Теория вероятностей. Лекция 08.04. Математическое ожидание

Д. А. Шабанов

мех-мат МГУ, второй курс

08.04.2020

Математическое ожидание

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, а ξ — случайная величина на нем. Как можно определить математическое ожидание $\mathsf{E}\,\xi$?

Математическое ожидание

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, а ξ — случайная величина на нем. Как можно определить математическое ожидание $\mathsf{E}\,\xi$? Проведем построение математического ожидания в три этапа.

I. Простые случайные величины

Пусть ξ — простая случайная величина, т.е.

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot I_{A_k}(\omega),$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — все различные значения ξ, а события $A_1, \ldots, A_n$ образуют разбиение Ω. Таким образом, $A_k = \{\xi = x_k\}$.

I. Простые случайные величины

Пусть ξ — простая случайная величина, т.е.

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot I_{A_k}(\omega),$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — все различные значения ξ, а события $A_1, \ldots, A_n$ образуют разбиение Ω. Таким образом, $A_k = \{\xi = x_k\}$.

Определение

Математическим ожиданием простой случайной величины ξ называется величина

$$\mathsf{E}\,\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \mathsf{P}(A_k).$$

I. Простые случайные величины

Пусть ξ — простая случайная величина, т.е.

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot I_{A_k}(\omega),$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — все различные значения ξ, а события $A_1, \ldots, A_n$ образуют разбиение Ω. Таким образом, $A_k = \{\xi = x_k\}$.

Определение

Математическим ожиданием простой случайной величины ξ называется величина

$$\mathsf{E}\,\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \mathsf{P}(A_k).$$

Наблюдение: $\mathsf{E}\,I_A = \mathsf{P}(A)$.

Свойства МО для простых случайных величин

Свойство (1. Линейность)

Если ξ *и* η *— простые случайные величины,* $a, b \in \mathbb{R}$, *то*

$$\mathsf{E}(a\xi + b\eta) = a\,\mathsf{E}\,\xi + b\,\mathsf{E}\,\eta.$$

Свойства МО для простых случайных величин

Свойство (1. Линейность)

Если ξ *и* η *— простые случайные величины,* $a, b \in \mathbb{R}$*, то*

$$\mathsf{E}(a\xi + b\eta) = a\,\mathsf{E}\,\xi + b\,\mathsf{E}\,\eta.$$

Доказательство. Пусть имеют место представления:

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot I_{A_k}, \quad \eta = \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot I_{B_j}.$$

Свойства МО для простых случайных величин

Свойство (1. Линейность)

Если ξ и η — простые случайные величины, $a, b \in \mathbb{R}$, то

$$\mathsf{E}(a\xi + b\eta) = a\,\mathsf{E}\,\xi + b\,\mathsf{E}\,\eta.$$

Доказательство. Пусть имеют место представления:

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot I_{A_k}, \quad \eta = \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot I_{B_j}.$$

Тогда случайная величина $a\xi + b\eta$ принимает значения во множестве $Z = \{ax_k + by_j : \ k = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, m\}$. Обозначим через $z_1, \ldots, z_l$ все различные значения $a\xi + b\eta$. Обозначив через $C_{kj} = A_k \cap B_j$, получаем:

Доказательство свойства 1

$$\mathsf{E}(a\xi + b\eta) = \sum_{i=1}^{l} z_i \cdot \mathsf{P}(a\xi + b\eta = z_i) = \sum_{i=1}^{l} z_i \sum_{k,j: ax_k + by_j = z_i} \mathsf{P}(C_{kj}) =$$

Доказательство свойства 1

$$\mathsf{E}(a\xi + b\eta) = \sum_{i=1}^{l} z_i \cdot \mathsf{P}(a\xi + b\eta = z_i) = \sum_{i=1}^{l} z_i \sum_{k,j: ax_k + by_j = z_i} \mathsf{P}(C_{kj}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \sum_{k,j: ax_k + by_j = z_i} (ax_k + by_j)\mathsf{P}(C_{kj}) =$$

Доказательство свойства 1

$$\mathsf{E}(a\xi + b\eta) = \sum_{i=1}^{l} z_i \cdot \mathsf{P}(a\xi + b\eta = z_i) = \sum_{i=1}^{l} z_i \sum_{k,j: ax_k + by_j = z_i} \mathsf{P}(C_{kj}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \sum_{k,j: ax_k + by_j = z_i} (ax_k + by_j)\mathsf{P}(C_{kj}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (ax_k + by_j)\mathsf{P}(A_k \cap B_j) =$$

Доказательство свойства 1

$$\mathsf{E}(a\xi + b\eta) = \sum_{i=1}^{l} z_i \cdot \mathsf{P}(a\xi + b\eta = z_i) = \sum_{i=1}^{l} z_i \sum_{k,j: ax_k + by_j = z_i} \mathsf{P}(C_{kj}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \sum_{k,j: ax_k + by_j = z_i} (ax_k + by_j)\mathsf{P}(C_{kj}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (ax_k + by_j)\mathsf{P}(A_k \cap B_j) =$$

$$= a\sum_{k=1}^{n} x_k \mathsf{P}(A_k) + b\sum_{j=1}^{m} y_j \mathsf{P}(B_j) = a\,\mathsf{E}\,\xi + b\,\mathsf{E}\,\eta.$$

$\square$

Доказательство свойства 1

$$\mathsf{E}(a\xi + b\eta) = \sum_{i=1}^{l} z_i \cdot \mathsf{P}(a\xi + b\eta = z_i) = \sum_{i=1}^{l} z_i \sum_{k,j: ax_k + by_j = z_i} \mathsf{P}(C_{kj}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \sum_{k,j: ax_k + by_j = z_i} (ax_k + by_j)\mathsf{P}(C_{kj}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (ax_k + by_j)\mathsf{P}(A_k \cap B_j) =$$

$$= a\sum_{k=1}^{n} x_k \mathsf{P}(A_k) + b\sum_{j=1}^{m} y_j \mathsf{P}(B_j) = a\,\mathsf{E}\,\xi + b\,\mathsf{E}\,\eta.$$

$\square$

Следствие

Если $\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot I_{A_k}$, где $x_1, \ldots, x_n$ — любые числа, а $A_1, \ldots, A_n$ — любые события, то $\mathsf{E}\,\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \mathsf{P}(A_k)$.

Свойства МО для простых случайных величин

Свойство (2)

Если $\xi \geqslant 0$, *то* $\mathsf{E}\,\xi \geqslant 0$.

Свойства МО для простых случайных величин

Свойство (2)

Если $\xi \geqslant 0$, *то* $\mathsf{E}\,\xi \geqslant 0$.

Доказательство.

Если $\xi \geqslant 0$, то все ее значения $x_k \geqslant 0$. Значит, $\mathsf{E}\,\xi \geqslant 0$. □

Свойства МО для простых случайных величин

Свойство (2)

Если $\xi \geqslant 0$, *то* $\mathsf{E}\,\xi \geqslant 0$.

Доказательство.

Если $\xi \geqslant 0$, то все ее значения $x_k \geqslant 0$. Значит, $\mathsf{E}\,\xi \geqslant 0$. □

Свойство (3. Сохранение отношения порядка)

Если $\xi \geqslant \eta$ *(т.е. для любого* $\omega \in \Omega$ *выполнено* $\xi(\omega) \geqslant \eta(\omega)$*), то* $\mathsf{E}\,\xi \geqslant \mathsf{E}\,\eta$.

Свойства МО для простых случайных величин

Свойство (2)

Если $\xi \geqslant 0$, *то* $\mathsf{E}\,\xi \geqslant 0$.

Доказательство.

Если $\xi \geqslant 0$, то все ее значения $x_k \geqslant 0$. Значит, $\mathsf{E}\,\xi \geqslant 0$. □

Свойство (3. Сохранение отношения порядка)

Если $\xi \geqslant \eta$ *(т.е. для любого* $\omega \in \Omega$ *выполнено* $\xi(\omega) \geqslant \eta(\omega)$*), то* $\mathsf{E}\,\xi \geqslant \mathsf{E}\,\eta$.

Доказательство.

Заметим, что $\xi - \eta \geqslant 0$. Применяя свойства 1 и 2, получаем:

$$0 \leqslant \mathsf{E}(\xi - \eta) = \mathsf{E}\,\xi - \mathsf{E}\,\eta.$$

□

II. Неотрицательные случайные величины

Пусть $\xi \geqslant 0$ — неотрицательная случайная величина. Рассмотрим последовательность простых неотрицательных случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, которая монотонно к ней сходится: $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$.

II. Неотрицательные случайные величины

Пусть $\xi \geqslant 0$ — неотрицательная случайная величина. Рассмотрим последовательность простых неотрицательных случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, которая монотонно к ней сходится: $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$.

Определение

Математическим ожиданием простой случайной величины ξ называется величина

$$\mathsf{E}\,\xi = \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n.$$

II. Неотрицательные случайные величины

Пусть $\xi \geqslant 0$ — неотрицательная случайная величина. Рассмотрим последовательность простых неотрицательных случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, которая монотонно к ней сходится: $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$.

Определение

Математическим ожиданием простой случайной величины ξ называется величина

$$\mathsf{E}\,\xi = \lim_{n \to +\infty} \mathsf{E}\,\xi_n.$$

Замечание (1)

Заметим, что в силу свойства 3 для простых случайных величин последовательность $\mathsf{E}\,\xi_n$ не убывает, а потому имеет предел. Правда, он может быть равен $+\infty$.

II. Неотрицательные случайные величины

Пусть $\xi \geqslant 0$ — неотрицательная случайная величина. Рассмотрим последовательность простых неотрицательных случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, которая монотонно к ней сходится: $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$.

Определение

Математическим ожиданием простой случайной величины ξ называется величина

$$\mathsf{E}\,\xi = \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n.$$

Замечание (1)

Заметим, что в силу свойства 3 для простых случайных величин последовательность $\mathsf{E}\,\xi_n$ не убывает, а потому имеет предел. Правда, он может быть равен $+\infty$.

Замечание (2)

Необходимо проверить, что значение $\lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n$ не зависит от выбора последовательности $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, сходящейся к ξ.

