

М.В. Либанов

КТТ XII. Перенормировка

Содержание

Перенормировка	2
Перенормировка в теории φ^4	3
Перенормировка массы и поля	10
Перенормировка константы связи	22
Обсуждение	28
БТХЦ-перенормировка в теории φ^4	30
Анализ расходимостей	39
Классификация взаимодействий	57
Классификация неперенормируемых теорий	63
Схема минимальных вычитаний	69
\overline{MS} -схема	74
Итог	76

Перенормировка

- ❖ Фейнмановские интегралы, дающие вклад в точные функции Грина, ультрафиолетово расходятся.
- ❖ Как избавиться от этих расходимостей в физических величинах?
- ❖ Ответ: путем переопределения нефизических величин.
- ❖ Такая процедура называется *перенормировкой*.
- ❖ В качестве основного примера мы будем по-прежнему рассматривать теорию φ^4 .

Перенормировка в теории φ^4

✦ В φ^4 расходятся однопетлевые вклады

✖ в четырехточечную ФГ -- вершину:

$$\Gamma(p_1, p_2, k_1, k_2) = i\mu^{2\varepsilon} \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} N_\varepsilon + \text{конечная часть} \quad (1)$$

✖ в двухточечную ФГ -- пропагатор

$$\Sigma(p) = -\frac{\lambda m^2}{32\pi^2} N_\varepsilon + \text{конечная часть} \quad (2)$$

🔥 Других расходящихся однопетлевых интегралов в функциях Грина в теории φ^4 в четырех измерениях нет:

- Рассмотрим, например, шеститочечную функцию Грина.
- На рисунке 1 показаны две из множества диаграмм, дающее вклад в эту функцию Грина.

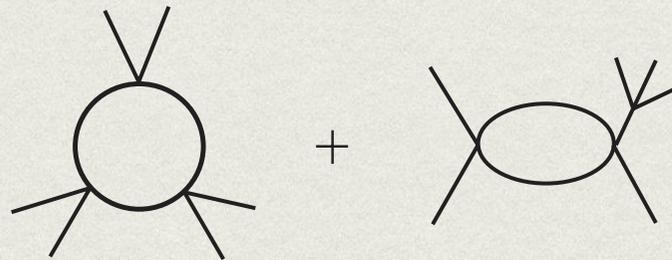


Рис. 1:

- Эти диаграммы могут быть получены путем добавления вершины в диаграмму «рыба»:
 - ✖ в первой диаграмме вершина добавляется во внутреннюю линию,
 - ✖ во второй --- во внешнюю.
- Очевидно при этом, что интеграл во второй диаграмме расходится, при этом он сводится к расходящемуся интегралу в «рыбе» и не является независимым:

- ✦ Если мы научимся устранять расходимость в «рыбе», то автоматически мы устраним и эту расходимость.
- ✦ Интеграл же в первой диаграмме сходится:
- ✦ добавление вершины во внутреннюю линию приводит к добавлению еще одного внутреннего пропагатора, что увеличивает на 2 степень петлевого импульса в знаменателе и улучшает ультрафиолетовое поведение интеграла:
 - ✦ подынтегральное выражение для первой диаграммы ведет себя при больших импульсах как dq/q^3 , и интеграл сходится.
- ✦ Очевидно, что описанная ситуация общая для любой функции Грина:
 - ✖ добавление вершины во внутреннюю линию только улучшает сходимость,
 - ✖ добавление вершины во внешнюю линию не приводит к новым расходимостям.

❖ Таким образом, на однопетлевом уровне в теории φ^4 есть только две независимых расходимости в

✖ в Γ -- логарифмическая

✖ в Σ -- квадратичная.

❖ Наша ближайшая цель --- избавиться от этих расходимостей путем переопределения параметров теории λ , m и нормировки поля φ .

❖ Будем считать, что мы стартовали с лагранжиана

$$\frac{(\partial_\mu \varphi_0)^2}{2} - \frac{m_0^2 \varphi_0^2}{2} - \frac{\lambda_0 \varphi_0^4}{4!}, \quad (3)$$

❖ Т.е. заменим все величины на величины с индексом 0 -- так называемые *голые величины*.

❖ Эти голые величины имеют весьма опосредованное отношение к измеряемым, т.е. физическим величинам.

- ❖ Чтобы понять это, вспомним, что мы интерпретировали параметр m_0 как массу *свободной* частицы на основании квантования *свободного* поля: мы использовали тот факт, что оператор поля является решением *свободных* уравнений движения.
- ❖ Мы получили нормировку поля, фиксированную коммутационными соотношениями, также на основании квантования *свободного* поля: мы явно использовали билинейность тензора энергии-импульса по полям.
- ❖ Учет взаимодействия портит всю картину: операторы поля не являются решениями свободных уравнений движения, а тензор энергии-импульса не билинеен по полям.

Но мы работаем в рамках теории возмущений, \Rightarrow для *свободных* полей все построение остается справедливым, а учет взаимодействия приводит к тому, что

- ✗ m_0 -- масса *свободной* частицы -- не может уже считаться физической массой частицы (у нас нет рубильника, позволяющего отключить взаимодействие),
- ✗ нормировка свободного поля, которая следуют из коммутационных соотношений типа

$$[\varphi_k^-, \varphi_q^+] = \delta(k - q) \quad (4)$$

также не является нормировкой физического поля.

- Возникает вопрос: что же делать, если параметры теории не являются физическими?
- Ответ: достаточно научиться вычислять физические величины как функции m_0, λ_0 , например, $m = m(m_0, \lambda_0)$.

- Обращая эти функции, мы можем найти голые параметры, как функции физических, например, $m_0 = m_0(m, \lambda)$.
- При этом может оказаться (и оказывается), что голые величины становятся бесконечными,
- Это не страшно, так как они не являются измеряемыми.
- Начнем с вычисления массы и нормировки поля.

Перенормировка массы и поля

- ❖ Как нам определить физические величины в нашей теории? ➡
- ❖ Какую функцию Грина мы должны вычислить (а это по сути единственное, что мы умеем вычислять в теории поля), чтобы извлечь из нее информацию о физических величинах? ➡
- ❖ Пропагатор свободного поля в импульсном пространстве имеет вид

$$-iG^c(p) = \frac{i}{p^2 - m_0^2}, \quad \text{➡} \quad (5)$$

- ❖ имеет полюс в точке m_0
- ❖ единичный (с точностью до мнимой единицы) вычет в полюсе.

- Заметим, что этот вычет определяется как раз нормировкой поля: если

$$[\varphi_{0k}^-, \varphi_{0q}^+] = Z_\varphi \delta(k - q)$$

и масса поля m_1 , то пропагатор будет

$$-iG^c(p) = \frac{iZ_\varphi}{p^2 - m_1^2} \cdot \implies \quad (6)$$

- Видим, что масса и нормировка свободного поля полностью определяют положение полюса и вычет в нем у свободного пропагатора. \implies
- Естественно определить физическую массу поля как положение полюса полного пропагатора.
- Вычет в полюсе связывает физическое поле с голым:
 - ✗ Так, если вычет полного пропагатора равен iZ_φ , и
 - ✗ Физическое поле удовлетворяет стандартным коммутационным соотношениям

$$[\varphi_{ph k}^-, \varphi_{ph q}^+] = \delta(k - q), \quad \implies \quad (7)$$

$$\varphi_{ph} = \frac{\varphi_0}{\sqrt{Z_\varphi}} \quad (8)$$

- ❖ Рассмотрим пропагатор в однопетлевом приближении.
- 🔑 При этом будем понимать под однопетлевым приближением однопетлевое приближение к собственной энергии $\Sigma(p)$, т.е. к ОЧН функции Грина.
- ❖ Полный пропагатор дается суммой всех диаграмм с двумя концами. ➡
- ❖ Пропагатор, построенный из голых полей (символ $:=$ означает переход в импульсное представление):

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_0 \varphi_0 \rangle & := \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} + \dots = \\
& = \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i\Sigma(p^2)) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \\
& + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i\Sigma(p^2)) \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i\Sigma(p^2)) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots = \\
& = \frac{i}{p^2 - m_0^2} \left(1 + \frac{\Sigma(p^2)}{p^2 - m_0^2} + \left[\frac{\Sigma(p^2)}{p^2 - m_0^2} \right]^2 + \dots \right) = \\
& = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Sigma(p^2)} = \tag{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{разм. рег.} \\
& \underline{=} \frac{i}{p^2 - m_0^2 + \frac{\lambda_0 m_0^2}{32\pi^2} \left(N_\varepsilon + 1 + \ln \frac{\mu^2}{m_0^2} \right)}. \tag{10}
\end{aligned}$$

💡 Заметим, что выражение (9) справедливо вне зависимости от того, в каком порядке вычислена собственная энергия Σ .

