

М.В. ЛибановКТП IX. Правила Фейнмана

## Содержание

Правила Фейнмана для оператора $S$ -матрицы . . . . .	2
Вывод правил Фейнмана для матричных элементов . . . . .	14
Правила Фейнмана для матричных элементов . . . . .	26
Обсуждение . . . . .	44

## Правила Фейнмана для оператора $S$ -матрицы

⇒ Для того чтобы понять, как возникают правила Фейнмана для вычисления матричных элементов  $S$ -матрицы, вычисления удобно разбить на два этапа.

✗ Первый этап -- это приведение с помощью второй теоремы Вика к нормальной форме оператора  $S$ -матрицы.

✗ Вторым этапом -- вычисление с помощью первой теоремы Вика матричных элементов.

⇒ Начнем с приведения к нормальной форме оператора  $S$ -матрицы,

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int S_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = T \exp \left( i \int \mathcal{L}_{\text{int}}(x) dx \right) \quad (1)$$

$$\frac{1}{n!} \int S_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \frac{i^n}{n!} \int T(\mathcal{L}_{\text{int}}(x_1) \dots \mathcal{L}_{\text{int}}(x_n)) dx_1 \dots dx_n. \quad (2)$$

✎ В соответствии со второй теоремой Вика,  $S_n(x_1, \dots, x_n)$  представляет собой сумму членов, каждый из которых равен произведению некоторого числа  $T$ -спаренных операторов поля на нормальное произведение оставшихся неспаренных полей:

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_k K_k(x_1, \dots, x_k) : \dots u(x_j) \dots : . \quad (3)$$

✎ Функции  $K_k$  являются  $C$ -числовыми, представляют собой произведения пропагаторов полей ( $T$ -спариваний):

$$K_k(x_1, \dots, x_k) \propto \prod_{r,s} G_{\alpha\beta}^c(x_r - x_s) \quad (4)$$

и являются обобщенными функциями.

🏠 Каждому члену в разложении (3) может быть сопоставлено графическое изображение, называемое *диаграммой Фейнмана*.

✎ Чтобы это продемонстрировать, рассмотрим теорию  $\varphi^4$  с лагранжианом

$$\mathcal{L} =: \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 : . \quad (5)$$

⇒ В первом порядке теории возмущений имеем

$$S_1(x) = -i \frac{\lambda}{4!} T(:\varphi^4(x):) = -i \frac{\lambda}{4!} :\varphi^4(x): . \quad (6)$$

⇒ Второй порядок теории возмущений, т.е.  $S_2$ :

$$S_2(x, y) = (-i)^2 \frac{\lambda^2}{4!^2} T(:\varphi^4(x)::\varphi^4(y):) = \quad (7)$$

$$\frac{(-i)^2 \lambda^2}{4!^2} \left( :\varphi^4(x)\varphi^4(y): + 16 \overline{\varphi(x)\varphi(y)} : \varphi^3(x)\varphi^3(y): + 72 [\overline{\varphi(x)\varphi(y)}]^2 : \varphi^2(x)\varphi^2(y): + \quad (8)$$

$$96 [\overline{\varphi(x)\varphi(y)}]^3 : \varphi(x)\varphi(y): + 24 [\overline{\varphi(x)\varphi(y)}]^4 \right) . \quad (9)$$

📖 Два замечания по поводу этой формулы.

- ✗ Если бы мы записали лагранжиан не в нормально упорядоченном виде, то в этой формуле появились бы дополнительные члены, как и в (6), содержащие спаривания полей в одной точке  $\overline{\varphi(x)}\varphi(x)$ .
- ✗ Объясним происхождение числовых коэффициентов. Рассмотрим как получается третий член.

⇒ Запишем, пронумеровав поля,  $T$ -произведение лагранжианов в виде

$$T\left(:\overbrace{\varphi_1(x)\varphi_2(x)\varphi_3(x)\varphi_4(x)}^4::\overbrace{\varphi_1(y)\varphi_2(y)\varphi_3(y)\varphi_4(y)}^3:\right). \quad (10)$$

- ⇒ Мы хотим получить третий член в (9) ⇒ нам необходимо спарить два поля из первой группы с двумя полями из второй группы.
- ⇒ Фиксируем поле из первой группы, скажем  $\varphi_1(x)$ .
- ⇒ Его можно спарить с 4 различными полями из второй группы.

- ⇒ Фиксируем теперь второе поле из первой группы, его уже можно спарить только 3 способами.
- ⇒ Итого, для двух фиксированных полей мы получаем  $4 \cdot 3 = 12 = 4!/2!$  способов спаривания --- число размещений из 4-х по 2.
- ⇒ Сколькими способами можно фиксировать два поля из первой группы? Ответ -- число сочетаний из 4-х по 2:  $C_4^2 = 6$ . Действительно, мы должны выбирать поля из первой группы с неравными индексами и различать порядок (в противном случае мы бы учитывали выбранные поля дважды, например, (1 и 2) и (2 и 1)), а это и есть число сочетаний.
- ⇒ Таким образом мы получаем  $12 \cdot 6 = 72$ .
- ⇒ Аналогично можно получить (получить!) остальные коэффициенты.

- ⇒ Графическое представление выражений (6) и (9).
- ⇒ Сопоставим каждому спариванию линию, начинающуюся в точке  $x$  и заканчивающуюся в  $y$ .
- ⇒ Каждому полю из нормального произведения --- луч, начинающийся из точки  $x$  или  $y$  (см. рис. 1).

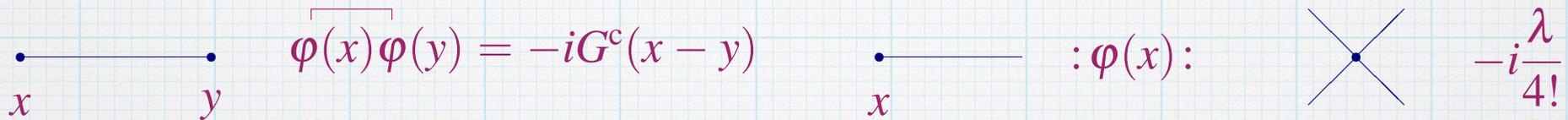


Рис. 1:

- ⇒ Очевидно при этом, что из каждой точки будет выходить по четыре линии --- по числу полей в лагранжиане взаимодействия, такую точку будем называть *вершиной* и будем ей сопоставлять фактор  $-i\lambda/4!$ , где множитель

⇒  $i$  соответствует множителю  $i$  в выражении для  $S$ -матрицы (1),

⇒  $-\lambda/4!$  --- константа взаимодействия в лагранжиане.

- 📖 Выражение для вершины можно получить, рассматривая первый порядок теории возмущений  $S_1$ .
- 🔍 Полученные таким образом правила часто называют *правилами Фейнмана в координатном пространстве*. На рис. 2 приведено графическое изображение формулы (9).

$$\frac{(-i)^2 \lambda^2}{4!^2} \left( : \varphi^4(x) \varphi^4(y) : + 16 \overline{\varphi(x) \varphi(y)} : \varphi^3(x) \varphi^3(y) : + 72 [\overline{\varphi(x) \varphi(y)}]^2 : \varphi^2(x) \varphi^2(y) : + \right. \tag{11}$$

$$\left. 96 [\overline{\varphi(x) \varphi(y)}]^3 : \varphi(x) \varphi(y) : + 24 [\overline{\varphi(x) \varphi(y)}]^4 \right) = \tag{12}$$

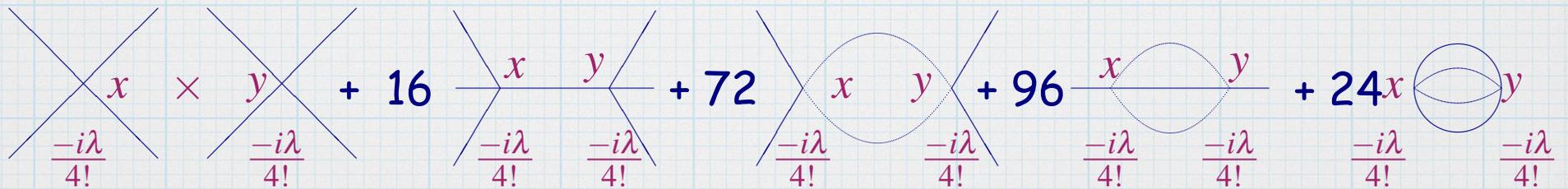


Рис. 2:

- ⇒ Рассмотрим теперь электродинамику. Полный лагранжиан, описывающий взаимодействие фермионов с фотонами, имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\hat{D}\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (13)$$

где

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - ieA_{\mu} \quad (14)$$

--- ковариантная производная.

