М.В. Либанов

КТП XIV. Аномалии

Содержание

Аксиальная симметрия

- Рассмотрим теорию безмассового свободного спинора

$$\mathscr{L} = i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi \tag{1}$$

- Лагранжиан инвариантен относительно глобальных фазовых вращений группы $U_V \times U_A$:

$$U_V: \quad \psi' = e^{i\alpha}\psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{-i\alpha} \Rightarrow j_\mu(x) = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \quad \partial^\mu j_\mu = 0 \tag{2}$$

$$U_A: \quad \psi' = e^{i\gamma^5\alpha}\psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{+i\gamma^5\alpha} \Rightarrow j^5_\mu(x) = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi, \quad \partial^\mu j^5_\mu = 0 \tag{3}$$

- ☞ Нётеровские токи сохраняются на классическом уровне
- ☞ Если рассмотреть массивный фермион:

$$\mathscr{L} \to \mathscr{L}_m = i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi, \tag{4}$$

то вектроный ток по-прежнему сохраняется, но аксиальный – нет

$$\partial^\mu j_\mu = 0 \tag{5}$$

$$\partial^\mu j^5_\mu = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi \tag{6}$$

✦ Согласно основному постулату квантования заряды

$$Q = \int d\mathrm{x}\bar{\psi}\gamma^0\psi, \quad Q_5 = \int d\mathrm{x}\bar{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi, \tag{7}$$

являются генераторами преобразований и удовлетворяют (получить!)

$$[Q,\psi] = -\psi, \quad [Q,\bar{\psi}] = +\bar{\psi} \tag{8}$$

$$[Q_5,\psi] = -\gamma_5\psi, \quad [Q,\bar{\psi}] = -\bar{\psi}\gamma_5 \tag{9}$$

Тождества Уорда

✦ Рассмотрим трёхточечный коррелятор токов

$$T_{\rho\mu\nu}(x;y,z) = \langle T\,(j^5_\rho(x)\,j_\mu(y)\,j_\nu(z))\rangle \tag{10}$$

✦ Вычислим (вычислить!) по аналогии с выводом ТУ в КЭД дивергенции (10), не обращая внимания на возможные расходимости, принимая во внимание (8), (9) и учитывая (5), (6),

$$\partial^\mu_y T_{\rho\mu\nu} = \partial^\nu_z T_{\rho\mu\nu} = 0, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\partial^\rho_x T_{\rho\mu\nu}(x;y,z) = \quad & 2im\,\langle\bar\psi(x)\gamma^5\psi(x)\,j_\mu(y)\,j_\nu(z)\rangle - \\ & \left\langle\left[\delta^4(x-y)\bar\psi(y)\{\gamma_\mu\gamma_5\}\psi(y)\,j_\nu(z) + \begin{pmatrix} y\leftrightarrow z\\ \mu\leftrightarrow\nu\end{pmatrix}\right]\right\rangle\end{aligned} \tag{12}$$

Что выучили?

✧ Если расходимостей нет, то не требуется регуляризации, и при $m = 0$

$$\partial_x^\rho T_{\rho\mu\nu} = 0, \tag{13}$$

так как $\{\gamma_\mu \gamma_5\} = 0$

✧ Расходимости могут появиться даже в свободной теории, так как токи – *составные операторы*, т.е. являются произведениями полей, взятыми в одной точке $\rightrightarrows$

✧ Требуется регуляризация

- Если использовать регуляризацию типа Паули-Вилларса, то аксиальная симметрия нарушается, т.к. требуется вводить массивные вспомогательные поля.
- Если использовать размерную регуляризацию, то γ_5 плохо определена и

$$\{\gamma_\mu \gamma_5\} \neq 0 \tag{14}$$

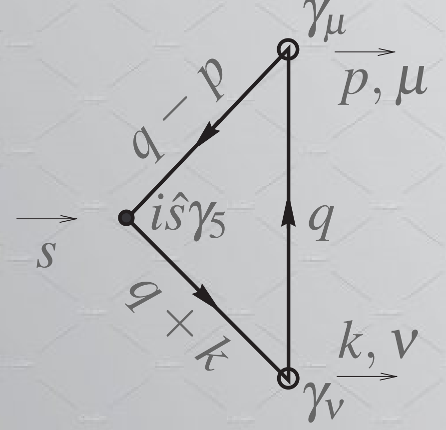
Треугольная аномалия

✧ Вычислим $\partial^\rho T_{\rho\mu\nu}$ в безмассовой теории, перейдя в импульсное пространство и используя размерную регуляризацию,