💡 Выражение (10) получено в размерной регуляризации в однопетлевом приближении.

- Полнос пропaгaтoрa нaхoдитсa в тoчкe

$$m^2 = m_0^2 - \frac{\lambda_0 m_0^2}{32\pi^2} \left(N_\varepsilon + 1 + \ln \frac{\mu^2}{m_0^2} \right), \quad (11)$$

- Вычет в полюсе равен единице, т.е. $Z_\varphi = 1$.
- Равенство (11) можно обратить в рамках теории возмущений и выразить m_0 как функцию m (Получить!).
- При этом видно, что при конечном m в пределе снятия регуляризации ($\varepsilon \rightarrow 0$) $m_0 \rightarrow \infty$.
- Тот факт, что $Z_\varphi = 1$, является артефактом теории φ^4 и однопетлевого приближения:
- Этот факт обусловлен тем, что $\Sigma(p)$ в однопетлевом приближении не зависит от импульса.

❖ В двухпетлевом приближении это уже не так:

$$-i\Sigma^{2\text{-loop}}(p^2) = \text{[Diagram 1]} + \text{[Diagram 2]} \quad (12)$$

❖ Вторая диаграмма, также как и однопетлевая собственная энергия, не зависит от протекающего через нее импульса. Она исчезла бы, если бы мы выбрали нормально упорядоченный лагранжиан.

❖ Первая диаграмма имеет нетривиальную зависимость от импульса. Она **не** исчезла бы, если бы мы выбрали нормально упорядоченный лагранжиан.

❖ Первая диаграмма пропорциональна следующему интегралу

$$\lambda_0^2 \int dq dk \frac{1}{(k^2 - m_0^2)((k - p - q)^2 - m_0^2)(q^2 - m_0^2)} \quad (13)$$

❖ Этот интеграл квадратично расходится: проинтегрируем сперва по k при фиксированном q .

- Такой интеграл есть не что иное, как интеграл, соответствующий «рыбе» --- он логарифмически расходится:

$$\ln \frac{M^2}{q^2}, \quad (14)$$

- ✖ M^2 --- паули-вилларсовская масса (параметр обрезания),
- ✖ мы учли только главное поведение по q .

- Интегрирование по q с учетом (14) дает расходимость $M^2 \ln M^2$.

В действительности, логарифма не возникает после учета перенормировки константы связи, и остается квадратичная расходимость.

Это общая ситуация: Σ имеет размерность 2, поэтому она может (и должна) быть пропорциональна M^2 .

- Интеграл (13) несингулярен при любых фиксированных p^2 --- это также общая ситуация. \Rightarrow

- Разложим Σ по p^2 в окрестности некоторой точки Λ^2 (разложение идет по p^2 в силу релятивистской инвариантности):

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(\Lambda^2) + (p^2 - \Lambda^2)\Sigma'(\Lambda^2) + \tilde{\Sigma}(p^2), \quad (15)$$

$$\Sigma'(\Lambda^2) \equiv \frac{1}{8} \frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p^\mu} \Sigma(p^2) \Big|_{p^2=\Lambda^2}, \quad \tilde{\Sigma}(\Lambda^2) = 0 \quad (16)$$

- Вычисляя производную от (13), видим, что она расходится логарифмически.
- Следующая (четвертая) производная от (13) уже сходится.
- Это также общая ситуация: в теории φ^4 после учета перенормировки в низших порядках расходимости в собственной энергии содержатся в первых двух членах в разложении в ряд Тейлора по внешнему импульсу.
- Это очень нетривиальное утверждение, и мы к нему еще вернемся, сейчас же мы примем это как данное.

- ❖ Таким образом, имеем в (15) $\Sigma(\Lambda^2)$ расходится квадратично, $\Sigma'(\Lambda^2)$ расходится логарифмически, $\tilde{\Sigma}(p^2)$ --- конечна, и $\tilde{\Sigma}(\Lambda^2) = 0$.
- ❖ Подставим теперь (15) в (9):

$$\langle \varphi_0 \varphi_0 \rangle := \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Sigma(\Lambda^2) - p^2 \Sigma'(\Lambda^2) + \Lambda^2 \Sigma'(\Lambda^2) - \tilde{\Sigma}(p^2)}. \quad (17)$$

- ❖ Потребуем, чтоб точка разложения Λ^2 была физической массой: $\Lambda^2 = m_{\text{ph}}^2 = m^2$, \implies
- ❖ В силу того, что $\tilde{\Sigma}(m^2) = 0$, полюс у пропагатора будет в точке m^2 и

$$m^2 = m_0^2 + \Sigma(m^2). \quad (18)$$

- ❖ Принимая этот факт во внимание, перепишем (17) в виде

$$\langle \varphi_0 \varphi_0 \rangle := \frac{i}{p^2 - m^2 - (p^2 - m^2) \Sigma'(m^2) - \tilde{\Sigma}(p^2)} = \frac{i(1 - \Sigma'(m^2))^{-1}}{p^2 - m^2 - \tilde{\Sigma}(p^2)(1 - \Sigma'(m^2))^{-1}}. \quad (19)$$

- В двухпетлевом приближении мы можем удерживать только члены порядка λ^2 \implies

$$\tilde{\Sigma}(p^2)(1 - \Sigma'(m^2))^{-1} = \tilde{\Sigma}(p^2) + \mathcal{O}(\lambda^3) \simeq \tilde{\Sigma}(p^2), \quad \implies \quad (20)$$

$$\langle \varphi_0 \varphi_0 \rangle := i \frac{(1 - \Sigma'(m^2))^{-1}}{p^2 - m^2 - \tilde{\Sigma}(p^2)}. \quad (21)$$

- Видим, что вычет в полюсе уже не равен единице.

- Определяя константу перенормировки волновой функции

$$Z_\varphi = (1 - \Sigma'(m^2))^{-1} \simeq 1 + \Sigma'(m^2) + \mathcal{O}(\lambda^3), \quad (22)$$

и перенормированное поле

$$\varphi_{\text{ph}} = Z_\varphi^{-1/2} \varphi_0, \quad (23)$$

получаем перенормированный пропагатор физических полей

$$\langle \varphi_{\text{ph}} \varphi_{\text{ph}} \rangle = \frac{1}{Z_\varphi} \langle \varphi_0 \varphi_0 \rangle := \frac{i}{p^2 - m^2 - \tilde{\Sigma}(p^2)} \quad (24)$$

- Этот пропагатор содержит только конечные величины (после учета перенормировки константы связи) и является конечным.

- ❖ С помощью перенормированного поля определим перенормированные функции Грина (в дальнейшем мы будем опускать индекс «rh» у физических полей):

$$G_R(x_1 \dots x_n) = \langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle = Z_\varphi^{-n/2} \langle \varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_n) \rangle = Z_\varphi^{-n/2} G_0(x_1 \dots x_n) \quad (25)$$

- ❖ Для ампутированных функций Грина, учитывая тот факт, что перенормированный пропагатор связан с неперенормированным как

$$G_R = \frac{1}{Z_\varphi} G_0, \quad (26)$$

получаем

$$\Gamma_R^n = \frac{G_R^n}{(-iG_R)^n} = Z_\varphi^{n/2} \Gamma_0, \quad (27)$$

где промежуточное равенство нужно воспринимать несколько условно.