Проверка корректности определения

Лемма

Пусть $\xi \geqslant 0$ *— неотрицательная случайная величина. Пусть последовательность простых неотрицательных случайных величин* $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *монотонно к ней сходится:* $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$. *Пусть* η *— простая неотрицательная с.в. с условием* $\eta \leqslant \xi$. *Тогда*

$$\mathsf{E}\,\eta \leqslant \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n.$$

Проверка корректности определения

Лемма

Пусть $\xi \geqslant 0$ — неотрицательная случайная величина. Пусть последовательность простых неотрицательных случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ монотонно к ней сходится: $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$. Пусть η — простая неотрицательная с.в. с условием $\eta \leqslant \xi$. Тогда

$$\mathsf{E}\,\eta \leqslant \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

Проверка корректности определения

Лемма

Пусть $\xi \geqslant 0$ — неотрицательная случайная величина. Пусть последовательность простых неотрицательных случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ монотонно к ней сходится: $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$. Пусть η — простая неотрицательная с.в. с условием $\eta \leqslant \xi$. Тогда

$$\mathsf{E}\,\eta \leqslant \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Обозначим $A_n = \{\xi_n \geqslant \eta - \varepsilon\}$. Тогда в силу условия $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$ будет выполнено $A_n \uparrow \Omega$ при $n \to +\infty$.

Проверка корректности определения

Лемма

Пусть $\xi \geqslant 0$ *— неотрицательная случайная величина. Пусть последовательность простых неотрицательных случайных величин* $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *монотонно к ней сходится:* $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$. *Пусть* η *— простая неотрицательная с.в. с условием* $\eta \leqslant \xi$. *Тогда*

$$\mathsf{E}\,\eta \leqslant \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Обозначим $A_n = \{\xi_n \geqslant \eta - \varepsilon\}$. Тогда в силу условия $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$ будет выполнено $A_n \uparrow \Omega$ при $n \to +\infty$. В силу непрерывности вероятностной меры получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \mathsf{P}(A_n) = 1.$$

Проверка корректности определения

Лемма

Пусть $\xi \geqslant 0$ — неотрицательная случайная величина. Пусть последовательность простых неотрицательных случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ монотонно к ней сходится: $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$. Пусть η — простая неотрицательная с.в. с условием $\eta \leqslant \xi$. Тогда

$$\mathsf{E}\,\eta \leqslant \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Обозначим $A_n = \{\xi_n \geqslant \eta - \varepsilon\}$. Тогда в силу условия $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$ будет выполнено $A_n \uparrow \Omega$ при $n \to +\infty$. В силу непрерывности вероятностной меры получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \mathsf{P}(A_n) = 1.$$

Далее,

$$\xi_n = \xi_n I_{A_n} + \xi_n I_{\overline{A}_n} \geqslant \xi_n I_{A_n} \geqslant (\eta - \varepsilon) I_{A_n}.$$

Проверка корректности определения

Лемма

Пусть $\xi \geqslant 0$ — неотрицательная случайная величина. Пусть последовательность простых неотрицательных случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ монотонно к ней сходится: $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$. Пусть η — простая неотрицательная с.в. с условием $\eta \leqslant \xi$. Тогда

$$\mathsf{E}\,\eta \leqslant \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Обозначим $A_n = \{\xi_n \geqslant \eta - \varepsilon\}$. Тогда в силу условия $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$ будет выполнено $A_n \uparrow \Omega$ при $n \to +\infty$. В силу непрерывности вероятностной меры получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \mathsf{P}(A_n) = 1.$$

Далее,

$$\xi_n = \xi_n I_{A_n} + \xi_n I_{\overline{A}_n} \geqslant \xi_n I_{A_n} \geqslant (\eta - \varepsilon) I_{A_n}.$$

Следовательно,

Доказательство леммы

$$\mathsf{E}\,\xi_n \geqslant \mathsf{E}((\eta-\varepsilon)I_{A_n}) = \mathsf{E}\,\eta - \mathsf{E}(\eta I_{\overline{A}_n}) - \varepsilon\,\mathsf{E}\,I_{A_n} \geqslant$$

Доказательство леммы

$$\mathsf{E}\,\xi_n \geqslant \mathsf{E}((\eta-\varepsilon)I_{A_n}) = \mathsf{E}\,\eta - \mathsf{E}(\eta I_{\overline{A}_n}) - \varepsilon\,\mathsf{E}\,I_{A_n} \geqslant$$

$$\geqslant \mathsf{E}\,\eta - C\cdot\mathsf{P}(\overline{A}_n) - \varepsilon,$$

где $C = \max\limits_{\omega\in\Omega}\eta(\omega)$.

Доказательство леммы

$$\mathsf{E}\,\xi_n \geqslant \mathsf{E}((\eta - \varepsilon)I_{A_n}) = \mathsf{E}\,\eta - \mathsf{E}(\eta I_{\overline{A}_n}) - \varepsilon\,\mathsf{E}\,I_{A_n} \geqslant$$

$$\geqslant \mathsf{E}\,\eta - C \cdot \mathsf{P}(\overline{A}_n) - \varepsilon,$$

где $C = \max\limits_{\omega\in\Omega} \eta(\omega)$. Учитывая, что $\mathsf{P}(\overline{A}_n) \to 0$, получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \geqslant \mathsf{E}\,\eta - \varepsilon.$$

Доказательство леммы

$$\mathsf{E}\,\xi_n \geqslant \mathsf{E}((\eta-\varepsilon)I_{A_n}) = \mathsf{E}\,\eta - \mathsf{E}(\eta I_{\overline{A}_n}) - \varepsilon\,\mathsf{E}\,I_{A_n} \geqslant$$

$$\geqslant \mathsf{E}\,\eta - C\cdot \mathsf{P}(\overline{A}_n) - \varepsilon,$$

где $C = \max\limits_{\omega\in\Omega}\eta(\omega)$. Учитывая, что $\mathsf{P}(\overline{A}_n)\to 0$, получаем, что

$$\varliminf_{n\to+\infty}\mathsf{E}\,\xi_n \geqslant \mathsf{E}\,\eta - \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, получаем искомое неравенство

$$\varliminf_{n\to+\infty}\mathsf{E}\,\xi_n \geqslant \mathsf{E}\,\eta.$$

$\square$

Доказательство леммы

$$\mathsf{E}\,\xi_n \geqslant \mathsf{E}((\eta-\varepsilon)I_{A_n}) = \mathsf{E}\,\eta - \mathsf{E}(\eta I_{\overline{A}_n}) - \varepsilon\,\mathsf{E}\,I_{A_n} \geqslant$$

$$\geqslant \mathsf{E}\,\eta - C\cdot \mathsf{P}(\overline{A}_n) - \varepsilon,$$

где $C = \max\limits_{\omega\in\Omega}\eta(\omega)$. Учитывая, что $\mathsf{P}(\overline{A}_n)\to 0$, получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty}\mathsf{E}\,\xi_n \geqslant \mathsf{E}\,\eta - \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, получаем искомое неравенство

$$\lim_{n\to+\infty}\mathsf{E}\,\xi_n \geqslant \mathsf{E}\,\eta.$$

□

Следствие

Определение математического ожидания для неотрицательных случайных величин корректно.

Доказательство корректности определения

Доказательство.

Пусть $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$ и $0 \leqslant \eta_n \uparrow \xi$ — две последовательности простых неотрицательных случайных величин, монотонно сходящихся к ξ.

Доказательство корректности определения

Доказательство.

Пусть $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$ и $0 \leqslant \eta_n \uparrow \xi$ — две последовательности простых неотрицательных случайных величин, монотонно сходящихся к ξ. Тогда согласно лемме для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем неравенство

$$\lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \geqslant \mathsf{E}\,\eta_m.$$

Значит, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \geqslant \lim\limits_{m\to+\infty} \mathsf{E}\,\eta_m$.

Доказательство корректности определения

Доказательство.

Пусть $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$ и $0 \leqslant \eta_n \uparrow \xi$ — две последовательности простых неотрицательных случайных величин, монотонно сходящихся к ξ. Тогда согласно лемме для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем неравенство

$$\lim_{n \to +\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \geqslant \mathsf{E}\,\eta_m.$$

Значит, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \geqslant \lim\limits_{m \to +\infty} \mathsf{E}\,\eta_m$. С другой стороны, поменяв последовательности местами, получаем обратное неравенство: $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \leqslant \lim\limits_{m \to +\infty} \mathsf{E}\,\eta_m$.

Доказательство корректности определения

Доказательство.

Пусть $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$ и $0 \leqslant \eta_n \uparrow \xi$ — две последовательности простых неотрицательных случайных величин, монотонно сходящихся к ξ. Тогда согласно лемме для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем неравенство

$$\lim_{n \to +\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \geqslant \mathsf{E}\,\eta_m.$$

Значит, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \geqslant \lim\limits_{m \to +\infty} \mathsf{E}\,\eta_m$. С другой стороны, поменяв последовательности местами, получаем обратное неравенство: $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \leqslant \lim\limits_{m \to +\infty} \mathsf{E}\,\eta_m$. Значит,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathsf{E}\,\xi_n = \lim_{m \to +\infty} \mathsf{E}\,\eta_m.$$

□

Эквивалентное определение

Замечание (3)

Математическое ожидание для неотрицательных с.в. можно было определить следующим образом:

$$\mathsf{E}\,\xi = \sup_{\zeta \in \mathcal{G}} \mathsf{E}\,\zeta,$$

где $\mathcal{G}$ — множество простых неотрицательных с.в., которые не превосходят ξ.

III. Произвольные случайные величины

Пусть ξ — произвольная случайная величина.

III. Произвольные случайные величины

Пусть ξ — произвольная случайная величина. Рассмотрим

$$\xi^+ = \max(\xi, 0); \;\; \xi^- = \max(-\xi, 0).$$

III. Произвольные случайные величины

Пусть ξ — произвольная случайная величина. Рассмотрим

$$\xi^+ = \max(\xi, 0); \;\; \xi^- = \max(-\xi, 0).$$

Это неотрицательные случайные величины, при этом $\xi = \xi^+ - \xi^-$.

III. Произвольные случайные величины

Пусть ξ — произвольная случайная величина. Рассмотрим

$$\xi^+ = \max(\xi, 0); \ \ \xi^- = \max(-\xi, 0).$$

Это неотрицательные случайные величины, при этом $\xi = \xi^+ - \xi^-$.