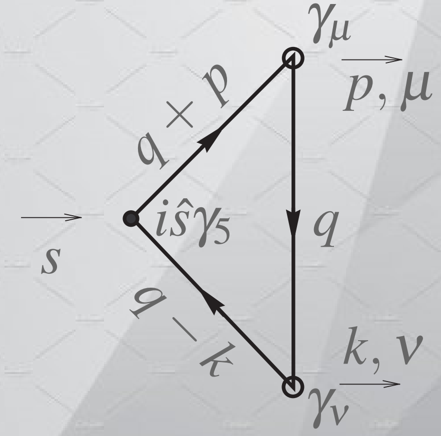
$$(2\pi)^d\delta(s-p-k)T_{\mu\nu}(p,k) = \int d^dxd^dyd^dz\mathrm{e}^{-isx+ipy+ikz}\partial^\rho T_{\rho\mu\nu}$$

$$= is^\rho \int d^dxd^dyd^dz\mathrm{e}^{-isx+ipy+ikz}T_{\rho\mu\nu} \qquad (15)$$

$T_{\mu\nu} =$



$+$



$=$

$$= -\int \frac{d^dq}{(2\pi)^d} Tr\left(i(\hat{p}+\hat{k})\gamma_5 \frac{i}{\hat{q}-\hat{p}}\gamma_\mu \frac{i}{\hat{q}}\gamma_\nu \frac{i}{\hat{q}+\hat{k}} \right) + \begin{pmatrix} p \leftrightarrow k \\ \mu \leftrightarrow \nu \end{pmatrix}$$

$$\equiv t_{\mu\nu}(p,k) + t_{\nu\mu}(k,p) \qquad (16)$$

✧ Далее

$$t_{\mu\nu} = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} Tr\left((\hat{q} - \hat{p} - (\hat{q} + \hat{k}))\gamma_5 \frac{1}{\hat{q} - \hat{p}} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{q}} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{q} + \hat{k}} \right) =$$

$$= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} Tr\left((\hat{q} - \hat{p})\gamma_5 \frac{1}{\hat{q} - \hat{p}} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{q}} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{q} + \hat{k}} - \gamma_5 \frac{1}{\hat{q} - \hat{p}} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{q}} \gamma_\nu \right) \qquad (17)$$

✧ Если бы $\{\gamma_5 \gamma_\mu\} = 0$, то

$$t_{\mu\nu} = -\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} Tr\left(\gamma_5 \gamma_\mu \frac{1}{\hat{q}} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{q} + \hat{k}} + \gamma_5 \frac{1}{\hat{q} - \hat{p}} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{q}} \gamma_\nu \right) \qquad (18)$$

✧ Напомним используемое нами определение γ_5

$$\gamma_5 = -\frac{i}{4!} \varepsilon^d_{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho , \qquad (19)$$

$$\varepsilon^d_{\mu\nu\lambda\rho} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} + \mathcal{O}(d-4) \qquad (20)$$

$$\gamma_5^2 = 1 , \qquad (21)$$

$$Tr \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu = 0 . \qquad (22)$$

и вычислим

$$Tr\gamma_5\gamma^{\mu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho} = Tr\gamma_5(2g^{\mu\lambda} - \gamma^{\lambda}\gamma^{\mu})\gamma^{\nu}\gamma^{\rho} \tag{23}$$

$$= 2g^{\mu\lambda}(Tr\gamma_5\gamma^{\nu}\gamma^{\rho} \overset{(22)}{=} 0) - Tr\gamma_5\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho} = -Tr\gamma_5\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho} \tag{24}$$

и аналогично для перестановки любой другой пары индексов $\rightrightarrows$

$$\mathscr{E}^{\mu\lambda\nu\rho} \equiv Tr\gamma_5\gamma^{\mu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho} \text{ – антисимметричный тензор в } d \text{ измерениях.} \tag{25}$$

☞ Он не пропорционален $\varepsilon_d^{\mu\lambda\nu\rho}$, но

$$\mathscr{E}^{\mu\lambda\nu\rho} = Tr\gamma_5\gamma^{\mu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho} = -4i\varepsilon^{\mu\lambda\nu\rho} + \mathscr{O}(d-4) \tag{26}$$

✧ Из (25) следует, что каждое слагаемое в (18) представляет собой антисимметричный тензор второго ранга, зависящий от единственного вектора $\rightrightarrows$ каждое слагаемое равно 0.

