М.В. Либанов

КТП X. Вычисление вероятностей процессов

Содержание

Общее рассмотрение 2
Ширина распада 9
Сечение 10
Двухчастичное конечное состояние 14
Двухчастичный распад 17
Процесс $2 \to 2$ 18
Учет поляризации 22
Распад массивного векторного бозона 33
Обсуждение 41

Вычисление вероятностей процессов

Общее рассмотрение

- Первый член $S_0 = 1$ -- неинтересен ➠ определим *T-матрицу*

$$S = 1 + iT \tag{1}$$

- Запишем матричный элемент T-матрицы, введя *$\mathscr{M}$-матрицу* и выделив δ-функцию, выражающую закон сохранения импульса:

$$\langle f|T|i\rangle = T_{fi} = (2\pi)^4\delta^4(p_f - k_i)\mathscr{M}_{fi}, \tag{2}$$

где k_i и p_f -- суммарные импульсы входящих и выходящих частиц соответственно.

- Отметим, что S-матрица может содержать *несвязные* части, на языке диаграмм Фейнмана такие части соответствуют несвязным диаграммам. Однако, такие части соответствуют просто произведению двух независимых процессов, например, рассеянию $2 \to 2$ на ускорителе в ЦЕРНе и рассеянию $2 \to 2$ на Луне. Ясно, что такие процессы нас не интересуют. Поэтому в дальнейшем мы будем интересоваться только связными частями. Для таких частей можно показать, что $\mathscr{M}$-матрица не содержит больше δ-функций. Этим фактом объясняется удобство введения $\mathscr{M}$-матрицы.

- По определению, $|T|^2$ дает ненормированную вероятность перехода из начального состояния i в конечное f (мы всюду подразумеваем, что в начальном состоянии содержится i частиц, а в конечном --- f).

$$w_{fi} = |T_{fi}|^2 = (2\pi)^4\delta^4(p_f - k_i)(2\pi)^4\delta^4(0)|\mathscr{M}_{fi}|^2 \,. \qquad (3)$$

- $\delta(0)$ является артефактом того, что мы работаем в бесконечном 4-объеме.
- Для того чтобы иметь дело с конечными величинами, введем конечный объем V и конечный промежуток времени T.
- Тогда в пределе $V, T \to \infty$ имеем $(2\pi)^4\delta^4(0) = VT$, что просто следует из определения $\delta(p)$.

- Чтобы получить вероятность перехода в группу состояний в интервале импульсов $d\mathbf{p}$ во всем пространстве, мы должны умножить w_{fi} на элемент фазового объема

$$d\bar{\Phi} = \prod_{l=1}^{f} \frac{d\mathbf{p}_l}{(2\pi)^3} V \, . \qquad (4)$$

- Для того чтобы получить нормированную вероятность, необходимо вспомнить, как мы нормировали свои состояния. С этой целью вычислим нормировку одночастичного состояния:

$$\langle \mathbf{k} | \, \mathbf{k}' \rangle = \langle 0 | a^-_{\mathbf{k}} a^+_{\mathbf{k}'} | 0 \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \overset{\mathbf{k} \to \mathbf{k}'}{\to} \frac{V}{(2\pi)^3} \, . \qquad (5)$$

Аналогично, легко убедиться, что нормировка n-частичного состояния есть просто произведение нормировок одночастичных состояний.

- Однако при выводе правил Фейнмана для матричных элементов мы опустили некоторые множители. Здесь самое время о них вспомнить.

- На самом деле опустив эти множители, мы изменили нормировку. Новая нормировка состояния стала

$$\langle \mathbf{k} | \mathbf{k} \rangle = 2EV \ , \qquad (6)$$

где $E \equiv k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ -- энергия частицы.

- Нормировка (5) не является релятивистски-инвариантной, в то время, как (6) является.

- Поэтому было бы более последовательно определять, скажем, одночастичное состояние не как $a^+_{\mathbf{k}}|0\rangle$, а как

$$|\mathbf{k}\rangle = \sqrt{2k_0 \cdot (2\pi)^3} a^+_{\mathbf{k}} |0\rangle \ . \qquad (7)$$

Такое определение привело бы как раз к сокращению факторов, которые мы отбросили ранее.

- В дальнейшем мы будем подразумевать, что состояния определены именно таким образом.

- Таким образом, для получения нормированной вероятности, мы должны вероятность w_{fi} разделить на нормировочный фактор

$$\mathcal{N} = \prod_{j=1}^{i} 2E_j V \prod_{l=1}^{f} 2E_l V \ . \qquad (8)$$

- Тогда нормированная вероятность перехода в группу состояний в единицу времени имеет вид,

$$dw_{fi} = \frac{w_{fi}}{T}\frac{d\bar{\Phi}}{\mathcal{N}} = (2\pi)^4\delta^4(p_f - k_i)V|\mathscr{M}|^2 \prod_{l=1}^{i}\frac{1}{2E_l V}\prod_{j=1}^{f}\frac{1}{2E_j V}d\bar{\Phi} \qquad (9)$$

или

$$dw_{fi} = \frac{V|\mathscr{M}|^2}{\prod_{l=1}^{i} 2E_l V} d\Phi \ , \qquad (10)$$

где

$$d\Phi = (2\pi)^4\delta^4(p_f - k_i)\prod_{j=1}^{f}\frac{d\mathbf{p}_j}{2E_j(2\pi)^3} \qquad (11)$$

-- новое определение элемента фазового объема.

