

М.В. ЛибановКТТ XIII. Перенормировка КЭД

Содержание

Анализ расходимостей в КЭД	2
Теорема Фарри	9
Тождества Уорда	11
Перенормируемость КЭД	29
Итог	40

Анализ расходимостей в КЭД

● Лагранжиан КЭД

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\hat{D}\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (1)$$

● Длинная производная

$$\hat{D} \equiv \gamma^\mu D_\mu = \gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) \quad (2)$$

приводит к взаимодействию фермионного тока с фотоном, называемому *минимальном*.

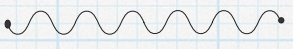
● Вид этого взаимодействия диктуется требованием инвариантности теории относительно калибровочных преобразований

$$\psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha, \quad (3)$$

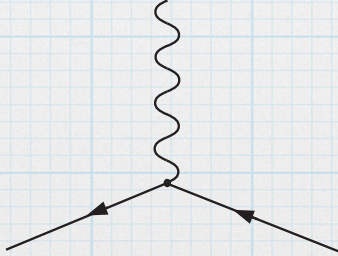
- Оно представляет собой не что иное, как взаимодействие сохраняющегося векторного тока с фотоном:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = eA_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \equiv -A_\mu j^\mu . \quad (4)$$

- Диаграммная техника КЭД содержит следующие три элемента

Фотонный пропагатор:  $= \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$

Электронный пропагатор:  $= \frac{i}{\hat{k} - m + i\epsilon}$

Вершина:  $= ie\gamma^\mu \delta(k_1 + k_2 + p) \quad (5)$

- Условная степень расходимости КЭД в четырех измерениях

$$D = 4 - B - \frac{3}{2}F, \quad (6)$$

✓ B --- число внешних фотонных линий,

✓ F --- число внешних фермионных линий.

- Из формулы (6) следует, что в однопетлевом приближении существуют условно расходящиеся диаграммы (7) →

1. $B = 1, F = 0, D = 3$

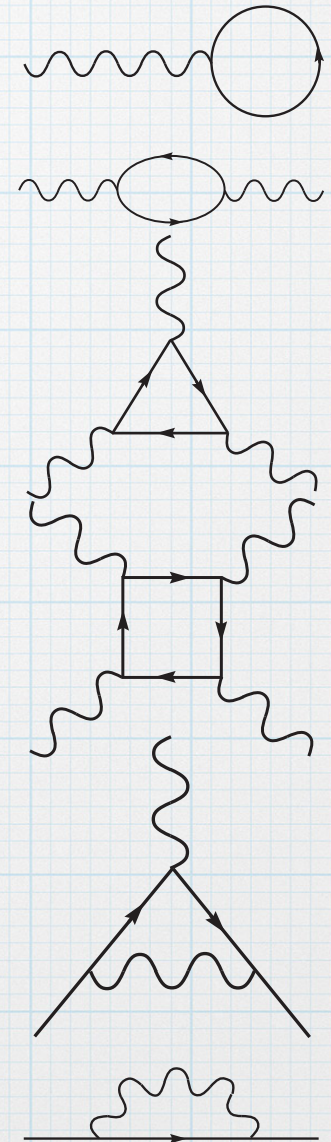
2. $B = 2, F = 0, D = 2$

3. $B = 3, F = 0, D = 1$

4. $B = 4, F = 0, D = 0$

5. $B = 1, F = 2, D = 0$

6. $B = 0, F = 2, D = 1$



(7)

- Из анализа структуры приведенных диаграмм можно сделать неверный вывод, что электродинамика является неперенормируемой теорией:
 - диаграмма 1) могла бы потребовать введения контрчлена $\sim A$,
 - диаграмма 2) потребовать A^2 , т.е. массы фотона,
 - диаграммы 3) и 4) потребовать A^3 и A^4 соответственно.
- Таких членов в исходном лагранжиане (1) нет.
- 👉 Более того, все эти контрчлены нарушали бы калибровочную инвариантность, что означало бы крах теории: теория была бы неперенормируемой →
- 👉 По классификации неперенормируемых теорий соответствовала бы пункту ② -- контрчлены физически бессмысленны.
- Однако не следует торопиться с выводами:

- Именно калибровочная инвариантность (наряду с другими симметриями), которую могли бы нарушить нежелательные контрчлены, и спасает теорию --- эти симметрии в том или ином виде запрещают появление нежелательных контрчленов, делая диаграммы конечными, а также накладывает некоторые ограничения на возможные перенормировки.
- Чтобы увидеть, как это происходит, мы должны регуляризовать теорию.
- Используем размерную регуляризацию.
- Она сохраняет калибровочную инвариантность и другие симметрии лагранжиана (1).
- В размерной регуляризации заряд электрона e_d в d измерениях становится размерной величиной →

$$e_d = \mu^\varepsilon e, \quad d = 4 - 2\varepsilon, \quad [\mu] = 1, \quad [e] = 0 \quad (8)$$

