М.В. Либанов

КТП XI. Полные функции Грина

Содержание

Полные функции Грина в КТП

➢ В КТП наибольший интерес представляют не матричные элементы

$$\langle \mathrm{out}|T \exp\left(i\int d^4x \mathscr{L}_{\mathrm{in}}\right)|\mathrm{in}\rangle, \tag{1}$$

а *полные функции Грина*, или просто *функции Грина*, или *корреляторы*

✍ Причинной функцией Грина свободных полей называется их хронологическое спаривание

$$-iG^{c}(x-y) = \overbrace{\varphi(x)\varphi}(y) = \langle T(\varphi(y)\varphi(x)\rangle_0 \,. \tag{2}$$

✍ Эта функция удовлетворяет неоднородному уравнению Клейна-Гордона

$$(\partial_x^2 + m^2)G^{c}(x-y) = \delta(x-y) \quad \Rrightarrow \tag{3}$$

чем и обусловленно название.

➢ По аналогии введем полную n-частичную функцию Грина взаимодействующих полей. Имеем по определению для полей в представлении взаимодействия

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) = \langle T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)S)\rangle_0 \,. \tag{4}$$

✍ Часто в литературе в этом определении опускают знак S-матрицы, считая, что поля находятся в представлении Гейзенберга,

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) = \langle T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n))\rangle_0 \,, \tag{5}$$

а также и знак T-произведения

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) = \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n))\rangle_0 \,. \tag{6}$$

Диаграмная техника

➢ Для вычисления функций Грина можно построить диаграммную технику.

- Заметим, что все операторы должны быть спарены --- в противном случае неспаренный оператор подействует на вакуум и даст ноль.
  $\Rrightarrow$

- Из этого следует, что для n-точечной функции Грина диаграммы должны иметь n внешних линий.

- При вычислении матричных элементов мы сопоставляли внешним линиям структуры, соответствующие решениям свободных уравнений движения.

- Для функций Грина это не так --- мы должны сопоставлять свободный пропагатор.

- Для внутренних линий ситуация не меняется: любой внутренней линии мы должны сопоставлять пропагатор.

✍ Ситуация также не меняется и для вершин, поскольку структура вершин целиком определяется лагранжианом взаимодействия. ⇛

➢ Таким образом, диаграммная техника для функций Грина такая же, как и при вычислении матричных элементов, за исключением внешних линий. ⇛

➢ В импульсном представлении

$$(2\pi)^4\delta^4(p_1+\ldots+p_n)G_n(p_1\ldots p_n) = \int\prod_{i=1}^{n} d^4x_i \mathrm{e}^{-ip_ix_i}G_n(x_1\ldots x_n) \qquad (7)$$

внешние импульсы p_i, от которых зависит функция Грина, не лежат на массовой поверхности и входят в диаграмму.

➢ Пример: рассмотрим двухточечную функцию Грина в теории φ^4, или полный пропагатор, вплоть до первого порядка по λ.

✍ Далее мы не будем считать, что лагранжиан теории нормально упорядочен.

➢
$$\langle T(\varphi_x\varphi_y S)\rangle_0 = \langle T(\varphi_x\varphi_y)\rangle_0 + \frac{-i\lambda}{4!}\langle T(\varphi_x\varphi_y \int dz\varphi^4(z))\rangle_0 + \ldots \quad (8)$$

☞ Первый член в этом разложении представляет собой свободный пропагатор

$$\langle T(\varphi_x\varphi_y)\rangle_0 = \overbrace{\varphi(x)\varphi}(y) \quad (9)$$

☞ Второе слагаемое: В нем мы можем

- ➢ спарить $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ с операторами $\varphi(z)$. Это можно сделать 12 способами.
- ➢ спарить $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ друг с другом, а операторы $\varphi(z)$ между собой. Последнее можно сделать 3 способами. ⇛

➢ Имеем (см. 2-ое и 3-ье слагаемые на рис. 1),

$$\langle T(\varphi(x)\varphi(y)\int dz\varphi^4(z))\rangle = 12\int dz\, \overline{\varphi_x\varphi}_z\, \overline{\varphi_y\varphi}_z\, \overline{\varphi_z\varphi}_z + 3\, \overline{\varphi_x\varphi}_y \int dz(\overline{\varphi_z\varphi}_z)^2 =$$

$$12i\int dz G^c(x-z)G^c(z-y)G^c(0) + 3iG^c(x-y)G^c(0)^2\int dz \qquad (10)$$

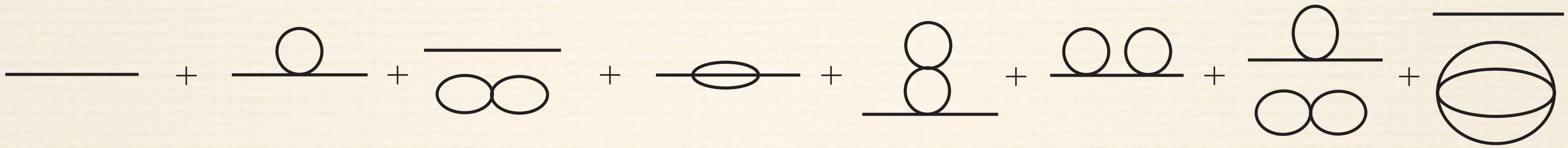


Рис. 1: Диаграммы, дающие вклад в полный пропагатор вплоть до второго порядка ТВ. Все ли диаграммы изображены?

✍ Помимо связных диаграмм, появляются также несвязные диаграммы.

✍ В случае полного пропагатора от них достаточно просто избавиться, так как они являются *вакуумными*:

☞ Появление этих несвязных диаграмм обусловленно тем, что ни один оператор из некоторого произведения $\mathscr{L}_{\text{int}}$ не спарен с φ_x или φ_y,

⇛ в n-ом порядке теории возмущений присутствуют члены вида

$$\langle \varphi_x \varphi_y \left(i \int dz \mathscr{L}_{\text{int}}(z) \right)^m \rangle^{\text{con}} \times \langle \left(i \int dz \mathscr{L}_{\text{int}}(z) \right)^{n-m} \rangle \,, \tag{11}$$

☞ Первый множитель включает только связные диаграммы (мы предполагаем, что $\langle \varphi \rangle = 0$). ⇛

☞ Такие члены легко просуммировать. В n-ом порядке имеем

$$\langle \varphi_x \varphi_y \rangle_n = \sum_{0 \le m \le n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \langle \varphi_x \varphi_y \left(i \int dz \mathscr{L}_{\text{int}}(z) \right)^m \rangle^{\text{con}} \times \langle \left(i \int dz \mathscr{L}_{\text{int}}(z) \right)^{n-m} \rangle \,. \tag{12}$$

☞ Учитывая, что

$$\langle \varphi_x \varphi_y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \varphi_x \varphi_y \rangle_n \,, \quad \Rrightarrow \tag{13}$$

☞ Получаем

$$\langle \varphi_x \varphi_y \rangle = \langle \varphi_x \varphi_y \rangle^{\text{con}} \langle S \rangle \quad \text{(Показать!)} \Rrightarrow \tag{14}$$

➢ Определим связный пропагатор как

$$-iG(x,y) = \frac{\langle \varphi_x \varphi_y \rangle}{\langle S \rangle} \,. \tag{15}$$

✍ На самом деле, вакуумное среднее от S-матрицы не что иное, как чистая фаза в силу унитарности последней. Мы можем забыть про этот множитель и рассматривать функции Грина без вакуумных диаграмм.