- ⇒ Лагранжиан взаимодействия

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = e\bar{\psi}\gamma_{\mu}A^{\mu}\psi. \quad (15)$$

- ⇒ Для такой теории имеем шесть различных графических элементов, приведенных на рис. 3:

⇒ 3 элемента соответствуют трем различным полям  $A_{\mu}$ ,  $\bar{\psi}$ ,  $\psi$  стоящим под знаком нормального произведения,

⇒ 2 элемента соответствуют двум нетривиальным пропагаторам

⇒ 1 вершина.

$$\overbrace{A_\mu(x)A_\nu(y)} = -iG_{\mu\nu}^c(x-y)$$



$$\overbrace{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)} = -iS_{\alpha\beta}^c(x-y)$$

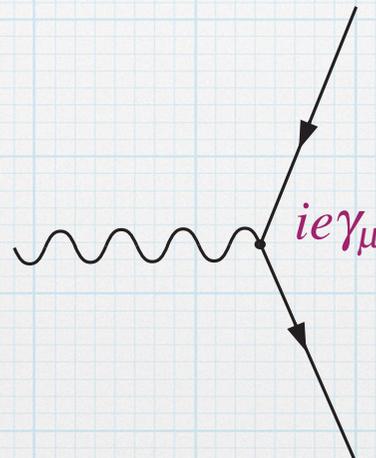
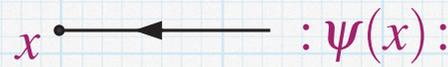


Рис. 3:

### Обсуждение:

- Фотонное поле, как и другие калибровочные поля, принято обозначать волнистой линией (подчеркивая выраженную волновую природу света).
- Линии полей материи (скаляров, спиноров) -- прямой линией.
- Это общепринятые, но *необязательные*, обозначения. Могут быть использованы и другие обозначения, в том числе прямые линии (сплошные или пунктирные) для калибровочных полей.
- Единственное правило, от которого практически никогда не отступают, -- это *обозначение комплексных полей (для которых частица не тождественна античастице) линиями со стрелками, указывающими направление тока (но не направление движения частиц)*. При этом в полном соответствии с теорией электрических токов обычно принимается, что направление стрелки указывает движение положительных зарядов, то есть стрелке, выходящей из вершины, будет

соответствовать комплексно-сопряженное поле, так как (по соглашению) это поле содержит оператор рождения частиц, несущих положительный заряд (не электрический!).

- ⇒ В соответствии с этим правилом фермионные линии в КЭД (и не только) имеют направление.
- ⇒ Фермионные линии никогда не прерываются --- в вершину входит одна линия и одна выходит (фермионный ток сохраняется) ⇨
- ⇒ У произвольной диаграммы может быть только четное число внешних фермионных линий.
- ⇒ Если у диаграммы нет внешних фермионных линий (и диаграмма не состоит из одной фотонной линии), то все фермионные линии должны образовывать замкнутые петли.
- ⇒ Каждой такой фермионной петле (такие петли могут быть и в диаграммах, содержащих внешние фермионные линии) соответствует дополнительный знак минус, обусловленный ферми-статистикой.

➤ Продемонстрируем это, рассмотрев одно слагаемое из  $S_2(x, y)$ ,

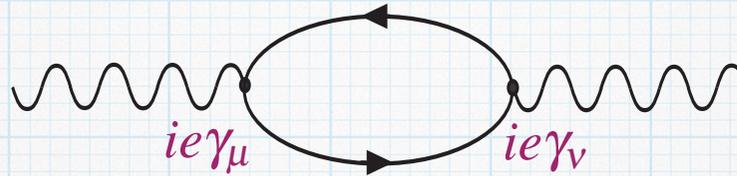


Рис. 4:

➤ Соответствующее слагаемое есть

$$i^2 e^2 : \bar{\psi}_\alpha(x) \hat{A}_{\alpha\beta}(x) \psi_\beta(x) :: \bar{\psi}_\gamma(y) \hat{A}_{\gamma\delta}(y) \psi_\delta(y) := \quad (16)$$

$$-i^2 (-i)^2 e^2 : S_{\delta\alpha}^c(y-x) \hat{A}_{\alpha\beta}(x) S_{\beta\gamma}^c(x-y) \hat{A}_{\gamma\delta}(y) := -e^2 Tr : S^c(y-x) \hat{A}(x) S^c(x-y) \hat{A}(y) : . \quad (17)$$

➤ Внутреннее спаривание -- правильный порядок сомножителей

➤ Однако внешнее --- нет. Для того чтобы привести внешнее спаривание к правильному виду, необходимо проантикоммутировать ферми поля и тем самым заработать лишний знак минус.

## Правила Фейнмана для матричных элементов

⇒ Состояния обычно задаются в импульсном пространстве

$$|i\rangle = a_1^+(\mathbf{k}_1) \dots a_i^+(\mathbf{k}_i) |0\rangle \quad \Leftrightarrow \quad (18)$$

⇒ Удобно вычислять матричные элементы  $S$ -матрицы в импульсном представлении. Будем вычислять матричные элементы операторов  $S_n$ :

$$\int \prod_{l=1}^n dx_l \langle f | S_n | i \rangle = \int \prod_{l=1}^n dx_l \cdot \sum_k K_k(x_1, \dots, x_k) \langle 0 | \prod_{\alpha}^f a_{\alpha}^- \dots u(x_j) \dots \prod_{\beta}^i a_{\beta}^+ | 0 \rangle . \quad (19)$$

⇒ Воспользуемся первой теоремой Вика

⇒ Ненулевой вклад при усреднении по вакууму даст только слагаемое, в котором все операторы спарены ⇔

⇒ Число операторов какого-либо поля  $u(x)$ , стоящих под знаком нормального произведения в (19), меньше либо равно суммарному числу операторов рождения и уничтожения этого поля, порождающих начальное и конечное состояние соответственно.

✎ При этом, если суммарное число операторов рождения и уничтожения строго больше числа операторов поля, то результат будет ненулевым, только если некоторые операторы рождения и уничтожения спарены между собой.

✎ Такие ненулевые спаривания имеют вид

$$\underline{a_{\sigma}^{-}(\mathbf{p})} a_{\rho}^{+}(\mathbf{k}) = \delta_{\sigma\rho} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \Leftrightarrow \quad (20)$$

✎ Такие частицы не провзаимодействовали  $\Leftrightarrow$  не интересно; отбрасываем  $\Leftrightarrow$

✎ Число неспаренных операторов  $u(x)$  в  $S_n$ , которое равно числу внешних линий у диаграмм, построенных для оператора  $S$ -матрицы, должно совпадать с суммарным числом операторов рождения и уничтожения соответствующего поля, т.е. с суммарным числом начальных и конечных частиц соответствующего поля.

✎ В представлении взаимодействия любое поле представимо в виде

$$u(x) = u^+(x) + u^-(x), \quad (21)$$

✗ где

$$u^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{q}}{\sqrt{2q_0}} e^{\pm i p x} \sum_{\sigma} v_{\sigma}^{\pm}(\mathbf{q}) a_{\sigma}^{\pm}(\mathbf{q}), \quad (22)$$

✗ а  $v_{\sigma}^{\pm}$  -- решения соответствующих свободных уравнений движения ⇨

✎ Легко найти

$$\begin{aligned} \underline{a_{\sigma}^{-}(\mathbf{p})} u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_0}} e^{+i p x} v_{\sigma}^{+}(\mathbf{p}), \\ \underline{u(x) a_{\sigma}^{+}(\mathbf{p})} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_0}} e^{-i p x} v_{\sigma}^{-}(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (23)$$

🕯 Серые множители **отбросим**. Восстановим потом.

Используя  $\langle 0|0\rangle = 1$ , находим вакуумное среднее в (19),

$$P_{if} \equiv \langle 0 | \prod_{\alpha}^f a_{\alpha}^{-} : \dots u(x_j) \dots : \prod_{\beta}^i a_{\beta}^{+} | 0 \rangle = \sum_c \left( \prod_j^i e^{-ik_j x_j} v_{\sigma_j}^{-}(k_j) \prod_l^f e^{ik_l x_l} v_{\delta_l}^{+}(k_l) \right), \quad (24)$$

где, согласно теореме Вика, сумма берется по всевозможным спариваниям операторов поля  $u(x)$  с операторами рождения и(или) уничтожения.