● Рассмотрим первую диаграмму в (7)

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} &= -ie\mu^\varepsilon \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \text{Tr} \left(\frac{i\gamma_\mu(\hat{q} + m)}{q^2 - m^2} \right) = \\
 &= e\mu^\varepsilon \left(\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^\nu \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu)}{q^2 - m^2} + \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{m \text{Tr} \gamma_\mu}{q^2 - m^2} \right) = 0. \quad (9)
 \end{aligned}$$



Выражение в последней строчке равно нулю в силу того, что

- ✓ первый интеграл в круглых скобках равен нулю из-за интегрирования нечетной функции импульса,
- ✓ второй же член равен нулю в силу равенства нулю следа от γ -матрицы, что справедливо в размерной регуляризации



Диаграмма 1) в (7) не просто сходится, а равна нулю, т.е. ее конечная часть также равна нулю.

- 👉 Если бы это было не так, то это означало бы нарушение лоренц-инвариантности:
- 👉 Действительно, эта диаграмма описывает не что иное, как вакуумное среднее фотонного поля (в отсутствие внешних полей).
- 👉 Если бы это вакуумное среднее было бы не равно нулю, то мы бы имели выделенное направление в пространстве → релятивистская инвариантность была бы нарушена.
- 🟢 Аналогично можно показать, что диаграмма 3) в (7) равна нулю.
- 🟢 В действительности равенство нулю функций Грина типа рассмотренных выше носит общий характер, и составляет содержание:

Теорема Фарри

Теорема Фарри. В электродинамике все функции Грина нечетного числа операторов фотонов равны нулю.

Доказательство:

- Предположим, что КЭД инвариантна относительно зарядового сопряжения.
- При зарядовом сопряжении ток меняет знак $Cj_\mu = -j_\mu$
- Лагранжиан (1) инвариантен $\mathcal{L}^c = \mathcal{L}$, если $CA_\mu = -A_\mu \rightarrow$
- ФГ нечетного числа операторов фотонов меняют знак при зарядовом сопряжении \rightarrow
- Соответствующие матричные элементы, получаемые с помощью ЛСЦ-формулы из этих ФГ, будут описывать переходы четного числа фотонов в нечетное (или наоборот) \rightarrow
- Если эти МЭ (и ФГ) отличны от 0, то будет нарушаться C-инвариантность
- Мы пришли к противоречию ■

- 👉 Ключевым моментом в этом доказательстве является предположение о C -инвариантности.
- 👉 «Классический» лагранжиан действительно инвариантен относительно преобразований $\psi \rightarrow \psi^c$, $A_\mu \rightarrow -A_\mu$ (которые можно (и нужно) назвать C -преобразованиями).
- 👉 Но инвариантна ли квантовая теория относительно этих преобразований?
- 👉 Мы обсуждали, что могут возникать квантовые аномалии... →
- 👉 C -инвариантность необходимо доказать!
- 👉 Как мы увидим далее, для этого необходимо доказать сохранение (какой-либо) симметрии на однопетлевом уровне →
- 👉 Необходимо доказать теорему Фарри на однопетлевом уровне (доказать!)
- 👉 Заметим, что теорема Фарри справедлива только в КЭД, т.е. в теории с абелевой калибровочной группой $U(1)$. В неабелевых калибровочных теориях она (вообще говоря) неверна.

Тождества Уорда

- Диаграммы 1) и 3) в (7) равны нулю.
- Однако четыре оставшихся диаграммы могут в принципе дать новые контрчлены типа A^2 и A^4 .
- Явным вычислением при инвариантном способе регуляризации можно убедиться, что этого не происходит.
- Но при этом мы не застрахованы от того, что такие контрчлены не появятся в высших порядках теории возмущений.
- Поэтому важно показать в общем виде, что этого не происходит.
- Доказательство основано на так называемых *тождествах Уорда-Такахаши* или просто *тождествах Уорда* (ТУ).
- В неабелевых калибровочных теориях такие тождества называются также *тождествами Славнова-Тейлора*.