✍ На уравнение (15) можно посмотреть и иначе:

➢ Мы определили функции Грина взаимодействующих гейзенберговских полей, как среднее от этих полей по вакууму свободного Гамильтониана (5).

- Однако вакуум во взаимодействующей теории (обозначим его $|\Omega\rangle$) может (и будет) отличаться от вакуума свободной теории $|0\rangle$.
- Если эти два вакуума неортогональны (если же они ортогональны, то теория не имеет ничего общего со слабо взаимодействующей теорией) друг другу: $\langle\Omega|0\rangle \neq 0$, $\Rrightarrow$
- Можно показать, что функция Грина, вычисленная по вакууму $|\Omega\rangle$, связана с определенной нами функцией Грина следующим образом:

$$\langle\varphi_1 \ldots \varphi_n\rangle_\Omega = \frac{\langle\varphi_1 \ldots \varphi_n\rangle_0}{\langle S\rangle_0} \quad \Rrightarrow \tag{16}$$

- Надо считать по правильному вакууму $|\Omega\rangle$
- Мы будем обозначать его $|0\rangle$ и отбрасывать вакуумные диаграммы

- Итак, в случае двухточечной функции Грина мы получили после отбрасывания вакуумных диаграмм только связные диаграммы.
- Однако для n-точечной функции при $n > 2$ останутся еще несвязные части.

➢ Например, для 4-х точечной функции Грина в теории φ^4 мы будем иметь, после избавления от вакуумных диаграмм, диаграммы, изображенные на Рис. 2.

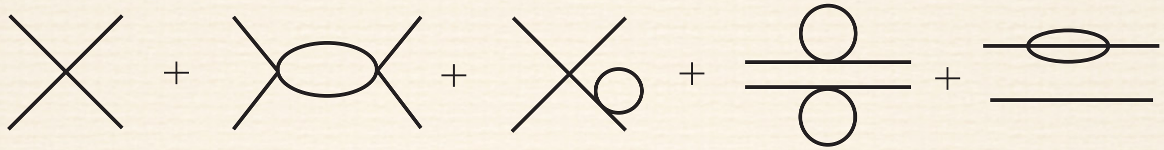


Рис. 2:

➢ Видно, что две последние диаграммы, изображенные на этом рисунке, соответствуют произведению пропагаторов двух частиц, $\Rrightarrow$

➢ Изучение таких диаграмм сводится к изучению корреляторов с меньшим числов концов.

Почему важны функции Грина?

- Три основные причины, почему важны функции Грина:
  - Во-первых, как мы уже упоминали, функции Грина определены для произвольных внешних импульсов и тем самым содержат больше информации, нежели амплитуды переходов. Тот факт, что внешние импульсы не лежат на массовой поверхности, позволяет продолжать последние в комплексную плоскость, что в свою очередь дает информацию, например, о связанных состояниях.
  - Во-вторых, рассмотрим, например, процесс упругого рассеяния двух частиц в теории φ^4. На Рис. 3 изображены две диаграммы в четвертом порядке теории возмущений, дающие вклад в амплитуду указанного процесса. Выделенные элементы этих диаграмм не что иное, как одна из поправок к двухточечной функции Грина (см. Рис. 1, 4-ая диаграмма) и к четырехточечной функции Грина (см. Рис. 2, 2-ая диаграмма). Действительно, по импульсам, пробегающим по петле, мы при вычислении матричных элементов должны проинте-

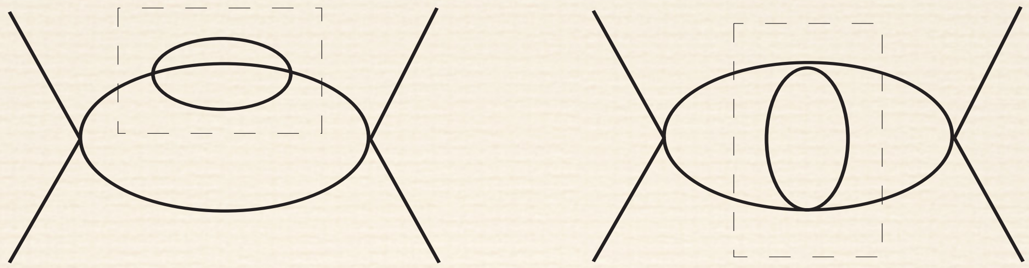


Рис. 3:

грировать. Поэтому на них не наложено условие массовой поверхности, и вычисление выделенных элементов диаграмм сводится к вычислению соответствующих функций Грина. Таким образом, для того чтобы вычислять матричные элементы в высших порядках теории возмущений, необходимо знать функции Грина.

➢ В-третьих, зная n-точечную функцию Грина, можно легко найти амплитуду процесса $m \to n - m$.

- ➢ Действительно, диаграммная техника для функций Грина совпадает с диаграммной техникой для амплитуд за исключением двух моментов:
  - ☞ внешними линиями корреляторов являются пропагаторы, внешними линиями амплитуд --- решения свободных уравнений движения;
  - ☞ внешние импульсы корреляторов не лежат на массовой поверхности. $\Rrightarrow$
- ➢ Таким образом, для того чтобы получить из функции Грина амплитуду необходимо

- **амутировать** внешние *полные* пропагаторы, т.е. разделить функцию Грина на двухчастичные функции Грина, соответствующие внешним ногам;
- **пришить** вместо ампутированных линий, линии, соответствующие реальным частицам, т.е. умножить на поляризации частиц;
- устремить внешние импульсы к массовой поверхности $p_i^2 \to m_i^2$: $\Rrightarrow$