- ✦ Заметим, что, вообще говоря, Z_φ должна быть конечной (после учета всех поправок)
- ✦ В *схеме вычитаний на массовой поверхности*, которую мы фактически здесь и рассматривали, должна удовлетворять неравенству $0 \leq Z_\varphi < 1$, что может быть продемонстрировано исходя из дисперсионных соотношений.
- ✦ Конечность точной константы перенормировки не противоречит однако ее бесконечности в каждом порядке теории возмущений.
- ✦ Простейшим примером, иллюстрирующим сказанное, является следующая цепочка:

$$1 - \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) + \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^2 - \dots + (-1)^n \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^n + \dots = \frac{1}{1 + \lambda/\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad (28)$$

Перенормировка константы связи

- ❖ Экспериментально константу связи обычно определяют из измерения сечения некоего процесса при некоторых энергиях.
- ❖ Так, например, постоянную тонкой структуры в электродинамике обычно определяют из комптоновского рассеяния при нулевых импульсах.
- ❖ Поскольку в теории φ^4 в основной вершине присутствует 4 поля, то наиболее естественно определить константу связи из 4-х частичного процесса, например, из сечения рассеяния $2 \rightarrow 2$ при некоторых фиксированных импульсах налетающих частиц p_1 и p_2 . Такое сечение даётся формулой (здесь мы включили в фазовый объем $d\Phi$ все несущественные множители)

$$\sigma = \int |\mathcal{M}(p_i, k_i)|^2 d\Phi, \quad (29)$$

- Матричный элемент является нетривиальной функцией голой константы связи λ_0

$$|\mathcal{M}|^2 = \lambda_0^2 + \lambda_0^3 f(p_i, k_i) + \dots \quad (30)$$

- С другой стороны, сечение, вычисленное в древесном приближении, имеет вид

$$\sigma_0 = \lambda_0^2 \int d\Phi \quad \Rightarrow \quad (31)$$

- Определим константу связи следующим уравнением

$$\sigma = \lambda^2 \int d\Phi . \quad (32)$$

- Сравнивая это уравнение с (29), видим, что определение λ зависит от той точки в кинематической области, где проводится эксперимент.

- Удобней определить константу связи не через сечение процесса, а через перенормированную четырехточечную функцию Грина.
- А именно, определим λ как

$$-i\lambda\mu^{2\varepsilon} = \Gamma_R(s_0, t_0, u_0) \Big|_{s_0, t_0, u_0 \text{ --- fixed}} . \quad (33)$$

- При этом в первом порядке теории возмущений мы получим просто $\lambda_0 = \lambda$.
- Если мы говорим о физической константе связи, т.е. измеряемой в некотором эксперименте, \implies импульсы внешних частиц лежат на массовой поверхности, \implies

$$s + t + u = 4m^2 . \implies \quad (34)$$

- Поэтому можно выбрать симметричную точку, где определяется константа связи

$$s_0 = t_0 = u_0 = \frac{4}{3}m^2. \quad (35)$$

- Разложим неперенормированную функцию Грина вблизи этой точки в однопетлевом приближении, используя полученные ранее результаты:

$$\begin{aligned} \Gamma_0(s, t, u) &= -i\lambda_0\mu^{2\varepsilon} + 3I(\sqrt{s_0}) + \tilde{I}(\sqrt{s}) + \tilde{I}(\sqrt{t}) + \tilde{I}(\sqrt{u}) = \\ &= -i\lambda_0\mu^{2\varepsilon} + \frac{3i\lambda_0^2\mu^{2\varepsilon}}{32\pi^2} \left(N_\varepsilon + 2 - 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \\ &+ \tilde{I}(\sqrt{s}) + \tilde{I}(\sqrt{t}) + \tilde{I}(\sqrt{u}). \end{aligned} \quad (36)$$

- ✗ В этом выражении \tilde{I} --- конечные, в чем можно убедиться дифференцированием по внешним импульсам,
- ✗ Равны нулю в точке s_0 --- *точке вычитания*.

➤ Определим константу перенормировки вершины Z_λ как

$$-iZ_\lambda^{-1}\lambda_0 = \mu^{-2\varepsilon}\Gamma_0(s_0) \implies \quad (37)$$

➤ Тогда, подставляя (37) в (36), получаем

$$\Gamma_0(s, t, u) = -iZ_\lambda^{-1}\lambda_0\mu^{2\varepsilon} + \tilde{I}(\sqrt{s}) + \tilde{I}(\sqrt{t}) + \tilde{I}(\sqrt{u}) \stackrel{(27)}{=} Z_\varphi^{-2}\Gamma_R(s, t, u) \implies \quad (38)$$

➤ Находим

$$-iZ_\lambda^{-1}\lambda_0 = \mu^{-2\varepsilon}Z_\varphi^{-2}\Gamma_R(s_0, t_0, u_0) \stackrel{(33)}{=} -iZ_\varphi^{-2}\lambda, \implies \quad (39)$$

$$\lambda = Z_\varphi^2 Z_\lambda^{-1} \lambda_0, \quad (40)$$

-- связь между голой и перенормированной константой.

💡 При этом λ --- конечна, тогда как λ_0 --- бесконечна.

- В однопетлевом приближении $Z_\varphi = 1$, поэтому получаем, используя (36) и (40),

$$Z_\lambda^{-1} = 1 - \frac{3\lambda_0}{32\pi^2} \left(N_\varepsilon + 2 - 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (41)$$

- Перенормированная функция Грина при этом становится конечной: имеем в одной петле

$$\begin{aligned} \Gamma_R(s, t, u) &= Z_\varphi^2 \Gamma_0(s, t, u, \lambda_0) = -i\lambda + Z_\varphi^2 (\tilde{I}(\sqrt{s}, \lambda_0) + \tilde{I}(\sqrt{t}, \lambda_0) + \tilde{I}(\sqrt{u}, \lambda_0)) = \\ &= -i\lambda + \tilde{I}(\sqrt{s}, \lambda) + \tilde{I}(\sqrt{t}, \lambda) + \tilde{I}(\sqrt{u}, \lambda) + \mathcal{O}(\lambda^3), \end{aligned} \quad (42)$$

- Здесь мы ограничились только вторым порядком теории возмущений и использовали тот факт, что $\lambda = \lambda_0 + \mathcal{O}(\lambda_0^2)$.
- Видим, что Γ_R содержит только конечные величины.

Обсуждение

- ❖ В теории φ^4 функции Грина можно сделать конечными, если выразить голые величины через перенормированные с помощью формул

$$\varphi = Z_\varphi^{-1/2} \varphi_0, \quad Z_\varphi = 1 - \Sigma'(m^2), \quad (43)$$

$$\lambda = Z_\lambda^{-1} Z_\varphi^2 \lambda_0, \quad Z_\lambda^{-1} = 1 - 3i \frac{I(\sqrt{s_0})}{\lambda_0}, \quad (44)$$

$$m^2 = m_0^2 + \delta m^2, \quad \delta m^2 = \Sigma(m^2) \quad (45)$$

$$G_R^{(n)}(p_1, \dots, p_n, \lambda, m, \{\mu\}) = Z_\varphi^{-n/2} G_0^{(n)}(p_1, \dots, p_n, \lambda_0, m_0, \{\mu, \varepsilon\}) \quad (46)$$

- ❖ Свойство теории, состоящее в том, что после того, как λ_0 и m_0 выражены через λ и m , все расходимости функций Грина собираются в некоторые мультипликативные константы Z_φ , называется **мультипликативной перенормируемостью**.

- ❖ Процедуру, которую мы рассмотрели, называют *стандартной схемой перенормировки*.
- ❖ Практически мы вычитали несколько первых расходящихся членов в разложении функций Грина по степеням внешних импульсов в ряд Тейлора в некоторой точке, делая эти функции конечными.
- ❖ Такая процедура называется *схемой вычитания в импульсном пространстве*.
- ❖ Если точка разложения, или, как говорят, *точка вычитания*, лежит на массовой поверхности, то описанную выше схему также называют *схемой вычитания на массовой поверхности*.