- Тождества Уорда являются следствием сохранения тока.
- Что в свою очередь является следствием, в силу теоремы Нетер, инвариантности лагранжиана относительно глобальных фазовых вращений, составляющих подгруппу калибровочной группы:

$$\psi'(x) = e^{i\alpha} \psi(x) \Rightarrow j_\mu = -e_d \bar{\psi} \gamma_\mu \psi : \partial^\mu j_\mu = 0. \quad (10)$$

- Эта цепочка записана на классическом уровне.
- На квантовом уровне ток является оператором, \rightarrow
- Условие сохранения тока нужно понимать в операторном смысле, т.е. как равенство нулю всех матричных элементов оператора ∂j .
- ТУ являются следствием этого операторного равенства и связывают функции Грина, содержащие один оператор тока j_μ и произвольное

число фермионных ($2n$ штук) и фотонных полей (p штук)

$$G_\mu(x, x_i, y_i, z_i) = \langle 0 | T (j_\mu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) \dots \psi(x_n) \bar{\psi}(y_n) A_{\nu_1}(z_1) \dots A_{\nu_p}(z_p)) | 0 \rangle . \quad (11)$$

● Выведем ТУ, не обращая внимания на ультрофиолетовые расходимости, т.е., другими словами, в *регуляризованной, но неперенормированной* теории.

● Будем предполагать, что мы используем инвариантную регуляризацию такую, как, например, размерная.

● Заметим, что

$$\begin{aligned} \partial_x^\mu \langle T(j_\mu(x) \psi(x_1)) \rangle &= \langle \partial_x^\mu (j_\mu(x) \psi(x_1) \theta(x^0 - x_1^0) + \psi(x_1) j_\mu(x) \theta(x_1^0 - x^0)) \rangle = \\ &= \langle j_0(x) \psi(x_1) \delta(x^0 - x_1^0) - \psi(x_1) j_0(x) \delta(x_1^0 - x^0) \rangle = \langle [j_0(x), \psi(x_1)] \delta(x^0 - x_1^0) \rangle \end{aligned} \quad (12)$$

● Во второй строке мы учли операторное равенство $\partial j = 0$.

👉 Заметим, что несмотря на появление δ -функции от временных компонент, выражение в правой части (12) релятивистски-инвариантно в силу локальности оператора тока.

- Заряд

$$Q = \int d\mathbf{x} j_0(x) \quad (13)$$

сохраняется \rightarrow

- Вычислим интеграл по \mathbf{x} от оператора в последнем равенстве (12)

$$\int d\mathbf{x} \delta(x^0 - x_1^0) [j_0(x), \psi(x_1)] = \delta(x^0 - x_1^0) [Q, \psi(x_1)], \quad (14)$$

- Заряд Q является генератором бесконечно малых фазовых вращений (согласно основному постулату квантования), \rightarrow

$$\delta(x^0 - x_1^0) [Q, \psi(x_1)] = e_d \delta(x^0 - x_1^0) \psi(x_1) = e_d \delta(x^0 - x_1^0) \int d\mathbf{x} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \psi(x). \quad \rightarrow \quad (15)$$

- С учетом (14) получаем


$$[j_0(x), \psi(x_1)] \delta(x^0 - x_1^0) = e_d \psi(x) \delta^d(x - x_1) . \quad (16)$$


 Аналогично

$$[j_0(x), \bar{\psi}(x_1)] \delta(x^0 - x_1^0) = -e_d \bar{\psi}(x) \delta^d(x - x_1) , \quad (17)$$

$$[j_0(x), A_\mu(x_1)] \delta(x^0 - x_1^0) = 0 . \quad (18)$$

 Эти соотношения выражают тот факт, что ψ , $\bar{\psi}$ и A_μ рождают кванты электрического заряда (13), равные соответственно $-e_d, e_d, 0$.

 Заметим, что при выводе этих соотношений мы нигде не использовали явного вида тока (10) (который отражает минимальность взаимодействия), а использовали лишь условие сохранения заряда.

 Эти же соотношения можно получить (получить!), используя явный вид тока и канонические одновременные коммутационные соотношения для операторов полей.

🔴 Вычислим теперь, используя (12), (16), (17), (18), дивергенцию от G_μ

$$\begin{aligned}
 (11) \quad \partial_x^\mu G_\mu(x, x_i, y_i, z_i) &= \\
 &\sum_{i=1}^n \langle T \left(\{ [j_0(x), \psi(x_i)] \delta(x^0 - x_i^0) \bar{\psi}(y_i) + \psi(x_i) [j_0(x), \bar{\psi}(y_i)] \delta(x^0 - y_i^0) \} \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \psi(x_1) \bar{\psi}(x_1) \dots \widehat{\psi(x_i) \bar{\psi}(y_i)} \dots A_{v_p}(z_p) \right) \rangle + \\
 &+ \sum_{j=1}^p \langle T \left(\psi(x_1) \dots \bar{\psi}(y_n) A_{v_1}(z_1) \dots [j_0(x), A_{v_j}(z_j)] \delta(x^0 - z_j^0) \dots A_{v_p}(z_p) \right) \rangle = \\
 &= e_d \langle T \left(\psi(x_1) \dots \bar{\psi}(y_n) \dots A_{v_p}(z_p) \right) \rangle \times \sum_{i=1}^n \{ \delta^d(x - x_i) - \delta^d(x - y_i) \}, \quad (19)
 \end{aligned}$$

где $\widehat{\psi \bar{\psi}}$ означает, что соответствующий член отсутствует.