Определение

1) Если $\mathsf{E}\,\xi^+ < +\infty$ *и* $\mathsf{E}\,\xi^- < +\infty$, *то математическим ожиданием случайной величины* ξ *назовем*

$$\mathsf{E}\,\xi = \mathsf{E}\,\xi^+ - \mathsf{E}\,\xi^-.$$

III. Произвольные случайные величины

Пусть ξ — произвольная случайная величина. Рассмотрим

$$\xi^+ = \max(\xi, 0); \;\; \xi^- = \max(-\xi, 0).$$

Это неотрицательные случайные величины, при этом $\xi = \xi^+ - \xi^-$.

Определение

1) Если $\mathsf{E}\,\xi^+ < +\infty$ *и* $\mathsf{E}\,\xi^- < +\infty$, *то математическим ожиданием случайной величины* ξ *назовем*

$$\mathsf{E}\,\xi = \mathsf{E}\,\xi^+ - \mathsf{E}\,\xi^-.$$

2) Если $\mathsf{E}\,\xi^+ = +\infty$ *и* $\mathsf{E}\,\xi^- < +\infty$, *то будем считать, что*

$$\mathsf{E}\,\xi = +\infty.$$

III. Произвольные случайные величины

Пусть ξ — произвольная случайная величина. Рассмотрим

$$\xi^+ = \max(\xi, 0);\ \ \xi^- = \max(-\xi, 0).$$

Это неотрицательные случайные величины, при этом $\xi = \xi^+ - \xi^-$.

Определение

1) Если $\mathsf{E}\,\xi^+ < +\infty$ *и* $\mathsf{E}\,\xi^- < +\infty$, *то математическим ожиданием случайной величины* ξ *назовем*

$$\mathsf{E}\,\xi = \mathsf{E}\,\xi^+ - \mathsf{E}\,\xi^-.$$

2) Если $\mathsf{E}\,\xi^+ = +\infty$ *и* $\mathsf{E}\,\xi^- < +\infty$, *то будем считать, что*

$$\mathsf{E}\,\xi = +\infty.$$

3) Если $\mathsf{E}\,\xi^+ < +\infty$ *и* $\mathsf{E}\,\xi^- = +\infty$, *то будем считать, что*

$$\mathsf{E}\,\xi = -\infty.$$

III. Произвольные случайные величины

Пусть ξ — произвольная случайная величина. Рассмотрим

$$\xi^+ = \max(\xi, 0); \;\; \xi^- = \max(-\xi, 0).$$

Это неотрицательные случайные величины, при этом $\xi = \xi^+ - \xi^-$.

Определение

1) Если $\mathsf{E}\,\xi^+ < +\infty$ и $\mathsf{E}\,\xi^- < +\infty$, то математическим ожиданием случайной величины ξ назовем

$$\mathsf{E}\,\xi = \mathsf{E}\,\xi^+ - \mathsf{E}\,\xi^-.$$

2) Если $\mathsf{E}\,\xi^+ = +\infty$ и $\mathsf{E}\,\xi^- < +\infty$, то будем считать, что

$$\mathsf{E}\,\xi = +\infty.$$

3) Если $\mathsf{E}\,\xi^+ < +\infty$ и $\mathsf{E}\,\xi^- = +\infty$, то будем считать, что

$$\mathsf{E}\,\xi = -\infty.$$

4) Если $\mathsf{E}\,\xi^+ = +\infty$ и $\mathsf{E}\,\xi^- = +\infty$, то математическое ожидание случайной величины ξ не определено.

Замечание (4)

Математическое ожидание случайной величины ξ *конечно* $\iff$ *математическое ожидание случайной величины* $|\xi|$ *конечно.*

Замечания

Замечание (4)

Математическое ожидание случайной величины ξ конечно $\iff$ математическое ожидание случайной величины $|\xi|$ конечно.

Замечание (5)

Математическое ожидание — это интеграл Лебега по вероятностной мере P*. В интегральном виде его принято записывать следующим образом:*

$$\mathsf{E}\,\xi = \int\limits_{\Omega} \xi d\mathsf{P} = |\textit{или}| = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\mathsf{P}(d\omega).$$

Замечания

Замечание (4)

Математическое ожидание случайной величины ξ *конечно* $\iff$ *математическое ожидание случайной величины* $|\xi|$ *конечно.*

Замечание (5)

Математическое ожидание — это интеграл Лебега по вероятностной мере P. *В интегральном виде его принято записывать следующим образом:*

$$\mathsf{E}\,\xi = \int\limits_{\Omega} \xi d\mathsf{P} = |\text{или}| = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\mathsf{P}(d\omega).$$

Замечание (6)

Множество случайных величин с конечным математическим ожиданием образует пространство $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Свойства математического ожидания

Свойство (1. Вынос константы)

Пусть $\mathsf{E}\,\xi$ *конечно и* $c \in \mathbb{R}$. *Тогда* $\mathsf{E}(c\xi)$ *тоже конечно и*

$$\mathsf{E}(c\xi) = c\,\mathsf{E}\,\xi.$$

Свойства математического ожидания

Свойство (1. Вынос константы)

Пусть $\mathsf{E}\,\xi$ *конечно и* $c \in \mathbb{R}$. *Тогда* $\mathsf{E}(c\xi)$ *тоже конечно и*

$$\mathsf{E}(c\xi) = c\,\mathsf{E}\,\xi.$$

Доказательство свойства (1). Если ξ — простая случайная величина, то все уже доказано.

Свойства математического ожидания

Свойство (1. Вынос константы)

Пусть $\mathsf{E}\,\xi$ *конечно и* $c \in \mathbb{R}$. *Тогда* $\mathsf{E}(c\xi)$ *тоже конечно и*

$$\mathsf{E}(c\xi) = c\,\mathsf{E}\,\xi.$$

Доказательство свойства (1). Если ξ — простая случайная величина, то все уже доказано.

Если $\xi \geqslant 0$ — неотрицательная случайная величина, то рассмотрим последовательность простых неотрицательных случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, которая монотонно к ней сходится: $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$.

Свойство (1. Вынос константы)

Пусть $\mathsf{E}\,\xi$ *конечно и* $c \in \mathbb{R}$. *Тогда* $\mathsf{E}(c\xi)$ *тоже конечно и*

$$\mathsf{E}(c\xi) = c\,\mathsf{E}\,\xi.$$

Доказательство свойства (1). Если ξ — простая случайная величина, то все уже доказано.

Если $\xi \geqslant 0$ — неотрицательная случайная величина, то рассмотрим последовательность простых неотрицательных случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, которая монотонно к ней сходится: $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$. Если $c \geqslant 0$, то тогда $0 \leqslant c\xi_n \uparrow c\xi$. Стало быть, по определению

$$\mathsf{E}(c\xi) = \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}(c\xi_n) = c \cdot \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n = c\,\mathsf{E}\,\xi.$$

Свойство (1. Вынос константы)

Пусть $\mathsf{E}\,\xi$ *конечно и* $c \in \mathbb{R}$. *Тогда* $\mathsf{E}(c\xi)$ *тоже конечно и*

$$\mathsf{E}(c\xi) = c\,\mathsf{E}\,\xi.$$

Доказательство свойства (1). Если ξ — простая случайная величина, то все уже доказано.

Если $\xi \geqslant 0$ — неотрицательная случайная величина, то рассмотрим последовательность простых неотрицательных случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, которая монотонно к ней сходится: $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$. Если $c \geqslant 0$, то тогда $0 \leqslant c\xi_n \uparrow c\xi$. Стало быть, по определению

$$\mathsf{E}(c\xi) = \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}(c\xi_n) = c \cdot \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n = c\,\mathsf{E}\,\xi.$$

Если же $c < 0$, то $(c\xi)^+ = 0$. Значит,

$$\mathsf{E}(c\xi) = -\,\mathsf{E}(c\xi)^- = -\,\mathsf{E}(-c\xi) = -(-c)\,\mathsf{E}\,\xi = c\,\mathsf{E}\,\xi.$$

Свойства математического ожидания

Если же ξ — произвольная случайная величина и $c \geqslant 0$, то

$$\mathsf{E}(c\xi) = \mathsf{E}(c\xi)^+ - \mathsf{E}(c\xi)^- = \mathsf{E}(c\xi^+) - \mathsf{E}(c\xi^-) =$$

Свойства математического ожидания

Если же ξ — произвольная случайная величина и $c \geqslant 0$, то

$$\mathsf{E}(c\xi) = \mathsf{E}(c\xi)^+ - \mathsf{E}(c\xi)^- = \mathsf{E}(c\xi^+) - \mathsf{E}(c\xi^-) =$$

$$= c\,\mathsf{E}(\xi^+) - c\,\mathsf{E}(\xi^-) = c\,\mathsf{E}\,\xi.$$

Свойства математического ожидания

Если же ξ — произвольная случайная величина и $c \geqslant 0$, то

$$\mathsf{E}(c\xi) = \mathsf{E}(c\xi)^+ - \mathsf{E}(c\xi)^- = \mathsf{E}(c\xi^+) - \mathsf{E}(c\xi^-) =$$

$$= c\,\mathsf{E}(\xi^+) - c\,\mathsf{E}(\xi^-) = c\,\mathsf{E}\,\xi.$$

Случай $c < 0$ полностью аналогичен. $\square$

Свойства математического ожидания

Если же ξ — произвольная случайная величина и $c \geqslant 0$, то

$$\mathsf{E}(c\xi) = \mathsf{E}(c\xi)^+ - \mathsf{E}(c\xi)^- = \mathsf{E}(c\xi^+) - \mathsf{E}(c\xi^-) =$$

$$= c\,\mathsf{E}(\xi^+) - c\,\mathsf{E}(\xi^-) = c\,\mathsf{E}\,\xi.$$

Случай $c < 0$ полностью аналогичен. $\square$

Свойство (2. Конечность математических ожиданий)

1) Если $0 \leqslant \xi \leqslant \eta$ и $\mathsf{E}\,\eta$ конечно, то $\mathsf{E}\,\xi$ тоже конечно и $\mathsf{E}\,\xi \leqslant \mathsf{E}\,\eta$.

Если же ξ — произвольная случайная величина и $c \geqslant 0$, то

$$\mathsf{E}(c\xi) = \mathsf{E}(c\xi)^+ - \mathsf{E}(c\xi)^- = \mathsf{E}(c\xi^+) - \mathsf{E}(c\xi^-) =$$

$$= c\,\mathsf{E}(\xi^+) - c\,\mathsf{E}(\xi^-) = c\,\mathsf{E}\,\xi.$$

Случай $c < 0$ полностью аналогичен. $\square$

Свойство (2. Конечность математических ожиданий)

1) Если $0 \leqslant \xi \leqslant \eta$ и $\mathsf{E}\,\eta$ конечно, то $\mathsf{E}\,\xi$ тоже конечно и $\mathsf{E}\,\xi \leqslant \mathsf{E}\,\eta$.
2) Если $|\xi| \leqslant \eta$ и $\mathsf{E}\,\eta$ конечно, то $\mathsf{E}\,\xi$ тоже конечно.