✧ Но считать, что $\{\gamma_5\gamma_\mu\} = 0$, нельзя $\rightrightarrows$

$$t_{\mu\nu} = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} Tr\left((\hat{q} - \hat{p})\gamma_5 \frac{1}{\hat{q} - \hat{p}} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{q}} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{q} + \hat{k}} \right) \tag{27}$$

☞ Интеграл (27) квадратично расходится при $d \to 4$ $\rightrightarrows$

- троекратное дифференцирование по p или/и k делает его сходящимся $\rightrightarrows$
- Для $(n > 2)$-ой производной можно считать, что $\{\gamma_5\gamma_\mu\} = 0$ $\rightrightarrows$
- $\dfrac{\partial^{n>2} t_{\mu\nu}}{\partial p_\rho^n} = 0$ $\rightrightarrows$
- $t_{\mu\nu}$ является квадратным многочленом по p и k
- Член, независящий от p, k, равен 0, т.к. при $p = k = 0$ (27) представляет собой антисимметричный тензор 2-го ранга, который ни от чего не зависит – такого не существует.
- Линейный по p и k член равен 0 в силу того, что в этом случае соответствующий интеграл (1-ая производная от $t_{\mu\nu}$) является интегралом от нечетной функции q.

- Как будет видно из дальнейших вычислений $t_{\mu\nu}(p,k) = -t_{\mu\nu}(k,p)$

  $\rightrightarrows$ вклады $\sim p_\rho p_\lambda$ и $\sim k_\rho k_\lambda$ исчезают $\rightrightarrows$

- $t_{\mu\nu} \sim k_\rho p_\lambda$

✧ Разложим интегрант в (27) по p и k и выделим член $\sim k_\rho p_\lambda$

✧ Используем для этого разложение

$$\frac{1}{\hat{q}-\hat{p}} = \frac{1}{\hat{q}} + \frac{1}{\hat{q}}\hat{p}\frac{1}{\hat{q}} + \mathscr{O}(p^2) \tag{28}$$

✧ Имеем

$$\begin{aligned} &Tr\left[(\hat{q}-\hat{p})\gamma_5\left(\frac{1}{\hat{q}}+\frac{1}{\hat{q}}\hat{p}\frac{1}{\hat{q}}\right)\gamma_\mu\frac{1}{\hat{q}}\gamma_\nu\left(\frac{1}{\hat{q}}-\frac{1}{\hat{q}}\hat{k}\frac{1}{\hat{q}}\right)\right]\Bigg|_{p^\rho k^\lambda} = \\ &Tr\left(\gamma_5\frac{1}{\hat{q}}\gamma_\mu\frac{1}{\hat{q}}\gamma_\nu\frac{1}{\hat{q}}\hat{k}\frac{1}{\hat{q}}\hat{p} - \gamma_5\frac{1}{\hat{q}}\hat{p}\frac{1}{\hat{q}}\gamma_\mu\frac{1}{\hat{q}}\gamma_\nu\frac{1}{\hat{q}}\hat{k}\right) \end{aligned} \tag{29}$$

✧ Как будет видно, интеграл от второго слагаемого в (29) при помощи подходящей замены индексов сводится к интегралу от первого слагаемого и дает такой же вклад $\Rightarrow$

$$t_{\mu\nu} = 2\int \frac{d^dq}{(2\pi)^d} Tr\left(\gamma_5\frac{1}{\hat{q}}\gamma_\mu\frac{1}{\hat{q}}\gamma_\nu\frac{1}{\hat{q}}\hat{k}\frac{1}{\hat{q}}\hat{p}\right) =$$

$$= 2k^\rho p^\lambda Tr(\gamma_5\gamma^\alpha\gamma_\mu\gamma^\beta\gamma_\nu\gamma^\gamma\gamma_\rho\gamma^\delta\gamma_\lambda)\int \frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{q_\alpha q_\beta q_\gamma q_\delta}{(q^2)^4} \quad (30)$$

$$= Tr(\gamma_5\gamma^\alpha\gamma_\mu\gamma^\beta\gamma_\nu\gamma^\gamma\gamma_\rho\gamma^\delta\gamma_\lambda)(g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta} + g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} + g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})\times \quad (31)$$

$$\times\ 2k^\rho p^\lambda \frac{i}{d(d+2)2^d\pi^{d/2}}\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \quad (32)$$

☞ Заметим, что при вычислении интеграла (30) нельзя считать, что

$$\int \frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{(q^2)^L} = 0 \text{ при } \forall L, \quad (33)$$

так как $1/(q^2)^4$ в (30) берется из разложения (27) по внешним импульсам, и на самом деле в знаменателе (30) вместо q^2 стоит $q^2 - D(p,k,x_i,(m))$ (D – некоторая функция от импульсов, фейнмановских параметров x_i и массы m (если она отлична от нуля)).