🔴 Последнее равенство в цепочки (19) и называется тождеством Уорда.



Напомним, что наш вывод носил формальный характер и не учитывал необходимость перенормировок.

🔴 Рассмотрим следующие три частных случая ТУ: 1) $n = 0, p = 1$; 2) $n = 1, p = 0$; 3) $n = 0, p = 3$.

① $n = 0, p = 1$

Пусть $G_{\mu\nu}$ --- полный фотонный пропагатор:

$$-iG_{\mu\nu} = \text{wavy line} \text{---} \text{square} \text{---} \text{wavy line} = \text{wavy line} + \text{wavy line} \text{---} \text{circle} \text{---} \text{wavy line} + \text{wavy line} \text{---} \text{circle} \text{---} \text{circle} \text{---} \text{wavy line} + \dots, \quad (20)$$

где

$$-i\Pi_{\mu\nu} = \mu \text{---} \text{circle} \text{---} \nu, \quad (21)$$

--- сумма всех ОЧН диаграмм, и $\Pi_{\mu\nu}$ называется *поляризационным оператором фотона*.

Пусть также $G_{\mu\nu}^{(0)}$ --- свободный фотонный пропагатор.

Рассмотрим $G_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} -iG_{\mu\nu}(x) &= \text{wavy line} + \text{wavy line} \text{---} \text{triangle} \text{---} \text{wavy line} = \langle T(A_\mu(x)A_\nu(0)S) \rangle = \\ &= -iG_{\mu\nu}^{(0)}(x) + \langle T\{A_\mu(x)ie_d \int dy A^\rho(y) \bar{\psi}(y) \gamma_\rho \psi(y) A_\nu(0)S\} \rangle = \\ &= -iG_{\mu\nu}^{(0)}(x) - \int dy G_{\mu\rho}^{(0)}(x-y) \langle T(j^\rho(y)A_\nu(0)S) \rangle, \end{aligned} \quad (22)$$



В графическом представлении мы явно выделили вершину взаимодействия фотона (первая фотонная линия) с фермионным током.

- Вычислим дивергенцию от (22):

$$\begin{aligned} \partial_x^\mu G_{\mu\nu}(x) &= \partial_x^\mu G_{\mu\nu}^{(0)} - i \int dy \partial_x^\mu G_{\mu\rho}^{(0)}(x-y) \langle j^\rho(y) A_\nu(0) \rangle = \\ &= \partial_x^\mu G_{\mu\nu}^{(0)} + i \int dy \partial_y^\mu G_{\mu\rho}^{(0)}(x-y) \langle j^\rho(y) A_\nu(0) \rangle = \\ &= \partial_x^\mu G_{\mu\nu}^{(0)} - i \int dy G_{\mu\rho}^{(0)}(x-y) \partial_y^\mu \langle j^\rho(y) A_\nu(0) \rangle . \end{aligned} \quad (23)$$

- Выберем свободный пропагатор в калибровке Фейнмана, т.е. положим $\xi = 1$ в (5). \rightarrow
- Свободный пропагатор $\sim g_{\mu\nu}$.
- Учитывая этот факт, получаем в последнем равенстве в (23) под интегралом $\partial_y^\rho \langle j^\rho(y) A_\nu(0) \rangle = 0$ в силу ТУ (19), т.е.

$$\partial^\mu G_{\mu\nu}(x) = \partial^\mu G_{\mu\nu}^{(0)}(x) . \quad (24)$$

👉 Разумеется, это результат не зависит от калибровки.

🕒 Из уравнения (24) следует, что поляризационный оператор поперечен:

$$k^\nu \Pi_{\mu\nu} = 0, \rightarrow \quad (25)$$

🕒 Его можно записать в виде

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \Pi(k^2), \rightarrow \quad (26)$$

👉 Радиационные поправки не затрагивают продольной части пропагатора, и, следовательно, она не перенормируется. \rightarrow

🕒 Если $\Pi(k^2)$ не имеет полюса при $k^2 \rightarrow 0$, то не требуется контрчлена A_μ^2 , \rightarrow

🕒 Фотон остается **безмассовым**.