Свойства математического ожидания

Если же ξ — произвольная случайная величина и $c \geqslant 0$, то

$$\mathsf{E}(c\xi) = \mathsf{E}(c\xi)^+ - \mathsf{E}(c\xi)^- = \mathsf{E}(c\xi^+) - \mathsf{E}(c\xi^-) =$$

$$= c\,\mathsf{E}(\xi^+) - c\,\mathsf{E}(\xi^-) = c\,\mathsf{E}\,\xi.$$

Случай $c < 0$ полностью аналогичен. □

Свойство (2. Конечность математических ожиданий)

1) Если $0 \leqslant \xi \leqslant \eta$ и $\mathsf{E}\,\eta$ конечно, то $\mathsf{E}\,\xi$ тоже конечно и $\mathsf{E}\,\xi \leqslant \mathsf{E}\,\eta$.
2) Если $|\xi| \leqslant \eta$ и $\mathsf{E}\,\eta$ конечно, то $\mathsf{E}\,\xi$ тоже конечно.
3) Если $\mathsf{E}\,\xi$ конечно, то для любого события $A \in \mathcal{F}$ математическое ожидание $\mathsf{E}(\xi I_A)$ тоже конечно.

Свойства математического ожидания

Если же ξ — произвольная случайная величина и $c \geqslant 0$, то

$$\mathsf{E}(c\xi) = \mathsf{E}(c\xi)^+ - \mathsf{E}(c\xi)^- = \mathsf{E}(c\xi^+) - \mathsf{E}(c\xi^-) =$$

$$= c\,\mathsf{E}(\xi^+) - c\,\mathsf{E}(\xi^-) = c\,\mathsf{E}\,\xi.$$

Случай $c < 0$ полностью аналогичен. $\square$

Свойство (2. Конечность математических ожиданий)

1) Если $0 \leqslant \xi \leqslant \eta$ и $\mathsf{E}\,\eta$ конечно, то $\mathsf{E}\,\xi$ тоже конечно и $\mathsf{E}\,\xi \leqslant \mathsf{E}\,\eta$.
2) Если $|\xi| \leqslant \eta$ и $\mathsf{E}\,\eta$ конечно, то $\mathsf{E}\,\xi$ тоже конечно.
3) Если $\mathsf{E}\,\xi$ конечно, то для любого события $A \in \mathcal{F}$ математическое ожидание $\mathsf{E}(\xi I_A)$ тоже конечно.

Доказательство свойства (2). 1) Заметим, что

$$\mathsf{E}\,\xi = \sup_{\zeta \in \mathcal{G}_\xi} \mathsf{E}\,\zeta \leqslant \sup_{\zeta \in \mathcal{G}_\eta} \mathsf{E}\,\zeta = \mathsf{E}\,\eta,$$

где $\mathcal{G}_\xi (\mathcal{G}_\eta)$ — множество простых неотрицательных с.в., которые не превосходят ξ (соответственно, η).

Свойства математического ожидания

2) Заметим, что $\xi^+, \xi^- \leqslant |\xi|$, а потому по первому пункту их математические ожидания конечны. Значит, конечно и $\mathsf{E}\,\xi$.

Свойства математического ожидания

2) Заметим, что $\xi^+, \xi^- \leqslant |\xi|$, а потому по первому пункту их математические ожидания конечны. Значит, конечно и $\mathsf{E}\,\xi$.

3) $\mathsf{E}\,\xi$ конечно, следовательно, конечны и $\mathsf{E}\,\xi^+$, $\mathsf{E}\,\xi^-$.

Свойства математического ожидания

2) Заметим, что $\xi^+, \xi^- \leqslant |\xi|$, а потому по первому пункту их математические ожидания конечны. Значит, конечно и $\mathsf{E}\,\xi$.

3) $\mathsf{E}\,\xi$ конечно, следовательно, конечны и $\mathsf{E}\,\xi^+$, $\mathsf{E}\,\xi^-$. Далее,

$$(\xi I_A)^+ = \xi^+ I_A \leqslant \xi^+; \;\; (\xi I_A)^- = \xi^- I_A \leqslant \xi^-.$$

Свойства математического ожидания

2) Заметим, что $\xi^+, \xi^- \leqslant |\xi|$, а потому по первому пункту их математические ожидания конечны. Значит, конечно и $\mathsf{E}\,\xi$.

3) $\mathsf{E}\,\xi$ конечно, следовательно, конечны и $\mathsf{E}\,\xi^+$, $\mathsf{E}\,\xi^-$. Далее,

$$(\xi I_A)^+ = \xi^+ I_A \leqslant \xi^+; \;\; (\xi I_A)^- = \xi^- I_A \leqslant \xi^-.$$

Согласно первому пункту $\mathsf{E}(\xi I_A)^+$ и $\mathsf{E}(\xi I_A)^-$ конечны. Значит, конечно и $\mathsf{E}(\xi I_A)$. $\square$

Свойства математического ожидания

2) Заметим, что $\xi^+, \xi^- \leqslant |\xi|$, а потому по первому пункту их математические ожидания конечны. Значит, конечно и $\mathsf{E}\,\xi$.

3) $\mathsf{E}\,\xi$ конечно, следовательно, конечны и $\mathsf{E}\,\xi^+$, $\mathsf{E}\,\xi^-$. Далее,

$$(\xi I_A)^+ = \xi^+ I_A \leqslant \xi^+; \ \ (\xi I_A)^- = \xi^- I_A \leqslant \xi^-.$$

Согласно первому пункту $\mathsf{E}(\xi I_A)^+$ и $\mathsf{E}(\xi I_A)^-$ конечны. Значит, конечно и $\mathsf{E}(\xi I_A)$. $\square$

Свойство (3. Сохранение отношения порядка)

Пусть $\xi \leqslant \eta$.

Свойства математического ожидания

2) Заметим, что $\xi^+, \xi^- \leqslant |\xi|$, а потому по первому пункту их математические ожидания конечны. Значит, конечно и $\mathsf{E}\,\xi$.

3) $\mathsf{E}\,\xi$ конечно, следовательно, конечны и $\mathsf{E}\,\xi^+$, $\mathsf{E}\,\xi^-$. Далее,

$$(\xi I_A)^+ = \xi^+ I_A \leqslant \xi^+; \;\; (\xi I_A)^- = \xi^- I_A \leqslant \xi^-.$$

Согласно первому пункту $\mathsf{E}(\xi I_A)^+$ и $\mathsf{E}(\xi I_A)^-$ конечны. Значит, конечно и $\mathsf{E}(\xi I_A)$. □

Свойство (3. Сохранение отношения порядка)

Пусть $\xi \leqslant \eta$*.*

1) Если $\mathsf{E}\,\eta < +\infty$*, то* $\mathsf{E}\,\xi < +\infty$ *и* $\mathsf{E}\,\xi \leqslant \mathsf{E}\,\eta$*.*

Свойства математического ожидания

2) Заметим, что $\xi^+, \xi^- \leqslant |\xi|$, а потому по первому пункту их математические ожидания конечны. Значит, конечно и $\mathsf{E}\,\xi$.

3) $\mathsf{E}\,\xi$ конечно, следовательно, конечны и $\mathsf{E}\,\xi^+$, $\mathsf{E}\,\xi^-$. Далее,

$$(\xi I_A)^+ = \xi^+ I_A \leqslant \xi^+; \;\; (\xi I_A)^- = \xi^- I_A \leqslant \xi^-.$$

Согласно первому пункту $\mathsf{E}(\xi I_A)^+$ и $\mathsf{E}(\xi I_A)^-$ конечны. Значит, конечно и $\mathsf{E}(\xi I_A)$. $\square$

Свойство (3. Сохранение отношения порядка)

Пусть $\xi \leqslant \eta$.

1) Если $\mathsf{E}\,\eta < +\infty$, то $\mathsf{E}\,\xi < +\infty$ и $\mathsf{E}\,\xi \leqslant \mathsf{E}\,\eta$.

2) Если $\mathsf{E}\,\xi > -\infty$, то $\mathsf{E}\,\eta > -\infty$ и $\mathsf{E}\,\xi \leqslant \mathsf{E}\,\eta$.

Свойства математического ожидания

Доказательство свойства (3). Если ξ и η — простые с.в., то все уже доказано.

Свойства математического ожидания

Доказательство свойства (3). Если ξ и η — простые с.в., то все уже доказано. Если $0 \leqslant \xi \leqslant \eta$ — неотрицательные с.в., то все также следует из доказательства п.1) в свойстве (2).

Свойства математического ожидания

Доказательство свойства (3). Если ξ и η — простые с.в., то все уже доказано. Если $0 \leqslant \xi \leqslant \eta$ — неотрицательные с.в., то все также следует из доказательства п.1) в свойстве (2).

В силу условия $\xi \leqslant \eta$ получаем, что

$$\xi^+ \leqslant \eta^+; \;\; \xi^- \geqslant \eta^-.$$

Свойства математического ожидания

Доказательство свойства (3). Если ξ и η — простые с.в., то все уже доказано. Если $0 \leqslant \xi \leqslant \eta$ — неотрицательные с.в., то все также следует из доказательства п.1) в свойстве (2).

В силу условия $\xi \leqslant \eta$ получаем, что

$$\xi^+ \leqslant \eta^+; \;\; \xi^- \geqslant \eta^-.$$

Согласно доказанному для неотрицательных с.в. получаем, что

$$\mathsf{E}\,\xi^+ \leqslant \mathsf{E}\,\eta^+; \;\; \mathsf{E}\,\xi^- \geqslant \mathsf{E}\,\eta^-.$$

Свойства математического ожидания

Доказательство свойства (3). Если ξ и η — простые с.в., то все уже доказано. Если $0 \leqslant \xi \leqslant \eta$ — неотрицательные с.в., то все также следует из доказательства п.1) в свойстве (2).