✧ Свертка следа и тензора в (31) дает

$$Tr(\gamma_5\gamma^\alpha\gamma_\mu\gamma^\beta\gamma_\nu\gamma^\gamma\gamma_\rho\gamma^\delta\gamma_\lambda)(g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}+g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}+g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})=$$
$$=Tr\left[\gamma_5\left(\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma_\nu\gamma_\gamma\gamma_\rho\gamma^\gamma\gamma_\lambda+\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta\gamma_\nu\gamma^\alpha\gamma_\rho\gamma^\beta\gamma_\lambda+\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta\gamma_\nu\gamma^\beta\gamma_\rho\gamma^\alpha\gamma_\lambda\right)\right] \tag{34}$$

✧ Прежде чем вычислять следы в (34) нужно вычислить свертки по повторяющимся индексам, используя

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu=2g_{\mu\nu}\gamma^\mu-\gamma_\mu\gamma^\mu\gamma_\nu=(2-d)\gamma_\nu\ , \tag{35}$$

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma^\mu=4g_{\nu\rho}+(d-4)\gamma_\nu\gamma_\rho\ , \tag{36}$$

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma^\mu=-2\gamma_\lambda\gamma_\rho\gamma_\nu+(4-d)\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda\ . \tag{37}$$

✧ В результате следы от $1+8$ γ-матриц в (34) сводятся к следу от $1+4$ γ-матриц (25). С учетом антисимметричности (25) этого следа получаем (получить!)

$$(34)=(d-4)(d+2)\mathscr{E}_{\mu\nu\rho\lambda}\overset{(26)}{=}-4i(d-4)(d+2)\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}+\mathscr{O}\left((d-4)^2\right) \tag{38}$$

✧ Подставляя (38) в (31), (32) и беря предел $d \to 4$, получаем

$$t_{\mu\nu}(p,k) = \frac{1}{4\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}p^\lambda k^\rho \tag{39}$$

☞ Видно, что, как и анонсировалось, $t_{\mu\nu}(p,k) = -t_{\mu\nu}(k,p)$

☞ Видно, что путем подходящей перестановки индексов интеграл от второго слагаемого в (29) сведется к интегралу от первого слагаемого (проверить!)

☞ Видно, что $t_{\mu\nu}(p,k) = t_{\nu\mu}(k,p) \quad \rightrightarrows$

$$T_{\mu\nu}(p,k) \overset{(16)}{=} \frac{1}{2\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}p^\lambda k^\rho \tag{40}$$

Аномалия в КЭД

✦ Рассмотрим безмассовую КЭД

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi \tag{41}$$

☞ По-прежнему существует два сохраняющихся на классическом уровне тока:

$$j_\mu = -e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \text{ – векторный} \tag{42}$$

$$j_\mu^5 = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \text{ – аксиальный} \tag{43}$$

но на этот раз векторный ток взаимодействует с калибровочным полем, аксиальный – нет.

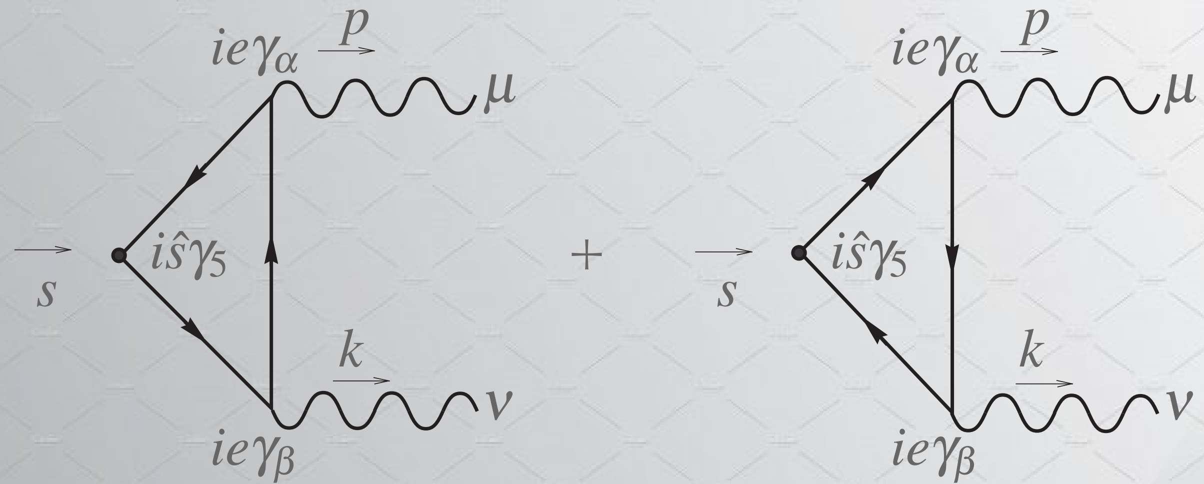
✦ Рассмотрим следующий коррелятор

$$G_{\rho\mu\nu}(x,y,z) = \langle T(j_\rho^5(x)A_\mu(y)A_\nu(z)S)\rangle \tag{44}$$