🕒 Покажем это.

Пусть

$$G_{\mu\nu}(k) = G(k^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + G^l(k^2) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad (27)$$

$$G_{\mu\nu}^{(0)}(k) = G^{(0)}(k^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + G^{l(0)}(k^2) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad (28)$$

$$G^{(0)} = \frac{1}{k^2 + i\varepsilon}, \quad G^{l(0)} = \frac{\xi}{k^2 + i\varepsilon}. \quad (29)$$

Далее, в импульсном пространстве графическое уравнение (20) имеет вид

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(0)} + G_{\mu\sigma}^{(0)}(-i\Pi_{\sigma\rho})(-iG_{\rho\nu}^{(0)}) + \dots = G_{\mu\nu}^{(0)} + G_{\mu\sigma}^{(0)}(-i\Pi_{\sigma\rho})(-iG_{\rho\nu}). \quad (30)$$

Подставляя в это уравнение (27), (28) и учитывая поперечность поляризации оператора (25), находим

$$\begin{aligned}
 G_{\mu\nu} &= G^{(0)} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + G^{l(0)} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) G^{(0)} \Pi G = \\
 &= (G^{(0)} - \Pi G) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + G^{l(0)} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Сравнивая это уравнение с (27), находим

$$G^l = G^{l(0)}; \quad G = \frac{G^{(0)}}{1 + \Pi} = \frac{1}{k^2 + k^2 \Pi(k^2)}. \tag{32}$$

Из этих уравнений следует, что если $k^2 \Pi(k^2) \rightarrow 0$ при $k^2 \rightarrow 0$, то полюс у полного пропагатора находится при $k^2 = 0$, т.е. массы фотона не возникает.

Доказательство же того, что $\Pi(k^2)$ несингулярна в нуле, нетривиально.

Мы здесь его приводить не будем. Скажем лишь, что в четырех измерениях это действительно так.

В двух же измерениях в КЭД с безмассовыми фермионами, как было показано Швингером, $\Pi(k^2)$ имеет полюс при $k^2 \rightarrow 0$.

② $n = 1, p = 0$

- Введем **вершинную функцию** Λ_μ как сумму всех **связных диаграмм** с **одним фотонным** и **двумя фермионными концами**:

$$\begin{aligned}
 ie_d(2\pi)^d \delta^d(p_2 - p_1 - q) \Lambda_\mu &= \text{Diagram} = \\
 &= \int d^d x d^d x_1 d^d y_1 e^{i(p_2 x_1 - p_1 y_1 - q x)} \langle T(A_\mu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1)) \rangle = \\
 &= -G_{\mu\nu}(q) \int d^d x d^d x_1 d^d y_1 e^{i(p_2 x_1 - p_1 y_1 - q x)} \langle T(j^\nu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1)) \rangle. \quad (33)
 \end{aligned}$$



Заметим, что в определении (33) мы явно выделили заряд электрона и мнимую единицу.

- Введем также ампутированную вершину Γ_μ , также выделяя фактор ie . \rightarrow
- Ампутированная вершина в первом порядке будет просто

$$\Gamma_\mu^{(1)} = \gamma_\mu \cdot \rightarrow \quad (34)$$

- По определению ампутированной и неампутированной функций имеем

$$\Lambda_\mu = -iG_{\mu\nu} \{(-iS(p_2))\Gamma^\nu(p_1, p_2)(-iS(p_1))\} , \quad (35)$$

- Здесь $S(p)$ --- полный фермионный пропагатор.
- В нулевом порядке

$$-iS^{(0)}(p) = \frac{i}{\hat{p} - m} \cdot \quad (36)$$

● Подставим (35) в (33), сократим на $G_{\mu\nu}$ и свернем обе части с q_ν :

$$\begin{aligned}
 & e_d (2\pi)^d \delta(p_2 - p_1 - q) S(p_2) q^\nu \Gamma_\nu S(p_1) = \\
 & = \int d^d x d^d x_1 d^d y_1 \left[i \partial_x^\nu e^{i(p_2 x_1 - p_1 y_1 - q x)} \right] \langle T(j_\nu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1)) \rangle = \\
 & = - \int d^d x d^d x_1 d^d y_1 e^{i(p_2 x_1 - p_1 y_1 - q x)} i \partial_x^\nu \langle T(j_\nu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1)) \rangle = \\
 & \stackrel{(19)}{=} i e_d \int d^d x d^d x_1 d^d y_1 e^{i(p_2 x_1 - p_1 y_1 - q x)} (-i S(x_1 - y_1) \cdot [\delta(x - y_1) - \delta(x - x_1)]) = \\
 & = e_d \int dy_1 dz e^{i y_1 (p_2 - p_1 - q)} \left[e^{-i z (p_1 + q)} S(z) - e^{-i z p_1} S(z) \right] = \\
 & = e_d (2\pi)^d \delta(p_2 - p_1 - q) [S(p_1 + q) - S(p_1)] , \quad \rightarrow \quad (37)
 \end{aligned}$$

