М.В. Либанов

КТП XV. Ренормгруппа

Содержание

Перенормировочный произвол и ренормгруппа

- Существует целый набор перенормировочных схем, отличающихся либо
  - различными точками нормировки в импульсном пространстве:
    - ✗ перенормировка на массовой поверхности,
    - ✗ перенормировка при нулевых импульсах и т.д.,
  - либо способом вычитания расходимостей: MS и $\overline{MS}$.
- На первый взгляд такой произвол приводит к разным теориям, так как физические параметры содержат произвол, связанный с выбором перенормировочной схемы.
- В действительности это не так – выбор различных схем приводит лишь к репараметризации теории.
- Физически наблюдаемые величины не должны зависеть от способа параметризации теории.
- Это последнее требование накладывает ряд связей на параметры теории и приводит к понятию *ренормгруппы*

- Рассмотрим теорию $\lambda\varphi^4$.
- Лагранжиан этой теории можно записать в трех разных, но эквивалентных, формах.

❶ Во-первых, это исходный неперенормированный лагранжиан

$$\mathscr{L}_0 = \frac{(\partial_\mu\varphi_0)^2}{2} - \frac{m_0^2\varphi_0^2}{2} - \frac{\lambda_0\varphi_0^4}{4!}\,, \tag{1}$$

❷ во-вторых, лагранжиан, выраженный через перенормированные поля и параметры:

$$\varphi = Z_\varphi^{-1/2}\varphi_0\,,\quad \lambda = Z_\lambda^{-1}Z_\varphi^2\lambda_0\,,\quad m^2 = m_0^2 + \delta m^2\,, \tag{2}$$

$$\mathscr{L}_0 = Z_\varphi\frac{(\partial_\mu\varphi)^2}{2} - Z_\varphi\frac{(m^2-\delta m^2)\varphi^2}{2} - Z_\lambda\frac{\lambda\varphi^4}{4!}\,, \tag{3}$$

❸ и третья форма

$$\mathscr{L}_0 = \mathscr{L} + \triangle\mathscr{L}\,, \tag{4}$$

где

$$\mathscr{L} = \frac{(\partial_\mu \varphi)^2}{2} - \frac{m^2\varphi^2}{2} - \frac{\lambda\varphi^4}{4!} \tag{5}$$

— основной перенормированный лагранжиан, а

$$\triangle\mathscr{L} = \triangle Z_\varphi \frac{(\partial_\mu \varphi)^2}{2} - \frac{\triangle m^2\varphi^2}{2} - \frac{\triangle\lambda\varphi^4}{4!} \tag{6}$$

— лагранжиан контрчленов, и

$$\triangle Z_\varphi = Z_\varphi - 1\ , \quad \triangle m^2 = (m^2 - \delta m^2)Z_\varphi - m^2\ , \quad \triangle\lambda = \lambda(Z_\lambda - 1)\ . \tag{7}$$

- Подчеркнем, что в левых частях равенств (1), (3) и (4) стоит один и тот же лагранжиан $\mathscr{L}_0$.
- Рассмотрим третью форму лагранжиана (4), (5).
- $\mathscr{L}$ в уравнении (5) — это перенормированный лагранжиан, и все величины, входящие в него, являются конечными.
- Но, они не являются «физическими» в том смысле, что они в общем случае непосредственно не измеряются в эксперименте:

- Рассмотрим схему вычитаний в импульсном пространстве и в ней собственную энергию поля.

- Пусть точка нормировки будет M^2

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(M^2) + \Sigma'(M^2)(p^2 - M^2) + \tilde{\Sigma}(p^2, M^2)\ , \tag{8}$$

$\tilde{\Sigma}(p^2, M^2)$ — конечная и обладает следующими свойствами:

$$\tilde{\Sigma}(M^2, M^2) = 0\ , \quad \left.\frac{\partial \tilde{\Sigma}(p^2, M^2)}{\partial p^2}\right|_{p^2 = M^2} = 0\ . \tag{9}$$

- Полный перенормированный пропагатор выражается через $\tilde{\Sigma}(p^2, M^2)$:

$$-iG_R(p^2) = \frac{i}{p^2 - m^2 - \tilde{\Sigma}(p^2, M^2)}\ . \tag{10}$$

- Видно, что, так как в общем случае $\tilde{\Sigma}(m^2, M^2) \neq 0$ (при $m^2 \neq M^2$), то и G_R не имеет полюса при $p^2 = m^2$, т.е. m^2 не является «физической» массой — «физическая» масса является полюсом пропагатора, т.е. должна удовлетворять уравнению

$$m_{\rm ph}^2 - m^2 - \tilde{\Sigma}(m_{\rm ph}^2, M^2) = 0\ . \tag{11}$$

- Из этого уравнения можно найти $m_{\rm ph}^2$ как функцию m^2 и M^2

$$m_{\rm ph}^2 = f(m^2, M^2)\ , \tag{12}$$

- В этом смысле m^2 также является «физической» величиной.
- С другой стороны, уравнение (12) можно обратить и выразить m^2, как функцию $m_{\rm ph}^2$ и M^2:

$$m^2 = m^2(m_{\rm ph}^2, M^2)\ . \tag{13}$$

- Отличие этого уравнения от уравнения (12) состоит в том, что по своему определению $m_{\rm ph}^2$ не зависит от M^2 (т.к. $m_{\rm ph}^2$ определяется при $M^2 = m_{\rm ph}^2$, т.е. в схеме вычитаний на массовой поверхности):
- $m_{\rm ph}^2$ является действительно независимым аргументом в (13),

- Но, в силу (13), m^2 в (12) является функцией M^2.

- Таким образом, мы видим, что параметр m^2, стоящий в перенормированном лагранжиане, зависит от точки вычитания M^2, или, другими словами, от схемы перенормировки.

- Еще более странная ситуация происходит в схеме минимальных вычитаний.

- В этой схеме вообще нельзя наложить условий типа (9).

- Однако, аналог $\tilde{\Sigma}$ — величина, получаемая в $\overline{MS}$-схеме после вычитания полюсов, также будет содержать произвол, связанный с произвольным выбором размерного параметра μ,

- m^2 будет являться функцией этого параметра $m^2 = m^2(\mu)$.

- Заметим, что все сказанное выше относится в равной степени не только к массе, но и к константе связи λ — она также будет зависеть от того, в какой точке мы производим вычитание.

- Ясно, однако, что физически-наблюдаемые величины, такие как m_{ph} не должны зависеть от схемы перенормировки.

- Это требование накладывает определенные связи на параметры, определенные в разных перенормировочных схемах.

- Рассмотрим две различные схемы перенормировки R и R', отличающихся, например, различными точками вычитаний M и M' в схеме вычитаний в импульсном пространстве, или μ и μ' в $\overline{MS}$-схеме.