Вся зависимость от координат содержится только в экспонентах.

$K$  (коэффициентные функции) в (19) представляют собой произведение пропагаторов  $\Rightarrow$  подставляем Фурье-образы

$$-iG_{\alpha\beta}^c(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dq e^{-iq(x-y)} G_{\alpha\beta}(q) \quad (25)$$

в (19) и находим

$$\langle f|S|i\rangle_n \equiv \langle f| \int \frac{S_n}{n!} \prod_{m=1}^n dx_m |i\rangle = \frac{1}{n!} \int \left( \prod_{m=1}^n dx_m \right) \Pi_{if} \left( \prod_k \int \frac{dq_k}{(2\pi)^4} e^{-iq_k(x_j-x_l)} G_{\alpha\beta}(q_k) \right) \quad (26)$$

 Благодаря экспоненциальной зависимости от координат, интеграл по  $x$  в правой части этого равенства сводится к произведению интегралов вида

$$\int dx_j e^{ix_j \sum_{\alpha} p_{\alpha}} = (2\pi)^4 \delta\left(\sum_{\alpha} p_{\alpha}\right), \quad (27)$$

причем индекс  $\alpha$  пробегает ровно столько значений, сколько линий выходит (входит) в вершину с координатой  $x_j$ , а  $p_{\alpha}$  можно интерпретировать как импульс частицы, соответствующей линии с номером  $\alpha$ .

Окончательно имеем для матричного элемента в импульсном пространстве в  $n$ -ом порядке теории возмущений

$$\langle f|S|i\rangle_n = \frac{1}{n!} \sum_c \prod v_{\sigma}^{-}(k_{in}) \prod v_{\delta}^{+}(k_{out}) \int \prod \frac{dq}{(2\pi)^4} igO(2\pi)^4 \delta(\sum q) G(q) . \quad (28)$$

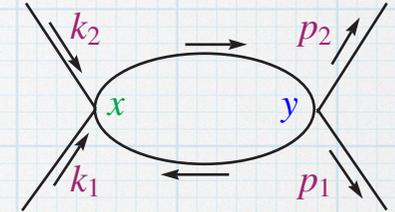
 Эта формула записана несколько условно. Поясним ее смысл. Все произведения в ней надо понимать как произведения «вдоль диаграмм», построенных в предыдущем разделе:

- ✗ Каждой внешней линии соответствует  $v_{\delta}^{+}$  или  $v_{\sigma}^{-}$ ,
- ✗ Каждой вершине, помимо фактора из предыдущего раздела (здесь он обозначен как  $igO$ ,  $g$  --- константа связи,  $O$  --- структура, стоящая в лагранжиане взаимодействия, например  $\gamma$ -матрица, как в КЭД) сопоставляется еще  $\delta$ -функция, выражающая закон сохранения импульса в данной вершине.
- ✗ Каждой внутренней линии соответствует пропагатор в импульсном пространстве соответствующей частицы.

- ✎ Итак, мы получаем правила Фейнмана для матричных элементов, которые также иногда называют правилами Фейнмана в импульсном пространстве.
- ✎ Однако прежде чем их сформулировать более точно, скажем еще несколько слов по поводу множителя  $1/n!$  и других численных множителей в полученной нами формуле.
- ⇒ Рассмотрим в теории  $\phi^4$  процесс  $2 \rightarrow 2$  во втором порядке теории возмущений. Соответствующая диаграмма должна содержать 4 «ноги» (внешних линии).
- ⇒ Пусть  $k_1, k_2$  --- импульсы влетающих частиц,  $p_1, p_2$  --- вылетающих.
- ⇒ При переходе в импульсное пространство мы должны спарить 4 оператора из нормального произведения с операторами рождения и уничтожения.
- ⇒ По теореме Вика мы должны сделать это всеми способами и просуммировать:

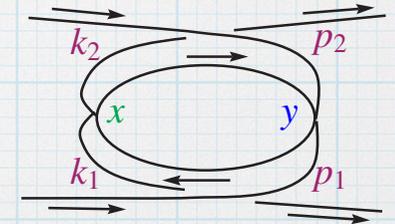
- ✗ Спариваем оба оператора в точке  $y$  с операторами уничтожения, оба оператора в точке  $x$  -- с операторами рождения:

$$\langle 0 | a^-(p_1) a^-(p_2) : \underbrace{\varphi(y) \varphi(y)}_1 \underbrace{\varphi(x) \varphi(x)}_2 : a^+(k_1) a^+(k_2) | 0 \rangle \Leftrightarrow$$



- ✗ Спариваем оба оператора в точке  $x$  с операторами уничтожения, оба оператора в точке  $y$  -- с операторами рождения:

$$\langle 0 | a^-(p_1) a^-(p_2) : \underbrace{\varphi(x) \varphi(x)}_1 \underbrace{\varphi(y) \varphi(y)}_2 : a^+(k_1) a^+(k_2) | 0 \rangle \Leftrightarrow$$



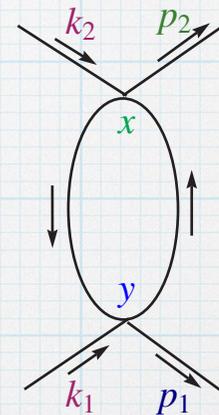
- ✗ Очевидно, что с помощью переобозначения  $x \leftrightarrow y$  мы получим один вклад из другого

- ✗ Мы интегрируем по  $x$  и  $y$   $\Leftrightarrow$  мы получим **удвоенный** вклад от одной из диаграмм, вторую диаграмму можно не рисовать, умножив первую на **2**

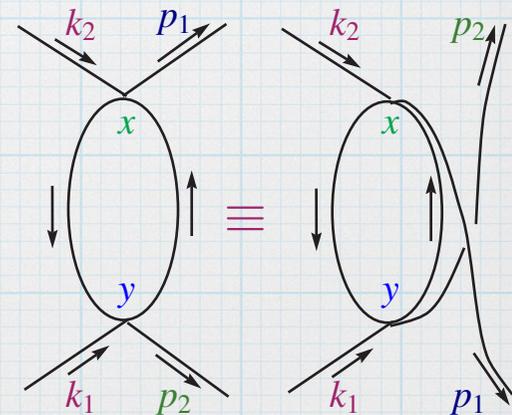
- ✗ В общем случае  $n$ -точечного (вершинного) вклада такого рода диаграмм будет ровно  $n!$  -- число перестановок  $n$  элементов.
- ✗ Этот  $n!$  в точности сократит  $1/n!$ , возникающий при разложении  $T$ -экспоненты для  $S$ -матрицы
- ✗ Другими словами можно (и нужно!) не рисовать все эти эквивалентные диаграммы, вычеркнуть множитель  $1/n!$  в разложении  $T$ -экспоненты, и учитывать только *топологически неэквивалентные диаграммы (ТНД)*:

🏠 То есть слагаемые и соответствующие диаграммы, в которых  $k_1$  и  $p_1$  (или  $k_1$  и  $p_2$ ) входят(выходят) в одну вершину. Другими словами, слагаемые, возникающие в результате спаривания одного из операторов  $\varphi(x)$  с оператором уничтожения, а второго -- с оператором рождения

$$\langle 0 | a^-(p_1) a^-(p_2) : \varphi(x) \varphi(y) \varphi(x) \varphi(y) : a^+(k_1) a^+(k_2) | 0 \rangle \Leftrightarrow$$



$$\langle 0 | a^-(p_1) a^-(p_2) : \varphi(x) \varphi(y) \varphi(y) \varphi(x) : a^+(k_1) a^+(k_2) | 0 \rangle \Leftrightarrow$$



⇒ Рассмотрим в теории  $\varphi^4$  процесс  $2 \rightarrow 2$  в первом порядке теории возмущений.

$$\langle 0 | a^-(\mathbf{p}_1) a^-(\mathbf{p}_2) : \varphi(x) \varphi(x) \varphi(x) \varphi(x) : a^+(\mathbf{k}_1) a^+(\mathbf{k}_2) | 0 \rangle \quad (29)$$

- ✗ Очевидно, что первый оператор  $\varphi(x)$  мы можем спарить с любым из 4-х операторов рождения или уничтожения, второй -- с любым из 3-х оставшихся, третий -- с любым из 2-х, оставшийся оператор можно спарить только одним способом. При этом, поскольку все  $\varphi$  эквивалентны, то мы получим 24 одинаковые диаграммы.
- ✗ Этот множитель 24 в точности сокращается с множителем  $1/4!$ , который присутствует в лагранжиане взаимодействия (именно поэтому его принято писать в лагранжиане).
- ✗ Это происходит «почти» полностью в любой диаграмме.