- Формула (10) является общей формулой для нахождения дифференциальной вероятности перехода (то есть в элемент фазового объема в единицу времени).
- Однако, при нахождении полной вероятности, т.е. при интегрировании по фазовому объему, надо проявлять осторожность.
- Дело в том, что если в конечном состоянии есть тождественные частицы, то при интегрировании мы будем учитывать некоторые физически одни и те же состояния несколько раз
- Действительно, пусть в конечном состоянии у нас есть две одинаковых частицы, но с разными импульсами p_1 и p_2. Тогда при интегрировании по всему фазовому пространству мы учтем это состояние дважды: как состояние с импульсами (p_1, p_2) и как состояние с импульсами (p_2, p_1).
- Чтобы не делать этого,
  - мы либо должны ограничить область интегрирования,
  - либо проинтегрировать по всему фазовому пространству и умножить

на

$$S = \prod_n \frac{1}{m_n!} \,, \tag{12}$$

где произведение берется по всем группам тождественных частиц, а m_n --- число частиц в n-ой группе.

- Таким образом, имеем

$$\int_{\mathrm{R}} d\Phi = S \int d\Phi \,. \tag{13}$$

Ширина Распада

- Рассмотрим процесс $1 \to f$ или распад.
- Имеем тогда для числа распадов в единицу времени

$$d\Gamma = \frac{|\mathscr{M}|^2}{2E} d\Phi\ . \tag{14}$$

- Γ называется *шириной* и связана с *временем жизни* частицы

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}\ . \tag{15}$$

- Число частиц изменяется по *закону радиактивного распада*

$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = N_0 \mathrm{e}^{-\Gamma t} \tag{16}$$

Сечение

- Процесс $2 \to f$ или рассеяние.
- На практике, однако, имеют дело не с числом столкновений, а с *сечением процесса*.
- Перейдем в систему отсчета, где 2-ая частица покоится (мишень), такая система называется *лабораторной*.
- В этой системе на нее налетает частица 1.
- Однако, в эксперименте обычно налетает не одна частица, а пучок частиц.
- По определению сечения σ, полное число столкновений частиц пучка с мишенью дается формулой

$$N_s = \sigma \upsilon_{\text{отн}} T n_1 \ , \tag{17}$$

  - n_1 --- плотность частиц в пучке (т.е. число частиц в единице объема),
  - $\upsilon_{\text{отн}}$ --- относительная скорость частиц, которая по определению определяется в системе покоя одной из частиц.

- С другой стороны, по определению вероятности перехода в единицу времени полное число столкновений

$$N_s = w_{2f} T N_1 = w_{2f} T V n_1 \ . \tag{18}$$

- Сравнивая эти две формулы, находим для дифференциального сечения

$$d\sigma = \frac{dw_{2f}}{j} \ , \tag{19}$$

где $j = \upsilon_{\text{отн}}/V$ --- плотность потока.

- Таким образом, имеем для дифференциального сечения в системе покоя второй частицы

$$d\sigma = \frac{1}{2E_1}\frac{1}{2m_2}\frac{|\mathscr{M}|^2}{\upsilon_{\text{отн}}} d\Phi \ . \tag{20}$$

- Запишем эту формулу так, чтобы она была пригодна в любой системе отсчета.

- Для этого выразим $\upsilon_{\text{отн}}$, которая по своему определению является инвариантом, через импульсы частиц.

- Замечаем, что в лабораторной системе

$$k_1k_2 = \frac{m_1}{\sqrt{1-\upsilon_{\text{отн}}^2}}m_2 \ . \qquad (21)$$

- Из (21) имеем

$$\upsilon_{\text{отн}} = \sqrt{1-\frac{m_1^2m_2^2}{(k_1k_2)^2}} \ . \qquad (22)$$

- Кроме того, сечение (как оно определено) тоже есть величина инвариантная.
- Единственный множитель в (20), который не инвариантен при преобразованиях Лоренца в таком виде, как он записан, это $1/(m_2E_1)$.
- Придадим ему инвариантный вид:

$$m_2E_1 = E_2E_1 - \mathbf{0}\cdot\mathbf{k}_1 = k_1k_2 \ . \qquad (23)$$

Собирая все вместе, получаем окончательно для сечения в любой системе отсчета

$$d\sigma = \frac{|\mathscr{M}|^2}{4\sqrt{(k_1k_2)^2 - m_1^2m_2^2}}\,d\Phi \equiv \frac{|\mathscr{M}|^2}{4I}\,d\Phi\,, \tag{24}$$

где

$$I = \sqrt{(k_1k_2)^2 - m_1^2m_2^2} \tag{25}$$

-- называется *фактором потока*.