- Исходные неперенормированный лагранжиан один и тот же в обеих схемах

$$\mathscr{L}_0(\varphi_0) = \mathscr{L}_0(Z_\varphi(R)^{1/2}\varphi_R) = \mathscr{L}_0(Z_\varphi(R')^{1/2}\varphi_{R'}) \,, \tag{14}$$

где

$$\varphi_R = Z_\varphi(R)^{-1/2}\varphi_0 \,, \quad \varphi_{R'} = Z_\varphi(R')^{-1/2}\varphi_0 \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{R'} &= Z_\varphi^{-1/2}(R',R)\varphi_R \\ Z_\varphi(R',R) &= \frac{Z_\varphi(R')}{Z_\varphi(R)} \,. \end{aligned} \tag{16}$$

- Уравнение (16) означает, что перенормированные поля в различных схемах связаны между собой **конечной** мультипликативной константой (несмотря на то, что Z_φ может быть бесконечной).
- Аналогично получаем для масс и констант связи:

$$\lambda_{R'} = Z_\lambda^{-1}(R',R)Z_\varphi^2(R',R)\lambda_R \quad (17)$$

$$m_{R'}^2 = m_R^2 + \delta m^2(R',R) \ , \quad (18)$$

где

$$Z_\lambda(R',R) = \frac{Z_\lambda(R')}{Z_\lambda(R)} \ , \quad \delta m^2(R',R) = \delta m^2(R') - \delta m^2(R) \ , \quad (19)$$

и являются конечными.

- Операцию, переводящую величины, относящиеся к схеме R, в величины в схеме R', можно рассматривать как преобразование от R к R'.
- Множество всех таких преобразований образует группу, которая называется *ренормализационной* (РГ).

- При этом инвариантность теории относительно таких преобразований (т.е. независимость физических величин от параметров преобразований), называют *ренорминвариантностью*.

- Подчеркнем, что ренорминвариантность необходимо доказывать:
  - Именно, необходимо доказать, что изменения в перенормировочном предписании можно скомпенсировать путем переопределения параметров теории.
  - Доказательство же последнего тесно связано с перенормируемостью теории.
  - Действительно, для неперенормируемых теории переход от одной схемы к другой может вызвать появление дополнительных параметров, после чего ни о какой инвариантности не может быть и речи.

- Связь между функциями Грина в различных схемах может быть получена из того факта, что

$$\varphi_{R'} = Z_\varphi^{-1/2}(R', R)\varphi_R \equiv \xi\varphi_R \;, \qquad (20)$$

и

$$G_N(p_1, \ldots p_N, \lambda, m, \{R\}) = \xi^{-N} G_N(p_1, \ldots p_N, \lambda', m', \{R'\}) \;, \qquad (21)$$

где $\{R\}$ является аргументом функции Грина.

- Например, это могут быть различные M в схеме вычитаний в импульсном пространстве, или различные μ в $\overline{MS}$-схеме.

Уравнение ренормгруппы

- Переход от одной перенормировочной схемы к другой осуществляется РГ-преобразованиями.
- Нашей ближайшей целью является выписать явно эти РГ-преобразования
- Научиться, зная функции Грина, массы и константы связи в одной схеме, вычислять их в любой другой.
- Будем работать для простоты с *MS*-схемой.
- Переход от одной схемы к другой осуществляется заменой $\mu \to \mu'$.
- При этом мы хотим получить

$$\lambda' = \lambda'(\lambda, m, \mu, \mu') \ , \qquad (22)$$

$$m'^2 = m'^2(\lambda, m, \mu, \mu') \ , \qquad (23)$$

$$\xi = \xi(\lambda, m, \mu, \mu') \ . \qquad (24)$$

- Из вышесказанного следует, что для каждого значения μ существуют вполне определенные значения $\lambda(\mu)$ и $m(\mu)$.
- Эти параметры называются *эффективными* или *бегущими*.
- Наша цель – вывести дифференциальные уравнения для $\lambda(\mu)$ и $m(\mu)$.
- Введем функции

$$\beta = \mu\frac{d\lambda(\mu)}{d\mu} = \frac{d\lambda(\mu)}{d\ln\mu} \tag{25}$$

$$\gamma_m = -\frac{1}{m^2}\frac{dm^2(\mu)}{d\ln\mu}\,. \tag{26}$$

- Эти функции называются *ренормгрупповыми коэффициентами*.
- Очевидно что, зная эти функции, можно вычислить $\lambda(\mu)$ и $m(\mu)$, решая дифференциальные уравнения (25) и (26).

- Для того чтобы найти ренормгрупповые коэффициенты, проще всего воспользоваться независимостью голой константы связи и массы от μ (в размерной регуляризации от μ не зависит $\mu^{2\varepsilon}\lambda_0$):

$$\mu\frac{d(\mu^{2\varepsilon}\lambda_0)}{d\mu} = \left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta\frac{\partial}{\partial\lambda} - \gamma_m m^2\frac{\partial}{\partial m^2}\right)(\mu^{2\varepsilon}\lambda_0) = 0\ , \qquad (27)$$

$$\mu\frac{dm_0^2}{d\mu} = \left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta\frac{\partial}{\partial\lambda} - \gamma_m m^2\frac{\partial}{\partial m^2}\right)m_0^2 = 0\ . \qquad (28)$$

- Вспомним теперь, что λ_0, m_0 связаны с λ, m следующими соотношениями:

$$\lambda_0 = Z_\lambda Z_\varphi^{-2}\lambda\ , \quad m_0^2 = m^2 - \delta m^2\ . \qquad (29)$$

- Предположим теперь, что мы умеем вычислять Z_λ, Z_φ и δm^2 в некотором порядке теории возмущений.

- Тогда, подставляя λ_0 и m_0 в (27) и (28), мы можем найти β и γ_m.