⇒ Вернемся снова ко второму порядку.

- ✗ Пусть мы оба оператора  $\varphi(x)$  спариваем с  $a^-$  -- это можно сделать  $2!$  способами.
- ✗ Аналогично, оставшиеся два  $\varphi(y)$  также дадут  $2!$  при спаривании с  $a^+$ .
- ✗ Итого мы имеем общий коэффициент перед этой диаграммой (см. обсуждение появления множителя  $72$  ранее)

$$\lambda^2 \frac{1}{4!4!} 2!2! \frac{4!}{2!} \frac{4!}{2!2!} = \lambda^2 \frac{1}{2!} \quad (30)$$

- ✗ Мы видим, что  $4!^2$  в знаменателе «почти» сократился --- остался только  $1/2!$ .
- ✗ Этот множитель ---  $1/2!$ , --- называется *симметричным фактором диаграммы*. Несложно убедиться, что его происхождение связано с тем, что две вершины диаграммы связаны одинаковыми линиями.

## Правила Фейнмана

0) Построить диаграммную технику для данной теории<sup>1</sup>:

✗ Свободный лагранжиан  $\Rightarrow$  квантование:

✓ решить свободные (линейные) уравнения движения

✓ изучить свойства поляризованных частей волновых функций  $v_{\sigma}^{\pm}(\mathbf{k})$   
(эти функции будут соответствовать внешним линиям диаграмм)

✓ выяснить физический смысл операторов  $a_{\sigma}^{\pm}(\mathbf{k})$

✗ Включив в рассмотрение  $\delta$ -образный источник, найти пропагаторы полей  $G_{\alpha\beta}(q)$  (внутренние линии диаграмм)

✗ Используя лагранжиан взаимодействия и изучая процессы в первом порядке теории возмущений, построить вершины взаимодействий.

---

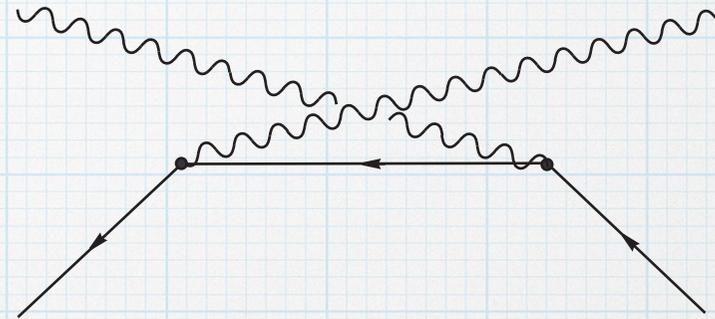
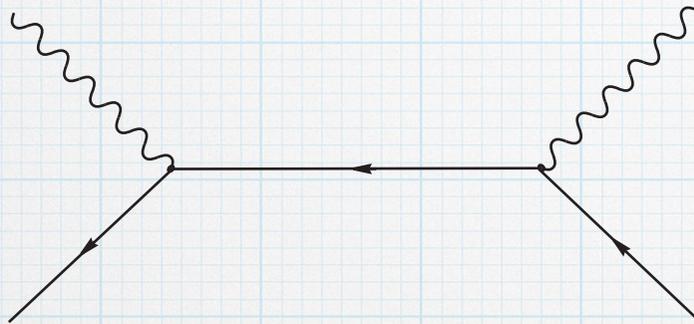
<sup>1</sup>Этот пункт общий для всех процессов в данной теории.

Тип поля	Элемент диаграммной техники	Математическое выражение	Графическое представление
Действительное скалярное поле	Внешняя линия	1	
	Внутренняя линия	$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$	
	Вершина самодействия	$-i\lambda \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$	
ЭМП	Внешняя линия		
	входящая	$e_\mu^\alpha(k) (\alpha = 1, 2)$	
	выходящая	$e_\mu^{*\alpha}(k) (\alpha = 1, 2)$	
	Внутренняя линия	$\frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \cdot \left( g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$	
Фермионы	Входящая частица	$v_\sigma^-(k) (\sigma = 1, 2)$	
	Входящая античастица	$\bar{v}_\sigma^-(k) (\sigma = 1, 2)$	
	Выходящая частица	$\bar{v}_\sigma^+(k) (\sigma = 1, 2)$	
	Выходящая античастица	$v_\sigma^+(k) (\sigma = 1, 2)$	
	Внутренняя линия	$\frac{i}{\hat{k} - m + i\epsilon}$	
	Взаимодействие фермионов с фотонами	$ie\gamma_\mu \delta(k_1 + k_2 + p)$	
		$\mathcal{L}_{int} = e\bar{\psi}\gamma_\mu A^\mu \psi$	

Для Стандартной модели см., например, Т.-П.Ченг, Л.-Ф.Ли «Калибровочные теории в физике элементарных частиц»

1) Нарисовать все топологически неэквивалентные диаграммы в данном порядке теории возмущений с  $i$  входящими линиями и  $f$  --- выходящими.

Пример:  $e^+\gamma \rightarrow e^+\gamma$  во втором порядке ТВ



 Для того чтобы выяснить, являются ли две диаграммы топологически неэквивалентными, можно поступить следующим образом.

✗ Ориентируем внешние линии диаграмм на рисунке одинаковым образом, считая их различными (так как им в общем случае будут соответствовать разные импульсы).

✗ Будем считать, что концы внешних линий «приклеены» к плоскости рисунка (являются неподвижными).

✗ Будем также считать, что сами линии (внешние и внутренние) являются бесконечно растяжимыми и могут выходить из плоскости рисунка;

✗ Вершины также не прикреплены к плоскости рисунка.

✗ Если одна из линий один или несколько раз полностью оборачивается вокруг другой, то такую конфигурацию будем считать эквивалентной конфигурации без оборотов.

✗ Линии, соответствующие частицам различных типов, считаются раз-

личными.

- ✗ Если линия имеет стрелку (ориентируемая линия), соответствующую, например, заряженной частице, то учитывается направление стрелки.
- ⇒ Если существует топологическое (непрерывное) преобразование, переводящее при сформулированных условиях одну диаграмму в другую (с учетом возможной ориентации линий со стрелками), то диаграммы являются топологически эквивалентными, в противном случае --- нет.
- ✎ Подчеркнем также, что топологически неэквивалентные диаграммы должны приводить к различным функциям внешних импульсов.
- ⇒ Примеры топологически неэквивалентных диаграмм представлены на рис. 5, а эквивалентных -- на рис. 6.

