обращающему в нуль вариацию действия (при условии выполнения уравнений движения), соответствует s динамических инвариантов, т.е. сохраняющихся во времени комбинаций функций поля и их производных.*

★ А именно, пусть

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \ , \quad \delta x^\mu = \sum_{n=1}^{s} X^\mu_{(n)} \delta\omega_n \ , \tag{62}$$

$$u_a(x) \to u'_a(x') = u_a(x) + \delta u_a(x) \ , \quad \delta u_a(x) = \sum_{n=1}^{s} \Psi_{a(n)} \delta\omega_n \ , \tag{63}$$

где $\delta\omega_n$ являются инфинитозимальными параметрами преобразований, а $X^\mu_{(n)}$ и $\Psi_{a(n)}$ называются генераторами преобразований координат и полей соответственно. Тогда существуют сохраняющиеся токи

$$\Theta^\mu_{(n)}(x) = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu u_a} \left(\Psi_{a(n)} - \partial_\nu u_a X^\nu_{(n)} \right) - \mathscr{L} \cdot X^\mu_{(n)} \ , \tag{64}$$

т.е.

$$\partial_\mu \Theta^\mu_{(n)}(x) = 0 \ , \tag{65}$$

и соответствующие им сохраняющиеся заряды

$$Q_{(n)} = \int d\mathbf{x} \Theta^0_{(n)}(x) \ , \tag{66}$$

$$\frac{dQ_{(n)}}{dt} = 0 \ . \tag{67}$$

- Заметим, что токи (64) не являются однозначно определенными --- к ним можно добавить дивергенцию от антисимметричного тензора второго ранга:

$$\Theta^{\mu}_{(n)}(x) \to \Theta'^{\mu}_{(n)}(x) = \Theta^{\mu}_{(n)}(x) + \partial_{\nu} f^{\mu\nu}_{(n)} \ ; \ \ f^{\mu\nu}_{(n)} = -f^{\nu\mu}_{(n)} \ , \tag{68}$$

что не влияет на их сохранение.

- Токи (64) и наблюдаемые заряды (66) выражаются из лагранжиана линейным образом. Поэтому из действительности наблюдаемых следует необходимость действительности лагранжиана.

★ Рассмотрим некоторые примеры.

★ Бесконечно малые трансляции. В этом случае

$$X_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu\,, \quad \Psi_{a(\mu)} = 0\,. \tag{69}$$

★ Подставляя эти выражения в ток (64), приходим к тензору второго ранга

$$T_\mu^{\cdot\nu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{a;\nu}(x)} \partial_\mu u_a(x) - \mathscr{L}\delta_\mu^\nu\,, \tag{70}$$

★ или в полностью контравариантном виде

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{a;\nu}(x)} \partial^\mu u_a(x) - \mathscr{L} g^{\mu\nu}\,. \tag{71}$$

★ Этот тензор называется *каноническим (или нётеровским) тензором энергии-импульса*.

♣ Заметим, что в общем случае он не является симметричным. Его можно сделать таковым путем добавления дивергенции антисимметричного по двум индексам тензора третьего ранга.

* Существует другой способ получать сразу симметричный тензор энергии-импульса. Оказывается

$$T_E^{\mu\nu}(x) = 2\frac{\delta S[g_{\mu\nu}(x)]}{\delta g_{\mu\nu}(x)}\bigg|_{g_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)} . \qquad (72)$$

Такой тензор энергии-импульса называется *метрическим или эйнштейновским*.

★ Сохраняющейся во времени заряд представляет собой 4-вектор импульса

$$P^\mu = \int d\mathbf{x} T^{\mu 0} . \qquad (73)$$

★ Нулевая компонента этого вектора P^0 представляет собой в классической механике энергию --- отсюда и название.

★ Рассмотрим бесконечно малые 4-вращения (собственные преобразования Лоренца)

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + x_{\nu} \delta \omega^{\mu\nu} \ .$$

★ Лагранжиан инвариантен относительно таких преобразований.