- Продемонстрируем только что сказанное в однопетлевом приближении:

$$Z_\varphi = 1\,, \tag{30}$$

$$Z_\lambda = 1 + 3\frac{\lambda}{32\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}\,, \tag{31}$$

$$\delta m^2 = -m^2\frac{\lambda}{32\pi^2}\frac{1}{\varepsilon} \quad (29) \tag{32}$$

$$\mu^{2\varepsilon}\lambda_0 = \lambda\mu^{2\varepsilon}\left(1 + 3\frac{\lambda}{32\pi^2}\frac{1}{\varepsilon} + \mathscr{O}(\lambda^2)\right)\,, \tag{33}$$

$$m_0^2 = m^2\left(1 + \frac{\lambda}{32\pi^2}\frac{1}{\varepsilon} + \mathscr{O}(\lambda^2)\right)\,. \tag{34}$$

- Подставим теперь (33) в (27) и найдем

$$2\varepsilon\lambda\mu^{2\varepsilon}\left(1 + 3\frac{\lambda}{32\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}\right) + \beta\mu^{2\varepsilon}\left(1 + 3\frac{2\lambda}{32\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}\right) = 0\,, \tag{35}$$

$$\beta = -2\varepsilon\lambda \frac{\left(1+3\frac{\lambda}{32\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\left(1+3\frac{2\lambda}{32\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}\right)} \overset{\lambda\to 0}{=} -2\varepsilon\lambda\left(1+3\frac{\lambda}{32\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(1-3\frac{2\lambda}{32\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}\right) \overset{\varepsilon\to 0}{=}$$
$$= -2\varepsilon\lambda + \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + \mathscr{O}(\lambda^3)\,. \quad (36)$$

Подставляем найденную β-функцию (36) и (34) в (28) и находим

$$\left(-2\cancel{\varepsilon}\lambda + \cancel{\frac{3\lambda^2}{16\pi^2}}\right)\left(\frac{m^2}{32\pi^2\cancel{\varepsilon}} + \cancel{\mathscr{O}(\lambda^1)}\right) - \gamma_m m^2\left(1+\frac{\lambda}{32\pi^2}\frac{1}{\varepsilon} + \mathscr{O}(\lambda^2)\right) = 0\,, \quad (37)$$

$$\gamma_m = -\frac{\lambda}{16\pi^2}\,. \quad (38)$$

Два замечания по поводу полученных результатов:

1. важно учитывать член $2\varepsilon\lambda$ в β-функции (36) при вычислении γ_m;
2. во всех порядках теории возмущений в *MS*-схеме β и γ_m не зависят от m и μ.

- Общее вычисление ренормгрупповых коэффициентов можно провести, учитывая, что

$$\mu^{2\varepsilon}\lambda_0 = \mu^{2\varepsilon}\left(\lambda + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(\lambda)}{(2\varepsilon)^n}\right), \tag{39}$$

$$m_0 = m\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n(\lambda)}{(2\varepsilon)^n}\right). \tag{40}$$

- Из этих разложений следует в частности утверждение о независимости РГ-коэффициентов от m и μ:
- Действительно, в *MS*-схеме коэффициенты при полюсах a_n и b_n не зависят от μ. А так как они безразмерны, то и от m.
- Подставим (39) в (27):

$$2\varepsilon\lambda + a_1 + \mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2\varepsilon)^n}\left(\mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\frac{\partial a_n}{\partial\lambda} + a_{n+1}\right) = 0\,. \tag{41}$$

- Далее, $\beta = \mu\partial\lambda/\partial\mu$ должна быть регулярна при $\varepsilon \to 0$, поэтому ее можно представить в виде

$$\mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu} = d_0 + 2\varepsilon d_1 + \sum_{k=2}^{\infty}(2\varepsilon)^k d_k \ . \tag{42}$$

- Подставим это разложение в (41) и приравняем коэффициенты при различных степенях ε (в силу произвольности ε) к нулю.
- Рассмотрим сперва степени ε, большие 2. Имеем ($a'_n = \partial a_n/\partial\lambda$),

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 \ &: \quad d_2 + \sum_{n=1}^{\infty} d_{n+2}a'_n = 0 \\
\varepsilon^3 \ &: \quad d_3 + \sum_{n=1}^{\infty} d_{n+3}a'_n = 0 \\
\ldots \\
\varepsilon^k \ &: \quad d_k + \sum_{n=1}^{\infty} d_{n+k}a'_n = 0 \ .
\end{aligned} \tag{43}$$

- Систему (43) можно переписать как

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1' & a_2' & a_3' & \dots \\ 0 & 1 & a_1' & a_2' & \dots \\ 0 & 0 & 1 & a_1' & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ & & \dots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ \vdots \end{pmatrix} = 0 \qquad (44)$$

- Определитель (бесконечной) матрицы, стоящей в правой части равен 1,

- Система (44) или (43) имеет только тривиальное решение:

$$d_k = 0 \text{ при } k \geq 2\ . \qquad (45)$$

- Учитывая это обстоятельство, рассмотрим теперь в (41) степени ε, меньшие 2:

$$\varepsilon^1 \ : \quad \lambda + d_1 = 0 \ , \tag{46}$$

$$\varepsilon^0 \ : \quad a_1 + d_1 \frac{\partial a_1}{\partial \lambda} = -d_0 \ , \tag{47}$$

$$\varepsilon^{-k} \ : \quad \left(1 + d_1 \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) a_{k+1} = -d_0 \frac{\partial a_k}{\partial \lambda} \ . \tag{48}$$

- Из уравнений (46) и (47) следует, что

$$\beta = \frac{\partial \lambda}{\partial \ln \mu} = d_0 + 2\varepsilon d_1 = -a_1 + \lambda \frac{\partial a_1}{\partial \lambda} - 2\lambda\varepsilon \ , \tag{49}$$

- Для вычисления β-функции нам достаточно знать только простые полюса в разложении λ.

- Кроме того, коэффициенты перед старшими степенями в разложении λ по ε могут быть вычислены с помощью рекуррентных соотношений (48).

- Это очень неожиданный результат.

- Действительно, он позволяет вычислять главное поведение по $1/\varepsilon$ в старших петлях, не вычисляя сами петли.
- Например, чтобы узнать главную особенность ($1/\varepsilon^2$) в двухпетлевом приближении достаточно найти a_1 в однопетлевом приближении и воспользоваться уравнением (49) при $k = 1$.
- Зная β-функцию (49), можно найти (найти!) γ_m-функцию, воспользовавшись (40) и (28):

$$\gamma_m = -\lambda \frac{\partial b_1}{\partial \lambda}\,, \tag{50}$$

$$\lambda \frac{\partial b_{n+1}}{\partial \lambda} = b_n \lambda \frac{\partial b_1}{\partial \lambda} - \frac{\partial b_n}{\partial \lambda}\left(1 - \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) a_1\,. \tag{51}$$

- Чтобы найти функцию Грина в новой схеме, необходимо знать еще ξ.
- Чтобы определить ξ можно воспользоваться тем, что неперенормированная функция Грина не зависит от μ и связью ее с перенормиро-

ванной функцией Грина:

$$\mu\frac{dG_N(\lambda,m,\mu)}{d\mu} = \mu\frac{d}{d\mu}\left(Z_\varphi^{-N/2}G_N^0(\lambda_0,m_0)\right) = -\frac{N}{2}\frac{d\ln Z_\varphi}{d\ln\mu}G_N(\lambda,m,\mu)\ . \tag{52}$$

- Введем конечный коэффициент, называемый *аномальной размерностью*:

$$\gamma = \frac{d\ln Z_\varphi}{d\ln\mu}\ . \tag{53}$$

- Тогда перенормированная функция Грина удовлетворяет следующему РГ-уравнению, называемому уравнением *Каллана-Симанчика*:

$$\left(\mu\frac{d}{d\mu}+\frac{N}{2}\gamma\right)G_N(\lambda,m,\mu) = \left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda}-\gamma_m m^2\frac{\partial}{\partial m^2}+\frac{N}{2}\gamma\right)G_N(\lambda,m,\mu) = 0\ . \tag{54}$$

Заметим, что γ не зависит от того, какая функция Грина рассматривается и в этом смысле является универсальной.