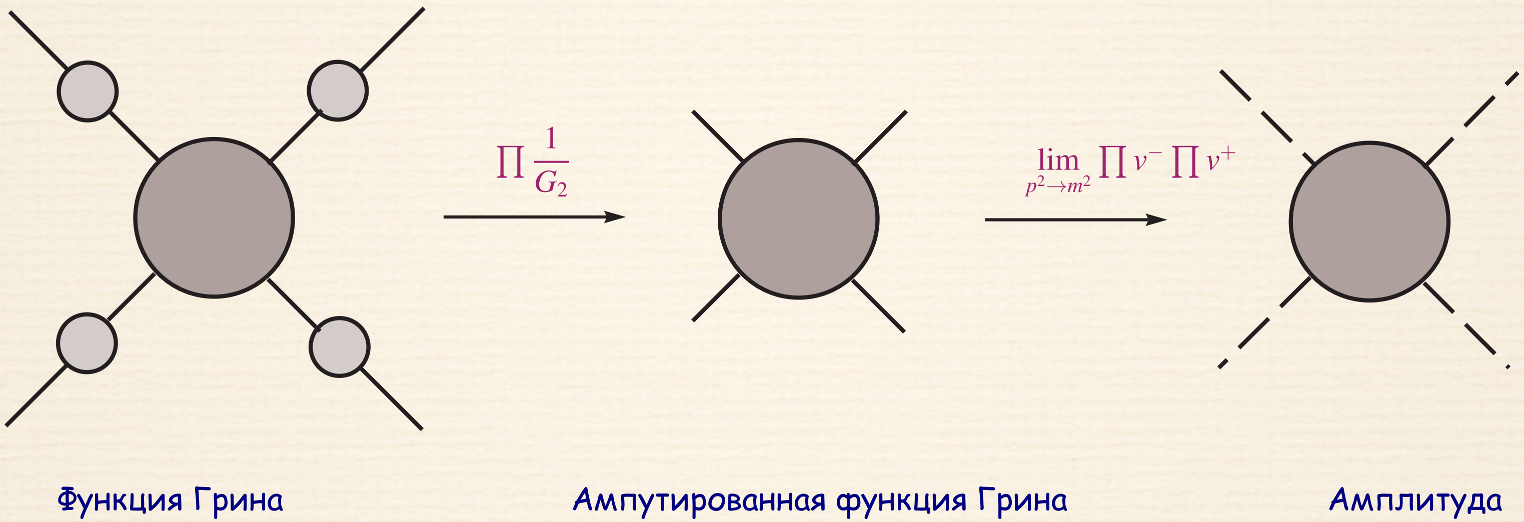


Рис. 4: Схематичное изображение описанной процедуры

☞

$$\langle p_{n-m+1}, \ldots, p_n | S | p_1, \ldots, p_m \rangle =$$

$$= \lim_{p_i \to m_i^2} -iG_n(p_1, \ldots p_n) \times \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{-iG_2^i(p_i, m_i)} \times \prod_{i=1}^{m} v^-(p_i) \prod_{i=n-m+1}^{n} v^+(p_i) \quad (17)$$

☞ Это уравнение носит название *редукционной формулы Лемана-Симанчика-Цимерманна* (ЛСЦ-формула).

✍ Мы получили уравнение (17) опираясь на эвристические рассуждения и на диаграммную технику.

✍ В действительности, строгое доказательство редукционной формулы не опирается ни на диаграммную технику, ни на теорию возмущений вообще и носит общий характер.

✍ Интересным следствием редукционной формулы является то, что если функция Грина не имеет полюсов на массовой поверхности, то соответствующая ей амплитуда будет равна нулю.

Вычисление фейнмановских интегралов

➢ В теории $(\lambda/4!)\varphi^4$ четырехточечная связная функция Грина

$$(2\pi)^4\delta(p_1+p_2-k_1-k_2)G_4(p_1,p_2,k_1,k_2) = \int dxdydzdt\,\mathrm{e}^{-ip_1x-ip_2y+ik_1z+ik_2t}\langle\varphi_x\varphi_y\varphi_z\varphi_t\rangle \tag{18}$$

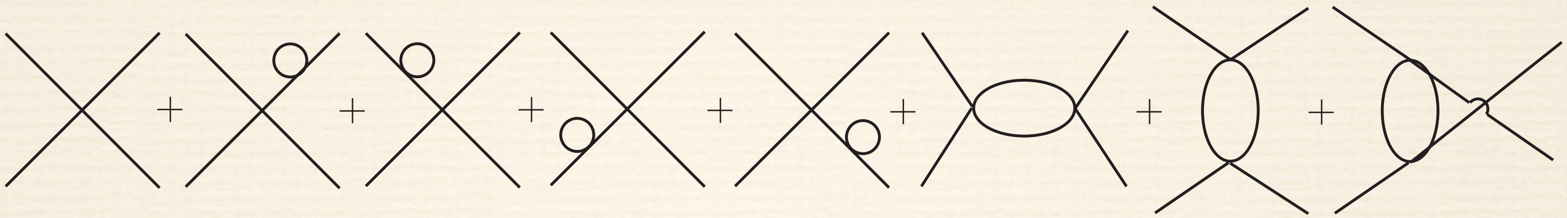


Рис. 5:

➢ Первая диаграмма на рис. 5 -- древесная -- первый порядок ТВ

➢ Во втором порядке вклад в функцию Грина дают семь диаграмм:

☞ 4 из них не являются сильносвязными (диаграммы 2--5) $=$ древесная $\times$ пропагатор $\Rrightarrow$ нужно изучать пропагатор

☞ 3 последние являются сильносвязными -- «рыбы» их нельзя превратить в несвязные диаграммы путем разрезания одной внутренней линии.

➢ Рассмотрим первую рыбу (см. Рис. 6) -- s-канал.

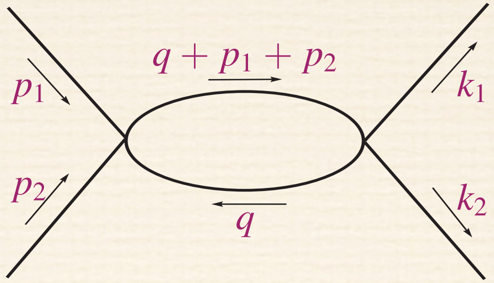


Рис. 6:

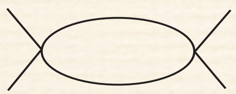
➢ По правилам Фейнмана

$$\frac{(-i\lambda)^2}{4!^2}\frac{4!^2}{2!} \times \left\{ \frac{i}{p_1^2 - m^2} \cdot \frac{i}{p_2^2 - m^2} \cdot \frac{i}{k_1^2 - m^2} \cdot \frac{i}{k_2^2 - m^2} \right\} \times$$

$$\times \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2} \cdot \frac{i}{(q + p_1 + p_2)^2 - m^2} \qquad (19)$$

✍ Уже проинтегрировали с помощью одной из δ-функций, стоящих в вершинах по одному из внутренних импульсов.

- Оставшаяся при этом δ-функция, выражающая закон сохранения полного импульса, явно учтена в определении (18).
- У всех масс в выражении (19) есть отрицательная мнимая добавка, которую мы явно не выписали: $m^2 \to m^2 - i\varepsilon$.
- Очевидно, что множитель, стоящий в фигурных скобках в (19) и соответствующий внешним пропагаторам, является тривиальным, поэтому имеет смысл от него избавится, т.е. ампутировать внешние ноги у диаграммы. Таким образом для «ампутированной» «рыбы» имеем следующее выражение



$$= I(p_1 + p_2)\ , \tag{20}$$

где

$$I(p) = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - m^2)((q+p)^2 - m^2)}\ . \tag{21}$$

➢ Очевидно, что оставшиеся две «рыбы» на Рис. (5) даются точно таким же выражениями с соответствующей заменой импульсов:

- вторая равна $I(p_1 - k_1)$ -- t-канал
- третья равна $I(p_1 - k_2)$ -- u-канал.

➢ Амлутированный вертекс, т.е. сумма всех одночастичнонеприводимых (ОЧН) или сильносвязных диаграмм без внешних линий (сумма первой и трех последних амлутированных диаграмм на Рис. (5) равен при этом

$$\Gamma(s,t,u) = -i\lambda + I(\sqrt{s}) + I(\sqrt{t}) + I(\sqrt{u}) + \mathscr{O}(\lambda^3)\,, \tag{22}$$

➢ Здесь

$$s = (p_1+p_2)^2 = (k_1+k_2)^2\,,\;\; t = (p_1-k_1)^2 = (p_2-k_2)^2\,,\;\; u = (p_1-k_2)^2 = (p_2-k_1)^2 \tag{23}$$

--- мандельстамовские переменные.

✍ Заметим, что импульсы не лежат на массовой поверхности, поэтому, например, $s + t + u \neq 4m^2$.