✦ Вычислим его дивергенцию $\partial_x^\rho G_{\rho\mu\nu}$

✦ В однопетлевом приближении имеем (вычислить!)

$$\int d^4x d^4y d^4z \mathrm{e}^{-isx+ipy+ikz} \partial_x^\rho G_{\rho\mu\nu}(x,y,z) =$$



$$\stackrel{(40)}{=} -\frac{e^2}{2\pi^2}(2\pi)^4\delta(s-p-k)\varepsilon^{\alpha\beta\rho\lambda}p_\rho k_\lambda \cdot -iG_{\alpha\mu}(p)\cdot -iG_{\beta\nu}(k) \qquad (45)$$

✦ Вычислим (вычислить!) в древесном приближении

$$\int d^4x d^4y d^4z \mathrm{e}^{-isx+ipy+ikz} \langle T(F^{\alpha\beta}(x)\tilde{F}_{\alpha\beta}(x)A_\mu(y)A_\nu(z)S)\rangle =$$

$$= 4(2\pi)^4\delta(s-p-k)\varepsilon^{\alpha\beta\rho\lambda}p_\rho k_\lambda \cdot -iG_{\alpha\mu}(p)\cdot -iG_{\beta\nu}(k) \qquad (46)$$

где $\tilde{F}_{\alpha\beta} = 1/2\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

✦ Сравнивая (45), (46), получаем

$$\partial_x^\rho \langle T(j_\rho^5(x) A_\mu(y) A_\nu(z) S)\rangle = -\frac{e^2}{8\pi^2}\langle T(F^{\alpha\beta}(x)\tilde{F}_{\alpha\beta}(x) A_\mu(y) A_\nu(z) S)\rangle \tag{47}$$

✦ На самом деле (47) является следствием операторного равенства

$$\partial^\mu j_\mu^5 = -\frac{e^2}{8\pi^2} F^{\alpha\beta}\tilde{F}_{\alpha\beta} + 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi \tag{48}$$

☞ Это равенство называется *аномалией Адлера-Белла-Джекива (АБД)*

Adler[1969]; Bell, Jackiw[1969]

☞ Адлер и Бардин: это точное равенство во всех порядках ТВ.

Adler, Bardeen[1969]

☞ Ансельм и Иогансен подтверждают этот результат для операторов, но утверждают, что матричные элементы этого равенства получают поправки, что, в частности, снимает некоторые противоречия в суперсимметричных теориях.

Ansel'm, Iogansen[1989]

☞ В $d = 2\omega$ измерениях

$$\partial^\mu j^5_\mu = (-1)^{\omega+1} \frac{2e^\omega}{(4\pi)^\omega \omega!} \varepsilon^{\mu_1 \ldots \mu_{2\omega}} F_{\mu_1 \mu_2} \ldots F_{\mu_{2\omega-1}\mu_{2\omega}} \qquad (49)$$

– при $d \neq 4$ аномалия не “треугольная”!

☞ Аномалия (48) получена с использованием калибровочно-инвариантной регуляризации. Можно попытаться использовать не калибровочно-инвариантную регуляризацию и добиться того, что

$$\partial^\mu j^5_\mu = 0 \qquad (50)$$

Однако в этом случае

$$\partial^\mu j_\mu \neq 0 \implies \qquad (51)$$

Нарушаются ТУ для КЭД $\implies$ теория неперенормируема.

☞ Другими словами, невозможно добиться одновременного выполнения равенств

$$\partial^\mu j^5_\mu = 0 \quad \text{и} \quad \partial^\mu j_\mu = 0 \qquad (52)$$

☞ Аномалия АБД является наблюдаемой. В частности, она приводит к основной (запрещенной без аномалии) моде распада $\pi^0 \to 2\gamma$ $\rightrightarrows$

☞ Более того, поскольку в трёугольниках (45) пробегают всевозможные степени свободы легких кварков, то амплитуда процесса $\pi^0 \to \gamma\gamma$ пропорциональна числу цветов N_c кварков. $\rightrightarrows$ Ширина $\sim N_c^2$. Сравнивая теоретическое предсказание с экспериментально измеренной шириной, можно найти $N_c = 3$.