В силу условия $\xi \leqslant \eta$ получаем, что

$$\xi^+ \leqslant \eta^+; \;\; \xi^- \geqslant \eta^-.$$

Согласно доказанному для неотрицательных с.в. получаем, что

$$\mathsf{E}\,\xi^+ \leqslant \mathsf{E}\,\eta^+; \;\; \mathsf{E}\,\xi^- \geqslant \mathsf{E}\,\eta^-.$$

1) Если $\mathsf{E}\,\eta < +\infty$, то $\mathsf{E}\,\eta^+$ конечно. Значит, конечно и $\mathsf{E}\,\xi^+$.

Свойства математического ожидания

Доказательство свойства (3). Если ξ и η — простые с.в., то все уже доказано. Если $0 \leqslant \xi \leqslant \eta$ — неотрицательные с.в., то все также следует из доказательства п.1) в свойстве (2).

В силу условия $\xi \leqslant \eta$ получаем, что

$$\xi^+ \leqslant \eta^+; \ \ \xi^- \geqslant \eta^-.$$

Согласно доказанному для неотрицательных с.в. получаем, что

$$\mathsf{E}\,\xi^+ \leqslant \mathsf{E}\,\eta^+; \ \ \mathsf{E}\,\xi^- \geqslant \mathsf{E}\,\eta^-.$$

1) Если $\mathsf{E}\,\eta < +\infty$, то $\mathsf{E}\,\eta^+$ конечно. Значит, конечно и $\mathsf{E}\,\xi^+$. Стало быть, определено $\mathsf{E}\,\xi < +\infty$.

Свойства математического ожидания

Доказательство свойства (3). Если ξ и η — простые с.в., то все уже доказано. Если $0 \leqslant \xi \leqslant \eta$ — неотрицательные с.в., то все также следует из доказательства п.1) в свойстве (2).

В силу условия $\xi \leqslant \eta$ получаем, что

$$\xi^+ \leqslant \eta^+; \ \ \xi^- \geqslant \eta^-.$$

Согласно доказанному для неотрицательных с.в. получаем, что

$$\mathsf{E}\,\xi^+ \leqslant \mathsf{E}\,\eta^+; \ \ \mathsf{E}\,\xi^- \geqslant \mathsf{E}\,\eta^-.$$

1) Если $\mathsf{E}\,\eta < +\infty$, то $\mathsf{E}\,\eta^+$ конечно. Значит, конечно и $\mathsf{E}\,\xi^+$. Стало быть, определено $\mathsf{E}\,\xi < +\infty$. Далее, если $\mathsf{E}\,\xi^-$ конечно, то в силу верхних неравенств $\mathsf{E}\,\eta^-$ тоже конечно и

$$\mathsf{E}\,\xi = \mathsf{E}\,\xi^+ - \mathsf{E}\,\xi^- \leqslant \mathsf{E}\,\eta^+ - \mathsf{E}\,\eta^- = \mathsf{E}\,\eta.$$

Свойства математического ожидания

Доказательство свойства (3). Если ξ и η — простые с.в., то все уже доказано. Если $0 \leqslant \xi \leqslant \eta$ — неотрицательные с.в., то все также следует из доказательства п.1) в свойстве (2).

В силу условия $\xi \leqslant \eta$ получаем, что

$$\xi^+ \leqslant \eta^+; \;\; \xi^- \geqslant \eta^-.$$

Согласно доказанному для неотрицательных с.в. получаем, что

$$\mathsf{E}\,\xi^+ \leqslant \mathsf{E}\,\eta^+; \;\; \mathsf{E}\,\xi^- \geqslant \mathsf{E}\,\eta^-.$$

1) Если $\mathsf{E}\,\eta < +\infty$, то $\mathsf{E}\,\eta^+$ конечно. Значит, конечно и $\mathsf{E}\,\xi^+$. Стало быть, определено $\mathsf{E}\,\xi < +\infty$. Далее, если $\mathsf{E}\,\xi^-$ конечно, то в силу верхних неравенств $\mathsf{E}\,\eta^-$ тоже конечно и

$$\mathsf{E}\,\xi = \mathsf{E}\,\xi^+ - \mathsf{E}\,\xi^- \leqslant \mathsf{E}\,\eta^+ - \mathsf{E}\,\eta^- = \mathsf{E}\,\eta.$$

Если же $\mathsf{E}\,\xi^- = +\infty$, то $\mathsf{E}\,\xi = -\infty \leqslant \mathsf{E}\,\eta$.

Доказательство свойства (3). Если ξ и η — простые с.в., то все уже доказано. Если $0 \leqslant \xi \leqslant \eta$ — неотрицательные с.в., то все также следует из доказательства п.1) в свойстве (2).

В силу условия $\xi \leqslant \eta$ получаем, что

$$\xi^+ \leqslant \eta^+; \;\; \xi^- \geqslant \eta^-.$$

Согласно доказанному для неотрицательных с.в. получаем, что

$$\mathsf{E}\,\xi^+ \leqslant \mathsf{E}\,\eta^+; \;\; \mathsf{E}\,\xi^- \geqslant \mathsf{E}\,\eta^-.$$

1) Если $\mathsf{E}\,\eta < +\infty$, то $\mathsf{E}\,\eta^+$ конечно. Значит, конечно и $\mathsf{E}\,\xi^+$. Стало быть, определено $\mathsf{E}\,\xi < +\infty$. Далее, если $\mathsf{E}\,\xi^-$ конечно, то в силу верхних неравенств $\mathsf{E}\,\eta^-$ тоже конечно и

$$\mathsf{E}\,\xi = \mathsf{E}\,\xi^+ - \mathsf{E}\,\xi^- \leqslant \mathsf{E}\,\eta^+ - \mathsf{E}\,\eta^- = \mathsf{E}\,\eta.$$

Если же $\mathsf{E}\,\xi^- = +\infty$, то $\mathsf{E}\,\xi = -\infty \leqslant \mathsf{E}\,\eta$.
2) Доказывается аналогично п. 1). $\square$

Свойства математического ожидания

Свойство (4)

Если $\mathsf{E}\,\xi$ *определено, то*

$$|\mathsf{E}\,\xi| \leqslant \mathsf{E}\,|\xi|$$

Свойства математического ожидания

Свойство (4)

Если $\mathsf{E}\,\xi$ *определено, то*

$$|\,\mathsf{E}\,\xi| \leqslant \mathsf{E}\,|\xi|$$

Доказательство свойства (4). Если $\mathsf{E}\,|\xi| = +\infty$, то все очевидно.

Свойства математического ожидания

Свойство (4)

Если $\mathsf{E}\,\xi$ *определено, то*

$$|\,\mathsf{E}\,\xi| \leqslant \mathsf{E}\,|\xi|$$

Доказательство свойства (4). Если $\mathsf{E}\,|\xi| = +\infty$, то все очевидно. Пусть $\mathsf{E}\,|\xi| < +\infty$. Тогда заметим, что $-|\xi| \leqslant \xi \leqslant |\xi|$. Значит, согласно свойствам (1) и (3) получим, что

$$-\,\mathsf{E}\,|\xi| \leqslant \mathsf{E}\,\xi \leqslant \mathsf{E}\,|\xi|.$$

$\square$

Свойства математического ожидания

Свойство (4)

Если $\mathsf{E}\,\xi$ *определено, то*

$$|\,\mathsf{E}\,\xi| \leqslant \mathsf{E}\,|\xi|$$

Доказательство свойства (4). Если $\mathsf{E}\,|\xi| = +\infty$, то все очевидно. Пусть $\mathsf{E}\,|\xi| < +\infty$. Тогда заметим, что $-|\xi| \leqslant \xi \leqslant |\xi|$. Значит, согласно свойствам (1) и (3) получим, что

$$-\,\mathsf{E}\,|\xi| \leqslant \mathsf{E}\,\xi \leqslant \mathsf{E}\,|\xi|.$$

$\square$

Свойство (5. Аддитивность)

Если ξ *и* η *— неотрицательные с.в. или такие, что* $\mathsf{E}\,\xi$ *и* $\mathsf{E}\,\eta$ *конечны, то* $\mathsf{E}(\xi+\eta)$ *определено и*

$$\mathsf{E}(\xi+\eta) = \mathsf{E}\,\xi + \mathsf{E}\,\eta.$$

Свойства математического ожидания

Доказательство свойства (5). Если ξ и η — простые с.в., то все уже доказано.

Свойства математического ожидания

Доказательство свойства (5). Если ξ и η — простые с.в., то все уже доказано. Если ξ и η — неотрицательные с.в., то рассмотрим последовательности простых неотрицательных случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$, которые монотонно сходятся к ξ и η: $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$, $0 \leqslant \eta_n \uparrow \eta$.

Свойства математического ожидания

Доказательство свойства (5). Если ξ и η — простые с.в., то все уже доказано. Если ξ и η — неотрицательные с.в., то рассмотрим последовательности простых неотрицательных случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$, которые монотонно сходятся к ξ и η: $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$, $0 \leqslant \eta_n \uparrow \eta$. Тогда $0 \leqslant \xi_n + \eta_n \uparrow \xi + \eta$ и по определению:

$$\mathsf{E}(\xi + \eta) = \lim_{n \to +\infty} \mathsf{E}(\xi_n + \eta_n) = \lim_{n \to +\infty} (\mathsf{E}\,\xi_n + \mathsf{E}\,\eta_n) =$$

Свойства математического ожидания

Доказательство свойства (5). Если ξ и η — простые с.в., то все уже доказано. Если ξ и η — неотрицательные с.в., то рассмотрим последовательности простых неотрицательных случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$, которые монотонно сходятся к ξ и η: $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$, $0 \leqslant \eta_n \uparrow \eta$. Тогда $0 \leqslant \xi_n + \eta_n \uparrow \xi + \eta$ и по определению:

$$\mathsf{E}(\xi+\eta) = \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}(\xi_n+\eta_n) = \lim_{n\to+\infty} (\mathsf{E}\,\xi_n + \mathsf{E}\,\eta_n) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n + \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\eta_n = \mathsf{E}\,\xi + \mathsf{E}\,\eta,$$

причем все равенства верны и при бесконечных $\mathsf{E}\,\xi$ или $\mathsf{E}\,\eta$.