- Вычислим аномальную размерность в теории φ^4.
- В однопетлевом приближении $Z_\varphi = 1$ $\Rightarrow$ $\gamma = 0$.
- В общем случае, если

$$\varphi_0 = \varphi \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(2\varepsilon)^n} \right) \equiv Z_\varphi^{-1/2} \varphi \,, \quad \Rightarrow \tag{55}$$

$$\gamma = \mu \frac{\partial \ln Z_\varphi}{\partial \mu} = 2\lambda \frac{\partial c_1}{\partial \lambda} \,, \tag{56}$$

и

$$\lambda \frac{\partial c_{n+1}}{\partial \lambda} = c_n \lambda \frac{\partial c_1}{\partial \lambda} - \frac{\partial c_n}{\partial \lambda} \left(1 - \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) a_1 \,. \tag{57}$$

- Из выражений (50) и (56) видно, что γ_m и γ также определяются простыми полюсами по $1/\varepsilon$ в разложении соответствующих функций.
- Старшие же полюса могут быть вычислены рекуррентным способом.

- Итак, чтобы найти функцию Грина в новой перенормировочной схеме, мы должны решить следующую систему уравнений

$$\mu' \frac{d}{d\mu'} \ln \left[\frac{G_N(\mu')}{G_N(\mu)} \right] = -\frac{N}{2}\gamma(\lambda(\mu')) \tag{58}$$

$$\frac{\partial \lambda(\mu')}{\partial \ln \mu'} = \beta(\lambda(\mu')) \tag{59}$$

$$\frac{\partial \ln m^2(\mu')}{\partial \ln \mu'} = -\gamma_m(\lambda(\mu')) , \tag{60}$$

$$\frac{\partial \ln \xi(\mu', \mu)}{\partial \ln \mu'} = -\frac{1}{2}\gamma(\lambda(\mu')) , \tag{61}$$

- С начальными условиями

$$\lambda(\mu) = \lambda , \tag{62}$$

$$m(\mu) = m , \tag{63}$$

$$\xi(\mu, \mu) = 1 . \tag{64}$$

(65)

- Явное решение этих уравнений имеет вид:

$$\ln\frac{\mu'}{\mu} = \int\limits_{\lambda}^{\lambda(\mu')} \frac{dx}{\beta(x)}\,, \tag{66}$$

$$m^2(\mu') = m^2 \exp\left(-\int\limits_{\mu}^{\mu'} \frac{dx}{x}\gamma_m(\lambda(x))\right) = m^2 \exp\left(-\int\limits_{\lambda}^{\lambda(\mu')} dy\frac{\gamma_m(y)}{\beta(y)}\right), \tag{67}$$

$$\xi(\mu',\mu) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{\mu}^{\mu'} \frac{dx}{x}\gamma(\lambda(x))\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{\lambda}^{\lambda(\mu')} dy\frac{\gamma(y)}{\beta(y)}\right)\,, \tag{68}$$

$$G_N(p,\lambda',m',\mu') = \exp\left(-\frac{N}{2}\int\limits_{\mu}^{\mu'} \frac{dx}{x}\gamma(\lambda(x))\right)\cdot G_N(p,\lambda,m,\mu)\,. \tag{69}$$

- В этих решениях можно перейти к приближению того или иного порядка по λ, учитывая при этом конечное число членов в разложении РГ-коэффициентов.

- Например, в однопетлевом приближении

$$\ln\frac{\mu'}{\mu} = \frac{16\pi^2}{3}\int_{\lambda}^{\lambda'}\frac{dx}{x^2} = -\frac{16\pi^2}{3}\left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda}\right) , \tag{70}$$

$$\lambda(\mu') = \frac{\lambda(\mu)}{1 - \frac{3\lambda}{16\pi^2}\ln\frac{\mu'}{\mu}} , \tag{71}$$

- λ растет с ростом μ' и имеет полюс при очень больших, но конечных

$$\mu' = \mu \exp\left(\frac{16\pi^2}{3\lambda}\right) . \tag{72}$$

- Для m^2 получаем следующее выражение

$$m^2(\mu') = m^2 \cdot \left(\frac{\lambda(\mu')}{\lambda}\right)^{1/3} , \tag{73}$$

- Масса растет с ростом μ'.
- Ясно, конечно, что при столь больших μ', как (72), теория возмущений становится неприменимой
- Мы не имеем право ограничиваться однопетлевым приближением.
- Тем не менее, наличие полюса указывает на то, что при больших μ' теория φ^4 становится теорией с сильной связью.
- Более того, решеточные вычисления показывают, что в этой теории действительно имеется полюс при μ' порядка (72).
- В этой связи, можно сказать, что эта теория хорошо определена только при $\lambda(\mu) = 0$, т.е. является свободной, или, как говорят, *тривиальной*.
- Интересно оценить масштаб μ' в (72).
- Пусть, например, при $\mu = 1$ГэВ, $\lambda = 0.1$, тогда

$$\mu' = 1 \cdot \text{ГэВ} \cdot \mathrm{e}^{526} \simeq 3 \times 10^{228}\ \text{ГэВ}\ , \qquad (74)$$

т.е. на 209 порядков превосходит масштаб гравитационных взаимодействий 10^{19} *ГэВ* (энергия, при которых проявляются эффекты квантовой гравитации).

- Ясно, однако, что при энергиях 10^{19} *ГэВ* теория φ^4 уже не может рассматриваться без учета по крайней мере гравитационных взаимодействий

- В реалистических теориях формула типа (71) применима только для μ', по крайней мере меньших 10^{19} *ГэВ*.

- Мы уделили здесь достаточно большое внимание феноменологическим аспектам теории φ^4 — несуществующей теории, — поскольку аналогичная ситуация наблюдается и в КЭД (проверить!).

Поведение функций Грина при больших импульсах

- Самое важное применение РГ связано с анализом поведения функций Грина при больших импульсах или, что то же самое, на малых расстояниях.
- Глубоко евклидова область: все внешние импульсы пространственно-подобны: $p_i^2 < 0$.
- Конфигурация импульсов $p_1, p_2, \ldots p_N$ называется *неисключительной*, если ни одна нетривиальная частичная сумма этих импульсов не обращается в нуль:

$$p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_k} \neq 0 \;\; \text{для} \;\; k < N \; . \tag{75}$$

- Тривиальная частичная сумма, обращающаяся в нуль, является сумма

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_N = 0 \; , \tag{76}$$

выражает закон сохранения полного импульса.