Схема Боголюбова-Парасюка-Хеппа-Цимермана (БПХЦ) в теории φ^4

- БПХЦ-схема позволяет стартовать с перенормированного лагранжиана
- Рассмотрим исходный неперенормированный лагранжиан

$$\mathcal{L}_0 = \frac{(\partial_\mu \varphi_0)^2}{2} - \frac{m_0^2 \varphi_0^2}{2} - \frac{\lambda_0 \varphi_0^4}{4!}, \quad (47)$$

- Выразим все голые величины, входящие в него, через перенормированные по формулам (43), (44), (45)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \frac{Z_\varphi (\partial_\mu \varphi)^2}{2} - \frac{(m^2 - \delta m^2) Z_\varphi \varphi^2}{2} - \frac{Z_\lambda \lambda \varphi^4}{4!} = \\ &= \left[\frac{(\partial_\mu \varphi)^2}{2} - \frac{m^2 \varphi^2}{2} - \frac{\lambda \varphi^4}{4!} \right] + \\ &+ \left[\frac{(Z_\varphi - 1) (\partial_\mu \varphi)^2}{2} + \frac{\delta m^2 Z_\varphi \varphi^2}{2} - \frac{Z_\varphi - 1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{(Z_\lambda - 1) \lambda \varphi^4}{4!} \right] = \\ &= \mathcal{L} + \Delta \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (48)$$

- ❖ В этом равенстве \mathcal{L} --- перенормированный лагранжиан, его также называют *затравочным*.
- ❖ По форме он совпадает с неперенормированным \mathcal{L}_0 и отличается от последнего только тем, что все величины, входящие в него, являются перенормированными и конечными.
- ❖ Слагаемое $\Delta\mathcal{L}$ содержит расходящиеся константы перенормировок.
- 💡 Важно, что все члены, входящие в $\Delta\mathcal{L}$, порядка λ : $Z_\lambda - 1 \sim \lambda$, $Z_\varphi - 1 \sim \lambda$, $\delta m^2 \sim \lambda$, следовательно, $\Delta\mathcal{L} \sim \lambda$.
- ❖ Будем называть $\Delta\mathcal{L}$ *лагранжианом контрчленов* и рассматривать его как *возмущение*.
- 💡 Процедура БТХЦ состоит в следующем:

- ① С помощью перенормированного лагранжиана \mathcal{L} строим стандартную теорию возмущений, т.е. находим обычные вершины и пропагаторы.
 - ✦ Это эквивалентно построению диаграммной техники из \mathcal{L}_0 с той разницей, что все голые величины заменены на перенормированные, а, значит, конечные.
- ② Рассматриваем однопетлевые ОЧН диаграммы.
 - ✦ С помощью разложения в ряд Тейлора по внешним импульсам в некоторой точке импульсного пространства выделяем расходящиеся части.
 - ✦ В однопетлевом приближении это можно сделать всегда: путем дифференцирования интеграла по внешним импульсам убеждаемся, что он становится сходящимся после нескольких дифференцирований.
- ③ Строим набор контрчленов $\Delta\mathcal{L}^{(1)}$ таким образом, чтобы расходимости сократились. При этом $\Delta\mathcal{L}^{(1)}$ рассматривается как дополнительное взаимодействие. Поясним сказанное.

- ❖ В однопетлевом приближении в пропагатор дает вклад только «пузырь».
- ❖ Эта диаграмма квадратично расходится и не зависит от внешних импульсов. \Rightarrow
- ❖ Введем поэтому контрчлен $(\delta m^2/2)\phi^2$, считая, что $\delta m^2 \sim \lambda$, и таким образом, рассматривая его как дополнительное взаимодействие. \Rightarrow
- ❖ Тогда этот контрчлен порождает следующую вершину

$$\frac{\delta m^2 \phi^2}{2} \rightarrow \frac{i\delta m^2}{\times} . \quad (49)$$

- ❖ Теперь вклад в пропагатор в порядке λ дается не только «пузырем» (петлевой диаграммой), но и древесной диаграммой, порожденной вершиной (49):

$$\text{---} \bigcirc \text{---} \rightarrow \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \times \text{---} = -i\Sigma^{1\text{-loop}}(p^2) + i\delta m^2 , \quad (50)$$

Мы требуем, чтобы этот вклад был конечным, т.е.

$$-\Sigma^{1\text{-loop}} + \delta m^2 = \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left(N_\epsilon + 1 + \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right) + \delta m^2 < \infty \quad \Rightarrow \quad (51)$$

Откуда находим, что δm^2 может быть выбрана в виде

$$\delta m^2 = \Sigma^{1\text{-loop}} = -\frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left(N_\epsilon + 1 + \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right), \quad (52)$$

Согласуется с (11) и (45).

В одной петле в теории φ^4 необходимо также ввести контрчлен $\delta\lambda\varphi^4/4!$, сокращающий расходимость в четыреххвостке.

Других контрчленов вводить не надо, в частности, не надо вводить контрчлен $\delta Z_\varphi(\partial_\mu\varphi)^2/2$, так как расходимость в «пузыре» не зависит от импульса.

4 Новый лагранжиан $\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}^{(1)}$ используем для построения двухпетлевых диаграмм и однопетлевых диаграмм, содержащих контрчлен-

ные вершины. Так, например,

(53)

где жирной точкой обозначена контрчленная однопетлевая вершина $-i\lambda(Z_\lambda - 1)$.

- ⑤ Утверждается, что после того, как учтены однопетлевые контрчлены, все расходимости в двухпетлевых диаграммах содержатся в нескольких первых членах в разложении в ряд Тейлора по внешним импульсам. \Rightarrow

🔗 Поэтому можно подобрать контрчлены $\Delta\mathcal{L}^{(2)}$, устраняющие оставшиеся расходимости.

- Другими словами, в графическом уравнении (53) расходимости в левых частях не обязаны быть полиномиальными по внешним импульсам.
- Расходимости в правых частях должны быть полиномиальными, и их можно изгнать путем добавления контрчленов высших порядков:

$$\text{Diagram 1} \rightarrow \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \rightarrow \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \quad (54)$$

- В этой графической цепочке
 - ✗ левая часть содержит всевозможные расходимости,
 - ✗ промежуточная --- только полиномиальные,
 - ✗ правая часть не содержит расходимостей.
- Важно: последняя диаграмма (с большой жирной точкой) обозначает контрчлен $-i\lambda(Z_\lambda - 1)$ в порядке λ^3 , сокращающий расходимость в промежуточной части.

- ✦ Важно: Для каждой диаграммы с данным числом концов необходимо построить свою контрчленную диаграмму. Полный двухпетлевой контрчлен для диаграмм с данным числом концов равен сумме контрчленов для каждой диаграммы.
 - ✦ Утверждение о том, что после учета однопетлевых контрчленов, диаграммы содержат расходимости только в первых членах в разложении в ряд Тейлора по импульсам, крайне нетривиально и играет ключевую роль в перенормировке. Мы остановимся на нем чуть позже.
- ⑥ Далее процедура повторяется итеративно. Результирующий лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}^{(\infty)} = \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}, \quad \Delta\mathcal{L} = \Delta\mathcal{L}^{(1)} + \Delta\mathcal{L}^{(2)} + \dots \quad (55)$$

- ❖ Для того чтобы показать, что рассматриваемая схема эквивалентна стандартной схеме перенормировок, необходимо убедиться, что полученный лагранжиан $\mathcal{L}^{(\infty)}$ совпадает с \mathcal{L}_0 или, что то же самое, совпадает с \mathcal{L} по форме.
- ❖ Это очень нетривиально. Действительно, это требование означает, например, что нет контрчленов типа φ^6 или пропорциональных p^4 , так как в противном случае $\mathcal{L}^{(\infty)}$ будет содержать члены вида φ^6 или $(\partial^2\varphi)^2$, которых не было в \mathcal{L} .
- ❖ Еще хуже, если расходимости не будут полиномиальными по импульсам, так как в этом случае придется вводить контрчлены, содержащие все производные от полей, что означает нелокальность $\mathcal{L}^{(\infty)}$.
- ❖ Строгого доказательства факта совпадения $\mathcal{L}^{(\infty)}$ и \mathcal{L}_0 мы здесь приводить не будем, а лишь продемонстрируем возможные трудности и методы, которые используются при этом.

Анализ расходимостей

❖ Наша задача состоит в том, чтобы проанализировать структуру расходимостей диаграмм в теории φ^4 .

❖ Введем с этой целью понятие *условной степени расходимости* D диаграммы:

D = общая степень петлевых импульсов в числителе (включая меру) —
— общая степень петлевых импульсов в знаменателе интегранта. (56)

❖ Так, например, для «рыбы» $D = d - 4$, где d --- число измерений.

❖ Пусть в теории φ^4 связная диаграмма содержит

✖ B внешних линий;

✖ I внутренних линий;

✖ n вершин.

❖ Эти величины не являются независимыми¹:

¹Исключение составляет свободный пропагатор.