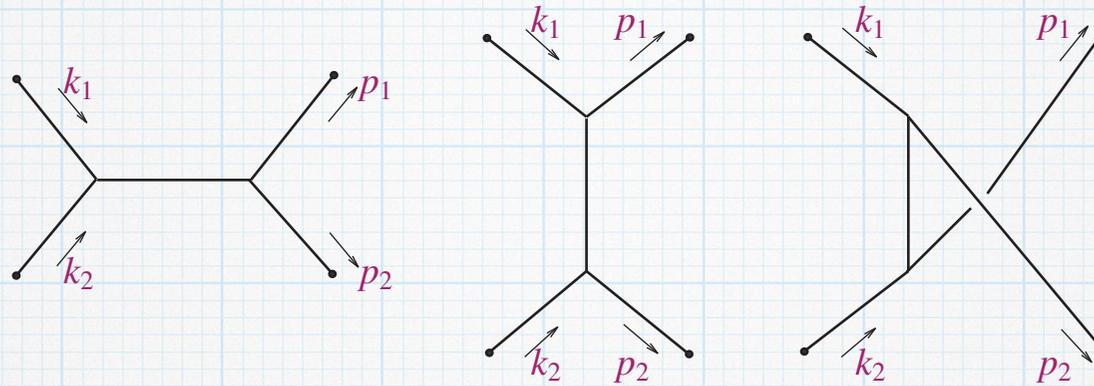
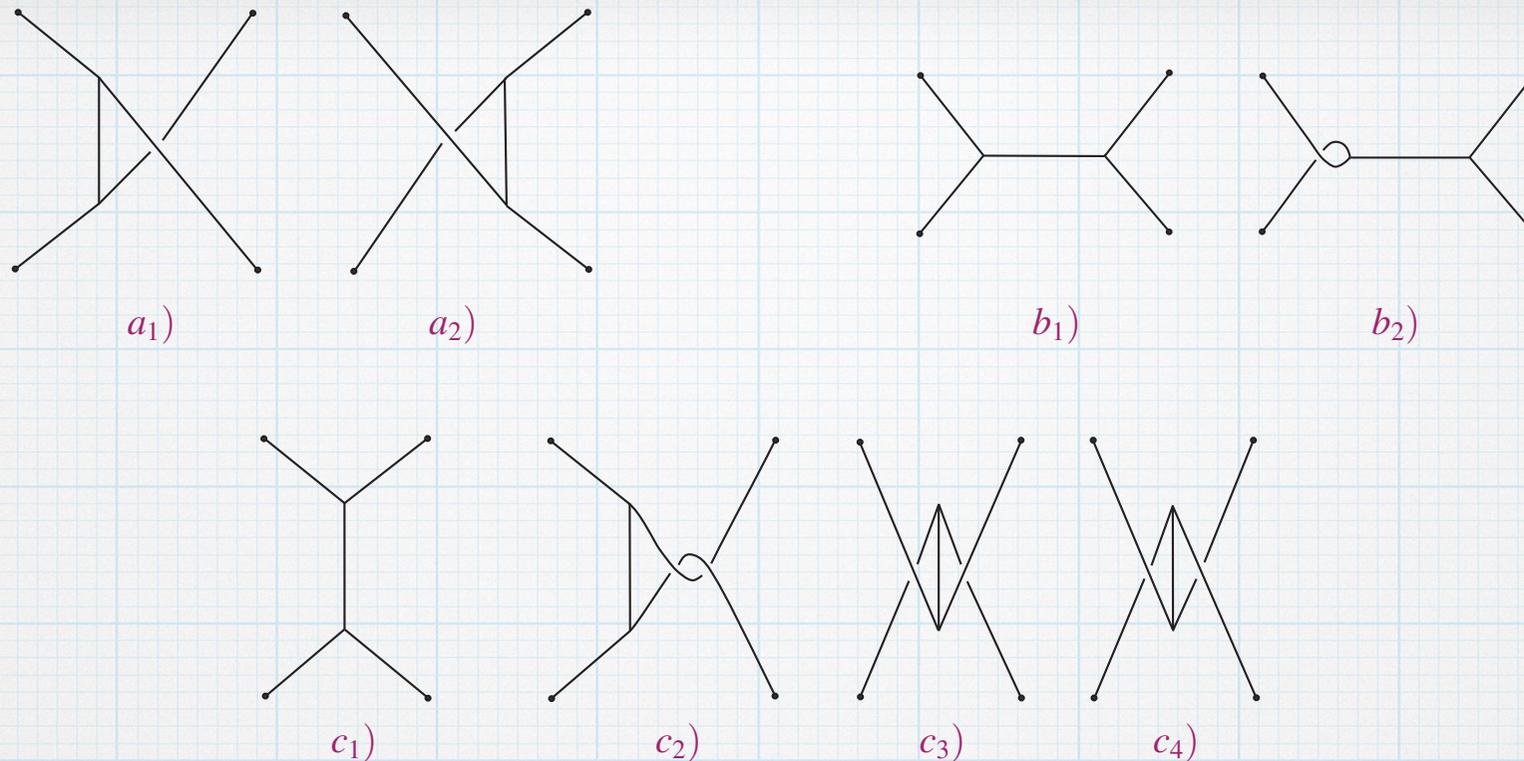
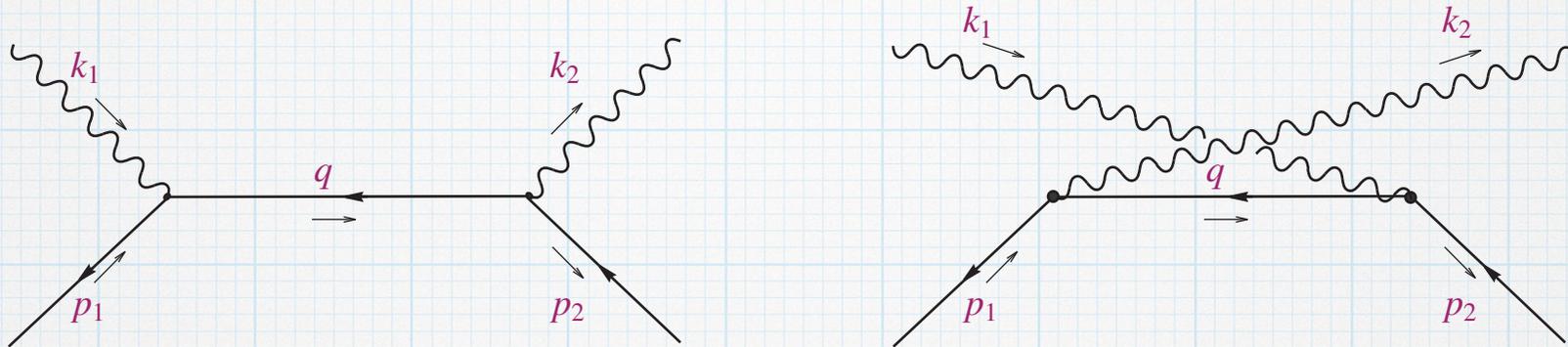


Рис. 5: Пример топологически неэквивалентных диаграмм для процесса  $2 \rightarrow 2$ . Точки на концах внешних линий означают, что концы приклеены к плоскости рисунка. Разрыв линии на третьей диаграмме означает, что линии, несущие импульсы  $p_1$  и  $p_2$  перекрещиваются (но не прерываются). Заметим, что здесь и далее мы для удобства будем рисовать и читать диаграммы слева направо, то есть влетающие частицы расположены слева, а вылетающие -- справа. Хотя последовательно было бы рисовать диаграммы справа налево в соответствии с вычислением матричных элементов, в которых начальное состояние соответствует кет-вектору (стоит справа).



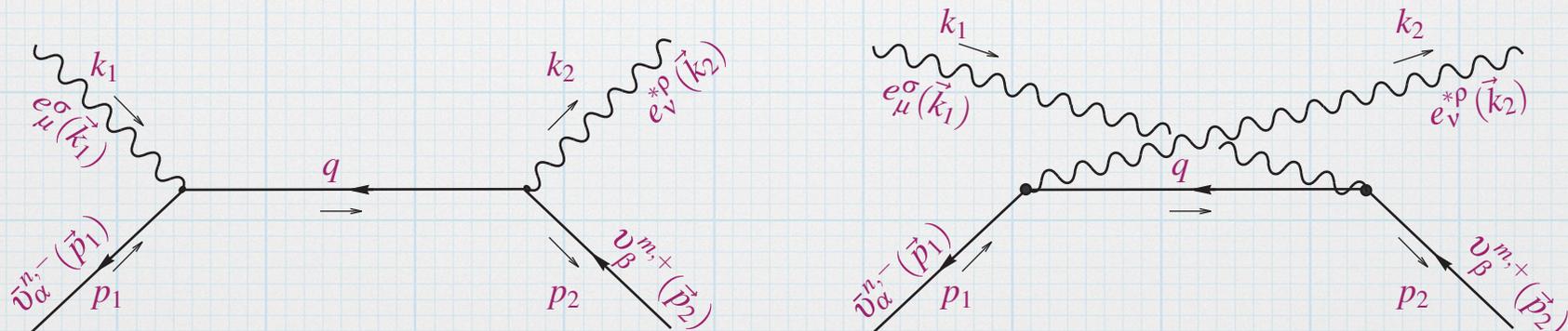
**Рис. 6:** Примеры топологически эквивалентных диаграмм для процесса  $2 \rightarrow 2$ . Расстановка импульсов и обозначения те же, что и на рис. 5. Диаграммы  $a_1$  и  $a_2$  эквивалентны, так как существует топологическое преобразование диаграммы  $a_2$ , -- поворот внутренней линии на  $180^\circ$  относительно оси, лежащей в плоскости рисунка и ортогональной к этой линии, -- переводящее эту диаграмму в  $a_1$ . Заметим, что это преобразование эквивалентно перестановке вершин диаграммы, которое в точности сокращает фактор  $1/n!$ , возникающий из разложения  $T$ -экспоненты (см. обсуждение в тексте). Диаграмма  $b_2$  переводится в диаграмму  $b_1$  путем закручивания левого конца внутренней линии при фиксированном правом конце. Это преобразование эквивалентно перестановке линий тождественных частиц и приводит к появлению произведения факториалов в формуле (31). Диаграммы  $c_1$  и  $c_2$  эквивалентны, так как внешние линии выходящих частиц переплетаются целое число раз. Диаграмма  $c_3$  переходит в  $c_1$ , а  $c_4$  -- в  $c_2$  (а значит, и в  $c_1$ ) путем того же преобразования, что переводит  $a_2$  в  $a_1$ .