- ➢ Таким образом, мы свели задачу нахождения функции Грина к вычислению интеграла $I(p)$ (21). Интегралы такого вида называются *фейнмановскими* или *петлевыми*.
- ➢ Вычисление интегралов такого вида вызывает некоторые трудности.
- ➢ Первая из них связана с тем, что подынтегральное выражение зависит не от модуля вектора $|q|$, а от самого вектора q, т.е. от "угла" (пространство Минковского!) между вектором q и вектором p.
- ➢ Можно конечно явно проинтегрировать по этому углу и по модулю $|q|$. Однако, это не очень удобно.
- ➢ Другой путь --- это преобразовать интегрант таким образом, чтобы он зависел только от модуля $|q|$, интегрирование же по углам после этого становится тривиальным.
- ➢ Для того чтобы это сделать, существуют два наиболее распространенных способа:
  - ☞ метод фейнмановских параметров
  - ☞ переход в α-представление.

Метод фейнмановских параметров

➢ Основная идея метода основана на следующей формуле

$$\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i} = (n-1)! \int\limits_0^1 \prod_{i=1}^{n} dx_i \cdot \frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i\right)^n} \delta(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i) \,. \tag{24}$$

➢ Введем следующее обозначение для меры интегрирования в (24)

$$\int\limits_0^1 \{dx\}_n \equiv \int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_0^{1-x_1} dx_2 \int\limits_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \ldots \int\limits_0^{1-\sum\limits_{i=1}^{n-2} x_i} dx_{n-1} = \int\limits_0^1 \prod_{i=1}^{n} dx_i \cdot \delta(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i) \tag{25}$$

➢ Переменные x_i называются *фейнмановскими параметрами*.

➢ Уравнение (24) можно продифференцировать по, например, a_1:

$$\frac{1}{a_1^2 \prod\limits_{i=2}^{n} a_i} = n! \int\limits_0^1 \{dx\}_n \frac{x_1}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i\right)^{n+1}} \,. \tag{26}$$

✍ Эта формула удобна тем, что в левой части мы имеем $n+1$ сомножителя, два из которых одинаковы, тогда как в правой части мы по-прежнему ввели n фейнмановских параметра.

➢ Продемонстрируем применение метода на примере вычисления $I(p)$

✍ Имеем два пропагатора -- два множителя типа a_i в знаменателе

➢ Преобразуем это произведение с помощью (24), введя два фейнмановских параметра x и y. Имеем

$$
\begin{aligned}
I(p) &= \frac{\lambda^2}{2} 1! \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{dxdy\delta(1-x-y)}{((q^2-m^2)y + ((q+p)^2-m^2)x)^2} = \\
&= \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int\limits_0^1 \frac{dx}{((q^2-m^2)(1-x) + (q+p)^2x - m^2x)^2} = \\
&= \frac{\lambda^2}{2} \int\limits_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2+2qpx+p^2x-m^2)^2} = \\
&= \frac{\lambda^2}{2} \int\limits_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{((q+px)^2-p^2x^2+p^2x-m^2)^2} \stackrel{q+px\to q}{=} \\
&\stackrel{q+px\to q}{=} \frac{\lambda^2}{2} \int\limits_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2-p^2(x^2-x)-m^2)^2} \,. \qquad (27)
\end{aligned}
$$

✍ Таким образом, мы получили интегрант зависящий только от модуля вектора $|q|$.

➢ В общем случае однопетлевой фейнмановский интеграл после введения фейнмановских параметров сводится к следующему выражению

$$\int_0^1 \{dx\} \int dq \frac{P(q-b,p)}{(q^2 - D(p,x,m))^L} \,, \tag{28}$$

где $P(q,p)$ --- некий полином по векторам q_μ и p_μ.

➢ Получившийся интеграл можно легко свести к интегралам, зависящим только от квадратов импульса q_μ. Действительно,

$$\int dq F(q^2) \overbrace{q_\nu q_\mu \dots q_\rho}^{\text{нечетное}} = 0$$

$$\int dq F(q^2) q_\mu q_\nu = \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \int dq F(q^2) q^2$$

$$\int dq F(q^2) q_\mu q_\nu q_\rho q_\sigma = \frac{1}{24} (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) \int dq F(q^2) (q^2)^2 \,,$$

$$\dots\dots\dots \tag{29}$$

✍ Для того чтобы убедится в справедливости этих выражений, достаточно заметить:

☞ Интегралы, стоящие в левых частях этих равенств, являются симметричными тензорами соответствующего ранга, не зависящими после интегрирования ни от одного вектора. ⇛

☞ Они могут выражаться только через единственный симметричный тензор, имеющийся в нашем распоряжении, --- метрику $g_{\mu\nu}$. ⇛

☞ Выделяя таким образом тензорную структуру из интеграла, остается только определить скалярную часть: множитель типа $1/4 \int dqF(q^2)q^2$ во втором из интегралов (29).

☞ Для этого достаточно вычислить след от левой и правой части, т.е. просуммировать по индексам $\mu, \nu, \ldots$. Действуя таким образом, можно получить (получить!) формулы типа (29).

Переход в α-представление

➢ Метод основан на следующем интегральном представлении для пропагатора

$$\frac{i}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} = \int\limits_0^\infty e^{i\alpha(q^2 - m^2 + i\varepsilon)} d\alpha \ . \qquad (30)$$

➢ Заменяя каждый пропагатор в интегранте фейнмановского интеграла его α-представлением, можно свести интеграл к виду (мы будем приводить формулы в d измерениях)

$$\frac{i}{\pi^{d/2}} \int d^d q e^{i(aq^2 - 2bq)} q_\mu q_\nu \ldots q_\rho \ , \qquad (31)$$

где a --- функция, а b --- вектор, зависящие от α-параметров, внешних импульсов, масс, но не от импульса q.

➢ Эти интегралы легко вычислить (вычислить!). Для этого достаточно вычислить гауссов интеграл

$$\frac{i}{\pi^{d/2}} \int d^d q e^{i(aq^2 - 2bq)} = -\frac{1}{(ia)^{d/2}} e^{-ib^2/a} \ . \qquad (32)$$

Проблема сходимости фейнмановских интегралов

- С помощью введения фейнмановских параметров интеграл $I(p)$ приведен к виду

$$\frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{(q^2-p^2(x^2-x)-m^2)^2}\,. \qquad (33)$$

- Этот интеграл расходится на верхнем пределе, или, как говорят, *ультрафиолетово*:
  - Действительно, мера интегрирования $d^4q \sim q^3dq$, тогда как знаменатель интегранта при $q\to\infty$ ведет себя как q^4 $\Rrightarrow$
  - При больших импульсах интеграл ведет себя как

$$\int^{\Lambda\to\infty}\frac{dq}{q} = \ln\Lambda \stackrel{\Lambda\to\infty}{\longrightarrow} \infty\,, \qquad (34)$$

т.е. логарифмически расходится.

- Природу этой расходимости легко проследить, вернувшись в координатное пространство.

➢ В координатном пространстве вычисляемая функция Грина имеет вид

$$\int d^4x d^4y (G^c(x-y))^2 \times F(x,y,\ldots) \tag{35}$$

где $F(x,y,\ldots)$ --- множитель, соответствующий произведению внешних пропагаторов.

➢ Видим, что в подынтегральном выражении стоит квадрат причинной функции Грина.

➢ Однако, такая величина неопределена: $G^c(x)$ -- обобщенная функция.