- **Теорема Вайнберга.**
  - *Пусть импульсы p_i являются неисключительными.*
  - *Произведем масштабное преобразование $p_i \to \sigma p_i$.*
  - *Тогда перенормированная функция Грина G_N в глубоко евклидовой области:*

$$\sigma \to \infty\,, \quad p_i \text{ — фиксированы,} \tag{77}$$

*ведет себя в любом **конечном порядке** по константе связи как **полином** по $\ln\sigma$, умноженный на σ в степени, равной массовой размерности рассматриваемой функции:*

$$G_N(\sigma p_i, \lambda, m) \overset{\sigma\to\infty}{\to} \sigma^{\dim G_N}\left[a_0(\ln\sigma)^{b_0} + a_1(\ln\sigma)^{b_1} + \ldots\right]\,, \tag{78}$$

где $b_0 > b_1 > \ldots \geq 0$.

- Мы не будем доказывать теорему Вайнберга, а лишь ограничимся некоторыми замечаниями.

- Теорема интуитивно понятна для сходящихся диаграмм:
  - ✗ Действительно, внешние большие импульсы, проходя через петли, устанавливают шкалу петлевых импульсов, по которым ведется интегрирование (для исключительных импульсов это, вообще говоря, не так).
  - ✗ Однако, для расходящихся диаграмм это не столь очевидно.
  - ✗ Действительно, можно ожидать, что область интегрирования, дающая основной вклад, будет определяться параметром обрезания Λ даже при больших внешних импульсах.
  - ✗ Тем не менее, такие члены должны сократиться при учете контрчленов.
  - ✗ Таким образом, для перенормированных функций Грина теорема будет справедлива.
  - ✗ Теорема утверждает не что иное, как то, что функции Грина не зависят от того, что происходит в ультрафиолетовой области: весь

эффект области бесконечных внутренних импульсов сводится к перенормировки параметров, но не влияет на поведение функций Грина, как функций внешних импульсов.

- Во-вторых,
  - ✗ Конфигурация внешних больших импульсов неисключительна
  - ✗ Знаменатели всех свободных пропагаторов, входящих в функцию Грина, большие
  - ✗ Можно пренебречь массами, что приводит к ошибке, ведущей себя как σ в степени, на единицу меньшей, чем главный член в асимптотике (78).
  - ✗ Здесь, однако, следует проявлять осторожность.
  - ✗ Если мы используем схему вычитаний в импульсном пространстве (например, на массовой поверхности), то могут появиться *инфракрасные расходимости*, связанные с пределом $m \to 0$.

- ✗ Рассмотрим, например, перенормированную четырехточечную функцию Грина в теории φ^4 при $p_i^2 \ll 0$, т.е. при $s, t, u \to \infty$.
- ✗ В схеме вычитаний на массовой поверхности

$$\Gamma^{(4)} = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\left(2+\sqrt{\frac{4m^2-s}{|s|}}\ln\frac{\sqrt{4m^2-s}-\sqrt{-s}}{\sqrt{4m^2-s}+\sqrt{-s}}\right)+(s\to t)+(s\to u)\to$$

$$\stackrel{m\to 0}{\to} \frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\left(2+\ln\frac{2m^2}{-s}\right)+(s\to t)+(s\to u)\,, \qquad (79)$$

- ✗ Нельзя положить $m=0$, т.к. возникает расходимость.
- ✗ Если использовать $\overline{MS}$-схему, то таких расходимостей не появляется:

$$\Gamma^{(4)}_{\overline{MS}} = \frac{-i\lambda^2}{32\pi^2}\int\limits_0^1 dx\ln\frac{m^2-x(1-x)s}{\mu^2}+(s\to t)+(s\to u)\to$$

$$\stackrel{m\to 0}{\to} \frac{-i\lambda^2}{32\pi^2}\int\limits_0^1 dx\ln\frac{sx(x-1)}{\mu^2}+\mathscr{O}\left(\frac{m^2}{s}\ln\frac{m^2}{|s|}\right)\,. \qquad (80)$$

- ✗ Можно доказать теорему, что существуют перенормировочные схемы, в которых контрчлены полиномиальны по массам.

- ✗ В этих схемах можно непосредственно переходить к безмассовому пределу и использовать его для анализа поведения функций Грина при больших импульсах.
- ✗ $\overline{MS}$-схема, также как и *MS*-схема, являются такими схемами.

В-третьих,

- ✗ Рассмотрим выражение (80).
- ✗ В нем присутствует член, пропорциональный $\ln|s|/\mu^2$.
- ✗ Благодаря этому множителю при сколь угодно малой, но фиксированной константе связи λ, петлевой вклад в функцию Грина (80) заметно превосходит древесный вклад λ при $s \to -\infty$.
- ✗ Поэтому теория возмущений становится непригодной для нахождения асимптотик функций Грина.
- ✗ Здесь как раз и приходит на помощь ренормгруппа.
- ✗ Можно положить $\mu^2 = \mathcal{O}(s) = \mathcal{O}(p^2)$.

✗ Эта процедура приводит к малым коэффициентам.

✗ Поэтому для вычисления $G_N(\sigma p)$ при больших σ можно использовать следующий метод:

➊ Положим $\mu' = \sigma\mu$ и, используя решение РГ-уравнения (69), получим

$$G_N(\sigma p, \lambda(\mu), m(\mu), \mu) = \xi(\sigma\mu, \mu)^{-N} G_N(\sigma p, \lambda(\sigma\mu), m(\sigma\mu), \sigma\mu)\ . \tag{81}$$

➋ Пренебрежем массой m (если безмассовый предел существует и $m(\sigma\mu)$ не стала слишком большой). Используем размерный анализ и найдем асимптотическое поведение:

$$G_N(\sigma p, \lambda, m, \mu) \simeq \xi^{-N} G_N(\sigma p, \lambda(\sigma\mu), 0, \sigma\mu) =$$

$$\sigma^{\mathrm{dim} G_N} \xi(\sigma\mu, \mu)^{-N} G_N(p, \lambda(\sigma\mu), 0, \mu)\ . \tag{82}$$

③ Большие коэффициенты, зависящие от σ, устраняются (правая часть (82)), и поэтому при малых $\lambda(\sigma\mu)$ достаточно проводить вычисления в низших порядках теории возмущений.

✗ Из этой процедуры ясно, что в действительности важна именно эффективная константа связи $\lambda(\sigma\mu)$, рассматриваемая при заданном масштабе импульсов $\sigma\mu$.

✗ Поэтому говорят, что эта константа зависит от импульсов и является бегущей.

Подведем итог.