Свойства математического ожидания

Доказательство свойства (5). Если ξ и η — простые с.в., то все уже доказано. Если ξ и η — неотрицательные с.в., то рассмотрим последовательности простых неотрицательных случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$, которые монотонно сходятся к ξ и η: $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$, $0 \leqslant \eta_n \uparrow \eta$. Тогда $0 \leqslant \xi_n + \eta_n \uparrow \xi + \eta$ и по определению:

$$\mathsf{E}(\xi + \eta) = \lim_{n \to +\infty} \mathsf{E}(\xi_n + \eta_n) = \lim_{n \to +\infty} (\mathsf{E}\,\xi_n + \mathsf{E}\,\eta_n) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \mathsf{E}\,\xi_n + \lim_{n \to +\infty} \mathsf{E}\,\eta_n = \mathsf{E}\,\xi + \mathsf{E}\,\eta,$$

причем все равенства верны и при бесконечных $\mathsf{E}\,\xi$ или $\mathsf{E}\,\eta$.

Пусть теперь ξ и η — произвольные с.в. с конечными м.о. Тогда представим

$$\xi = \xi^+ - \xi^-, \;\; \eta = \eta^+ - \eta^-, \;\; \xi + \eta = (\xi + \eta)^+ - (\xi + \eta)^-.$$

Свойства математического ожидания

Доказательство свойства (5). Если ξ и η — простые с.в., то все уже доказано. Если ξ и η — неотрицательные с.в., то рассмотрим последовательности простых неотрицательных случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$, которые монотонно сходятся к ξ и η: $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$, $0 \leqslant \eta_n \uparrow \eta$. Тогда $0 \leqslant \xi_n + \eta_n \uparrow \xi + \eta$ и по определению:

$$\mathsf{E}(\xi + \eta) = \lim_{n \to +\infty} \mathsf{E}(\xi_n + \eta_n) = \lim_{n \to +\infty} (\mathsf{E}\,\xi_n + \mathsf{E}\,\eta_n) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \mathsf{E}\,\xi_n + \lim_{n \to +\infty} \mathsf{E}\,\eta_n = \mathsf{E}\,\xi + \mathsf{E}\,\eta,$$

причем все равенства верны и при бесконечных $\mathsf{E}\,\xi$ или $\mathsf{E}\,\eta$.

Пусть теперь ξ и η — произвольные с.в. с конечными м.о. Тогда представим

$$\xi = \xi^+ - \xi^-, \;\; \eta = \eta^+ - \eta^-, \;\; \xi + \eta = (\xi + \eta)^+ - (\xi + \eta)^-.$$

Но

$$(\xi + \eta)^+ \leqslant \xi^+ + \eta^+, \; (\xi + \eta)^- \leqslant \xi^- + \eta^-.$$

Свойства математического ожидания

Можно сделать вывод, что $\mathsf{E}(\xi + \eta)$ тоже конечно.

Свойства математического ожидания

Можно сделать вывод, что $\mathsf{E}(\xi+\eta)$ тоже конечно. Обозначим

$$\delta = \xi^+ + \eta^+ - (\xi+\eta)^+ \geqslant 0,$$

это неотрицательная с.в.

Свойства математического ожидания

Можно сделать вывод, что $\mathsf{E}(\xi+\eta)$ тоже конечно. Обозначим

$$\delta = \xi^+ + \eta^+ - (\xi+\eta)^+ \geqslant 0,$$

это неотрицательная с.в. В силу доказанного для неотрицательных с.в., получаем, что

$$\mathsf{E}(\xi+\eta)^+ + \mathsf{E}\,\delta = \mathsf{E}\,\xi^+ + \mathsf{E}\,\eta^+.$$

Свойства математического ожидания

Можно сделать вывод, что $\mathsf{E}(\xi+\eta)$ тоже конечно. Обозначим

$$\delta = \xi^+ + \eta^+ - (\xi+\eta)^+ \geqslant 0,$$

это неотрицательная с.в. В силу доказанного для неотрицательных с.в., получаем, что

$$\mathsf{E}(\xi+\eta)^+ + \mathsf{E}\,\delta = \mathsf{E}\,\xi^+ + \mathsf{E}\,\eta^+.$$

С другой стороны,

$$\xi^- + \eta^- - (\xi+\eta)^- = \xi^+ + \eta^+ - (\xi+\eta)^+ = \delta.$$

Значит,

$$\mathsf{E}(\xi+\eta)^- + \mathsf{E}\,\delta = \mathsf{E}\,\xi^- + \mathsf{E}\,\eta^-.$$

Свойства математического ожидания

Можно сделать вывод, что $\mathsf{E}(\xi+\eta)$ тоже конечно. Обозначим

$$\delta = \xi^+ + \eta^+ - (\xi+\eta)^+ \geqslant 0,$$

это неотрицательная с.в. В силу доказанного для неотрицательных с.в., получаем, что

$$\mathsf{E}(\xi+\eta)^+ + \mathsf{E}\,\delta = \mathsf{E}\,\xi^+ + \mathsf{E}\,\eta^+.$$

С другой стороны,

$$\xi^- + \eta^- - (\xi+\eta)^- = \xi^+ + \eta^+ - (\xi+\eta)^+ = \delta.$$

Значит,

$$\mathsf{E}(\xi+\eta)^- + \mathsf{E}\,\delta = \mathsf{E}\,\xi^- + \mathsf{E}\,\eta^-.$$

В итоге, получаем искомое соотношение:

$$\mathsf{E}(\xi+\eta) = \mathsf{E}(\xi+\eta)^+ - \mathsf{E}(\xi+\eta)^- =$$

Можно сделать вывод, что $\mathsf{E}(\xi+\eta)$ тоже конечно. Обозначим

$$\delta = \xi^+ + \eta^+ - (\xi+\eta)^+ \geqslant 0,$$

это неотрицательная с.в. В силу доказанного для неотрицательных с.в., получаем, что

$$\mathsf{E}(\xi+\eta)^+ + \mathsf{E}\,\delta = \mathsf{E}\,\xi^+ + \mathsf{E}\,\eta^+.$$

С другой стороны,

$$\xi^- + \eta^- - (\xi+\eta)^- = \xi^+ + \eta^+ - (\xi+\eta)^+ = \delta.$$

Значит,

$$\mathsf{E}(\xi+\eta)^- + \mathsf{E}\,\delta = \mathsf{E}\,\xi^- + \mathsf{E}\,\eta^-.$$

В итоге, получаем искомое соотношение:

$$\mathsf{E}(\xi+\eta) = \mathsf{E}(\xi+\eta)^+ - \mathsf{E}(\xi+\eta)^- =$$

$$= \mathsf{E}\,\xi^+ + \mathsf{E}\,\eta^+ - \mathsf{E}\,\delta - \left(\mathsf{E}\,\xi^- + \mathsf{E}\,\eta^- - \mathsf{E}\,\delta\right) =$$

Свойства математического ожидания

Можно сделать вывод, что $\mathsf{E}(\xi+\eta)$ тоже конечно. Обозначим

$$\delta = \xi^+ + \eta^+ - (\xi+\eta)^+ \geqslant 0,$$

это неотрицательная с.в. В силу доказанного для неотрицательных с.в., получаем, что

$$\mathsf{E}(\xi+\eta)^+ + \mathsf{E}\,\delta = \mathsf{E}\,\xi^+ + \mathsf{E}\,\eta^+.$$

С другой стороны,

$$\xi^- + \eta^- - (\xi+\eta)^- = \xi^+ + \eta^+ - (\xi+\eta)^+ = \delta.$$

Значит,

$$\mathsf{E}(\xi+\eta)^- + \mathsf{E}\,\delta = \mathsf{E}\,\xi^- + \mathsf{E}\,\eta^-.$$

В итоге, получаем искомое соотношение:

$$\mathsf{E}(\xi+\eta) = \mathsf{E}(\xi+\eta)^+ - \mathsf{E}(\xi+\eta)^- =$$

$$= \mathsf{E}\,\xi^+ + \mathsf{E}\,\eta^+ - \mathsf{E}\,\delta - \left(\mathsf{E}\,\xi^- + \mathsf{E}\,\eta^- - \mathsf{E}\,\delta\right) =$$

$$= \mathsf{E}\,\xi^+ - \mathsf{E}\,\xi^- + \mathsf{E}\,\eta^+ - \mathsf{E}\,\eta^- = \mathsf{E}\,\xi + \mathsf{E}\,\eta. \qquad \square$$

Свойства математического ожидания

Следующая группа свойств связана с понятием *почти наверное*.

Определение

Событие $A \in \mathcal{F}$ *происходит почти наверное, если* $\mathsf{P}(A) = 1$. *Обозначение:* A *п.н.*

Свойства математического ожидания

Следующая группа свойств связана с понятием *почти наверное*.

Определение

Событие $A \in \mathcal{F}$ *происходит почти наверное, если* $\mathsf{P}(A) = 1$. *Обозначение:* A *п.н.*

Свойство (6)

Если $\xi = 0$ *п.н., то* $\mathsf{E}\,\xi = 0$.

Свойства математического ожидания

Следующая группа свойств связана с понятием *почти наверное*.

Определение

Событие $A \in \mathcal{F}$ *происходит почти наверное, если* $\mathsf{P}(A) = 1$. *Обозначение:* A *п.н.*

Свойство (6)

Если $\xi = 0$ *п.н., то* $\mathsf{E}\,\xi = 0$.

Доказательство свойства (6). Если ξ — простая с.в., то $\mathsf{E}\,\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathsf{P}(\xi = x_k)$.

Свойства математического ожидания

Следующая группа свойств связана с понятием *почти наверное*.

Определение

Событие $A \in \mathcal{F}$ происходит почти наверное, если $\mathsf{P}(A) = 1$. *Обозначение:* A *п.н.*

Свойство (6)

Если $\xi = 0$ п.н., то $\mathsf{E}\,\xi = 0$.

Доказательство свойства (6). Если ξ — простая с.в., то $\mathsf{E}\,\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathsf{P}(\xi = x_k)$. Но если $x_k \neq 0$, то по условию $\mathsf{P}(\xi = x_k) = 0$. Стало быть, $\mathsf{E}\,\xi = 0$.

Свойства математического ожидания

Следующая группа свойств связана с понятием *почти наверное*.

Определение

Событие $A \in \mathcal{F}$ происходит почти наверное, если $\mathsf{P}(A) = 1$. *Обозначение:* A *п.н.*

Свойство (6)

Если $\xi = 0$ *п.н., то* $\mathsf{E}\,\xi = 0$.

Доказательство свойства (6). Если ξ — простая с.в., то $\mathsf{E}\,\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathsf{P}(\xi = x_k)$. Но если $x_k \neq 0$, то по условию $\mathsf{P}(\xi = x_k) = 0$. Стало быть, $\mathsf{E}\,\xi = 0$.