☞ Заметим, что аномальный вклад, анологичный (48), возникает, если фермионы взаимодействуют и с неабелевыми калибровочными полями, и с гравитонами.

☞ Аномалия не зависит от масс $\rightrightarrows$

- Формула (48) справедлива и в теории со спонтанным нарушением (калибровочной) симметрии.
- Аномалии – полезный инструмент для построения эффективных теорий: аномалии в полной теории должны совпадать с аномалиями в эффективной теории (в терминах эффективных степеней

свободы). Это условие называется *условием самосогласованности ‘т Хофта (t’ Hooft anomaly matching conditions)*

G. ‘t Hooft[1980]

☞ Выражение для аномалии (1-ое слагаемое в (48)) представляет собой полную производную

$$F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = 2\partial_\mu\left(\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}A_\nu\partial_\lambda A_\rho\right) \quad \rightrightarrows \tag{53}$$

- Можно попытаться определить новый ток

$$\begin{aligned}\tilde{j}^5_\mu &= j^5_\mu + \frac{e^2}{4\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}A^\nu\partial^\lambda A^\rho \\ \partial^\mu\tilde{j}^5_\mu &= 0\end{aligned} \tag{54}$$

- Этот ток не калибровочно-инвариантный.
- Соответствующий сохраняющийся заряд $\tilde{Q}_5$ также в общем случае не является калибровочным инвариантом.
- Обсуждение тонких вопросов, связанных с существованием заряда $\tilde{Q}_5$ выходит за рамки данного курса.

Аномалии в киральных теориях

✦ Кратко рассмотрим вместо КЭД теорию, в которой калибровочное поле взаимодействует не только с векторным фермионным током, но и с аксиальным

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\sum_{i=1}^{N_f}\bar{\psi}_i\gamma^\mu\left(\partial_\mu - ie\frac{\upsilon_i - a_i\gamma^5}{2}A_\mu\right)\psi_i \tag{55}$$

✦ Здесь N_f – число фермионов (число «ароматов»), i – индекс аромата. Каждый фермион ψ_i имеет $-e\upsilon_i/2$ векторный и $ea_i/2$ аксиальный «электрические» заряды; $\upsilon_i,\ a_i$ – действительные числа.

✦ Теория инвариантна относительно калибровочных преобразований

$$\psi_i' = \mathrm{e}^{i\frac{\upsilon_i - a_i\gamma_5}{2}\alpha(x)}\psi_i,\quad A_\mu' = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)\ \Rightarrow \tag{56}$$

✦ Левые и правые фермионы

$$\psi_{L,R} = \frac{1\mp\gamma_5}{2}\psi \tag{57}$$

имеют разные электрические заряды. В единицах e:

$$\psi_{L,i}:\quad -(\upsilon_i + a_i),\qquad \psi_{R,i}:\quad -(\upsilon_i - a_i) \tag{58}$$

✦ Такие теории называются *киральными*.

✦ Необходимым условием самосогласованности таких теорий (выполнение уравнений Максвелла, перенормируемость, унитарность) является условие сохранения $V-A$ тока, взаимодействующего с калибровочным полем,

$$J_\mu = V_\mu - A_\mu = -\frac{e}{2}\sum_{i=1}^{N_f} \upsilon_i \bar{\psi}_i \gamma_\mu \psi_i + \frac{e}{2}\sum_{i=1}^{N_f} a_i \bar{\psi}_i \gamma_\mu \gamma_5 \psi_i \tag{59}$$

$$\partial^\mu J_\mu = 0 \tag{60}$$

✦ На квантовым уровне равенство (60) становится операторным $\rightrightarrows$

✦ Требуется сохранение по каждому индексу, например, трёхточки

$$\langle J_\mu(x) J_\nu(y) J_\rho(z) \rangle \tag{61}$$

Вычисление дивергенции совершенно аналогичны получению формулы для аномалии (48) за исключением одного момента:

∨ В каждой вершине, соответствующей току, стоит матрица $\upsilon_i - a_i\gamma_5$. Эти матрицы, однако, можно “протащить” через матрицы γ_μ, используя

$$\gamma_\mu(\upsilon_i - a_i\gamma_5) = (\upsilon_i + a_i\gamma_5)\gamma_\mu, \tag{62}$$

т.е. считая, что $\{\gamma_\mu\gamma_5\} = 0$. Действительно, в размерной регуляризации

$$\{\gamma_\mu\gamma_5\} = 0 + \mathscr{O}(d-4). \tag{63}$$

Поскольку ответ для аномалии в случае наличия в вершинах только одной γ_5-матрицы конечный, то можно отбросить исчезающее при $d = 4$ слагаемое в (63).