✗ Для того чтобы отыскать поведение функций Грина при больших импульсах, достаточно найти функцию Грина при конечных импульсах в безмассовой теории с константой связи $\lambda(\sigma\mu)$ и воспользоваться уравнением (82).

✗ Если константа связи $\lambda(\sigma\mu)$ достаточно мала, то можно воспользоваться теорией возмущений, вычисляя $G_N(p, \lambda(\sigma\mu), 0, \mu)$ в конечном порядке по λ.

- В глубоко евклидовой области все импульсы лежат вдалеке от массовой поверхности $p^2 \ll 0$
- Может показаться, что асимптотика функции Грина не может иметь отношение к жизни.
- Однако это не так.
- Действительно, в координатном пространстве предел $p^2 \ll 0$ соответствует пределу малых расстояний: разность $x_i - x_j$ становится малой $x_i - x_j \to (x_i - x_j)/\sigma$.
- Такие асимптотики функций Грина определяют физику малых расстояний.
- Приведем один пример.
    - Одним из процессов, изучаемых экспериментально, является процесс *глубоко неупругого рассеяния лептонов на нуклонной мишени* (например, электронов на протонах).

- Было установленно, что сечение таких процессов подчиняется так называемому закону *скейленга*.
- Это явление можно объяснить, если считать, что сингулярность произведения адронных токов $J_\mu(x)J_\nu(y)$ вблизи светового конуса, т.е. при $x-y \to 0$, совпадает с сингулярностью свободных кварковых токов.
- Это означает, что соответствующие функции Грина в асимптотической области $p^2 \ll 0$ становятся свободными, т.е. $g(p^2 \to -\infty) \to 0$, где g — константа сильных взаимодействий.
- Заметим, что в теории φ^4, также как и в КЭД, мы имеем прямо противоположную ситуацию — константа связи растет с ростом энергий (см. (71)).
- Если бы нам удалось построить модель, в которой константа связи стремилась бы к нулю при больших переданных импульсах, то она могла бы служить прекрасным кандидатом для описания сильных взаимодействий.

- В связи с только что сказанным, интересно выяснить, а какое вообще поведение может быть у бегущей константы связи при различных импульсах.
- Классификацией возможных типов поведения и возможных теорий мы сейчас рассмотрим.

Бегущая константа связи

- Эволюция константы связи g в произвольной теории описывается уравнением

$$\mu\frac{dg}{d\mu}=\beta(g)\;, \tag{83}$$

$$\ln\frac{\mu'}{\mu}=\int\limits_{g(\mu)}^{g(\mu')}\frac{dx}{\beta(x)}\;. \tag{84}$$

- Из уравнения (83) следует, что
  - ✗ $g(\mu)$ растет с ростом μ, если $\beta(g)>0$
  - ✗ $g(\mu)$ убывает, если $\beta(g)<0$.
- При этом в последнем случае, поскольку $\beta(0)=0$, то $g(\mu\to\infty)=0$.
- Это явление носит название *асимптотической свободы*.
- Соответствующие теории называются *асимптотически-свободными*.

- Если при каком-либо μ, $g(\mu)$ достаточно мала, и $\beta(g) < 0$ хорошо аппроксимируется своим первым членом
- То при $\mu' > \mu$, $g(\mu') < g(\mu)$ и теория возмущений становится надежным инструментом вычисления высокоэнергетических асимптотик функций Грина.
- Найдем поведение g в асимптотически свободных теориях с помощью первых членов разложения β-функции.
  - Предположим, что

$$\beta = -A_1 g^3 - A_2 g^5 + \mathcal{O}(g^7) \; , \quad A_1 > 0 \; . \tag{85}$$

  - Считаем, что $\beta(-g) = -\beta(g)$ — такой случай реализуется в КХД.

- Из уравнений (85), (84) следует, что

$$\ln\mu = C + \int^{g(\mu)} \frac{dy}{\beta(y)} = C + \int^{g(\mu)} dy \left(-\frac{1}{A_1 y^3} + \frac{A_2}{A_1^2 y} + \mathcal{O}(y)\right) =$$

$$= C + \frac{1}{2A_1 g^2} + \frac{A_2}{A_1^2} \ln g + \mathcal{O}(g^2)\ . \qquad (86)$$

- Константу интегрирования C можно вычислить, зная значение $g(\mu_0)$ при каком-либо μ_0.
- Принято записывать эту величину в виде

$$C = \ln\Lambda + \frac{1}{2}\frac{A_2}{A_1^2}\ln A_1\ , \qquad (87)$$

где Λ — некоторый параметр с размерностью массы.
- Тогда

$$\ln\frac{\mu^2}{\Lambda^2} = \frac{1}{A_1 g^2} + \frac{A_2}{A_1^2}\ln A_1 g^2 + \mathcal{O}(g^2)\ , \qquad (88)$$

$$g^2 = \frac{1}{A_1 \ln(\mu^2/\Lambda^2)} - \frac{A_2 \ln(\ln(\mu^2/\Lambda^2))}{A_1^3 \ln^2(\mu^2/\Lambda^2)} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln^2(\ln \mu/\Lambda)}{\ln^3 \mu/\Lambda}\right) . \qquad (89)$$

- Из (89) видим, что $g \to 0$ при $\mu \to \infty$ как $1/\ln \mu^2$.
- Видно также, что при $\mu \to \Lambda$ константа связи $g \to \infty$.
- Конечно, в этой области двухпетлевое приближение уже неверно.
- Тем не менее, в области $\mu \sim \Lambda$, g становится большой, и теория возмущений становится непригодной, т.е. мы попадаем в область *сильной связи*.
- Таким образом, Λ характеризует масштаб сильной связи.
- Заметим, что Λ не является произвольной, а выбирается так, чтобы остаточный член в (89) имел именно указанный порядок, а не порядок $1/\ln^2(\mu/\Lambda)$.
- Параметр Λ может быть в принципе измерен.

- В теории сильных взаимодействий — КХД — этот параметр называется $\Lambda_{\text{КХД}}$ и равен приблизительно 200 *МэВ*.
- Заметим еще, что Λ возникает даже в безмассовой теории с безразмерными константами связи.
- Появление параметра с размерностью массы в безмассовой теории носит название *размерной трансмутации* и приводит к нарушению масштабной инвариантности, присутствующей в безмассовой теории.
- Возникает вопрос, какие теории являются асимптотически-свободными?
- В четырех измерениях асимптотически-свободными теориями являются только неабелевы калибровочные теории с ограниченным числом полей материи.
- Поэтому на роль КХД может претендовать только неабелева теория с ограниченным числом поколений кварков.