➢ Для обобщенных функций хорошо определены их свертки с обычными функциями. Здесь же мы получили свертку обобщенной функции с самой собой.

➢ Функция Грина имеет сингулярности на световом конусе $\lambda = x^2$

$$G^c(x) \overset{\lambda\to 0}{=} \frac{1}{4\pi^2 i}\frac{P}{\lambda} + \frac{1}{4\pi}\delta(\lambda) - \frac{m^2}{16\pi}\theta(\lambda) + \frac{im^2}{8\pi^2}\ln\frac{m|\lambda|}{2} + \mathscr{O}(\sqrt{|\lambda|}\ln|\lambda|) \quad \Rightarrow \tag{36}$$

➢ Это означает, что в подынтегральном выражении вблизи светового конуса мы имеем члены вида $\delta(\lambda)^2$ или $\delta(\lambda)/\lambda$, которые, конечно, неинтегрируемы. ⇛

➢ Видим, что интеграл (35) расходится при $|x-y| \to 0$, т.е. на малых (минковских) расстояниях -- световом конусе.

➢ В импульсном же пространстве малые расстояния соответствуют большим импульсам, с чем мы и столкнулись при вычислении $I(p)$.

✍ Сингулярности функции Грина имеют глубокую физическую причину:

✍ Они связаны с понятиями локальности взаимодействия и элементарной (или точечной) частицы.

✍ Действительно, функция Грина является не чем иным, как полем, порождаемым точечной частицей, рожденной на нулевой интервал времени (δ-образный источник).

✍ Хорошо известно, что в классической нерелятивистской механике материальная точка является лишь идеализацией реальных частиц. Но не так обстоит дело в релятивистской квантовой теории.

Поскольку в *полной* релятивистской квантовой теории поля мы хотим описывать элементарные частицы, мы вынуждены вводить точечные объекты, т.е. по сути δ-функции. $\Rrightarrow$

Наличие сингулярностей у пропагатора является неотъемлемой частью квантовой теории поля и от нее нельзя избавиться, сказав, что наши объекты неточечные и мы не должны рассматривать расстояния, меньше некоторого расстояния.

Подчеркнем, что сказанное относится лишь к *полной* теории.

Если же мы рассматриваем, *эффективную* теорию, т.е. теорию, описывающую явления только при каких-то конечных энергиях (или не на очень малых расстояниях), то такой подход вполне законен: в интегралах по импульсам нужно интегрировать не до бесконечности, а до тех импульсов, при которых наша теория еще верна.

В полной же теории мы не можем избавиться от точечных частиц.

- Однако у нас и нет средств определить величины, такие как масса, заряд и значение поля, характеризующие одну точечную частицу, не участвующую ни в каких взаимодействиях:
- Такая частица всегда взаимодействует не только с полем прибора, но и с полем виртуальных частиц или, другими словами, с флуктуациями вакуума.
- А по сути ровно эти величины входят во все наши выражения (по крайней мере в полученные в рамках теории возмущений).
- Таким образом, идеальными (т.е. ненаблюдаемыми) объектами в квантовой теории поля являются не точечные частицы, а величины, приписываемые им без учета взаимодействия.
- Этим фактом можно воспользоваться, чтобы изгнать из физических (наблюдаемых) величин обнаруженные сингулярности путем переопределения или, как говорят, *перенормировки* ненаблюдаемых величин.
- Для того чтобы это сделать, необходимо научиться работать с сингулярными интегралами путем их доопределения или регуляризации.

Регуляризация обрезанием

➢ Существует множество способов регуляризации.

➢ Простой и естественный способ -- регуляризация обрезанием:

➢ Пусть $f(q) \overset{q\to\infty}{\sim} q^n \Rrightarrow$

$$\int^{\infty} d^4 q f(q) \to \int^{\Lambda} dq q^3 f(q) \overset{\Lambda\to\infty}{\sim}$$

$$\begin{cases} \Lambda^{n+4}\cdot \# + \ldots, & n > -4 \text{ -- расходится степенным образом} \\ \ln\Lambda\cdot \# + \ldots, & n = -4 \text{ -- расходится логарифмически} \\ \# + \mathcal{O}(\Lambda^{-|n+4|}), & n < -4 \text{ -- сходится} \end{cases} \quad (37)$$

Очень удобно делать оценки типа (37)

Не очень удобно проводить реальные вычисления: как проводить вычисления, например, в формулах (27), (29)? $\Rrightarrow$

Может нарушить лоренц-инвариантность, о восстановлении которой надо позаботиться в конце вычислений.

- В действительности, любая регуляризация нарушает какую-либо симметрию: связано с тем, что всегда приходится вводить дополнительный параметр с размерностью массы, т.е. дополнительный энергетический масштаб.
- По окончании вычислений (снятие регуляризации) необходимо восстановить симметрии.
- Если это удается сделать, то всё в порядке.
- Если же нет, то возникает *квантовая аномалия*. Соответствующая симметрия называется *аномальной*: соответствующий классический заряд сохраняется, а квантовый -- нет.
- Распад $\pi^0 \to 2\gamma$ -- основная мода распада π^0 -- обусловлен квантовой аномалией (почему?)
- Имеет смысл выбирать регуляризацию, сохраняющую как можно больше симметрий, в первую очередь, ЛИ и калибровочные симметрии.

Размерная регуляризация

- При вычислении $I(p)$, мы видели, что подынтегральное выражение при больших импульсах ведет себя как
$$\frac{q^3 dq}{q^4} = \frac{dq}{q}\,, \tag{38}$$
- Интеграл логарифмически расходится на бесконечности.
- Очевидно, что если бы в левой части уравнения (38) в числителе q было бы в меньшей степени, чем 3, то интеграл перестал бы расходиться.
- Но степень q в числителе в левой части (38) определяется числом измерений: так, если число измерений d, то уравнение (38) принимает следующий вид
$$\frac{q^{d-1} dq}{q^4} = \frac{dq}{q^{5-d}} \quad \Rightarrow \tag{39}$$
- При $d < 4$ интеграл сходится. В этом заключается основная идея метода размерной регуляризации: все вычисления производятся в пространстве-времени размерности d, снятие регуляризации осуществляется как предел $d \to 4$.

✍ Однако, необходимо быть последовательным и регуляризовать не отдельно взятый интеграл, а всю теорию целиком, т.е. необходимо стартовать с действия.

➢ В d измерениях действие для теории φ^4 имеет вид

$$S_d = \int d^d x \left(\frac{(\partial\varphi)^2}{2} - \frac{m^2\varphi^2}{2} - \frac{\lambda\varphi^4}{4!} \right) . \tag{40}$$

➢ Действие в любом числе измерений безразмерно $\Rrightarrow$

➢ Легко вычислить размерности полей и параметров (в единицах массы):

$$[\varphi] = \frac{d-2}{2} , \quad [m] = 1 , \quad [\lambda] = 4 - d . \tag{41}$$

➢ Видим, что в 4 измерениях константа связи λ безразмерна, и единственный размерный параметр --- масса.

➢ Однако, в любом другом числе измерений λ имеет определенную ненулевую размерность. $\Rrightarrow$

✍ Переход от $d = 4$ к $d \neq 4$ имеет качественный скачок: мы вводим в теорию дополнительный массовый параметр и тем самым дополнительный характерный масштаб импульсов и энергий.