❖ Действительно, поскольку

✗ оба конца внутренней линии входят в какую-либо вершину,

✗ только один конец внешней линии входит в вершину,

✗ в каждую вершину входит 4 линии, \Rightarrow

$$4n = 2I + B . \quad (57)$$

❖ Свяжем теперь отдельные члены в этом равенстве с петлевыми импульсами.

❖ Мы интегрируем по всем внутренним импульсам, т.е. имеем I интегралов.

❖ Однако, в каждой вершине присутствует δ -функция, поэтому $n - 1$ интеграл, благодаря этим δ -функциям, снимается, одна δ -функция остается и выражает закон сохранения внешних импульсов, \Rightarrow

Поэтому число петлевых интегралов или число петель будет

$$L = I - n + 1. \quad (58)$$

Далее,

пропагатор имеет 2-ую степень импульса в знаменателе,

каждое интегрирование по петле в d измерениях дает d -ую степень импульса в числителе,

вершина в рассматриваемой теории не содержит производных и, тем самым, импульсов. \Rightarrow

Поэтому

$$D = dL - 2I = d \left(\frac{4n - B}{2} - n + 1 \right) - 4n + B = d - B \left(\frac{d}{2} - 1 \right) + n(d - 4). \quad (59)$$

Кроме того, в теории φ^4 существует Z_2 симметрия: $\varphi \rightarrow -\varphi$, поэтому B должно быть четным.

❖ Диаграмма условно расходится, если $D \geq 0$, т.е., используя (59),

$$d + n(d - 4) \geq \left(\frac{d}{2} - 1\right) B. \quad (60)$$

❖ Введем также величину

$$R = 4 - d = [\lambda] \quad (61)$$

-- размерность константы связи в d измерениях.

❖ Рассмотрим частные случаи неравенства (60).

✖ $d = 4$: $4 \geq B \Rightarrow B = 2$ и $B = 4$; $R = 0$;

✖ $d = 6$: $3 + n \geq B \Rightarrow$ если $n = 3$, то $B \leq 6$, и первая диаграмма на Рис. 1 расходится и требует контрчлена φ^6 ; $R = -2$;

✖ $d = 3$: $6 - 2n \geq B \Rightarrow$

❄ если $n = 1$, то $4 \geq B$ и существует единственная расходящаяся диаграмма --- «пузырь»;

❄ если $n = 2$, то $2 \geq B$, то существуют две расходящиеся диаграммы --- двухпетлевые вклады в пропагатор; при $n > 2$ расходящихся диаграмм (исключая вакуумные) нет; $R = 1$.

- ❖ Видим, что в зависимости от числа измерений характер теории существенно меняется.
- ❖ В четырех измерениях D не зависит от числа вершин,
 - ➡ условно расходящиеся диаграммы имеют фиксированное число внешних линий,
 - ➡ число же расходящихся диаграмм при фиксированном числе внешних линий бесконечно.
- ✘ Константа связи при этом безразмерна.
- ❖ В шести измерениях, напротив, с ростом числа вершин растет число внешних линий
 - ➡ растет число расходящихся ФГ:
 - ➡ при достаточно большом n диаграмма с произвольным числом концов будет расходиться.
- ✘ Константа связи имеет отрицательную размерность.

- ❖ В трех измерениях ситуация меняется: с ростом числа вершин сходимость только улучшается, и мы имеем конечное число расходящихся диаграмм.
- ❖ Вернемся к случаю $d = 4$. Существует только две функции Грина с неотрицательной условной степенью расходимости --- двухточечная и четырехточечная ($B = 2, 4$).
- ❖ Однако, из того, что $D < 0$, еще не следует сходимости диаграммы (даже ОЧН).
- ➡ Поэтому D и называется условной: некоторые поддиаграммы могут расходиться.

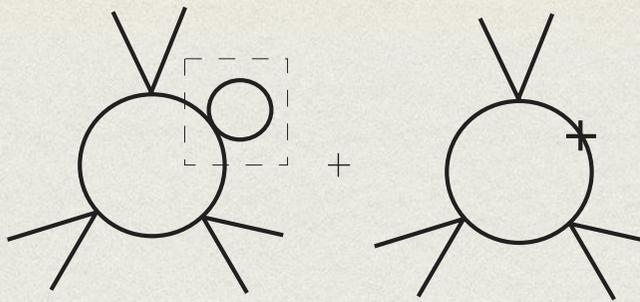


Рис. 2:

- ❖ Так, например, левая диаграмма на Рис. 2 расходится (расходится ее поддиаграмма, содержащая «пузырь», выделенный квадратом) несмотря на то, что ее условная степень расходимости в 4-х измерениях равна -2 .
 - ❖ Однако учет диаграммы, содержащей контрчлен к «пузырю» --- правая диаграмма на Рис. 2 --- делает сумму сходящейся (при выборе контрчлена в виде (52) эта сумма просто равна нулю).
- ∃ общая теорема (без доказательства):

Теорема. Фейнмановский интеграл общего вида сходится, если как условная степень расходимости всего графа, так и условные степени расходимости всех его подграфов отрицательны.

Следствие: Поскольку добавление контрчленов к подграфам делает их сходящимися и, тем самым, делает их условную степень расходимости отрицательной, то, если условная степень расходимости всего графа отрицательна, соответствующий графу интеграл после учета контрчленов к подграфам сходится. 

- ❖ Таким образом, все расходимости из, например, 8-ми точечной функции Грина можно удалить, учитывая контрчлены к 2-х и 4-х точечным функциям Грина, т.е. не нужно вводить контрчлена φ^8 . Вернемся поэтому к 2-х и 4-х точечным функциям Грина.

- Рассмотрим сперва 2-х точечную функцию.
- Будем раскладывать собственную энергию по внешним импульсам вблизи нуля (*вычитание при нулевых импульсах*):

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(0) + p^2 \Sigma'(0) + \tilde{\Sigma}(p^2) . \quad (62)$$

- $\Sigma(0)$ квадратично расходится,
- $\Sigma'(0)$ логарифмически расходится.
- Если при этом $\tilde{\Sigma}(p^2)$ сходится, то необходимо добавить всего два контрчлена, по форме совпадающими с теми, которые уже есть в лагранжиане, устраняющие расходимости из первых двух членов в (62)

$$\frac{\Sigma'(0)(\partial_\mu \varphi)^2}{2} + \frac{\Sigma(0)\varphi^2}{2} \rightarrow \frac{i\Sigma'(0)p^2}{\text{---} \times \text{---}} + \frac{i\Sigma(0)}{\text{---} \times \text{---}} . \quad (63)$$

- Если же $\tilde{\Sigma}(p^2)$ расходится, скажем, расходимость содержится только в первом члене в разложении $\tilde{\Sigma}(p^2)$ по p^2 :

$$\tilde{\Sigma}'(0) = \frac{1}{2}\Sigma''(0) \quad (64)$$

то нам бы пришлось еще ввести контрчлен типа

$$\Sigma''(0)\varphi((\partial_\mu)^2)^2\varphi \quad (65)$$

- Такого члена у нас не было в перенормированном лагранжиане,
- Однако, он появится в неперенормированном (голом) лагранжиане.
- Поскольку мы требуем, чтобы оба лагранжиана совпадали по форме,
 - нам необходимо ввести член такого вида в перенормированный лагранжиан со своей произвольной константой, имеющей размерность -2.
- Наличие такого члена изменит в свою очередь выражение (59) для условной степени расходимости \implies

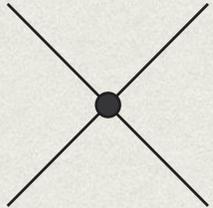
- ❖ Это приведет к тому, что, например, 6-ти точечная функция Грина будет иметь неотрицательную степень расходимости и требовать своего контрчлена для перенормировки φ^6 .
- ❖ Снова, такого члена нет в перенормированном лагранжиане, однако он появится в голом.
- ❖ И опять мы должны его добавить в перенормированный лагранжиан со своей новой константой.
- ❖ Эта константа также будет иметь отрицательную размерность и приведет к тому, что все новые и новые функции Грина будут требовать своих контрчленов.
- ❖ Процесс примет лавинообразный характер:
- ❖ Так, например, вершина φ^6 приведет к расходимости в пропагаторе, пропорциональной p^6 , \implies
- ❖ Расходимость в $\tilde{\Sigma}$ будет не только в первом члене разложения.