Подчеркнем, что формула (24) дает один и тот же результат при вычислениях в разных системах отсчета --- дифференциальное сечение в лабораторной системе.

Двухчастичное конечное состояние

- Упростим фазовый объем для процесса $i \to 2$
- Пусть в конечном состоянии у нас всего две частицы с массами m_1 и m_2.
- Перейдем в систему центра масс этих двух частиц.
- Из закона сохранения импульса очевидно, что это и система центра масс начального состояния.
- Обозначим полную энергию начального состояния как E_{cm}, а четырехимпульс как $k = (E_{\mathrm{cm}}, 0, 0, 0)$.
- Фазовый объем

$$d\Phi_2 = \frac{1}{(2\pi)^2}\delta^4(k - p_1 - p_2)\frac{d^3p_1 d^3p_2}{4E_1E_2}\,. \tag{26}$$

- Проинтегрируем это выражение по $\mathbf{p}_2$ с помощью δ-функции и получим $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$, что и должно быть в системе центра инерции.

- Фазовый объем при этом становится равным

$$d\Phi_2 = \frac{1}{(2\pi)^2}\delta(E_{\rm cm}-E_1-E_2)\frac{d^3p_1}{4E_1(\mathbf{p}_1)E_2(\mathbf{p}_1)} = \frac{1}{(2\pi)^2}\delta(E_{\rm cm}-E_1-E_2)\frac{p_1^2dp_1d\Omega}{4E_1(p_1)E_2(p_1)}\,, \tag{27}$$

где в последнем равенстве мы перешли к сферическим координатам,

  - $p_1 \equiv |\mathbf{p}_1|$;
  - Ω --- телесный угол.

- Снимем теперь интеграл по p_1 с помощью оставшейся δ-функции. Получаем

$$d\Phi_2 = \frac{1}{16\pi^2}\frac{|\,\mathbf{p}_1|d\Omega}{E_1(p_1)+E_2(p_1)} = \frac{1}{16\pi^2}\frac{|\,\mathbf{p}_1|d\Omega}{E_{\rm cm}}\,, \tag{28}$$

где $|\,\mathbf{p}_1|$ определяется из условия

$$E_{\rm cm} = \sqrt{\mathbf{p}_1^2+m_1^2}+\sqrt{\mathbf{p}_1^2+m_2^2}\,. \tag{29}$$

- В случае равных масс

$$|\,\mathbf{p}_1| = \frac{\sqrt{E_{\rm cm}^2-4m^2}}{2}\,, \tag{30}$$

и фазовый объем принимает вид

$$d\Phi_2 = \frac{1}{32\pi^2}\frac{\sqrt{E_{\text{cm}}^2 - 4m^2}}{E_{\text{cm}}}d\Omega. \tag{31}$$

Двухчастичный распад

- Процесс $1 \to 2$: в начальном состоянии только одна частица с массой M.
- Мы имеем дело с двухчастичным распадом в системе покоя этой частицы ➠
- Формула (14) принимает вид

$$d\Gamma = \frac{|\mathscr{M}(\mathbf{p}_1)|^2 |\,\mathbf{p}_1|}{32\pi^2 M^2} d\Omega\,. \qquad (32)$$

- Очевидно, что в случае распада неполяризованной частицы матричный элемент не зависит от направления $\mathbf{p}_1$ ➠
- Мы можем проинтегрировать в формуле (32) по углам и получить полную ширину

$$\Gamma = \frac{|\mathscr{M}(|\,\mathbf{p}_1|)|^2 |\,\mathbf{p}_1|}{8\pi M^2}\,, \qquad (33)$$

- При этом под $|\mathscr{M}(|\,\mathbf{p}_1|)|^2$ понимается усредненный по всем возможным поляризациям квадрат матричного элемента (об усреднении см. ниже).

Процесс $2 \to 2$

- Процесс $2 \to 2$. В начальном состоянии 2 частицы с массами M_1 и M_2.
- Пусть четырехимпульсы входящих частиц k_1 и k_2.
- Удобно ввести так называемые *переменные Мандельстама*

$$
\begin{aligned}
s &= (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2 \stackrel{\text{cm}}{=} E_{\text{cm}}^2 , \\
t &= (k_1 - p_1)^2 = (k_2 - p_2)^2 , \\
u &= (k_1 - p_2)^2 = (p_1 - k_2)^2 .
\end{aligned} \tag{34}
$$

- Эти переменные определяются в любой системе координат для любых четырех импульсов, удовлетворяющих закону сохранения

$$k_1 + k_2 = p_1 + p_2 . \tag{35}$$

- Условие массовой поверхности в общем случае не накладывается.