Если $\xi \geqslant 0$, то для любой простой с.в. η с условием $0 \leqslant \eta \leqslant \xi$ выполнено $\eta = 0$ п.н. Значит, $\mathsf{E}\,\eta = 0$. Согласно определению математического ожидания получаем, что $\mathsf{E}\,\xi = 0$.

Свойства математического ожидания

Следующая группа свойств связана с понятием *почти наверное*.

Определение

Событие $A \in \mathcal{F}$ происходит почти наверное, если $\mathsf{P}(A) = 1$. Обозначение: A п.н.

Свойство (6)

Если $\xi = 0$ п.н., то $\mathsf{E}\,\xi = 0$.

Доказательство свойства (6). Если ξ — простая с.в., то $\mathsf{E}\,\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathsf{P}(\xi = x_k)$. Но если $x_k \neq 0$, то по условию $\mathsf{P}(\xi = x_k) = 0$. Стало быть, $\mathsf{E}\,\xi = 0$.

Если $\xi \geqslant 0$, то для любой простой с.в. η с условием $0 \leqslant \eta \leqslant \xi$ выполнено $\eta = 0$ п.н. Значит, $\mathsf{E}\,\eta = 0$. Согласно определению математического ожидания получаем, что $\mathsf{E}\,\xi = 0$.

Наконец, если ξ — произвольная с.в., то получаем, что $\xi^+ = 0$ п.н. и $\xi^- = 0$ п.н. Значит, их математические ожидания равны нулю и, следовательно, $\mathsf{E}\,\xi = 0$.

Свойства математического ожидания

Свойство (7)

Если $\xi = \eta$ *п.н. и* $\mathsf{E}\,\xi$ *конечно, то* $\mathsf{E}\,\eta$ *конечно и* $\mathsf{E}\,\xi = \mathsf{E}\,\eta$.

Свойства математического ожидания

Свойство (7)

Если $\xi = \eta$ п.н. и $\mathsf{E}\,\xi$ конечно, то $\mathsf{E}\,\eta$ конечно и $\mathsf{E}\,\xi = \mathsf{E}\,\eta$.

Доказательство свойства (7). Обозначим $\delta = \eta - \xi$. Согласно свойству (6) $\mathsf{E}\,\delta = 0$.

Свойства математического ожидания

Свойство (7)

Если $\xi = \eta$ п.н. и $\mathsf{E}\,\xi$ конечно, то $\mathsf{E}\,\eta$ конечно и $\mathsf{E}\,\xi = \mathsf{E}\,\eta$.

Доказательство свойства (7). Обозначим $\delta = \eta - \xi$. Согласно свойству (6) $\mathsf{E}\,\delta = 0$. Тогда из свойства (5) получаем, что математическое ожидание $\eta = \xi + \delta$ тоже конечно и

$$\mathsf{E}\,\eta = \mathsf{E}\,\xi + \mathsf{E}\,\delta = \mathsf{E}\,\xi. \qquad \square$$

Свойства математического ожидания

Свойство (7)

Если $\xi = \eta$ *п.н. и* $\mathsf{E}\,\xi$ *конечно, то* $\mathsf{E}\,\eta$ *конечно и* $\mathsf{E}\,\xi = \mathsf{E}\,\eta$.

Доказательство свойства (7). Обозначим $\delta = \eta - \xi$. Согласно свойству (6) $\mathsf{E}\,\delta = 0$. Тогда из свойства (5) получаем, что математическое ожидание $\eta = \xi + \delta$ тоже конечно и

$$\mathsf{E}\,\eta = \mathsf{E}\,\xi + \mathsf{E}\,\delta = \mathsf{E}\,\xi. \qquad \square$$

Свойство (8)

Если $\xi \geqslant 0$ *и* $\mathsf{E}\,\xi = 0$, *то* $\xi = 0$ *п.н.*

Свойство (7)

Если $\xi = \eta$ *п.н. и* $\mathsf{E}\,\xi$ *конечно, то* $\mathsf{E}\,\eta$ *конечно и* $\mathsf{E}\,\xi = \mathsf{E}\,\eta$.

Доказательство свойства (7). Обозначим $\delta = \eta - \xi$. Согласно свойству (6) $\mathsf{E}\,\delta = 0$. Тогда из свойства (5) получаем, что математическое ожидание $\eta = \xi + \delta$ тоже конечно и

$$\mathsf{E}\,\eta = \mathsf{E}\,\xi + \mathsf{E}\,\delta = \mathsf{E}\,\xi. \qquad \square$$

Свойство (8)

Если $\xi \geqslant 0$ *и* $\mathsf{E}\,\xi = 0$, *то* $\xi = 0$ *п.н.*

Доказательство свойства (8). Обозначим $A_n = \{\xi > \frac{1}{n}\}$. Тогда $A_n \uparrow A = \{\xi > 0\}$ при $n \to +\infty$.

Свойства математического ожидания

Свойство (7)

Если $\xi = \eta$ п.н. и $\mathsf{E}\,\xi$ конечно, то $\mathsf{E}\,\eta$ конечно и $\mathsf{E}\,\xi = \mathsf{E}\,\eta$.

Доказательство свойства (7). Обозначим $\delta = \eta - \xi$. Согласно свойству (6) $\mathsf{E}\,\delta = 0$. Тогда из свойства (5) получаем, что математическое ожидание $\eta = \xi + \delta$ тоже конечно и

$$\mathsf{E}\,\eta = \mathsf{E}\,\xi + \mathsf{E}\,\delta = \mathsf{E}\,\xi. \qquad \square$$

Свойство (8)

Если $\xi \geqslant 0$ и $\mathsf{E}\,\xi = 0$, то $\xi = 0$ п.н.

Доказательство свойства (8). Обозначим $A_n = \{\xi > \frac{1}{n}\}$. Тогда $A_n \uparrow A = \{\xi > 0\}$ при $n \to +\infty$. В силу непрерывности вероятностной меры получаем, что $\mathsf{P}(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathsf{P}(A_n)$.

Свойства математического ожидания

Свойство (7)

Если $\xi = \eta$ п.н. и $\mathsf{E}\,\xi$ конечно, то $\mathsf{E}\,\eta$ конечно и $\mathsf{E}\,\xi = \mathsf{E}\,\eta$.

Доказательство свойства (7). Обозначим $\delta = \eta - \xi$. Согласно свойству (6) $\mathsf{E}\,\delta = 0$. Тогда из свойства (5) получаем, что математическое ожидание $\eta = \xi + \delta$ тоже конечно и

$$\mathsf{E}\,\eta = \mathsf{E}\,\xi + \mathsf{E}\,\delta = \mathsf{E}\,\xi. \qquad \square$$

Свойство (8)

Если $\xi \geqslant 0$ и $\mathsf{E}\,\xi = 0$, то $\xi = 0$ п.н.

Доказательство свойства (8). Обозначим $A_n = \{\xi > \frac{1}{n}\}$. Тогда $A_n \uparrow A = \{\xi > 0\}$ при $n \to +\infty$. В силу непрерывности вероятностной меры получаем, что $\mathsf{P}(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathsf{P}(A_n)$. Но для любого n,

$$\mathsf{P}(A_n) = \mathsf{E}\,I_{A_n} \leqslant \mathsf{E}(n\xi)I_{A_n} \leqslant \mathsf{E}(n\xi) = 0.$$

Свойства математического ожидания

Свойство (7)

Если $\xi = \eta$ п.н. и $\mathsf{E}\,\xi$ конечно, то $\mathsf{E}\,\eta$ конечно и $\mathsf{E}\,\xi = \mathsf{E}\,\eta$.

Доказательство свойства (7). Обозначим $\delta = \eta - \xi$. Согласно свойству (6) $\mathsf{E}\,\delta = 0$. Тогда из свойства (5) получаем, что математическое ожидание $\eta = \xi + \delta$ тоже конечно и

$$\mathsf{E}\,\eta = \mathsf{E}\,\xi + \mathsf{E}\,\delta = \mathsf{E}\,\xi. \qquad \square$$

Свойство (8)

Если $\xi \geqslant 0$ и $\mathsf{E}\,\xi = 0$, то $\xi = 0$ п.н.

Доказательство свойства (8). Обозначим $A_n = \{\xi > \frac{1}{n}\}$. Тогда $A_n \uparrow A = \{\xi > 0\}$ при $n \to +\infty$. В силу непрерывности вероятностной меры получаем, что $\mathsf{P}(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathsf{P}(A_n)$. Но для любого n,

$$\mathsf{P}(A_n) = \mathsf{E}\,I_{A_n} \leqslant \mathsf{E}(n\xi)I_{A_n} \leqslant \mathsf{E}(n\xi) = 0.$$

Стало быть, $\mathsf{P}(A) = 0$, что эквивалентно тому, что $\xi = 0$ п.н. $\square$

Свойство (9)

Пусть $\mathsf{E}\,\xi$ *и* $\mathsf{E}\,\eta$ *конечны. Если для любого события* $A \in \mathcal{F}$ *выполнено неравенство*

$$\mathsf{E}(\xi I_A) \leqslant \mathsf{E}(\eta I_A),$$

то $\xi \leqslant \eta$ *п.н.*

Свойства математического ожидания

Свойство (9)

Пусть $\mathsf{E}\,\xi$ *и* $\mathsf{E}\,\eta$ *конечны. Если для любого события* $A \in \mathcal{F}$ *выполнено неравенство*

$$\mathsf{E}(\xi I_A) \leqslant \mathsf{E}(\eta I_A),$$

то $\xi \leqslant \eta$ *п.н.*

Доказательство свойства (9). Обозначим $B = \{\xi > \eta\}$. Тогда в силу условия и определения B, применяя свойство (5), получаем, что

$$\mathsf{E}(\eta I_B) \leqslant \mathsf{E}(\xi I_B) \leqslant \mathsf{E}(\eta I_B).$$

Свойства математического ожидания

Свойство (9)

Пусть $\mathsf{E}\,\xi$ *и* $\mathsf{E}\,\eta$ *конечны. Если для любого события* $A \in \mathcal{F}$ *выполнено неравенство*

$$\mathsf{E}(\xi I_A) \leqslant \mathsf{E}(\eta I_A),$$

то $\xi \leqslant \eta$ *п.н.*

Доказательство свойства (9). Обозначим $B = \{\xi > \eta\}$. Тогда в силу условия и определения B, применяя свойство (5), получаем, что

$$\mathsf{E}(\eta I_B) \leqslant \mathsf{E}(\xi I_B) \leqslant \mathsf{E}(\eta I_B).$$

Отсюда $\mathsf{E}(\eta I_B) = \mathsf{E}(\xi I_B)$ или $\mathsf{E}((\xi - \eta) I_B) = 0$.