- ❖ Таким образом, мы будем вынуждены написать в лагранжиан все степени полей и их производных с произвольными константами, что в свою очередь будет означать, что нам,
 - ✘ необходимо провести бесконечное множество экспериментов, чтобы фиксировать эти константы, т.е. ни о какой предсказательной силе теории не может быть и речи,
 - ✘ поскольку мы добавляем члены со всеми производными, теория становится нелокальной.
- ❖ Мы видим, что очень важно, чтоб расходимости в пропагаторе были не просто полиномиальными по внешним импульсам, но и чтобы этот полином был только второго порядка.

- Рассмотрим теперь 4-х точечную функцию.
- Для нее $D = 0$, поэтому соответствующие интегралы логарифмически расходятся \implies
- Соответствующая расходимость должна содержаться только в первом члене в разложении по внешним импульсам:

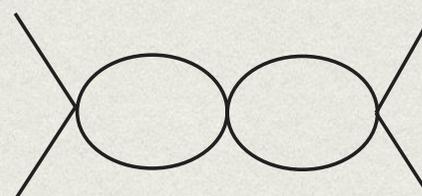
$$\Gamma^{(4)}(p) = \Gamma^{(4)}(0) + \tilde{\Gamma}^{(4)}(p) . \quad (66)$$

- Если $\tilde{\Gamma}^{(4)}(p)$ сходится, то необходим только один контрчлен вида

$$\frac{i\Gamma^{(4)}(0)\varphi^4}{4!} \rightarrow \text{---} \Gamma^{(4)}(0) \quad (67)$$


- Если же нет, то ситуация аналогична той, что описана для пропагатора --- мы будем вынуждены ввести всевозможные члены в лагранжиан.

- ❖ Действительно ли расходимости содержатся в первых членах в разложении в ряд Тейлора?
- ❖ На однопетлевом уровне мы видели, что это так.
- ❖ Рассмотрим следующую двухпетлевую диаграмму

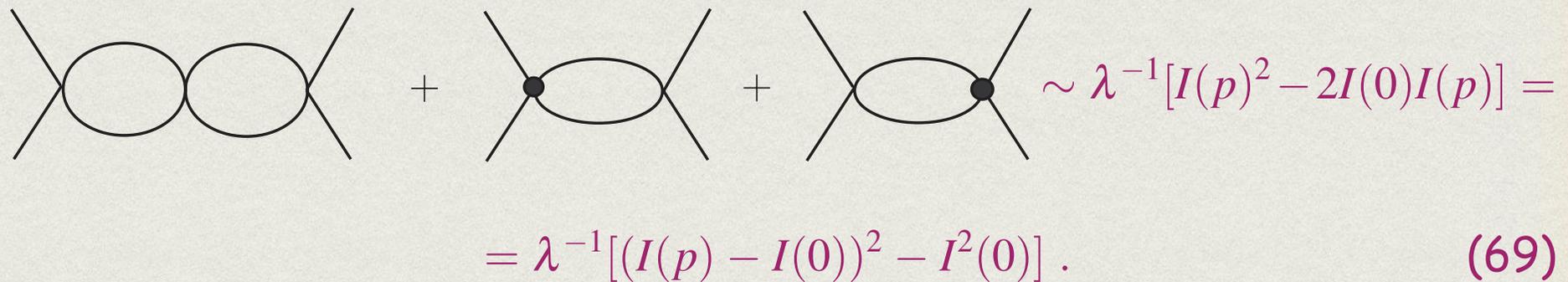


$$\sim \lambda^3 \left(\frac{I(p)}{\lambda^2} \right)^2, \quad (68)$$

- ❖ $I(p)$ логарифмически расходится.
- ❖ Сколько раз ни дифференцируй $I^2(p)$, не удастся сделать эту диаграмму конечной, так как всегда будет появляться член вида $I(p)\partial^n I(p)$, который и расходится.
- ❖ Но у нас есть однопетлевой контрчлен порядка λ^2 , который устраняет расходимость в $I(p)$.
- ❖ Этот контрчлен порождает вершину² $-I(0)$, \Rightarrow

²У нас есть 3 таких контрчлена, соответствующих s, t, u -каналам. Однако, два оставшихся будут устранять расходимости из диаграмм типа (54).

❖ Вместо диаграммы (68) мы должны учесть следующие диаграммы:



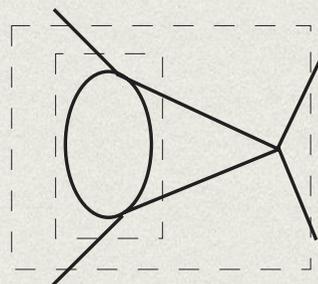
$$\sim \lambda^{-1} [I(p)^2 - 2I(0)I(p)] =$$

$$= \lambda^{-1} [(I(p) - I(0))^2 - I^2(0)]. \quad (69)$$

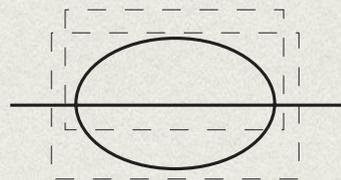
- ❖ В последнем выражении первый член $(I(p) - I(0))^2$ зависит от импульса и не содержит расходимости,
- ❖ Второе слагаемое, $-I^2(0)$, не зависит от импульса и расходится. ➡
- ❖ Таким образом, сумма диаграмм в (69) представима в виде (66) с конечной $\tilde{\Gamma}(p)$, т.е. учет однопетлевого контрчлена устраняет нежелательные расходимости.

- ❖ Таким образом, проблемы, связанные с присутствием расходимостей во всех членах в разложении в ряд Тейлора, решаются путем учета контрчленов низшего порядка.
- ❖ Полезно ввести определение *примитивно расходящейся диаграммы*: диаграммы, у которой $D \geq 0$, но все поддиаграммы сходятся.
- ❖ Только для таких диаграмм верно, что все расходимости полиномиальны по импульсам.
- ❖ Для всех других диаграмм расходимости становятся полиномиальными только после учета контрчленов для поддиаграмм.
- ❖ Мы не будем здесь доказывать это утверждение и очертим лишь те проблемы, которые возникают при доказательстве этого ключевого факта.
- ❖ Вернемся с этой целью к нашему примеру (68).
- ❖ Легко понять, что он основан на том, что диаграмма (68) факторизовалась.

- ❖ Конечно, это далеко не общая ситуация.
- ❖ В общем случае легко показать, что для факторизующихся расходимостей достаточно учета низших контрчленов, чтобы расходимости стали полиномиальными.
- ❖ Аналогично, достаточно легко доказать это для так называемых *вложенных расходимостей*, примером которых является следующая диаграмма:



- ❖ Трудности возникают при рассмотрении *перекрывающихся расходимостей*:



- ❖ Однако и для них удастся показать, что учет низших контрчленов устраняет неполиномиальные расходимости.
- 💡 Подведем итог. Мы видели, что в теории φ^4 набор контрчленов ограничен только тремя типами: $\sim (\partial\varphi)^2$, $\sim \varphi^2$ и $\sim \varphi^4$.
- 💡 Все эти типы присутствуют в затравочном лагранжиане, \implies
- 💡 Значит и сумма перенормированного лагранжиана и лагранжиана контрчленов совпадает с перенормированным. \implies
- 💡 Тем самым теория φ^4 является перенормируемой теорией.

Классификация взаимодействий

❖ Условная степень расходимости в теории ϕ^4

$$D = d - B \left(\frac{d}{2} - 1 \right) - nR, \quad (70)$$

✖ где B --- число внешних линий в диаграмме,

✖ n --- число вершин,

✖ d -- размерность пространства,

✖ $R = 4 - d$ --- массовая размерность константы связи.