- На массовой поверхности переменные (34) удовлетворяют условию

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2 \ . \tag{36}$$

- Матричный элемент при этом зависит только от этих переменных.
- Для двухчастичного сечения имеем

$$d\sigma = \frac{|\mathscr{M}|^2}{64\pi^2 I} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\rm cm}} d\Omega \ . \tag{37}$$

- В случае, когда все четыре массы равны, эта формула имеет вид

$$d\sigma = \frac{|\mathscr{M}|^2}{64\pi^2} \frac{1}{E_{\rm cm}^2} d\Omega \ . \tag{38}$$

- В случае произвольных масс, используя определение s, легко найти

$$I^2 \overset{(25)}{=} \frac{1}{4}[s - (M_1 + M_2)^2][s - (M_1 - M_2)^2] \tag{39}$$

и

$$|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = \frac{I}{\sqrt{s}} \ . \tag{40}$$

Далее, используем определение t. Имеем

$$t = m_1^2 + M_1^2 - 2p_1^0 k_1^0 + 2|\,\mathbf{p}_1||\,\mathbf{k}_1|\cos\theta\ . \qquad (41)$$

Но энергия и модули импульсов частиц целиком определяются полной энергией, т.е. переменной s, поэтому при фиксированной s

$$dt = 2|\,\mathbf{p}_1||\,\mathbf{k}_1|d\cos\theta\ . \qquad (42)$$

Тогда элемент телесного угла в (37) можно представить в виде

$$d\Omega = -d\varphi d\cos\theta = \frac{d\varphi d(-t)}{2|\,\mathbf{p}_1||\,\mathbf{k}_1|}\ , \qquad (43)$$

где φ --- азимутальный угол $\mathbf{p}_1$ по отношению к $\mathbf{k}_1$.

Подставляя формулы (43), (40) в (37), получаем[1]

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi}|\mathscr{M}|^2\frac{dt}{I^2}\frac{d\varphi}{2\pi}\ . \qquad (44)$$

[1] В этой формуле мы опустили знак "--", как несущественный. Этот знак включается в определение пределов интегрирования по t. Результат, конечно, должен быть положительным.

- Если $\mathscr{M}$ не зависит от φ, то по φ можно проинтегрировать, тогда сечение принимает вид

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi}|\mathscr{M}|^2\frac{dt}{I^2}\,. \tag{45}$$

Учет поляризации

- Обычно в эксперименте поляризации начальных частиц не фиксируются, а конечных не измеряются.
- Это означает, что по поляризациям начальных частиц мы должны усреднить, а по поляризациям конечных просуммировать.
- Таким образом в формуле (10) и во всех следующих из нее мы должны заменить

$$|\mathscr{M}|^2 \to \prod_{k=1}^{i} \frac{1}{s_k} \times |\bar{\mathscr{M}}|^2 \,, \tag{46}$$

  - произведение берется по всем начальным частицам,
  - s_k --- число поляризаций k-ой частицы,
  - черта над $\bar{\mathscr{M}}$ означает суммирование по поляризациям как начальных, так и конечных частиц.
- Что касается s_k, то для массивных частиц

$$s_k = 2S_k + 1 \,, \tag{47}$$

где S_k --- спин частицы.

- Для безмассовых частиц такой формулы нет.
  - Для безмассовых векторных частиц (например, фотон, глюон) и для гравитона $s_k = 2$.
  - Для безмассового кирального фермиона (для нейтрино) $s_k = 1$.
- Суммирование по поляризациям в $|\bar{\mathscr{M}}|^2$ осуществляется по следующим формулам:
  - для спиноров

$$\upsilon_\alpha^{\sigma,+}(\mathbf{k})\bar{\upsilon}_\beta^{\sigma,-}(\mathbf{k}) = (\hat{k} - m)_{\alpha\beta} , \tag{48}$$

$$\upsilon_\alpha^{\sigma,-}(\mathbf{k})\bar{\upsilon}_\beta^{\sigma,+}(\mathbf{k}) = (\hat{k} + m)_{\alpha\beta} , \tag{49}$$

  - для массивного векторного бозона

$$\sum_{\sigma=1}^{3} e_\mu^{*\sigma}(\mathbf{k}) e_\nu^{\sigma}(\mathbf{k}) = -\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}\right) , \tag{50}$$

  - для фотона

$$\sum_{\sigma=1}^{2} e_\mu^{*\sigma}(\mathbf{k}) e_\nu^{\sigma}(\mathbf{k}) = -g_{\mu\nu} , \tag{51}$$

- В случае если поляризация фиксирована (нет суммирования по поляризациям):
  - для фермионов имеет место формула (нет суммирования по l)

$$\upsilon_{\alpha}^{l,\mp}(\mathbf{k})\bar{\upsilon}_{\beta}^{l,\pm}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}[(\hat{k} \pm m)(1-\gamma_5\hat{s})]_{\alpha\beta} \ , \tag{52}$$

где

$$s^{\mu} = \begin{cases} s^0 = \mathbf{kn}m \\ \mathbf{s} = \mathbf{n} + \dfrac{(\mathbf{kn})\mathbf{k}}{m(m+E)} \end{cases} , \tag{53}$$

$\mathbf{n}$ --- единичный вектор в направлении поляризации частицы в системе отсчета, где она покоится. Кроме того, имеем $s^2 = -1$, $sk = 0$.