- Рассмотрим теперь противоположный случай $\beta(g) > 0$.
- К этому случаю относятся все перенормируемые теории в 4-х измерениях, за исключением неабелевых калибровочных теорий, в том числе φ^4 и КЭД.
- В этом случае границы применимости теории возмущений прямо противоположны:
- Можно надежно пользоваться теорией возмущений при низких энергиях.
- При высоких энергиях мы попадаем в область сильной связи.
- Более того, как мы видели на примере теории φ^4, у константы связи появляется полюс при больших, но конечных энергиях.

- Интересным является случай, когда β-функция имеет нули при некоторых ненулевых g.
- Предположим, что β-функция имеет вид, приведенный на Рис. 1.
- Нули β-функции называются *неподвижными* или *фиксированными точками*:
- если при каком-то значении μ, $g = g_1$ или g_2, то она останется в этой точке при любом значении μ.

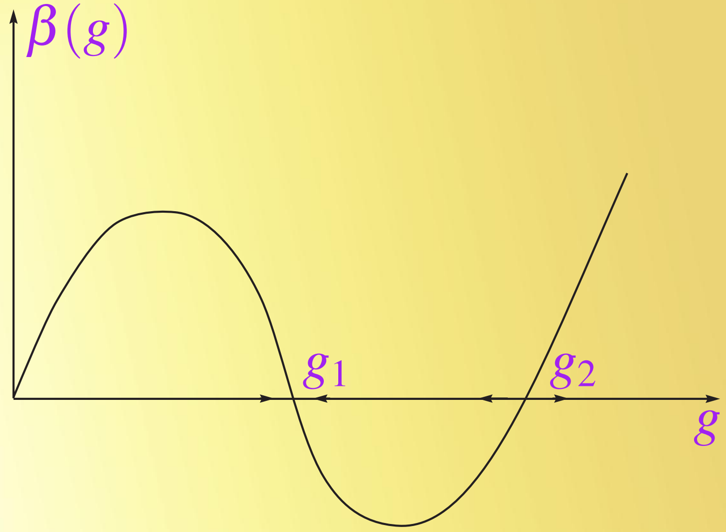

Рис. 1

- Существует два типа фиксированных точек:
  - ✗ g_1 на Рис. 1 является ультрафиолетовой стабильной точкой,
  - ✗ g_2 — инфракрасной стабильной точкой.

- Действительно, рассмотрим поведение $g(\mu)$ при увеличении μ.
- Если $0 < g(\mu) < g_1$ ↱ $\beta(g(\mu)) > 0$ ↱ и $g(\mu)$ растет с ростом μ, приближаясь к g_1 слева.
- Если $g_1 < g(\mu) < g_2$, ↱ $\beta(g(\mu)) < 0$ ↱ $g(\mu)$ убывает с ростом μ, приближаясь к g_1 справа ↱
- g_1 – ультрафиолетовая фиксированная точка
- Аналогично, $g(\mu)$ будет приближаться к g_2 с уменьшением μ ↱
- g_2 – инфракрасная фиксированная точка
- Рассмотрим теперь решение РГ-уравнения в области $0 < g < g_2$ при $\mu \to \infty$.

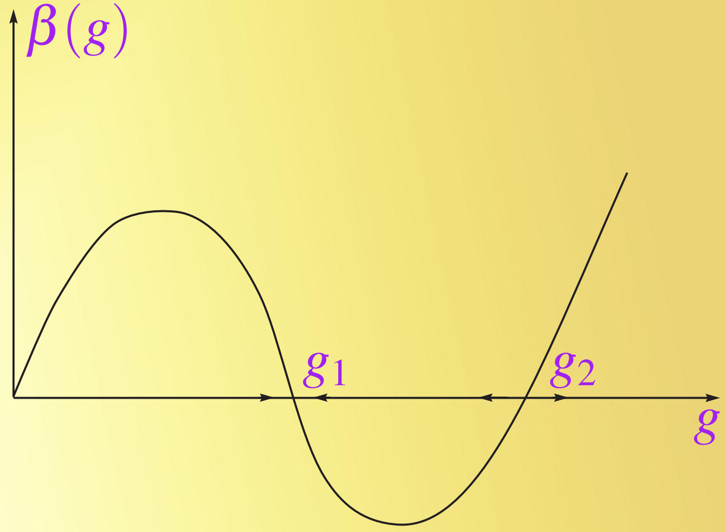

Рис. 1

- Предположим, что g_1 — простой нуль β-функции:

$$\beta(g) \simeq a(g_1 - g)\ , \quad a > 0 \tag{90}$$

- Тогда вблизи g_1

$$\frac{dg}{d\ln\mu} = a(g_1 - g)\ , \tag{91}$$

$$g(\mu) = g_1 + (g(\mu_0) - g_1)\mathrm{e}^{-a\ln\mu/\mu_0}\ , \tag{92}$$

- $g(\mu)$ экспоненциально приближается к фиксированной точке.
- Предположим теперь, что аномальная размерность γ не обращается в нуль в точке g_1: $\gamma(g_1) \neq 0$,

- Тогда (см. (20), (68))

$$\xi(\mu,\mu_0) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{g(\mu_0)}^{g(\mu)} dy\frac{\gamma(y)}{\beta(y)}\right) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma(g_1)\int\limits_{g(\mu_0)}^{g(\mu)}\frac{dy}{a(g_1-y)}\right) =$$
$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\gamma(g_1)}{a}\ln\frac{g_1-g(\mu_0)}{g_1-g(\mu)}\right) = \exp\left(\gamma(g_1)\ln\frac{\mu}{\mu_0}\right) = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{\gamma(g_1)} \quad (93)$$

- Следовательно, уравнение (82) принимает вид

$$G_N(\sigma p, g, m, \mu) \simeq \sigma^{\mathrm{dim}G_N - N\gamma(g_1)} G_N(p, g(\sigma\mu), 0, \mu)\ . \quad (94)$$

- Эту формулу можно интерпретировать, считая, что размерность поля изменилась на $-\gamma(g_1)$.
- По этой причине функцию γ и называют аномальной размерностью.

Суммирование главных логарифмов

- Вернемся к асимптотической формуле (82)

$$G_N(\sigma p, \lambda, m, \mu) \simeq \sigma^{\mathrm{dim} G_N} \xi(\sigma\mu, \mu)^{-N} G_N(p, \lambda(\sigma\mu), 0, \mu) \ . \qquad (95)$$

- Эта формула связывает асимптотическое поведение функции Грина при больших импульсах с выражением для функции Грина при конечных импульсах в безмассовой теории.
- При этом коэффициенты разложения в теории с конечными импульсами не являются большими $\sim \ln|p^2|/\mu^2$.
- Можно ли просуммировать эти логарифмические факторы?
- Рассмотрим, например, пропагатор в безмассовой теории φ^4:

$$-iG_2 = \frac{i}{p^2}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n T_n(-p^2/\mu^2) \ , \quad T_0 = 1 \ . \qquad (96)$$

- Докажем сперва, что каждый коэффициент T_n является полиномом по $\ln\mu$ (и, следовательно, по $\ln(-p^2/\mu^2)$) степени, непревышающей числа петель n, в полном соответствии с теоремой Вайнберга.