$$S(p_2) q^\mu \Gamma_\mu S(p_1) = S(p_2) - S(p_1) . \quad (38)$$

● Умножая последнее равенство на $S^{-1}(p_2)$ слева и на $S^{-1}(p_1)$ справа,

находим

$$q^\mu \Gamma_\mu = S^{-1}(p_1) - S^{-1}(p_2) \quad (39)$$

☞ Часто именно это равенство называют тождеством Уорда.

🔴 Проверим это равенство в древесном приближении.


🔴 В этом случае в правой части (39) стоят

$$\frac{1}{S^{(0)}(p)} = m - \hat{p}. \quad (40)$$

🔴 Подставляя это выражение и выражение для вершины (34), приходим с учетом ЗСИ к тождеству

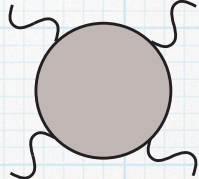
$$\hat{q} = m - \hat{p}_1 - m + \hat{p}_2 = \hat{p}_2 - \hat{p}_1, \quad (41)$$

🔴 Для полного фермионного пропагатора $-iS(p)$ имеем

$$-iS(p) = \left[\text{diagram} \right] = \frac{i}{\hat{p} - m - \Sigma(p)}, \quad (42)$$


③ $n = 0; p = 3.$

☛ Рассмотрим теперь четырехточечную ампутированную фотонную функцию

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \text{diagram} \quad (46)$$


☛ Действуя таким же образом, как и в предыдущих двух случаях, убеждаемся (проверить!), что

$$k_1^\mu \Gamma_{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4) = 0, \quad \rightarrow \quad (47)$$

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda\rho} = k_1^\sigma \Gamma_{1,\sigma\mu\nu\lambda\rho}, \quad \Gamma_{1,\sigma\mu\nu\lambda\rho} = -\Gamma_{1,\mu\sigma\nu\lambda\rho}, \quad (48)$$

☞ зависимость от внешнего импульса k_1 отфактаризовалась

☞ При этом дополнительной сингулярности при $k_1 \rightarrow 0$ не возникли

- Аналогично отфакторизовывается зависимость от оставшихся импульсов. →
- Полученная функция $\Gamma_{4,\mu\sigma\dots}$ имеет степень расходимости $D = -4$, →
- соответствующий интеграл сходится. →
- Таким образом нет необходимости вводить контрчлена, пропорционального A^4 .

Перенормируемость КЭД

- Докажем теперь, что КЭД -- перенормируемая теория →
- Тождества Уорда должны сохраняться при перенормировке.
- Для этого воспользуемся инвариантной регуляризацией, например, размерной. →
- Тогда тождества Уорда справедливы в регуляризованной теории.
- Будем работать в \overline{MS} , хотя, как мы обсуждали ранее, в КЭД наиболее подходящая с точки зрения физического смысла схема вычитаний в импульсном пространстве.
- Доказательство будем проводить по индукции.
- Для этого проверим справедливость ТУ на однопетлевом уровне.
- Подробные вычисления оставляем в качестве задачи.
- Приведем только окончательный результат.

① Поляризационный оператор фотона:

$$\begin{aligned}
 -i\Pi_{\mu\nu}(p) &= -e^2\mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\text{Tr} \gamma_\mu(\hat{q} + m)\gamma_\nu(\hat{q} + \hat{p} + m)}{(q^2 - m^2)((q + p)^2 - m^2)} = \\
 &= -i\frac{e^2}{12\pi^2}(g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu) \left[N_\varepsilon + \frac{4m^2}{p^2} + \frac{5}{3} - \right. \\
 &\quad \left. - 2\frac{8m^4 + 2m^2 p^2 - p^4}{p^3 \sqrt{4m^2 - p^2}} \cdot \text{arctg} \left(\frac{p}{\sqrt{4m^2 - p^2}} \right) + \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right], \quad (49)
 \end{aligned}$$

где конечная часть вычислена при $p^2 < 4m^2$.