  - Для векторных частиц в случае фиксированной поляризации нужно подставить соответствующий вектор поляризации, например, в случае продольной поляризации массивного векторного бозона

$$e_{\mu}^{3} = \frac{1}{m}\left(|\mathbf{k}|, \mathbf{k}\frac{k_0}{|\mathbf{k}|}\right) \tag{54}$$

- Получим формулу (50).
- Напомним, что массивный векторный бозон имеет 3 поляризации: две из них поперечны к пространственному импульсу, и одна - продольна.
- Эти три поляризации и четырехимпульс должны образовывать базис в пространстве Минковского.
- Поэтому мы будем считать, что выбранные поляризации поперечны к четырехимпульсу и нормированы, то есть

$$k^{\mu} e^{\sigma}_{\mu} = 0\,, \tag{55}$$

$$e^{*\sigma}_{\mu} e^{\mu\delta} = -\delta^{\sigma\delta}\,. \tag{56}$$

- В результате суммирования по этим трем поляризациям мы должны получить симметричный тензор второго ранга, зависящий только от k_{μ}.
- Этот тензор, в силу (55), должен являться проектором на поперечные к четырехимпульсу состояния. Запишем этот тензор в виде

$$A(k^2) g_{\mu\nu} + B(k^2) k_{\mu} k_{\nu} \tag{57}$$

- Умножая этот тензор на k_μ и учитывая условие массовой поверхности $k^2 = m^2$, получаем

$$A + Bm^2 = 0 \Rightarrow B = -\frac{A}{m^2} \ . \tag{58}$$

- Возьмем теперь след от этого тензора. Используя условие нормировки (56), находим

$$e_\mu^{*\sigma} e^{\mu\sigma} = -3 = A(g_{\mu\mu} - \frac{k^2}{m^2}) = 3A \ , \tag{59}$$

откуда и получаем формулу (50).

- Получим теперь формулу (51) для фотонов.
  - Заметим сразу, что буквально метод, примененный для массивного векторного бозона, здесь не годится.
  - Кроме того, если мы используем явные выражения для векторов поляризации, то мы увидим, что формула (51) неверна!
  - Эту формулу надо понимать только как суммирование по поляризациям при вычислении квадрата матричных элементов. То есть знак равенства в ней надо трактовать как замену при вычислении матричных элементов.
- Пусть мы рассматриваем процесс с участием одного реального фотона (обобщение на случай нескольких фотонов тривиально).
- Тогда матричный элемент с поляризацией σ можно записать в виде

$$\mathscr{M}^{\sigma} = \mathscr{M}_{\mu} e^{\mu\sigma} . \tag{60}$$

Суммирование по σ имеет вид

$$\sum_{\sigma} |e_{\mu}^{\sigma}(k)\mathscr{M}^{\mu}(k)|^2 = \sum_{\sigma} e_{\mu}^{*\sigma}(k)e_{\nu}^{\sigma}(k)\mathscr{M}^{*\mu}(k)\mathscr{M}^{\nu}(k). \tag{61}$$

Наша цель -- показать, что в этой формуле можно заменить суммирование по σ на $-g_{\mu\nu}$.

Для этого перейдем в систему отсчета, в которой импульс фотона направлен по оси z:

$$k^{\mu} = (k, 0, 0, k)\ . \tag{62}$$

В этой системе векторы поляризации можно выбрать в виде

$$e_1^{\mu} = (0, 1, 0, 0) \quad e_2^{\mu} = (0, 0, 1, 0)\ . \tag{63}$$

Тогда формула (61) принимает вид

$$\sum_{\sigma} |e_{\mu}^{\sigma}(k)\mathscr{M}^{\mu}(k)|^2 = |\mathscr{M}^1(k)|^2 + |\mathscr{M}^2(k)|^2\ . \tag{64}$$

Покажем, что это же выражение дает сумма

$$-g_{\mu\nu}\mathscr{M}^{*\mu}(k)\mathscr{M}^{\nu}(k)\ . \tag{65}$$

- Для этого вспомним, что калибровочное поле взаимодействует только с сохраняющемся током j_μ ➠

$$k_\mu \mathscr{M}^\mu = 0 \; . \qquad (66)$$

- Это равенство носит название *тождества Уорда*.
- Доказывать не будем, но приведем наивные аргументы:
  - Очевидно, что на языке теорем Вика для определения S-матрицы, матричный элемент $\mathscr{M}_\mu$ получается, если при вычислении S-матрицы из одного из лагранжианов взаимодействия выкинуть поле A^μ в силу того, что оно спарено с оператором рождения (уничтожения) фотона из начального (конечного) состояния.
  - При этом вместо лагранжиана останется сохраняющейся ток $\partial_\mu j^\mu = 0$.
  - Переход в импульсное представление и приводит к (66).