➢ Удобно этот новый массовый масштаб выделить явным образом, оставив константу связи безразмерной. $\Rrightarrow$ Запишем действие (40) в виде

$$S_d = \int d^d x \left(\frac{(\partial\varphi)^2}{2} - \frac{m^2\varphi^2}{2} - \frac{\mu^{2\varepsilon}\lambda\varphi^4}{4!} \right) , \qquad (42)$$

где

$$[\mu] = 1 \quad [\lambda] = 0 \, , \quad 2\varepsilon \equiv 4 - d \, . \qquad (43)$$

➢ В d измерениях изменяются также размерности функций Грина.

➢ Размерность n-точечной функции Грина (в рассматриваемой теории) в координатном представлении

$$[G_n(x)] = n\frac{d-2}{2} = n(1-\varepsilon) \ , \qquad (44)$$

➢ В импульсном -- для неампутированной и ампутированной функций Грина

$$[G_n(p)] = \frac{d(2-n)-2n}{2} = 4 - 3n + \varepsilon(n-2) \ , \qquad (45)$$

$$[G_n^{\text{амп}}(p)] = \frac{d(2-n)+2n}{2} = 4 - n + \varepsilon(n-2) \ . \qquad (46)$$

Вычисление интегралов в размерной регуляризации

➢ В произвольном числе измерений имеем для $I(p)$

$$I(p) = \frac{\lambda^2 \mu^{4\varepsilon}}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 - p^2(x^2 - x) - m^2)^2} \, . \qquad (47)$$

✍ Заметим, что этот интеграл берется по минковским импульсам, $\Rrightarrow$

☞ мы не можем непосредственно проинтегрировать по углам;

☞ интеграл имеет полюса на действительной оси q_0.

➢ От обеих этих трудностей можно избавиться, повернув контур интегрирования по q_0 в комплексную область или, как, говорят, сделав *виков поворот*.

➢ Для того чтобы узнать, как следует поворачивать контур, необходимо определить, как обходятся полюса в подынтегральном выражении: у квадрата массы есть отрицательная мнимая добавка: $m^2 = m^2 - i\varepsilon$ $\Rrightarrow$

$$q_0 = \pm\sqrt{\mathbf{q}^2 + p^2(x^2 - x) + m^2} \mp i\varepsilon \quad \Rrightarrow \qquad (48)$$

полюса обходятся, как показано на Рис. 7. ⇛

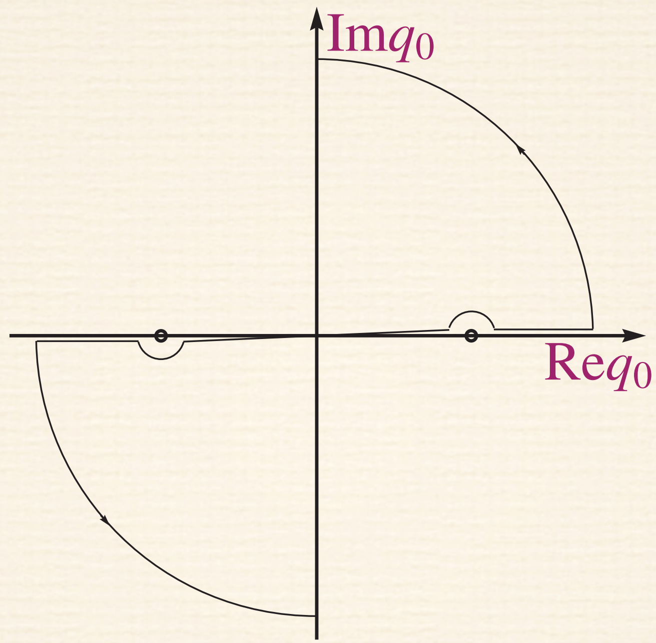


Рис. 7: Поворот Вика

- Мы можем повернуть контур интегрирования против часовой стрелки на 90^0 (см. Рис. 7):
- Интегралы по бесконечно удаленным четвертям окружности дадут ноль

(здесь очень важно, что регуляризованный интеграл сходится) $\Rrightarrow$

➢ Интеграл по действительной оси q_0 будет равен интегралу по мнимой оси:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq_0 F(q_0) = \int_{-i\infty}^{i\infty} dq_0 F(q_0) \overset{q_0 \to iq_0}{=} i \int_{-\infty}^{\infty} dq_0 F(iq_0) \qquad (49)$$

✍ Заметим, что после замены переменных в последнем равенстве цепочки (49) минковский квадрат импульса $q^2 = q_0^2 - \mathbf{q}^2$ переходит в евклидов квадрат: $q_{\mathrm{M}}^2 \to -q_{\mathrm{E}}^2 = -(q_0^2 + \mathbf{q}^2)$. $\Rrightarrow$

➢ После викова поворота интеграл $I(p)$ становится интегралом по евклидову импульсу. $\Rrightarrow$

➢ Мы можем ввести сферические d-мерные координаты, чтобы проинтегрировать его

$$
\begin{aligned}
I(p) &= i\frac{\lambda^2\mu^{4\varepsilon}}{2}\int_0^1 dx\int\frac{d^dq_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^d}\frac{1}{(-q_{\mathrm{E}}^2-p^2(x^2-x)-m^2)^2}=\\
&= i\frac{\lambda^2\mu^{4\varepsilon}}{2}\int_0^1 dx\int d\Omega_d\int_0^\infty\frac{q^{d-1}dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{(q^2+p^2(x^2-x)+m^2)^2}=\\
&= i\frac{\lambda^2\mu^{4\varepsilon}}{2}\frac{1}{(2\pi)^d}\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\int_0^1 dx\int_0^\infty\frac{q^{d-1}dq}{(q^2+p^2(x^2-x)+m^2)^2}\,. \qquad (50)
\end{aligned}
$$

✍ Здесь мы использовали формулу интегрирования по полному телесному углу в d-мерном пространстве

$$\int d\Omega_d=\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\,. \qquad (51)$$

✍ Заметим, что теперь мы можем аналитически продолжать выражение (50) по d на нецелые и даже комплексные значения. А также брать непрерывный предел $d\to 4$.

➢ Интеграл по q: воспользуемся следующим интегральным представлением β-функции Эйлера:

$$B(n,m) = \int\limits_0^\infty \frac{t^{n-1}}{(1+t)^{n+m}} dt \ . \tag{52}$$

✍ Напомним, что бета-функция определяется через Γ-функцию следующим образом

$$B(n,m) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} \ . \tag{53}$$

➢ Имеем тогда для интеграла вида (50):

$$\int\limits_0^\infty \frac{q^{n-1}}{(q^2+a)^L} dq = \frac{a^{n/2}}{a^L} \int\limits_0^\infty \frac{(q/\sqrt{a})^{n-1} d(q/\sqrt{a})}{((q/\sqrt{a})^2+1)^L} \overset{q=z\sqrt{a}}{=}$$

$$a^{n/2-L} \int\limits_0^\infty \frac{z^{n-1} dz}{(z^2+1)^L} \overset{t=z^2}{=} \frac{a^{n/2-L}}{2} \int\limits_0^\infty \frac{t^{n/2-1} dt}{(t+1)^L} \overset{(52)}{=}$$

$$= \frac{a^{n/2-L}}{2} B\left(\frac{n}{2}, L - \frac{n}{2}\right) = \frac{a^{n/2-L}}{2} \frac{\Gamma(n/2)\Gamma(L-n/2)}{\Gamma(L)} \ \Rrightarrow \tag{54}$$