2) Каждой линии (внутренней и внешней) приписать импульс.



3) Каждой внешней линии начального состояния приписать фактор  $v_{\sigma}^{-}(\mathbf{k}_{in})$ .

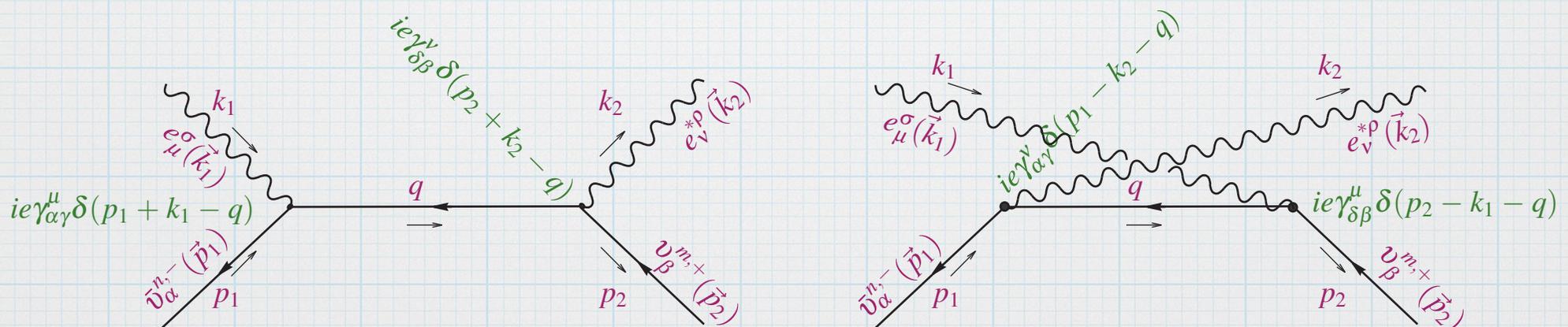
4) Каждой внешней линии конечного состояния приписать фактор  $v_{\rho}^{+}(\mathbf{k}_{out})$ .



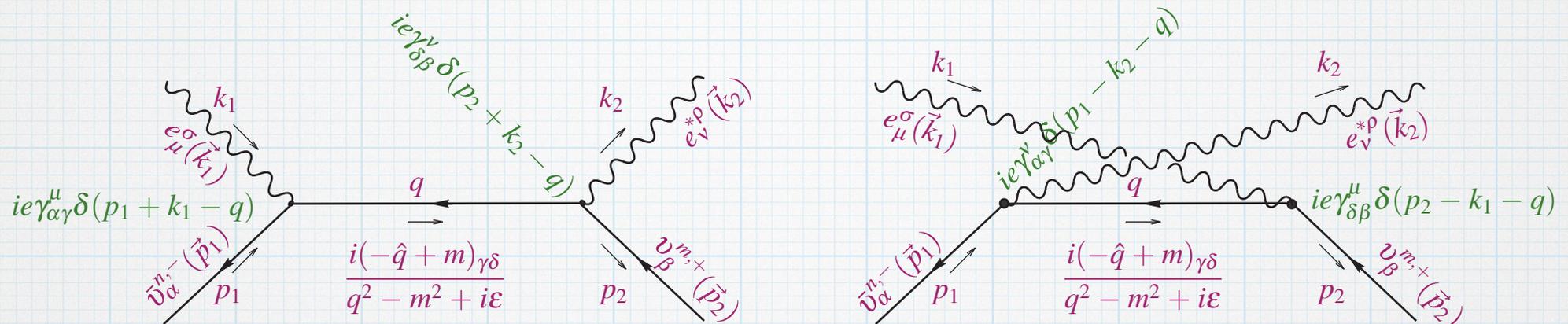
5) Каждой вершине сопоставить фактор

$$igO_\alpha \prod_k m_k! \delta(\sum p_j), \quad (31)$$

где  $p_j$  --- импульсы, входящие в вершину (с учетом направления),  $g$  --- константа связи,  $O_\alpha$  -- структура, присутствующая в лагранжиане (может зависеть от импульса, если лагранжиан взаимодействия содержит производные, или (и) быть матрицей),  $m_k$  -- число одинаковых полей  $k$ -го типа в вершине, например, для теории  $\phi^4$  произведение в (31) будет равно  $4!$ , для теории  $\phi^2\chi^2$  --  $2!2! = 4$ , для теории  $\phi^2\chi\chi^*$  --  $2!$  (так как комплексное поле  $\chi$  не тождественно  $\chi^*$ ).



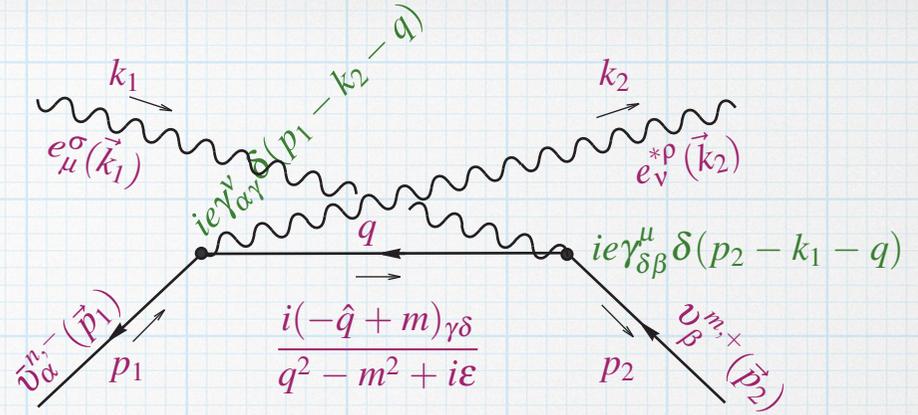
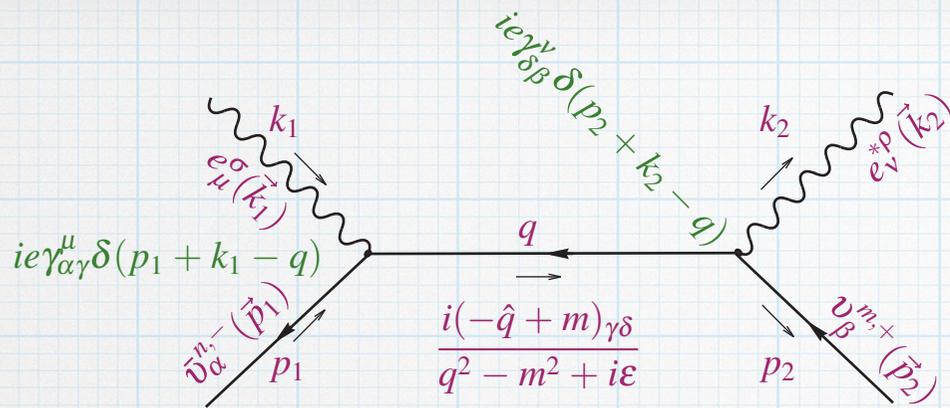
6) Каждой внутренней линии сопоставить фактор  $G_{\alpha\beta}(q_j)$ .