- Подставляя в (66) импульс (62), находим, что

$$k\mathscr{M}_0 - k\mathscr{M}_3 = 0 \Rightarrow \mathscr{M}_0 = \mathscr{M}_3 \; . \tag{67}$$

- Следовательно,

$$\sum_\sigma |e^\sigma_\mu(k)\mathscr{M}^\mu(k)|^2 = |\mathscr{M}^1(k)|^2 + |\mathscr{M}^2(k)|^2 = \tag{68}$$

$$|\mathscr{M}^1(k)|^2 + |\mathscr{M}^2(k)|^2 + |\mathscr{M}^3(k)|^2 - |\mathscr{M}^0(k)|^2 = -g_{\mu\nu}\mathscr{M}^{*\mu}(k)\mathscr{M}^\nu(k) \; \blacksquare \tag{69}$$

- В действительности, сумму по поляризациям для фотонного поля можно вычислить и явно.
- Для этого заметим, что три вектора k_μ, e^1_μ и e^2_μ не образуют полного набора в четырехмерном пространстве.
- Поэтому необходимо ввести еще один вектор ζ_μ, дополняющий тройку до полного набора.
- При этом этот вектор должен быть ортогонален e^σ_μ:

$$\zeta e^\sigma = 0\,. \tag{70}$$

- С другой стороны, поскольку $k^2 = 0$, а вектор ζ не может быть параллельным k, и является ортогональным к поляризациям, то мы должны наложить условие

$$k\zeta \neq 0\,. \tag{71}$$

- Теперь тензор $e^{*\sigma}_\mu e^\sigma_\nu$ может зависеть не только от k, но и от ζ.

Делая инвариантное разложение этого тензора по векторам k_μ и ζ_μ и поступая так же, как и в случае массивного поля, находим

$$e_\mu^{*\sigma} e_\nu^\sigma = -g_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu} \ , \tag{72}$$

где

$$Q_{\mu\nu} = \frac{(k\zeta)(k_\mu \zeta_\nu + k_\nu \zeta_\mu) - \zeta^2 k_\mu k_\nu}{(k\zeta)^2} \ . \tag{73}$$

Заметим, что мы не фиксировали нормировку ζ. Можно положить $\zeta^2 = 0$, тогда $Q_{\mu\nu}$ заметно упрощается.

Легко убедиться, что в силу тождества Уорда

$$Q^{\mu\nu} \mathscr{M}_\mu^* \mathscr{M}_\nu = 0 \ , \tag{74}$$

Т.е. при вычислении квадрата матричного элемента про тензор $Q_{\mu\nu}$ можно просто забыть.

Ясно, что никакая физическая величина не должна зависеть от ζ, также как и от калибровочного параметра ξ в фотонном пропагаторе.

Распад массивного векторного бозона

- Пусть в модели имеется N_f спинорных полей ψ_i, где $i = 1, \ldots, N_f$ -- индекс «аромата».
- Будем считать (для простоты), что массы всех спинорных полей равны m.
- Массивный векторный бозон (масса M) взаимодействует с фермионными токами:

$$\mathscr{L}_{\text{int}} = g\mathscr{O}_{ij} B_\mu \bar{\psi}_i \gamma^\mu (A + \gamma_5) \psi_j, \tag{75}$$

  - g -- константа связи,
  - A -- произвольный параметр,
  - $\mathscr{O}$ -- матрица, действующая в пространстве ароматов и характеризующая взаимодействие различных токов (в том числе недиагональных по индексу аромата) с векторным бозоном.

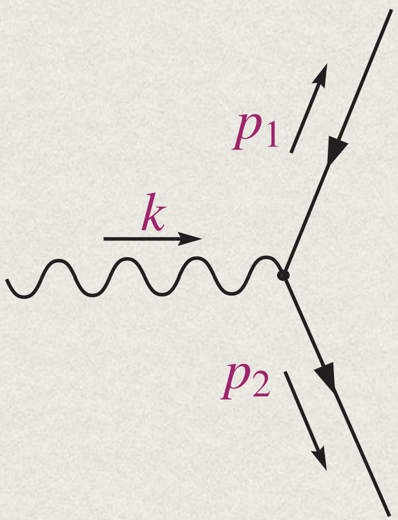
- Таким образом, векторный бозон взаимодействует и с векторными, и с аксиальными токами.
- Аналогичное взаимодействие имеет массивный Z-бозон с фермионами в Стандартной модели. Отличие:
  - ✓ массы фермионов различны,
  - ✓ матрица $\mathcal{O}$ -- диагональна,
  - ✓ параметр A также становится диагональной матрицей, действующей в пространстве ароматов, т.е. взаимодействие с векторными токами характеризуется константами $g\mathcal{O}_{ik}A_{ki}$ (нет суммирования по i, но есть суммирование по k), а с аксиальными -- $g\mathcal{O}_{ii}$.
- Наша задача определить ширину Z-бозона.