🕒 При таких импульсах мы можем легко вычислить предел:

$$\lim_{p^2 \rightarrow 0} \Pi(p^2) \rightarrow \text{const}. \quad (50)$$

🕒 Таким образом, контрчлен, необходимый, чтобы скомпенсировать расходимость в (49), будет (проверить!)

$$\frac{1}{4} \left(\frac{e^2 N_\varepsilon}{12\pi^2} \right) F_{\mu\nu}^2. \quad (51)$$

- Структура (51) уже присутствует в лагранжиане (1) --- это кинетический член фотонного поля.
- Введем константу перенормировки ЭМТ Z_3 :

$$A_{0\mu} = Z_3^{1/2} A_\mu . \quad (52)$$

- Из этого уравнения и из вида контрчлена (51) находим

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2 N_\varepsilon}{12\pi^2} . \quad (53)$$

2 Собственная энергия электрона

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma(p) &= -e^2\mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \gamma_\mu \frac{\hat{p} + \hat{q} + m}{((p+q)^2 - m^2)q^2} \gamma^\mu = \\
 &= -i\frac{e^2}{16\pi^2} [N_\varepsilon(4m - \hat{p}) + \text{конечная часть}] . \quad (54)
 \end{aligned}$$

- Чтобы скомпенсировать эту расходимость необходимо ввести два контрчлена (проверить!):

$$-i\frac{e^2 N_\varepsilon}{16\pi^2} \bar{\psi} \hat{\partial} \psi + \frac{e^2 N_\varepsilon}{4\pi^2} \bar{\psi} \psi . \quad (55)$$

- Введем константы перенормировки фермионного поля и массы:

$$\psi_0 = Z_2^{1/2} \psi , \quad m_0 = m + \delta m . \quad \rightarrow \quad (56)$$

- Тогда из (55) находим

$$Z_2 = 1 - \frac{e^2 N_\varepsilon}{16\pi^2} , \quad (57)$$

$$\delta m = -\frac{e^2 N_\varepsilon}{4\pi^2} . \quad (58)$$

3 Вершинная функция



$$\begin{aligned}
 i\mu^\varepsilon \Gamma_\mu &= e^3 \mu^{3\varepsilon} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\nu (\hat{p}_2 - \hat{k} + m) \gamma_\mu (\hat{p}_1 - \hat{k} + m) \gamma^\nu}{k^2 ((p_2 - k)^2 - m^2) ((p_1 - k)^2 - m^2)} = \\
 &= i\mu^\varepsilon \frac{e^3}{16\pi^2} [N_\varepsilon \gamma_\mu + \text{конечная часть}] \rightarrow \quad (59)
 \end{aligned}$$

Отсюда и из (54) немедленно находим, что для расходящихся однопетлевых частей

$$\Gamma_\mu^{\text{расх}} = -\frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma^{\text{расх}}(p) = \frac{e^2}{16\pi^2} N_\varepsilon \gamma_\mu = (1 - Z_2) \gamma_\mu, \rightarrow \quad (60)$$



Тождество Уорда в виде (45) выполняется.

Расходимость в вершинной функции требует введения контрчлена

$$-\frac{e^3}{16\pi^2} N_\varepsilon A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = (Z_2 - 1) e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (61)$$

- 🟢 Найдем константу перенормировки заряда.
- 🟢 Для этого нужно сложить член взаимодействия в исходном лагранжиане с контрчленом (61) и приравнять все к лагранжиану, выраженному через голые величины.
- 🟢 Имеем, используя (52), (57),

$$e\bar{\psi}\hat{A}\psi + (Z_2 - 1)e\bar{\psi}\hat{A}\psi = eZ_2\frac{\bar{\psi}_0}{\sqrt{Z_2}}\frac{\hat{A}_0}{\sqrt{Z_3}}\frac{\psi_0}{\sqrt{Z_2}} = \frac{e}{\sqrt{Z_3}}\bar{\psi}_0\hat{A}_0\psi_0 = e_0\bar{\psi}_0\hat{A}_0\psi_0, \rightarrow \quad (62)$$

$$e = \sqrt{Z_3}e_0, \rightarrow \quad (63)$$

- 👉 Действительно не требуется вводить отдельной константы перенормировки заряда.
- 👉 Подчеркнем, что этот результат справедлив (при условии выполнения ТУ) во всех порядках теории возмущений, как это следует из (60), (61) и (62).



Это очень важный результат, и он имеет глубокие физические следствия:

- ✓ Предположим, что в нашей теории есть два заряженных фермиона, например, электрон и протон.
- ✓ Тогда нам бы пришлось перенормировать **обе** вершины взаимодействия фотона с фермионами.
- ✓ Если заряд требовал бы своей собственной перенормировки, то, вообще говоря, заряды, стоящие в этих вершинах перенормировались бы **по-разному**.
- ✓ И даже если бы они были изначально одинаковыми, то после перенормировки они стали бы **различными**.
- ✓ Таким образом, в результате квантовых эффектов заряды электрона и протона были бы **различными**, →
- ✓ что привело бы к тому, например, что **атом не был бы электрически нейтральным**.