✦ Поступая таким образом, можно перетащить все матрицы $\upsilon_i - a_i\gamma_5$ к одной вершине.

✦ В результате в этой вершине будет стоять матрица

$$(\upsilon_i - a_i\gamma_5)^3 = (\upsilon_i^3 + 3\upsilon_i a_i^2) - a_i(3\upsilon_i^2 + a_i^2)\gamma_5 \tag{64}$$

Векторная часть вклада в аномалию не дает, аксиальная приводит к

$$\partial^\mu J_\mu = \frac{e^3}{64\pi^2}\sum_{i=1}^{N_f} a_i(3v_i^2 + a_i^2)F\tilde{F} \tag{65}$$

✦ Ключевой разницей между током J_μ и током j_μ^5 является то, что J_μ взаимодействует с калибровочным полем, а j_μ^5 – нет. Поэтому для самосогласованности требуется $\partial J = 0$ – *теория, свободная от аномалии* $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{N_f} a_i(3v_i^2 + a_i^2) = 0 \tag{66}$$

✦ Принимая во внимание, что фермионы могут также взаимодействовать с другими неабелевыми калибровочными полями и/или гравитонами, что приводит к условиям сокращений аномальных вкладов в других корреляторах, заменим (66) на более сильные условия

$$\sum_{i=1}^{N_f} a_i \upsilon_i^2 = 0 \tag{67}$$

$$\sum_{i=1}^{N_f} a_i^3 = 0 \tag{68}$$

$$\sum_{i=1}^{N_f} a_i = 0 \tag{69}$$

✦ Рассмотрим несколько примеров

✧ $N_f = 1$. Если $a_1 \neq 0$, то теория аномальна. Т.е. если в теории имеется один фермион, левая и правая части которого имеют разные заряды по калибровочной группе, то такая теория является противоречивой.

☞ Можно показать, что нельзя переопределить ток J_μ так, чтобы $\partial J = 0$

✧ $N_f = 2$. Тогда из (67) – (69) $\rightrightarrows$

$$a \equiv a_1 = -a_2, \quad \upsilon \equiv \upsilon_1 = \pm\upsilon_2 \tag{70}$$

- В этом случае легко показать (показать!), что теория (в отсутсвие других взаимодействий) эквивалентна теории двух (новых) фермионных полей, взаимодействующих с фотоном только через векторные токи и несущие заряды $-v/2$ и $(\mp v + a)/2$ в единицах e. $\rightrightarrows$

- Такая теория называется *вектороподобной*.

✧ Стандартная модель основана на калибровочной группе $SU_C(3) \times SU_W(2) \times U_Y(1)$

- Группа $SU_C(3)$ – группа цвета; ответственна за сильные взаимодействия. Левые и правые кварки имеют одинаковые заряды по этой группе $\rightrightarrows$ цветной ток кварков является векторным и неаномальным.
- Группа $SU_W(2)$ (вместе с группой $U_Y(1)$) ответственна за электрослабые взаимодействия. Левые фермионы преобразуются по этой группе (лежат в фундаментальном представлении), а правые – нет (являются синглетами) $\rightrightarrows$ дивергенции соответству-

ющих трёхточек, содержащих только $SU(2)$-токи, могли бы быть аномальны, но этого не происходит: дивергенции пропорциональны

$$Tr(\tau^a\{\tau^b\tau^c\}) = 2\delta^{bc}Tr\tau^a = 0, \tag{71}$$

где τ^a – матрицы Паули.

- Группа $U_Y(1)$ – группа *гиперзаряда*: линейная комбинация генераторов этой группы и генератора $\tau^3/2$ группы $SU_W(2)$ даёт известные электрические заряды частиц. В Таблице 1 приведены заряды и представления частиц 1-го поколения (для остальных поколений заряды те же самые). Правое нейтрино ν_R (если существует) не взаимодействует ни с одним калибровочным бозоном $\quad\rightrightarrows\quad$ является *стерильным*. Все частицы также взаимодействуют с гравитоном.