7) Для данной диаграммы перемножить все полученные в пунктах 3) - 6) факторы. При этом необходимо следовать правилам матричного умножения. Следует также учитывать, что элементы, соответствующие начальным состояниям следует располагать правее последующих элементов, а слева располагать элементы, соответствующие вылетающим частицам, что соответствует тому, что начальное состояние -- это кет-вектор (стоит справа), а конечное -- бра-вектор (стоит слева). В соответствии с нашим соглашением о том, что мы рисуем диаграммы слева направо (см. подпись к рис. 5) это означает, что, читая

диаграмму слева направо, мы выписываем произведение элементов в обратном порядке, справа налево. Кроме того, можно придерживаться правила, что выписывая элементы слева направо, следует двигаться против направления линий со стрелками. Чтобы не допустить ошибки можно явно восстановить все скрытые индексы (например, спинорные индексы  $(\alpha)$  у спинорных функций  $v_{\alpha}^{\pm, \sigma}$ ,  $\gamma$ -матриц  $(\gamma_{\alpha\beta}^{\mu})$  и т.п.). При этом необходимо следовать правилу, что индекс, соответствующий линии, входящей в вершину, должен совпадать с индексом структуры, соответствующей вершине. Затем расставить множители (их можно переставлять, так как при явно выписанном индексе множители представляют собой обычные числа) в таком порядке, чтобы одинаковые индексы соседствовали. После этого можно снова опустить повторяющиеся индексы, считая, что мы следуем правилам матричного умножения. Следующая цепочка демонстрирует сказанное:

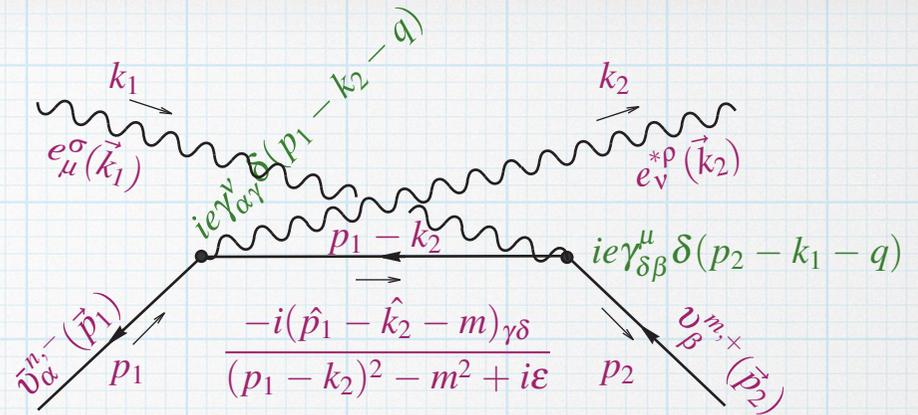
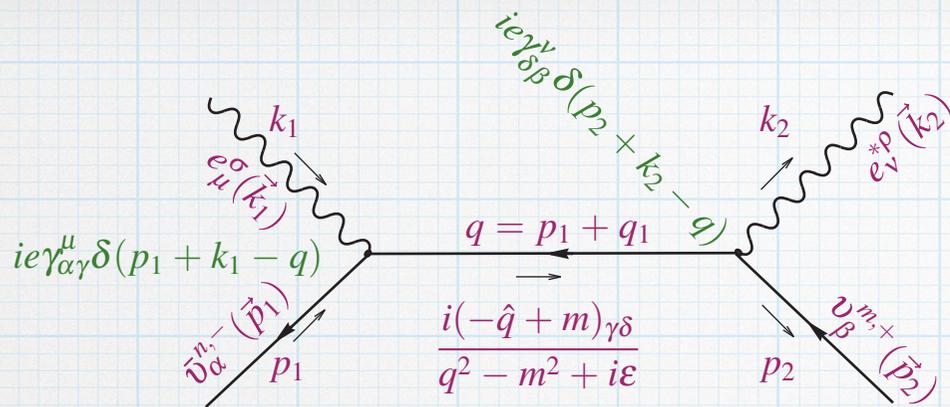
$$(\hat{k} - m)_{\beta\gamma} \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \bar{v}_{\alpha}^{+, \sigma} = \bar{v}_{\alpha}^{+, \sigma} \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} (\hat{k} - m)_{\beta\gamma} = \bar{v}^{+, \sigma} \gamma^{\mu} (\hat{k} - m). \quad (32)$$



$$\begin{aligned}
 & i^3 e^2 \delta(p_1 + k_1 - q) \delta(p_2 + k_2 - q) e_\mu^\sigma(\vec{k}_1) \bar{v}_\alpha^{n,-}(\vec{p}_1) \gamma_{\alpha\gamma}^\mu \times \\
 & \times \frac{(-\hat{q} + m)_{\gamma\delta}}{q^2 - m^2} \gamma_{\delta\beta}^\nu e_v^{*\rho}(\vec{k}_2) v_\beta^{m,+}(\vec{p}_2) = \\
 & -\frac{ie^2}{q^2 - m^2} \delta(p_1 + k_1 - q) \delta(p_2 + k_2 - q) \times \\
 & \times \bar{v}^{n,-}(\vec{p}_1) \hat{e}^\sigma(\vec{k}_1) (-\hat{q} + m) \hat{e}^{*\rho}(\vec{k}_2) v^{m,+}(\vec{p}_2) \quad (33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{ie^2}{q^2 - m^2} \delta(p_2 - k_1 - q) \delta(p_1 - k_2 - q) \times \\
 & \times \bar{v}^{n,-}(\vec{p}_1) \hat{e}^{*\rho}(\vec{k}_2) (-\hat{q} + m) \hat{e}^\sigma(\vec{k}_1) v^{m,+}(\vec{p}_2) \quad (34)
 \end{aligned}$$

- 8) Проинтегрировать по всем внутренним импульсам.
- 9) Умножить на  $(2\pi)^4$  для каждой вершины и на  $1/(2\pi)^4$  для каждого пропагатора. В принципе, эти факторы можно было бы включить в определение вершин и пропагаторов, но большинство из них, как легко видеть, сокращаются, и нет надобности их выписывать каждый раз (см. также обсуждение ниже).
- 10) **X** Умножить на  $-1$  для каждой замкнутой фермионной петли.  
**X** Умножить на  $-1$  если эта диаграмма отличается от другой диаграммы для данного процесса только перестановкой двух одних и тех же внешних фермионных линий, то есть линий, соответствующих одному и тому же типу частиц, но с учетом направления стрелки, например, линии входящего электрона и выходящего позитрона.



$$(+1) ((2\pi)^4)^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2} \times$$

$$\delta(p_2 + k_2 - q) \times \delta(p_1 + k_1 - q) \times$$

$$\times \bar{v}^{n,-}(\vec{p}_1) \hat{e}^\sigma(\vec{k}_1) (\hat{q} - m) \hat{e}^{*\rho}(\vec{k}_2) v^{m,+}(\vec{p}_2) =$$

$$(2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \frac{ie^2}{(p_1 + k_1)^2 - m^2} \times$$

$$\times \bar{v}^{n,-}(\vec{p}_1) \hat{e}^\sigma(\vec{k}_1) (\hat{p}_1 + \hat{k}_1 - m) \hat{e}^{*\rho}(\vec{k}_2) v^{m,+}(\vec{p}_2)$$

(35)

$$(+1) (2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \frac{ie^2}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} \times$$

$$\times \bar{v}^{n,-}(\vec{p}_1) \hat{e}^{*\rho}(\vec{k}_2) (\hat{p}_1 - \hat{k}_2 - m) \hat{e}^\sigma(\vec{k}_1) v^{m,+}(\vec{p}_2)$$

(36)

## 11) Умножить на симметричный фактор

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{\Xi \prod_v 2^\beta (k!)^{\alpha_k}}, \quad (37)$$

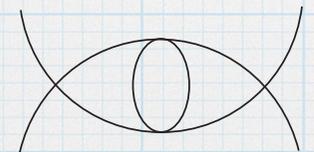
где произведение берется по всем вершинам,  $\alpha_k$  --- число пар вершин, связанных  $k$  одинаковыми самосопряженными линиями,  $\beta$  --- число линий, связывающих вершину саму с собой<sup>2</sup>,  $\Xi$  --- число перестановок вершин, которые при всех фиксированных линиях оставляют диаграмму неизменной.