- $\mathscr{L}_{\text{int}}$ ➠ существует всего одна тройная вершина

$$ig\mathscr{O}_{ij}\gamma_\mu(A+\gamma_5)\ . \qquad (76)$$

- Будем вычислять ширину распада в первом порядке теории возмущений. ➠

- Существует всего одна диаграмма



$$\mathscr{M}^{\rho\lambda}_{\sigma,ij} = ig\mathscr{O}_{ij}\bar{\upsilon}^{\rho,+}_{\alpha,i}(\mathbf{p}_2)[\gamma_\mu(A+\gamma_5)]_{\alpha\beta}\upsilon^{\lambda,+}_{\beta,j}(\mathbf{p}_1)e^\mu_\sigma(\mathbf{k}), \qquad (77)$$

где явно указаны спинорные индексы α и β, и нет суммирования по индексам аромата.

Найдем $\mathscr{M}^\dagger$. Для этого используем

✓ $(\gamma_0\gamma_\mu)^\dagger = \gamma_\mu^\dagger\gamma_0^\dagger = \gamma_0\gamma_\mu$ ➠

✓ $(\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5\upsilon)^\dagger = \upsilon^\dagger\gamma_5^\dagger\gamma_\mu^\dagger\gamma_0^\dagger u = \upsilon^\dagger\gamma_5\gamma_0\gamma_\mu u = \bar{\upsilon}\gamma_\mu\gamma_5 u,$ ➠

$$\left(\mathscr{M}^{\rho\lambda}_{\sigma,ij}\right)^\dagger = -ig\mathscr{O}^*_{ji}\bar{\upsilon}^{\lambda,-}_{\beta',j}[\gamma_\mu(A+\gamma_5)]_{\beta'\alpha'}\upsilon^{\rho,-}_{\alpha',i}e^{\mu*}_\sigma, \tag{78}$$

Вычислим $|\mathscr{M}|^2$:

$$|\mathscr{M}|^2_{\rho\lambda,\sigma,ij} = g^2(\mathscr{O}^*_{ji}\mathscr{O}_{ij})\upsilon^{\rho,-}_{\alpha\upsilon',i}\bar{\upsilon}^{\rho,+}_{\alpha,i}[\gamma_\mu(A+\gamma\upsilon_5)]_{\alpha\beta}\upsilon^{\lambda,+}_{\beta,j}\bar{\upsilon}^{\lambda,-}_{\beta',j}[\gamma_\nu(A+\gamma_5]_{\beta'\alpha'}e^{\nu*}_\sigma e^\mu_\sigma \tag{79}$$

- Нет суммирования по поляризациям ρ, λ, σ и ароматам i, j
- Сгруппированы сомножители так, чтобы было удобно просуммировать по поляризациям и ароматам

Интересуемся полной шириной распада ➠ просуммируем по поляризациям и ароматам. Для этого используем формулы

$$\upsilon^{\lambda,+}_{\beta,j}(\mathbf{p}_1)\bar{\upsilon}^{\lambda,-}_{\beta',i}(\mathbf{p}_1) = (\hat{p}_1 - m)_{\beta\beta'}\delta_{ji} \,,$$

$$\upsilon^{\rho,-}_{\alpha',j}(\mathbf{p}_2)\bar{\upsilon}^{\rho,+}_{\alpha,i}(\mathbf{p}_2) = (\hat{p}_2 + m)_{\alpha'\alpha}\delta_{ji} \,,$$

$$e^{*\sigma}_{\mu}(\mathbf{k})e^{\sigma}_{\nu}(\mathbf{k}) = -\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2}\right) \,, \qquad (80)$$

- Суммирование по спиновому индексу, конечно, диагонально по ароматам (т.к. каждый спинор удовлетворяет своему уравнению Дирака)
- Если массы разных ароматов различны, то различны будут и трехмерные импульсы, и это надо учесть, приписав индексы аромата этим величинам. Суммирование по спиновому индексу по-прежнему останется диагональным по аромату.

- Подставляем (80) в (79) и опускаем индексы суммирования $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$:

$$|\bar{\mathscr{M}}|^2 = -g^2 Tr(\mathscr{O}^\dagger \mathscr{O}) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2}\right) Tr(\hat{p}_1 - m)(\gamma^\mu (A+\gamma_5))(\hat{p}_2 + m)(\gamma^\nu (A+\gamma_5)) \,. \quad (81)$$

- При вычислении следа по спинорным индексам нет нужды явно раскрывать скобки и вычислять след от каждого из получившихся 16-ти слагаемых:
  - достаточно вспомнить, что в интересующем нас выражении след от нечетного числа γ-матриц (включая γ^5) равен 0,
  - за исключением следа произведения 4-х γ^μ-матриц и γ^5 -- он пропорционален $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$
  - при свертке с симметричным тензором, возникающем при суммировании по поляризациям бозона, даст 0.
  - следовательно, ненулевой вклад в вычисляемый след дадут слагаемые, пропорциональные $p_1^\lambda p_2^\rho$ и m^2, (но не линейные по m).