	ν_L	e_L	ν_R	e_R	$u_L^{\alpha=1,2,3}$	$d_L^{\alpha=1,2,3}$	$u_R^{\alpha=1,2,3}$	$d_R^{\alpha=1,2,3}$
υ_i	1	1	0	2	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$
a_i	1	1	0	-2	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$Y_i = -\frac{\upsilon_i}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$Q_i = Y_i + \frac{\tau^3}{2}$	0	-1	0	-1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$SU_W(2)$	**2**		**1**	**1**	**2**		**1**	**1**
$SU_C(3)$	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	**3**

Таблица 1: Заряды одного поколения. α – индекс цвета, Y_i – гиперзаряд, Q_i – электрический заряд, τ^3 действует на дублеты $(\nu_L, e_L)^{\mathrm{T}}$ и $(u_L, d_L)^{\mathrm{T}}$

- Обозначим токи, взаимодействующие с калибровочными полями группы $SU_C(3) \times SU_W(2) \times U_Y(1)$ и гравитонами, как S_3, S_2, U и G соответственно, а трёхточки – в виде произведения, например, $US_3S_2 \equiv \langle T(US_3S_2)\rangle$.
- Тогда могут возникнуть следующие нетривиальные (т.е. не равные 0 за счет бесследовасти генераторов группы и формул типа (71)) аномалии

	ν_L	e_L	ν_R	e_R	$u_L^{\alpha=1,2,3}$	$d_L^{\alpha=1,2,3}$	$u_R^{\alpha=1,2,3}$	$d_R^{\alpha=1,2,3}$
υ_i	1	1	0	2	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$
a_i	1	1	0	-2	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$

$$US_3S_3 \sim \sum_{i=u,d} a_i = 3\times\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right) = 0 \tag{72}$$

$$UGG \sim \sum_{i=1}^{N_f} a_i = 1+1-2-3\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right) = 0-0 = 0 \tag{73}$$

$$US_2S_2 \sim \sum_{i=f_L} \upsilon_i + a_i = 2+2-3\times\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) = 4-4 = 0 \tag{74}$$

$$\begin{aligned} UUU &\sim \sum_{i=1}^{N_f} 3a_i\upsilon_i^2 + a_i^3 = 4\sum_{i=1}^{N_f} a_i^3 = \\ &= 4\left[1+1-8-3\times\left(\frac{1}{27}+\frac{1}{27}-\frac{64}{27}+\frac{8}{27}\right)\right] = -24+24 = 0 \end{aligned} \tag{75}$$

☞ Отметим, что также выполняются равенства

$$\sum_{i=1}^{N_f} Y_i = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_f} \upsilon_i = 0 \tag{76}$$

$$\sum_{i=1}^{N_f} Q_i = 0 \tag{77}$$

☞ Эта "магия чисел" не может не вызвать удивления. Но факт остается фактом:

Стандартная модель свободна от аномалий!!!

☞ Важно, что все фермионные степени свободы одного поколения играют роль в сокращении аномалий. Если бы, например, не существовало нейтрино и верхнего кварка, то, в частности, $UUU \sim -8 \quad \rightrightarrows$

☞ После открытия τ-лептона (1975) и b-кварка (1977) никто не сомневался, что должны существовать и ν_τ, и t-кварк. Их открытие было лишь делом времени: 2000 и 1995 соответственно.

Итог

- Вычисление квантовых эффектов (петлевых интегралов) требует регуляризации, которая в некоторых случаях нарушает классические симметрии теории.
- В частности, нарушается аксиальная симметрия.
- Если после снятия регуляризации и перенормировки соответствующую симметрию не удается восстановить, то возникает квантовая аномалия: соответствующий ток не сохраняется.
  - В частности, аномальным является аксиальный ток (при условии сохранения векторного тока).
  - Если аксиальный ток является глобальным, т.е. не взаимодействует с калибровочным полем, то его несохранение приводит к интересным наблюдаемым следствиям, например, к распаду $\pi^0 \to \gamma\gamma$.
  - Если аксиальный ток является калибровочным, т.е. взаимодействует с калибровочным полем, то его сохранение является необходимым условием самосогласованности теории. $\Rightarrow$

✧ В таких теориях аномалии должны сокращаться.

✧ Стандартная модель является свободной от аномалий теории.

- Может быть также нарушена масштабная инвариантность (присутствующая на классическом уровне во многих безмассовых теориях).

- Возникает конформная аномалия: след ТЭИ (который должен исчезать в масштабно-инвариантных теориях) пропорционален $\beta(g)$-функции, характеризующей бег константы связи (см. "Ренормгруппа").

☆ В теории струн также возникают аномалии, которые должны обнуляться для самосогласованности теории. Это приводит к ограничению на число пространственно-временных измерений:

- $d = 26$ для бозонной струны
- $d = 10$ для теории суперструн
- $d = 11$ для M-теории, объединяющей 5 известных теорий суперструн.