④ Конечность четырехточечной фотонной функции Грина проверяется непосредственным вычислением: достаточно проверить (проверить!), что $\Gamma_{\mu\nu\lambda\rho}(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow 0$ (см. (47), (48)).

• Таким образом, мы убедились на однопетлевом уровне, что тождества Уорда сохраняются при перенормировке.

• Однопетлевой лагранжиан при этом имеет вид

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\hat{D}\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{Z_3 - 1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i(Z_2 - 1)\bar{\psi}\hat{D}\psi - \delta m\bar{\psi}\psi, \quad (64)$$

где

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2}N_\varepsilon, \quad Z_2 = 1 - \frac{e^2}{16\pi^2}N_\varepsilon, \quad \delta m = -\frac{e^2}{4\pi^2}N_\varepsilon. \quad (65)$$

• Очевидно, что этот лагранжиан калибровочно-инвариантен.

• Предположим теперь, что тождества Уорда выполняются в L петлях.

• Это означает, что L -петлевой лагранжиан имеет вид (64) с перенормировочными константами $Z_2, Z_3, \delta m$, вычисленными в L -петлевом при-

ближении.





- В $(L + 1)$ -петлевом приближении функции Грина расходятся.
- Регуляризуем теорию, учитывая при этом все контрчлены низших порядков.
- При этом для регуляризованных таким образом функций Грина тождества Уорда выполняются: контрчлены низших порядков имеют вид (64) и не нарушают ТУ.
- Кроме того, эти функции имеют только поверхностные расходимости, так как контрчлены низших порядков устраняют все вложенные расходимости.
- Эти расходимости должны сами удовлетворять тождествам Уорда, так как ТУ выполняются в регуляризованной теории, а расходящиеся и конечные части очевидно имеют разную зависимость от регулятора ϵ .
- Для устранения этих расходимостей мы должны ввести $(L+1)$ -петлевые

контрчлены.

- Но, поскольку контрчлены в \overline{MS} -схеме (и в любой другой), повторяют структуру расходимостей, то $(L + 1)$ -петлевые контрчлены будут удовлетворять тождествам Уорда.
- Таким образом, на $(L + 1)$ -петлевом уровне лагранжиан будет калибровочно-инвариантным, а перенормированные функции Грина будут удовлетворять тождествам Уорда, так как перенормировка мультипликативна:

$$\Gamma_R^{(2n,p)}(p_i, p'_i, q_j; m, e) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_3^{p/2} Z_2^n \Gamma_{\text{reg}}^{(2n,p)}(p_i, p'_i, q_j; m_0, e_0). \quad (66)$$

- Таким образом, мы перенормировали теорию на $(L+1)$ -петлевом уровне, сохранив при этом справедливыми тождества Уорда, что и доказывает справедливость ТУ, а следовательно, и сохранение калибровочной инвариантности в перенормированной теории ■.

-  Из этого доказательства следует, что если тождества Уорда и нарушаются при перенормировке, то они нарушаются в **однопетлевом приближении**.
-  В этом случае **невозможно сделать первый шаг**, требуемый в методе математической индукции.
-  Более того, если регуляризация действительно сохраняет симметрию, то на однопетлевом уровне тождества Уорда **автоматически выполняются**.
-  Однако в некоторых случаях **заранее нельзя сказать**, нарушается ли симметрия или нет в данной регуляризации. →
-  Однопетлевое вычисление **необходимо**, чтобы это выяснить.

Итог

- В теории перенормировок важную роль играют симметрии.
- Они приводят к связям между функциями Грина, которые в КЭД называются тождествами Уорда.
- Аналог тождеств Уорда можно получить и в других теориях с другими симметриями. Далее мы также будем называть такие аналоги тождествами Уорда.
- Тождества Уорда могут запрещать появление некоторых контрчленов.
- Тождества Уорда могут нарушаться в результате перенормировки.
- Необходимым (но не достаточным) условием нарушения ТУ является нарушение соответствующей симметрии выбранной регуляризацией.
- Если регуляризация сохраняет симметрию и, если в однопетлевом приближении ТУ сохраняются, то они сохраняются в любом порядке ТВ.

- Если ТУ действительно нарушаются и симметрию не удастся восстановить, то возникает квантовая аномалия.
- Аномалии могут быть безвредными и приводить к интересным физическим следствиям, например, к распаду $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$.
- Аномалии могут нарушать существенные симметрии, например, калибровочные, и делать теорию противоречивой и неприемлимой.