$$\Xi = 1, \alpha_2 = 1, \beta = 0, S = 2!$$



$$\Xi = 1, \alpha_3 = 1, \beta = 0, S = 3!$$



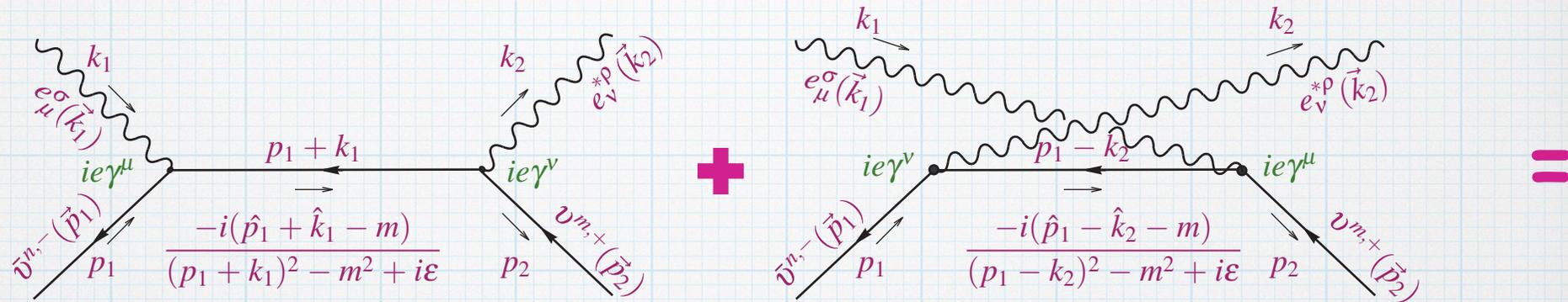
$$\Xi = 2, \alpha_2 = 1, \beta = 0, S = 4$$



$$\Xi = 1, \alpha = 0, \beta = 1, S = 2$$

<sup>2</sup>В случае записи лагранжиана в виде нормального произведения таких вершин нет.

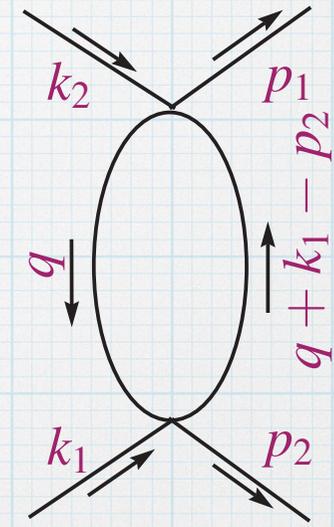
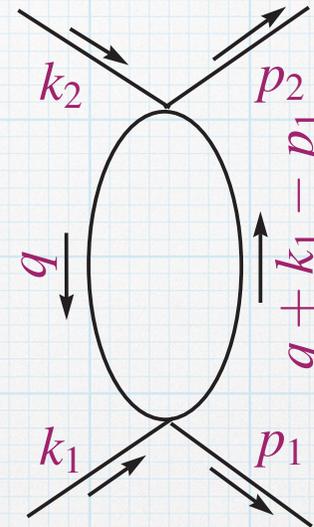
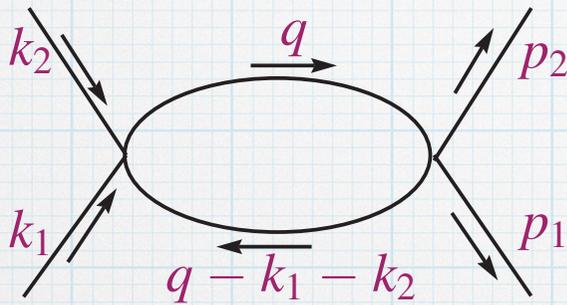
12) Искомая амплитуда равна сумме по всем диграммам (пункт 1)) выражений, полученных в пунктах 2) -- 11) для каждой диаграммы.



$$\begin{aligned}
 \langle e_{m, \vec{p}_2}^+, \gamma_{\rho, \vec{k}_2} | S | e_{n, \vec{p}_1}^+, \gamma_{\sigma, \vec{k}_1} \rangle_2 &= ie^2 (2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \times \\
 &\times \left( \bar{v}^{n,-}(\vec{p}_1) \hat{e}^\sigma(\vec{k}_1) \frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 - m}{(p_1 + k_1)^2 - m^2} \hat{e}^{*\rho}(\vec{k}_2) v^{m,+}(\vec{p}_2) + \right. \\
 &\left. + \bar{v}^{n,-}(\vec{p}_1) \hat{e}^{*\rho}(\vec{k}_2) \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 - m}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} \hat{e}^\sigma(\vec{k}_1) v^{m,+}(\vec{p}_2) \right) \quad (38)
 \end{aligned}$$

⇒ Еще пример:  $2 \rightarrow 2$  в теории  $\phi^4$  во втором порядке.

✗ Существует три топологически неэквивалентные диаграммы («рыбы»), рассмотренные ранее :



- ✗ Соответствующие выражения выписываем по правилам Фейнмана
- ✗ Не забываем о симметричном факторе  $1/2!$
- ✗ После снятия интегрирования по внутренним импульсам с помощью  $\delta$ -функций получаем,

$$S_{(1)} = \frac{\lambda^2}{2} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - m^2 + i\varepsilon)((q - k_1 - k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon)}$$

$$S_{(2)} = \frac{\lambda^2}{2} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - m^2 + i\varepsilon)((q + k_1 - p_1)^2 - m^2 + i\varepsilon)}$$

$$S_{(3)} = \frac{\lambda^2}{2} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - m^2 + i\varepsilon)((q + k_1 - p_2)^2 - m^2 + i\varepsilon)}$$

✗ Оставшиеся интегрирования мы рассмотрим в дальнейшем.

✗ Оканчательное выражение для амплитуды рассеяние  $2 \rightarrow 2$  вплоть до второго порядка теории возмущений будет

$$\langle 2|S|2 \rangle = -i\lambda (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) + \sum_{\alpha=1}^3 S_{(\alpha)} + \mathcal{O}(\lambda^3), \quad (39)$$

где мы отбросили тривиальное слагаемое, соответствующие нулевому порядку теории возмущений  $S_0 = 1$ , а первое слагаемое соответствует первому порядку теории возмущений.

## Обсуждение

- Из правил Фейнмана следует, что внутренним линиям нужно сопоставлять пропагатор, при этом импульс, протекающий по пропагатору не удовлетворяет дисперсионному соотношению  $q^2 = m^2$ , или, как говорят, *не лежит на массовой поверхности*, то есть такая линия не соответствует *реальной частице*, в противоположность внешней линии. В связи с этим внешние линии называют линиями *реальных частиц*, а внутренние --- *виртуальных частиц*.
- Закон сохранения энергии-импульса выполняется во всех взаимодействиях как реальных, так и виртуальных частиц!!!** Но энергия виртуальных частиц может быть отрицательна.
- Заметим, что, вообще говоря, не обязательно рассматривать диаграммы, содержащие в качестве внешних только реальные частицы. Можно рассматривать и диаграммы, у которых все или несколько внешних частиц виртуальные, то есть сопоставлять внешним линиям пропада-

торы. Такие диаграммы можно рассматривать как поддиаграммы диаграмм, описывающих процессы с участием только реальных частиц.

 Кроме того, такие диаграммы описывают более информативные, нежели элементы  $S$ -матрицы, величины (поскольку на внешние импульсы не наложены условия *массовой поверхности*) называемые *полными функциями Грина*. Мы будем рассматривать эти функции в дальнейшем.

 Часть интегралов по внутренним импульсам снимется за счет  $\delta$ -функций. При этом должна остаться одна  $\delta$ -функция, выражающая общий закон сохранения импульса.

 Легко, однако, убедиться, что число оставшихся интегралов по внутренним импульсам будет равно числу независимых петель данной диаграммы.

 Поэтому диаграммы, не содержащие петель, не будут содержать вообще интегралов и будут являться дробно-рациональными функциями

внешних импульсов. Такие диаграммы называются *древесными*, а соответствующее приближение --- *древесным* или *Борновским*.

 Из этого же наблюдения следует, что все факторы  $(2\pi)^4$  в вершинах взаимодействия сократятся с  $1/(2\pi)^4$  из пропагаторов за исключением одного фактора  $(2\pi)^4$ , который принято оставлять у  $\delta$ -функции, выражающей общий закон сохранения импульсов, а факторов  $1/(2\pi)^4$  будет ровно столько, сколько петлевых интегралов, и их обычно включают в меру интегрирования, как это сделано в наших примерах.