★ Соответствующий сохраняющейся ток, называемый тензором момента, равен (показать!)

$$J_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\rho} = (x_{\nu} T_{\mu}^{\cdot\rho} - x_{\mu} T_{\nu}^{\cdot\rho}) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_{\rho} u_a} \Sigma_{a\mu\nu}^{b} u_b \ , \qquad (74)$$

где $T_{\mu}^{\cdot\rho}$ дается выражением (70), а $\Sigma_{a\mu\nu}^{b}$ -- генератор 4-вращений в представлении, по которому преобразуется поле при преобразованиях Лоренца,

$$\delta u_a(x) = \frac{1}{2} \Sigma_{a\mu\nu}^{b} u_b(x) \delta \omega_{\mu\nu}. \qquad (75)$$

★ Сохраняющемуся току $J^{\mu\nu,\rho}$ соответствует сохраняющейся заряд

$$J^{\mu\nu} = \int d\mathbf{x} J^{\mu\nu,0}, \tag{76}$$

который мы также будем называть тензором момента.

★ Если u -- скалярное поле, то $\Sigma^b_{a\mu\nu} = 0$ (показать!)

★ Если u -- векторное поле, то $\Sigma^\sigma_{\lambda\mu\nu} = g_{\lambda\mu}\delta^\sigma_\nu - g_{\lambda\nu}\delta^\sigma_\mu$. (показать!)

★ Величина, стоящая в круглых скобках в (74), называется тензором орбитального момента поля $L^{\cdot\cdot\rho}_{\mu\nu}$,

★ Второй член в (74)

$$S^{\cdot\cdot\rho}_{\mu\nu} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\rho u_a} \Sigma^b_{a\mu\nu} u_b \ , \tag{77}$$

характеризует поляризационные свойства поля и соответствует *спиновому* моменту частиц.

★ Так, трехмерный вектор орбитального момента и вектор спина соответственно равны

$$L_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\int d\mathbf{x} L^0_{jk} , \qquad (78)$$

$$S_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\int d\mathbf{x} S^0_{jk} . \qquad (79)$$

- Объяснить выбор знаков в (78), (79).
- В силу антисимметрии по индексам μ,ν тензор момента (74) при $\rho = 0$ имеет шесть компонент. Три из них $J^{\cdot\cdot 0}_{ij}$, соответствующие симметрии относительно трёхмерных поворотов, приводят к хорошо известному сохраняющемуся (псевдо)вектору углового момента $J_i = L_i + S_i$. Какой сохраняющейся величине соответствуют оставшиеся три компоненты $J^{\cdot\cdot 0}_{0i}$, соответствующие бустам? Используются ли они в физике?
- ★ Показать, что в общем случае тензоры орбитального момента и спина **не сохраняются по отдельности**.

- Показать, что необходимым и достаточным условием сохранения орбитального момента (и, тем самым, спина) является условие симметричности нетеровского тензора энергии-импульса.

- Спин поля в общем случае не сохраняется.

- Однако в некоторых случаях можно получить сохраняющуюся величину, характеризующую поляризационные свойства поля. Действительно, рассмотрим вектор

$$W_\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}J^{\nu\lambda}P^{\rho}. \tag{80}$$

- Этот вектор, очевидно, сохраняется, так как составлен из сохраняющихся величин.

- Как можно увидеть на конкретных примерах, для конфигураций полей, распространяющися в определенном направлении, характеризующемся вектором p^μ, плотность импульса поля $T^{\mu 0} \sim p^\mu$ и сам импульс $P^\mu \sim p^\mu$

★ Вклад орбитального момента в (80) исчезает

★ W_μ становится сохраняющейся величиной, характеризующий поляризационные свойства поля.

★ Для полей с $P_\mu^2 > 0$, которые, как мы увидим в дальнейшем, описывают массивные частицы, вместо (80) обычно рассматривают сохраняющейся вектор Паули-Любанского

$$\frac{W_\mu}{\sqrt{P^2}} \tag{81}$$

который в системе покоя $\mathbf{P} = 0$ совпадает с вектором спина (79) (показать!) и поэтому может рассматриваться как релятивистское обобщение понятия спина.

★ Рассмотрим теорию одного комплексного поля u.

★ Как уже говорилось, лагранжиан должен быть действительной функцией.

★ Это может быть достигнуто, если потребовать, чтобы он оставался инвариантным относительно (глобальных, т.е. не зависящих от координат) фазовых вращений поля

$$u' = \mathrm{e}^{i\alpha} u, \tag{82}$$

образующих представление группы $U(1)$, изоморфной группе $SO(2)$ (показать!)

★ Найти! соответствующий нетеровский ток и показать, что он действительно сохраняется на уравнениях движения.