❖ Введем также понятие *индекса расходимости вершины*

$$\delta_4 \equiv -R = d - 4 \quad (71)$$

- ❖ Рассмотрим теорию φ^k . Для нее несложно получить следующее выражение для условной степени расходимости

$$D = d - B \left(\frac{d}{2} - 1 \right) - n \left(d - k \frac{d-2}{2} \right). \quad (72)$$

- ❖ Индекс расходимости взаимодействия φ^k при этом будет

$$\delta_k = -R = k \frac{d-2}{2} - d \quad \Rightarrow \quad (73)$$

$$D = d - B \left(\frac{d}{2} - 1 \right) - nR \quad (74)$$

- ❖ При фиксированном числе B внешних линий D имеет три различных типа поведения:

- 1 $R > 0, \delta_k < 0 \Rightarrow k < 2d/(d-2), D \downarrow$ при $n \uparrow$, т.е. существует лишь конечное число расходящихся диаграмм. Такое взаимодействие называют *суперперенормируемым*. Константа связи имеет положительную массовую размерность;

- ② $R = 0, \delta_k = 0 \Rightarrow k = 2d/(d - 2)$. Степень расходимости D не зависит от числа вершин. Расходимости существуют (если появились) во всех порядках теории возмущений, но число расходящихся функций Грина конечно. Такое взаимодействие называют *перенормируемым*. Константа связи безразмерна;
- ③ $R < 0, \delta_k > 0 \Rightarrow k > 2d/(d - 2), D \uparrow$ при $n \uparrow$, т.е. все функции Грина расходятся при достаточно больших n . Такое взаимодействие называется *неперенормируемым*. Константа связи имеет отрицательную массовую размерность.

❖ Структура контрчленов тесно связана со структурой расходящихся диаграмм.

❖ Пусть каноническая размерность контрчлена будет $d_{кч}$, например,

$$\times [(\partial\varphi)^2] = d_{кч}((\partial\varphi)^2) = 4,$$

$$\times [\varphi^2] = d_{кч}(\varphi^2) = 2.$$

- ❖ Можно показать, что контрчлены, индуцируемые некоторой диаграммой, имеют индекс расходимости $\delta_{кч}$, не превышающий сумму индексов расходимости всех взаимодействий, входящих в диаграмму:

$$\delta_{кч} = d_{кч} - 4 \leq \sum n_i \delta_i . \quad (75)$$

- ❖ Для перенормируемых взаимодействий $\delta_i = 0$, \implies
- ❖ $\delta_{кч} \leq 0$.
- ❖ Если при этом все члены с $\delta_i \leq 0$ присутствуют в затравочном лагранжиане, т.е. контрчлены имеют ту же структуру, что и исходный лагранжиан, \implies
- ❖ Можно считать, что контрчлены переопределяют параметры лагранжиана, такие как масса и константа связи.
- ❖ Эти величины задаются в теории с самого начала, и для их определения необходимо произвести конечное множество экспериментов.

- ❖ Если же $\delta_i > 0$, то и $\delta_{кч}$ становится положительным в высших порядках. ➡
- ❖ Мы вынуждены вводить все новые и новые взаимодействия со все новыми константами связи.
- ❖ Для определения этих констант требуется бесконечное число измерений, и теория, теряя свою предсказательную силу, становится непривлекательной.
- 💡 Ввод контрчленов эквивалентен переопределению T -произведения в совпадающих точках. Напомним, что мы уже говорили, что при построении аксиоматической S -матрицы из-за неопределенности T -произведения возникает свобода в выборе квазилокальных операторов. Роль этих квазилокальных операторов и играют контрчлены.
- ❖ Подведем промежуточный итог.
- ❖ Условная степень расходимости диаграммы, равная разности чисел петлевых импульсов в числителе и знаменателе интегранта (56), может быть выражена через число внешних линий, число измерений d ,

число вершин n_i и индексы расходимости δ_i в следующем общем виде:

$$D = f(\text{число внешних линий}, d) + \sum n_i \delta_i . \quad (76)$$

❖ В зависимости от величин D и δ_i теории могут быть расклассифицированы следующим образом:

❖ Все $\delta_i < 0$

① $D < 0$ для всех диаграмм, т.е. теория *конечна*;

② Существуют $D \geq 0$, однако при $n \uparrow D \downarrow$ и становится отрицательной, т.е. существует лишь конечное число расходящихся диаграмм. Такие теории называются *суперперенормируемыми*.

❖ Некоторые $\delta_i = 0$, остальные отрицательны, и существуют $D \geq 0$ --- теория *перенормируема*, $\delta_{\text{кч}} \leq 0$.

❖ Существуют $\delta_i > 0$, тогда существует n_i для которых D становится положительной при произвольном числе внешних линий --- такие теории *неперенормируемы*.

Классификация неперенормируемых теорий

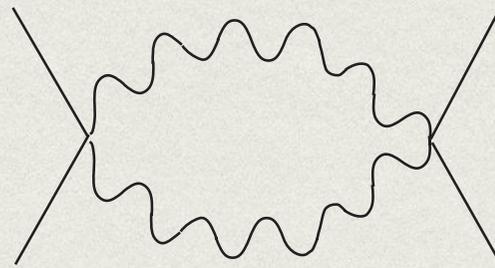
- ❖ Для перенормируемых теорий $\delta_{\text{кч}} \leq 0$.
- ❖ Если соответствующий член уже присутствует в лагранжиане, то все в порядке.
- ❖ Однако, может случиться так, что такого члена в лагранжиане нет. \Rightarrow
- ❖ В этом случае теорию следует отнести к неперенормируемым. \Rightarrow
- ❖ Дадим более подробную классификацию неперенормируемых теорий:

- ① Лишь конечное число ОЧН-функций Грина обладают поверхностной расходимостью (т.е. $\delta_i \leq 0$) и требуют независимого контрчлена.
- Однако, контрчлен имеет структуру, отличную от структуры членов, присутствующих в затравочном лагранжиане.
 - Такие теории можно сделать перенормируемыми путем введения в затравочный лагранжиан дополнительных членов, имеющих структуру необходимых контрчленов.
 - В качестве примера рассмотрим скалярную электродинамику в 4-х измерениях с лагранжианом

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + |D_\mu\varphi|^2 - m^2\varphi^*\varphi. \quad (77)$$

- Из длинной производной (второй член в (77)) возникают две вершины взаимодействия.
- Первая из них кубична по полям и пропорциональна импульсу, вторая --- четвертой степени по полям. ➡

- ❖ Обе вершины имеют нулевой индекс расходимости и являются перенормируемыми.
- ❖ Однако, теория с лагранжианом (77) неперенормируема:
- ❖ Во втором порядке теории возмущений возникает диаграмма



- ❖ Эта диаграмма логарифмически расходится \implies нужен контрчлен φ^4
- ❖ Такой структуры в лагранжиане (77) нет. \implies
- ❖ Такая теория является неперенормируемой.
- ❖ Однако, теория с лагранжианом

$$\mathcal{L}_{QED} - \frac{\lambda}{4} |\varphi|^4$$

уже будет перенормируемой.

- ✦ Заметим, что при этом мы ввели новый параметр в лагранжиан --- константу связи λ .
- ② Все, как в пункте ①, за исключением того, что дополнительные члены физически бессмысленны.

 - ✦ Например, в КЭД существуют диаграммы, дающие вклад в пропагатор фотона и наивно требующие контрчлена вида A_μ^2 --- т.е. массы фотона.
 - ✦ В действительности, в КЭД благодаря калибровочной инвариантности такой контрчлен не требуется.
 - ✦ Тем не менее такая ситуация может возникнуть в аномальных теориях.
- ③ Бесконечное множество функций Грина имеют поверхностную расходимость, однако во всех функциях Грина (за исключением конечного числа) расходимость сокращается после суммирования всех диаграмм данного порядка. Такие случаи пока неизвестны.

- ④ Все происходит, как в пункте ③, но расходимости сокращаются лишь для матричных элементов S -матрицы (на массовой поверхности), а не для функций Грина вне массовой поверхности. Такие теории можно отнести к перенормируемым. Важным примером является теория со спонтанным нарушением калибровочной симметрии в унитарной калибровке.
- ⑤ Теория становится перенормируемой, если выйти за рамки теории возмущений. Пример: любая точно перенормируемая и асимптотически свободная (см. ниже) теория в некоторой размерности $d = d_0$, которая рассматривается в размерностях, чуть превышающих d_0 .
- ⑥ Неперенормируемая теория не относится ни к одному из рассматриваемых случаев. Например, теории действительно требующие введение бесконечного числа контрчленов.
- 🔥 Лишь в случаях ② и ⑥ теорию можно называть неперенормируемой.
- 🔥 Фундаментальная теория должна быть перенормируема --- иначе либо

физические величины будут бесконечны, либо их удастся сделать конечными лишь за счет введения бесконечного числа параметров, необходимых для определения конечных частей контрчленов.