➢ Получаем

$$I(p) = \frac{i\lambda^2\mu^{4\varepsilon}}{2^d\pi^{d/2}\Gamma(d/2)}\frac{\Gamma(d/2)\Gamma(2-d/2)}{2\Gamma(2)}\int_0^1 dx(m^2+p^2(x^2-x))^{d/2-2} =$$

$$= i\frac{\lambda^2\mu^{4\varepsilon}}{32}\frac{2^{2\varepsilon}}{\pi^{2-\varepsilon}}\Gamma(\varepsilon)\int_0^1 dx(m^2+p^2(x^2-x))^{-\varepsilon} =$$

$$= i\mu^{2\varepsilon}\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\Gamma(\varepsilon)\int_0^1 dx\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2+p^2(x^2-x)}\right)^{\varepsilon}, \qquad (55)$$

✍ В последнем равенстве мы явно выделили множитель $\mu^{2\varepsilon}$, обеспечивающий правильную размерность интеграла в d измерениях (см. (46)).

➢ Видим, что получившееся выражение конечно при конечных ε.

➢ При $\varepsilon \to 0$, Γ-функция имеет простой полюс:

✍ А именно, Γ-функция имеет простые полюса при неположительных целых значениях аргумента:

$$\Gamma(-n+\varepsilon) = \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \psi(n+1) + \mathscr{O}(\varepsilon)\right) \ , \quad n = 0, 1, \ldots \ , \tag{56}$$

где дигаммафункция

$$\psi(x) = \frac{d\ln\Gamma(x)}{dx} \ ; \quad \psi(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \gamma \, , \tag{57}$$

и $\gamma = 0.577216\ldots$ --- постоянная Эйлера,

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \ . \tag{58}$$

➢ Используя (56), разложим (55) в ряд Лорана вблизи $\varepsilon = 0$ (сохраняя при этом правильную размерность выражения). Имеем

$$I(p) = i\mu^{2\varepsilon}\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \mathscr{O}(\varepsilon)\right) \times \int\limits_0^1 dx \left(1 - \varepsilon \ln \frac{m^2 + p^2(x^2 - x)}{4\pi\mu^2} + \mathscr{O}(\varepsilon^2)\right) =$$

$$= i\mu^{2\varepsilon}\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \int\limits_0^1 dx \ln \frac{m^2 + p^2(x^2 - x)}{\mu^2} + \mathscr{O}(\varepsilon)\right) . \qquad (59)$$

- Расходящаяся часть интеграла не зависит от импульса -- следует из размерных соображений (как расходится интеграл?)
- Конечная часть зависит от произвольного параметра μ -- неудивительно, т.к. $\infty + 5 = \infty + 6$.
- Оставшийся интеграл в (59) легко вычислить (вычислить!)

➢ Рассмотрим теперь двухточечную функцию Грина. Такая ампутированная ОЧН функция определяется как

$$-i\Gamma_2(p) = -iG_2^{\text{очн}} \times \left(\frac{p^2 - m^2}{i}\right)^2 , \quad \Rrightarrow \tag{60}$$

➢ В нулевом порядке теории возмущений, т.е. когда G_2 является просто свободным пропагатором,

$$-i\Gamma_2^{(0)}(p) = -i(p^2 - m^2) \tag{61}$$

--- является обратным пропагатором.

➢ Обычно, вместо $\Gamma_2(p)$ вводят в ненулевом порядке теории возмущений так называемую *собственную энергию*, определенную как

$$-i\Gamma_2(p) = -i\Gamma_2^{(0)}(p) - i\Sigma(p^2) \ . \tag{62}$$

➢ В первом порядке теории возмущений имеется одна диаграмма, называемая «пузырем», дающая вклад в Σ

$$\Sigma(p) = i \bigcirc = i\frac{\lambda\mu^{2\varepsilon}}{2}\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{q^2-m^2} \tag{63}$$

➢ Интеграл в правой части (63) квадратично расходится при $d=4$.

➢ Тем не менее, в размерной регуляризации он имеет только простой полюс при $\varepsilon \to 0$.

➢ Окончательный ответ имеет вид

$$\Sigma(p) = -\frac{\lambda m^2}{32\pi^2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi + 1 + \ln\frac{\mu^2}{m^2}\right) \tag{64}$$

✍ То, что этот интеграл не зависит от внешнего импульса, является следствием однопетлевого приближения в теории φ^4.

✍ В двухпетлевом приближении это уже будет не так.

✍ Если бы мы рассматривали лагранжиан в нормально упорядоченном виде, то такой диаграммы вообще бы не было. И первый нетривиальный вклад в Σ был бы двухпетлевой.

✍ Заметим, что в выражения (64), (59) входит одна и та же комбинация

$$N_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi \ . \qquad (65)$$

Можно показать, что такая комбинация будет всегда возникать в размерной регуляризации, поэтому для нее есть специальное обозначение N_ε.

➢ В общем случае после введения фейнмановских параметров в размерной регуляризации получается следующий интеграл

$$J_d(D,L) = \int \frac{d^d q_\mathrm{M}}{(q^2-D)^L} = i(-1)^L \int \frac{d^d q_\mathrm{E}}{(q^2+D)^L} = i(-1)^L \pi^{d/2} \frac{\Gamma(L-d/2)}{\Gamma(L)} D^{d/2-L} \ . \qquad (66)$$

➢ Из этого интеграла легко получить другие интегралы, например,

$$J_d^{\mu\nu}(D,L) = \int \frac{d^d q_\mathrm{M} q^\mu q^\nu}{(q^2-D)^L} = \frac{g^{\mu\nu}}{d} \int \frac{d^d q_\mathrm{M} q^2}{(q^2-D)^L} = \frac{g^{\mu\nu}}{d+2-2L} D J_d(D,L) \ . \qquad (67)$$

Размерная регуляризация: спинорные поля

- В действительности приведенное выше определение размерной регуляризации не вполне корректно.
- Более последовательное определение -- это рассматривать теорию в бесконечномерном векторном пространстве, а d рассматривать как формальный параметр.
- В частности, следствием корректного определения является (сравни с (66))

$$\int d^d q \frac{1}{(q^2)^L} = 0 \text{ при } \forall L\,. \tag{68}$$

- Поскольку пространство бесконечномерно, то и γ-матрицы бесконечномерны (минимальная размерность матриц Дирака в пространстве--времени размерности 2ω равна 2^ω).

➢ Для того чтобы описать такие матрицы, необходимо потребовать выполнение следующих двух свойств

$$\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}\mathbf{1} \; , \tag{69}$$

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma_\mu \; . \tag{70}$$

➢ Кроме того, необходимо

☞ научиться вычислять свертки;

☞ научиться вычислять следы;

☞ определить γ_5.

➢ Свертки вычисляются с помощью соотношений антикоммутации (69). Имеем

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = \frac{1}{2}\{\gamma_\mu \gamma^\mu\} = g^\mu_\mu \mathbf{1} = d \, , \tag{71}$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\mu = 2g_{\mu\nu}\gamma^\mu - \gamma_\mu \gamma^\mu \gamma_\nu = (2-d)\gamma_\nu \, , \tag{72}$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma^\mu = 4g_{\nu\rho} + (d-4)\gamma_\nu \gamma_\rho \, , \tag{73}$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\lambda \gamma^\mu = -2\gamma_\lambda \gamma_\rho \gamma_\nu + (4-d)\gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\lambda \, . \tag{74}$$

✍ Важно удерживать слагаемые $\sim (d-4)$ (исчезающие при $d = 4$), т.к. при умножении на расходящийся интеграл они дадут вклад в конечную часть.