Учитывая это замечание и используя

$$Tr\gamma^\mu\gamma^\nu = 4g^{\mu\nu}$$
$$Tr\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda = 4g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda} + 4g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho} - 4g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}\ , \tag{82}$$

без труда находим,

$$|\bar{\mathscr{M}}|^2 = -g^2 Tr(\mathscr{O}^\dagger\mathscr{O})\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2}\right)4\times \tag{83}$$

$$\times\left((A^2+1)(p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - p_1p_2g^{\mu\nu}) - m^2(A^2-1)g^{\mu\nu}\right)\ . \tag{84}$$

Перемножаем два тензора в получившемся выражении. При этом принимаем во внимание, что

$$k = p_1 + p_2, \quad k^2 = M^2, \quad p_1^2 = p_2^2 = m^2, \ \Rightarrow \tag{85}$$

$$k^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 \Rightarrow 2p_1p_2 = M^2 - 2m^2, \tag{86}$$

$$p_2^2 = (k-p_1)^2 \Rightarrow 2kp_1 = 2kp_2 = M^2. \tag{87}$$

- Окончательно получаем

$$|\bar{\mathscr{M}}|^2 = 4g^2\, Tr(\mathscr{O}^\dagger \mathscr{O})\left[(A^2+1)M^2 + 2m^2(A^2-2)\right] \ . \qquad (88)$$

- В системе центра масс, то есть в системе покоя бозона

$$|\,\mathbf{p}_1| = \frac{\sqrt{M^2-4m^2}}{2} \ . \qquad (89)$$

- Подставляя эту формулу и формулу (88) в (33), разделив на 3 (число поляризаций бозона), окончательно находим

$$\Gamma = \frac{g^2\, Tr(\mathscr{O}^\dagger \mathscr{O})\left[(A^2+1)M^2 + 2m^2(A^2-2)\right]\sqrt{M^2-4m^2}}{12\pi M^2} \overset{m\to 0}{\to} \qquad (90)$$

$$Tr(\mathscr{O}^\dagger \mathscr{O})\frac{g^2(A^2+1)M}{12\pi} \ . \qquad (91)$$

Обсуждение

- В частном случае, -- $\mathcal{O}$ -- унитарная матрица, -- след по индексам аромата в правой части (90) равен N_f ➠
- Ширина векторного бозона пропорциональна числу араматов.
- В общем случае, -- матрица $\mathcal{O}$ произвольна, -- матрица $\mathcal{O}^\dagger O$ положительно определена ➠ ее след растет с ростом числа ароматов. ➠
- Это позволяет определить число ароматов, на которое может распадаться массивный векторный бозон.
- Так, в Стандартной модели Z-бозон может распадаться на
  - 5 (с учетом цвета -- 15) заряженных кварков: u, d, c, s, b (на t-кварк Z-бозон распасться не может, так как масса этого кварка больше массы бозона),
  - 3 заряженных лептона: e, μ, τ

- и, вообще говоря, неизвестное (в силу сложности непосредственного наблюдения) количество нейтральных фермионов (с массами, меньшими $1/2 \cdot M_Z$), три из которых являются партнерами заряженных лептонов ν_e, ν_μ, ν_τ -- активные нейтрино, то есть нейтрино, взаимодействующие с $W^\pm$ и Z-бозонами.

- Взаимодействия Z-бозона с заряженными частицами и известными активными нейтрино диктуются симметриями Стандартной модели и прекрасно согласуются с экспериментальными данными

- Поэтому ширина Z-бозона для распадов на частицы Стандартной модели (кварки, заряженные лептоны и активные нейтрино) может быть вычислена с высокой степенью точности.

- Сравнивая ее с хорошо измеренной экспериментальной величиной, можно найти ограничение на число неизвестных нейтральных фермионов, на которые мог бы распадаться Z-бозон.

- Обычно результат сравнения приводится в виде числа ароматов легких нейтрино, взаимодействующих с Z-бозоном:

$$N_\nu = 2.984 \pm 0.008, \tag{92}$$

- Это хорошо согласуется с гипотезой о существовании трех известных ароматов активных нейтрино и отсутствием других легких фермионов, взаимодействующих с Z-бозоном.

- Стоит подчеркнуть, что этот результат не приводит к ограничению на число так называемых *стерильных* нейтрино, -- гипотетических нейтральных частиц с полуцелым спином, не участвующих в калибровочных взаимодействиях Стандартной модели, то есть не взаимодействующих с Z и $W^\pm$-бозонами.