- ❖ Тем не менее утверждение, что данная теория неперенормируема на самом деле говорит только о нашем неведении: просто никто не сумел еще сформулировать эту теорию физически разумным способом
- ❖ Кроме того, неперенормируемые теории также могут прекрасно описывать низкоэнергетическое поведение перенормируемых теорий.
 - ✘ Так, например, четырехфермионное взаимодействие является неперенормируемым, но прекрасно описывает слабые взаимодействия при низких энергиях.
- ❖ На практике обычно говорят, что теория неперенормируема, если она неперенормируема в рамках теории возмущений.
- ❖ Последнее всегда можно установить, оценив конечное число диаграмм.

Схема минимальных вычитаний

- ❖ Схема минимальных вычитаний (*MS*-схема от английского *minimal subtractions*) является альтернативной схеме вычитаний в импульсном пространстве.
- ❖ Она может использоваться как в стандартной схеме перенормировки, так и в БПХЦ-схеме
- ❖ Обычно *MS*-схему используют совместно с методом размерной регуляризации,
- ❖ Но ее можно использовать и в других методах, таких как решеточная регуляризация.
- ❖ В размерной регуляризации ультрафиолетовые расходимости диаграмм Фейнмана проявляются в виде полюсов при некоторых значениях размерности пространства-времени d .

❖ MS-схема основана на определении контрчленов как полюсов при физических значениях d (т.е. при $d = 4$).

❖ Размерная регуляризация: чтобы сохранить физическую размерность констант связи $[g_i] = a_i$ в теорию вводился дополнительный массовый параметр μ

$$g_i \rightarrow \mu^{b_i(4-d)} g_i, \quad (78)$$

❖ При этом $a_i + b_i(4 - d)$ --- размерность константы связи в d измерениях без введения μ .

❖ Пусть размерность ОЧН-диаграммы Γ , из которой мы хотим вычлест контрчлен, равна $A + B(d - 4)$, \Rightarrow

❖ Контрчлен равен

$$T(\Gamma) = \mu^{B(d-4)} \cdot \{ \text{полюсная часть от } \mu^{B(4-d)} \Gamma \text{ при } d = 4 \}. \quad (79)$$

💡 При этом мы добились, что полюсная часть берется от функции, размерность которой не зависит от d .

❖ В качестве примера рассмотрим собственную энергию в теории φ^4 :

$$-i\Sigma(p) = i\frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi + 1 + \ln \frac{\mu^2}{m^2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right), \quad (80)$$

поэтому контрчлен в MS -схеме, согласно (79), будет

$$\Delta\mathcal{L}_{\varphi^2} = -\frac{\lambda}{32\pi^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{m^2\varphi^2}{2}, \quad (81)$$

что отличается от контрчлена в схеме вычитаний в импульсном пространстве, который просто равен $\Sigma\varphi^2/2$ (см. (63)).

💡 Схема минимальных вычитаний обладает рядом преимуществ и недостатков. Перечислим сперва преимущества.

❌ MS -схема автоматически сохраняет сложные симметрии лагранжиана. Исключением являются киральная и конформная симметрия.

❌ Не возникает проблем с инфракрасными расходимостями в безмассовых теориях, так как размерная регуляризация одинаково регуляризует как ультрафиолетовое, так и инфракрасное поведение интегралов.

❌ Очень удобно проводить вычисления.

- ❖ Существенным недостатком MS -схемы является ее нефизичность.
- ❖ Действительно, невозможно сказать, при каких импульсах определены массы и константы связи, стоящие в затравочном лагранжиане.
- ❖ В связи с этим, схема минимальных вычитаний получила наибольшее распространение в теориях, где константы связи или массы нельзя фиксировать с помощью физических соображений.
- ❖ Такие теории существуют. Важным примером является квантовая хромодинамика (КХД), описывающая взаимодействие кварков и глюонов.
- ❖ Экспериментально ни свободных кварков, ни глюонов не было до сих пор обнаружено.
- ❖ Но связанные состояния -- барионы и мезоны -- изучены очень хорошо.
- ❖ Поэтому невозможно поставить эксперимент по определению «чистой» константы связи КХД с помощью измерения сечения рассеяния свободных кварков.

- На самом деле ситуация еще более сложная.
- Не смотря на то, что мы не производим вычитаний в какой-либо фиксированной точке импульсного пространства, характерный масштаб импульсов у нас все-таки есть.
- Дело в том, что в конечных частях функций Грина появляются члены вида

$$\lambda^n (\ln(p^2/\mu^2))^m \quad (82)$$

где p --- характерный внешний импульс.

- Если $p^2 \gg \mu^2$, то такие члены становятся большими, ➡
- Мы не можем больше доверять теории возмущений. ➡
- Разумно выбирать $\mu^2 \sim p^2$.
- В связи с этим можно сказать, что наши параметры определены при энергиях порядка μ .

MS-схема

- ❖ На практике чаще используют не MS-схему, а модифицированную схему \overline{MS} , называемую также MS с чертой или MS-бар (от англ. *bar* --- полоса, черта).
- ❖ Необходимость модификации связана в первую очередь с наличием больших коэффициентов в разложении в ряд теории возмущений.
- ❖ Появление этих больших коэффициентов обязано величине

$$\ln 4\pi - \gamma \simeq 1.95 . \quad (83)$$

- ❖ От этой величины можно избавиться, записав параметр μ MS-схемы в виде

$$\mu = \bar{\mu} \left(\frac{e^\gamma}{4\pi} \right)^{1/2} \simeq 0.38\bar{\mu} . \quad (84)$$

Эффективно это означает, что контрчлен (79) становится

$$T(\Gamma) = \mu^{B(d-4)} \cdot \{(\text{полюсная часть от } \mu^{B(4-d)}\Gamma \text{ при } d = 4) + \ln 4\pi - \gamma\}, \quad (85)$$

Т.е. вычитается не только полюс, но вся комбинация N_ϵ .

Так, например, уравнение (81) примет вид

$$\Delta \mathcal{L}_{\varphi^2} = -\frac{1}{232\pi^2} \lambda m^2 \cdot N_\epsilon \varphi^2. \quad (86)$$

Итог

- ❖ В теории поля при вычислении функций Грина возникают ультрафиолетовые расходимости
- ❖ От них можно избавиться, считая, что голые параметры, определенные на основании квантования свободных полей: массы, константы связи, нормировки полей, являются нефизическими и могут быть бесконечными, будучи выражены через наблюдаемые физические величины
- ❖ Такая процедура называется перенормировкой
- ❖ Перенормированные (конечные) и неперенормированные (бесконечные) функции Грина при этом связаны мультипликативной перенормировкой
- ❖ Если все независимые расходимости, возникающие в ФГ, удастся устранить путем переопределения нефизических параметров, то такая тео-

рия называется перенормируемой, в противном случае теория неперенормируема

- ❖ Некоторые неперенормируемые теории удастся сделать перенормируемыми, например, путем введения дополнительных взаимодействий (и параметров), если они существенным образом не изменяют физический смысл теории
- ❖ О неперенормируемости теории практически всегда свидетельствует наличие констант с отрицательной размерностью в единицах массы.
- ❖ Существует множество схем перенормировок, которые не являются альтернативами друг другу
- ❖ Стандартная схема перенормировки: стартуем с неперенормированного лагранжиана, является альтернативой схеме БТХЦ: стартуем с перенормированного лагранжиана и строим лагранжиан контрчленов
- ❖ Эти схемы определяют подход к перенормировке. Назовем их Π -схемами.

- ❖ Схема вычитаний в импульсном пространстве: раскладываем ФГ в ряд Тейлора по внешним импульсам и вычитаем несколько первых членов разложения, является альтернативой $MS, (\overline{MS})$ -схеме: вычитаем полюса по $1/\epsilon$
- ❖ Эти схемы определяют способ вычитания. Назовем их C -схемами.
- ❖ Но любая из C -схем является необходимым ингредиентом любой из P -схем и не является альтернативой последним.
- ❖ $MS, (\overline{MS})$ -схема не является размерной регуляризацией.
- ❖ Хотя $MS, (\overline{MS})$ -схема обычно используется с размерной регуляризацией, но ее можно применять и с другими видами регуляризаций, например, с решеточной.
- ❖ Размерную регуляризацию можно использовать не только с $MS, (\overline{MS})$ -схемой. Она может быть использована и со схемой вычитания в импульсном пространстве.