- Рассмотрим с этой целью РГ-уравнение для G_2 и будем сравнивать коэффициенты при одинаковых степенях λ:

$$\frac{\partial}{\partial\ln\mu}T_n = \left\{\left(-\gamma(\lambda) - \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\sum_{k=0}^{n-1}T_k\lambda^k\right\}_{\text{коэф. при }\lambda^n} . \qquad (97)$$

- Так как $\gamma(\lambda)\sim\lambda^2$ и $\beta\sim\lambda^2$, то это соотношение определяет T_n через T_k при $k<n$:

$$T_n = \mathrm{const} - \left\{\sum_{k<n}\left(\gamma+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\lambda^k\int\limits_0^{\ln\mu}d(\ln\mu')\cdot T_k(-p^2/\mu'^2)\right\}_{\text{коэф. при }\lambda^n} . \qquad (98)$$

- Из этого выражения видно, что T_n представляет собой полином степени n по $\ln\mu$:

$$T_n = \sum_{l=0}^{n} T_{n,n-l} \cdot \left[\ln\left(\frac{-p^2}{\mu^2}\right)\right]^l . \tag{99}$$

- При этом все члены, кроме постоянного, определяются через коэффициенты низших порядков.
- Напоминает то, что мы видели при вычислении РГ коэффициентов (см. (46) – (49))
- Таким образом, мы в принципе можем просуммировать некоторые логарифмические вклады.
- Скажем, если $-p^2 \gtrsim \mu^2$, то мы можем ограничиться только членами с $l = n$ в (99) (т.е. $T_{n,0} \cdot \ln^n(-p^2/\mu^2)$) и просуммировать их.
- В этом случае мы получим так называемое *главное логарифмическое приближение*, при этом члены $T_{n,0} \cdot \ln^n(-p^2/\mu^2)$ называются *ведущими логарифмами*.

- Удобно ввести следующую величину:

$$L = \text{число степеней } \lambda - \text{число логарифмов} = n - l \geq 0\ . \tag{100}$$

- Тогда главному логарифмическому приближению соответствуют суммирование членов с $L = 0$.
- Пусть

$$\gamma(\lambda) = C_2\lambda^2 + C_3\lambda^3 + \ldots\ , \tag{101}$$

$$\beta(\lambda) = A_1\lambda^2 + A_2\lambda^3 + \ldots\ . \tag{102}$$

- Подставим теперь (101), (102) и (99) в (97):

$$\sum_{L=0}^{n-1} 2(L-n)T_{n,L}\ln^{n-L-1}(-p^2/\mu^2) = -A_1(n-1)\sum_{L=0}^{n-1} T_{n-1,L}\ln^{n-1-L}(-p^2/\mu^2) +$$

$$+(-A_2(n-2) - C_2)\sum_{L=0}^{n-2} T_{n-2,L}\ln^{n-2-L}(-p^2/\mu^2) + \ldots\ . \tag{103}$$

- Ведущая логарифмическая часть в этом выражении такова ($L = 0$)

$$2nT_{n,0} = A_1(n-1)T_{n-1,0} \ , \tag{104}$$

- Решением этого уравнения является

$$T_{n,0} = A_1^n \prod_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k} T_{0,0} = 0 \text{ при } n > 0 \ . \tag{105}$$

Заметим, что этот результат является следствием того, что однопетлевое приближение не дает логарифмического вклада в пропагатор в теории φ^4: $\gamma^{1-\text{loop}} = 0$, $C_1 = 0$.

- Рассмотрим следующие члены с $L = 1$.
- Так как $T_{n,0} = 0$ при $n > 0$, то уравнение (103) для $L = 1$ принимает вид:

$$-2(n-1)T_{n,1} = -A_1(n-1)T_{n-1,1} - \delta_{n2}C_2\,, \quad T_{1,1} = \text{const}\,. \tag{106}$$

- Решением этого уравнения является

$$T_{n,1} = \left(\frac{A_1}{2}\right)^{n-1} T_{1,1} + \left(\frac{A_1}{2}\right)^{n-2} \frac{C_2}{2}\,, \tag{107}$$

$$\begin{aligned} -iG_2(p^2) \simeq \frac{i}{p^2}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} T_{k,1}\lambda^k \ln^{k-1}\left(\frac{-p^2}{\mu^2}\right)\right) = \\ = \frac{i}{p^2}\left(1 + \frac{\lambda T_{1,1} + \lambda\frac{C_2}{A_1}}{1 - \lambda\frac{A_1}{2}\ln\frac{-p^2}{\mu^2}}\right)\,. \end{aligned} \tag{108}$$

- Аналогично можно просуммировать члены с $L > 1$, а также исследовать и другие функции Грина.

Формулу (108) можно получить и несколько иным путем.

- Действительно, применение операций $\mu\partial_\mu = \partial_{\ln\mu}$ и $\beta\partial_\lambda \sim \lambda$ и умножение на $\gamma \sim \lambda$ к функции G_2 повышает L по крайней мере на единицу.
- Поэтому ряд ведущих логарифмов (при $L = 0$) в точности описывает однопетлевое приближение к решению РГ-уравнения для функции Грина.
- Просуммировать ряд ведущих логарифмов можно, решая РГ-уравнение в этом приближении:

$$G_2(p^2, \lambda(\mu), \mu) = \exp\left(\int_\mu^{\sqrt{-p^2}} \frac{dx}{x}\gamma(\lambda(x))\right) \cdot G_2\left(p^2, \lambda(\sqrt{-p^2}), \sqrt{-p^2}\right)\Bigg|_{L=0} = \frac{i}{p^2}\,. \tag{109}$$

- Следующие за ведущим приближение, т.е. формула (108), дается двухпетлевым приближением в решении РГ-уравнения.

Итог

- Физически-наблюдаемые величины, такие как полюсная масса m_{ph}, не должны зависеть от схемы перенормировки.
- Это требование накладывает определенные связи на параметры, определенные в разных перенормировочных схемах.
- Приходим к понятию ренормгруппы, связывающую перенормированные параметры теории в различных схемах
- Приходим к понятию эффективных или бегущих параметров теории: масс частиц и констант связи.
- РГ позволяет исследовать функции Грина при больших евклидовых импульсах и просуммировать ведущие логарифмические вклады.
- Если β-функция < 0, то константа связи уменьшается с ростом энергии асимптотически-свободна
- В 4-х измерениях асимптотически-свободными теориями являются неабелевы калибровочные теории с ограниченным числом полей материи
- КХД должна быть такой теорией (скейлинг)