➢ Для того чтобы вычислять следы, необходимо определить след в бесконечномерном пространстве.

➢ Определим след, как операцию, удовлетворяющую следующим свойствам (α, β ---числа, A, B --- матрицы):

$$Tr(\alpha A + \beta B) = \alpha Tr A + \beta Tr B \; , \tag{75}$$

$$Tr(AB) = Tr(BA) \; . \tag{76}$$

➢ Кроме этого, необходимо еще определить след от единичной матрицы. Это можно сделать любым способом, лишь бы при $d \to 4$, он был бы равен 4. Обычно его определяют как

$$Tr\mathbf{1} = 4 \; . \tag{77}$$

➢ Имеем тогда, используя антикоммутационные соотношения (69),

$$Tr\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} Tr\mathbf{1} = 4 g^{\mu\nu} \; , \tag{78}$$

$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho) = (g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda} + g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}) Tr\mathbf{1} \tag{79}$$

$$Tr\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\ldots\gamma^{\mu_{2n+1}} = 0 \; . \tag{80}$$

➢ В четырех измерениях γ^5 определяется как

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{24}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho \quad (\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} = +1)\ . \tag{81}$$

➢ Однако такое определение не годится в d-измерениях, так как оно,

☞ явно апеллирует к четырем измерениям,

☞ приводит к следующему соотношению

$$\{\gamma^\mu\gamma_5\} = 0\ , \tag{82}$$

которое является противоречивым в d измерениях.

➢ Чтобы это увидеть, рассмотрим

$$dTr\gamma_5 = Tr\gamma_5\gamma_\mu\gamma^\mu = Tr\gamma^\mu\gamma_5\gamma_\mu = -Tr\gamma_5\gamma^\mu\gamma_\mu = -dTr\gamma_5 \quad \Rrightarrow \tag{83}$$

$$Tr\gamma_5 = 0 \tag{84}$$

в любом числе измерений, в том числе и при $d = 0$ в силу аналитичности.

➢ Аналогично

$$(d-2) Tr\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu = 0 \Rightarrow Tr\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu = 0 \text{ при } \forall\, d\,, \tag{85}$$

$$(d-4) Tr\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho = 0 \Rightarrow Tr\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho = 0 \text{ при } \forall\, d\,. \tag{86}$$

☞ Однако, мы знаем, что при $d = 4$

$$Tr\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho = -4i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \quad \Rrightarrow \tag{87}$$

мы пришли к противоречию.

➢ Существует два пути избавиться от него:

☞ отказаться от $\{\gamma_5\gamma_\mu\} = 0$;

☞ отказаться от размерной регуляризации для аксиальных теорий.

☞ Второй путь, хотя и возможен, плох, так как он непоследователен.

➢ Тем, кто идет по первому пути, можно воспользоваться следующим определением γ_5,

$$\gamma_5 = -\frac{i}{4!}\varepsilon^d_{\mu\nu\lambda\rho}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho \ , \tag{88}$$

где $\varepsilon^d_{\mu\nu\lambda\rho} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ при $d = 4$, других же условий нет, кроме

$$\gamma_5^2 = 1 \ , \tag{89}$$

$$Tr\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu = 0 \ . \tag{90}$$

➢ Из этих требований вытекают два следующих свойства (показать!)

$$Tr\gamma_5 \overbrace{\gamma^\mu\gamma^\nu \ldots \gamma^\rho}^{\text{нечетное}} = 0 \ , \tag{91}$$

$$\gamma_\mu\gamma_5\gamma^\mu = -d\gamma_5 \ . \tag{92}$$

✍ Определение (88) не вполне ясно, так как не ясен смысл символа $\varepsilon^d_{\mu\nu\lambda\rho}$, однако оно вполне пригодно для конкретных вычислений.

Регуляризация Паули-Вилларса

➢ Метод Паули-Вилларса основан на регуляризации свободного пропагатора.

➢ Как мы выяснили, ультрафиолетовые расходимости возникают в результате сингулярного характера пропагатора вблизи светового конуса ($\lambda = x^2$)

$$G^{c}(x) \overset{\lambda\to 0}{=} \frac{1}{4\pi^2 i}\frac{P}{\lambda} + \frac{1}{4\pi}\delta(\lambda) - \frac{m^2}{16\pi}\theta(\lambda) + \frac{im^2}{8\pi^2}\ln\frac{m|\lambda|}{2} + \mathcal{O}(\sqrt{|\lambda|}\ln|\lambda|)\,. \quad (93)$$

➢ Наиболее сингулярные члены при этом вообще не зависят от массы.

➢ Менее сингулярные пропорциональны квадрату массы. ⇛

➢ Этим фактом можно воспользоваться и заменить пропагатор линейной комбинацией пропагаторов, зависящих от разных масс:

$$G_m^{\mathrm{reg}} = G_m + C_1 G_{M_1} + \ldots + C_k G_{M_k}\,, \quad (94)$$

➢ При этом, если выбрать коэффициенты C_i таким образом, что

$$1+\sum_{i=1}^{k} C_i = 0\ ,\quad m^2+\sum_{i=1}^{k} C_i M_i^2 = 0\ , \tag{95}$$

то регуляризованный пропагатор G^{reg} и его производная не будет содержать особенностей на световом конусе.

➢ Если же мы хотим, чтобы и его n производных не содержали сингулярностей, то мы должны наложить $n+1$ условие вида

$$m^{2j}+\sum_{i=1}^{k} C_i M_i^{2j} = 0 \quad j = 0,1,\ldots n\ . \tag{96}$$

➢ Очевидно, чтобы система (96) из $n+1$ уравнений была разрешима относительно C_i, необходимо ввести $k=n+1$ вспомогательных масс M_i.

➢ Регуляризация снимается путем устремления $M_i \to \infty$.

➢ При этом C_i должны оставаться конечными, а $G_{M_i} \to 0$ при $|x| > 1/M_i$.

- Таким образом, регуляризованный пропагатор совпадает с нерегуляризованным при $|x| > 1/M_i$.

- Посмотрим, что происходит в импульсном пространстве:

$$\frac{1}{q^2-m^2} \to \frac{1}{q^2-m^2} - \frac{1}{q^2-M^2} = \frac{m^2-M^2}{(q^2-m^2)(q^2-M^2)} \overset{q^2\to\infty}{\sim} \frac{M^2}{q^4}\,, \quad \Rrightarrow \tag{97}$$

- Поведение пропагатора в ультрафиолетовой области становится $1/q^4$, а не $1/q^2$ $\Rrightarrow$

- Сходимость (ультрафиолетовая) интегралов улучшается

- Но возникает паули-вилларосовская масса M в числителе

- Видим, что в рассмотреных нами регуляризациях возникают новые размерные параметры (Λ, μ, M), что нарушает симметрии, чуствительные к появлению таких параметров, такие как дилатационная и аксиальная.

- Более подробно *К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер, Теория поля, 1988*