Свойства математического ожидания

Свойство (9)

Пусть $\mathsf{E}\,\xi$ *и* $\mathsf{E}\,\eta$ *конечны. Если для любого события* $A \in \mathcal{F}$ *выполнено неравенство*

$$\mathsf{E}(\xi I_A) \leqslant \mathsf{E}(\eta I_A),$$

то $\xi \leqslant \eta$ *п.н.*

Доказательство свойства (9). Обозначим $B = \{\xi > \eta\}$. Тогда в силу условия и определения B, применяя свойство (5), получаем, что

$$\mathsf{E}(\eta I_B) \leqslant \mathsf{E}(\xi I_B) \leqslant \mathsf{E}(\eta I_B).$$

Отсюда $\mathsf{E}(\eta I_B) = \mathsf{E}(\xi I_B)$ или $\mathsf{E}((\xi - \eta) I_B) = 0$. Но случайная величина $(\xi - \eta) I_B$ неотрицательна. Согласно свойству (8) получаем, что $(\xi - \eta) I_B = 0$ п.н.

Свойства математического ожидания

Свойство (9)

Пусть $\mathsf{E}\,\xi$ *и* $\mathsf{E}\,\eta$ *конечны. Если для любого события* $A \in \mathcal{F}$ *выполнено неравенство*

$$\mathsf{E}(\xi I_A) \leqslant \mathsf{E}(\eta I_A),$$

то $\xi \leqslant \eta$ *п.н.*

Доказательство свойства (9). Обозначим $B = \{\xi > \eta\}$. Тогда в силу условия и определения B, применяя свойство (5), получаем, что

$$\mathsf{E}(\eta I_B) \leqslant \mathsf{E}(\xi I_B) \leqslant \mathsf{E}(\eta I_B).$$

Отсюда $\mathsf{E}(\eta I_B) = \mathsf{E}(\xi I_B)$ или $\mathsf{E}((\xi - \eta) I_B) = 0$. Но случайная величина $(\xi - \eta) I_B$ неотрицательна. Согласно свойству (8) получаем, что $(\xi - \eta) I_B = 0$ п.н. Но если $I_B > 0$, то $\xi - \eta > 0$. Значит,

$$(\xi - \eta) I_B = 0 \Leftrightarrow I_B = 0,$$

что дает $I_B = 0$ п.н. Последнее эквивалентно тому, что $\mathsf{P}(B) = 0$. □

Теория вероятностей. Лекция 15.04. Независимые случайные величины

Д. А. Шабанов

мех-мат МГУ, второй курс

15.04.2020

Независимость случайных величин и векторов

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство.

Независимость случайных величин и векторов

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство.

Определение

Набор случайных векторов $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ называется независимым в совокупности, если независимыми в совокупности порожденные σ-алгебры $\{\mathcal{F}_{\xi_\alpha}, \alpha \in \mathfrak{A}\}$.

Независимость случайных величин и векторов

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство.

Определение

Набор случайных векторов $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *на* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ *называется независимым в совокупности, если независимыми в совокупности порожденные* σ*-алгебры* $\{\mathcal{F}_{\xi_\alpha}, \alpha \in \mathfrak{A}\}$.

Напомним, что произвольный набор систем событий независим в совокупности, если таков любой его конечный поднабор.

Независимость случайных величин и векторов

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство.

Определение

Набор случайных векторов $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *на* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ *называется независимым в совокупности, если независимыми в совокупности порожденные* σ*-алгебры* $\{\mathcal{F}_{\xi_\alpha}, \alpha \in \mathfrak{A}\}$.

Напомним, что произвольный набор систем событий независим в совокупности, если таков любой его конечный поднабор. А конечный набор $\{\mathcal{M}_k, k = 1, \ldots, n\}$ систем событий называется независимым в совокупности, если для любой набор событий $A_1, \ldots, A_n$, $A_i \in \mathcal{M}_i$, $i = 1, \ldots, n$, независим в совокупности.

Независимость случайных величин и векторов

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство.

Определение

Набор случайных векторов $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *на* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ *называется независимым в совокупности, если независимыми в совокупности порожденные* σ*-алгебры* $\{\mathcal{F}_{\xi_\alpha}, \alpha \in \mathfrak{A}\}$.

Напомним, что произвольный набор систем событий независим в совокупности, если таков любой его конечный поднабор. А конечный набор $\{\mathcal{M}_k, k = 1, \ldots, n\}$ систем событий называется независимым в совокупности, если для любой набор событий $A_1, \ldots, A_n$, $A_i \in \mathcal{M}_i$, $i = 1, \ldots, n$, независим в совокупности.

Тем самым, можно дать следующее эквивалентное определение независимости набора случайных величин или векторов.

Независимость: эквивалентные определения

Определение

Набор случайных векторов $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *(где* $\xi_\alpha \in \mathbb{R}^{k_\alpha}$*) называется независимым в совокупности, если для любого* $n \in \mathbb{N}$*, любых* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathfrak{A}$ *и любых борелевских множеств* $B_1, \ldots, B_n$*,* $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k_{\alpha_i}})$*, выполнено*

$$\mathsf{P}\left(\xi_{\alpha_1} \in B_1, \ldots, \xi_{\alpha_n} \in B_n\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathsf{P}\left(\xi_{\alpha_j} \in B_j\right).$$

Независимость: эквивалентные определения

Определение

Набор случайных векторов $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *(где* $\xi_\alpha \in \mathbb{R}^{k_\alpha}$*) называется независимым в совокупности, если для любого* $n \in \mathbb{N}$*, любых* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathfrak{A}$ *и любых борелевских множеств* $B_1, \ldots, B_n$*,* $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k_{\alpha_i}})$*, выполнено*

$$\mathsf{P}\left(\xi_{\alpha_1} \in B_1, \ldots, \xi_{\alpha_n} \in B_n\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathsf{P}\left(\xi_{\alpha_j} \in B_j\right).$$

Важный критерий независимости формулируется в терминах факторизации совместных функций распределения.

Независимость: эквивалентные определения

Определение

Набор случайных векторов $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *(где* $\xi_\alpha \in \mathbb{R}^{k_\alpha}$*) называется независимым в совокупности, если для любого* $n \in \mathbb{N}$, *любых* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathfrak{A}$ *и любых борелевских множеств* $B_1, \ldots, B_n$, $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k_{\alpha_i}})$, *выполнено*

$$\mathsf{P}\left(\xi_{\alpha_1} \in B_1, \ldots, \xi_{\alpha_n} \in B_n\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathsf{P}\left(\xi_{\alpha_j} \in B_j\right).$$

Важный критерий независимости формулируется в терминах факторизации совместных функций распределения.

Теорема (критерий независимости для ф.р.)

Набор случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *является независимым в совокупности тогда и только тогда, когда для любых* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *выполняется равенство:*

$$\mathsf{P}\left(\xi_1 \leqslant x_1, \ldots, \xi_n \leqslant x_n\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathsf{P}\left(\xi_j \leqslant x_j\right).$$

Доказательство критерия

По определению $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы в совокупности $\Leftrightarrow$ независимы в совокупности σ-алгебры $\mathcal{F}_{\xi_1}, \ldots, \mathcal{F}_{\xi_n}$, ими порожденные. Напомним, что

$$\mathcal{F}_{\xi_k} = \{\{\xi_k \in B_k\} : \ B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Доказательство критерия

По определению $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы в совокупности $\Leftrightarrow$ независимы в совокупности σ-алгебры $\mathcal{F}_{\xi_1}, \ldots, \mathcal{F}_{\xi_n}$, ими порожденные. Напомним, что

$$\mathcal{F}_{\xi_k} = \{\{\xi_k \in B_k\} : \; B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Рассмотрим для каждого $k = 1, \ldots, n$, систему событий $\mathcal{M}_{\xi_k} = \{\{\xi_k \leqslant x_k\} : \; x_k \in \mathbb{R}\}$. Легко видеть, что это π-система и $\sigma(\mathcal{M}_{\xi_k}) = \mathcal{F}_{\xi_k}$.

Доказательство критерия

По определению $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы в совокупности $\Leftrightarrow$ независимы в совокупности σ-алгебры $\mathcal{F}_{\xi_1}, \ldots, \mathcal{F}_{\xi_n}$, ими порожденные. Напомним, что

$$\mathcal{F}_{\xi_k} = \{\{\xi_k \in B_k\} : \ B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Рассмотрим для каждого $k = 1, \ldots, n$, систему событий $\mathcal{M}_{\xi_k} = \{\{\xi_k \leqslant x_k\} : \ x_k \in \mathbb{R}\}$. Легко видеть, что это π-система и $\sigma(\mathcal{M}_{\xi_k}) = \mathcal{F}_{\xi_k}$.

Согласно критерию независимости σ-алгебр (*независимы тогда и только тогда, когда независимы порождающие их π-системы*) получаем, что $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы в совокупности $\Leftrightarrow$

Доказательство критерия

По определению $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы в совокупности $\Leftrightarrow$ независимы в совокупности σ-алгебры $\mathcal{F}_{\xi_1}, \ldots, \mathcal{F}_{\xi_n}$, ими порожденные. Напомним, что

$$\mathcal{F}_{\xi_k} = \{\{\xi_k \in B_k\} : \ B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Рассмотрим для каждого $k = 1, \ldots, n$, систему событий $\mathcal{M}_{\xi_k} = \{\{\xi_k \leqslant x_k\} : \ x_k \in \mathbb{R}\}$. Легко видеть, что это π-система и $\sigma(\mathcal{M}_{\xi_k}) = \mathcal{F}_{\xi_k}$.

Согласно критерию независимости σ-алгебр (*независимы тогда и только тогда, когда независимы порождающие их π-системы*) получаем, что $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы в совокупности $\Leftrightarrow$ независимы в совокупности $\mathcal{M}_{\xi_1}, \ldots, \mathcal{M}_{\xi_n}$ $\Leftrightarrow$

Доказательство критерия

По определению $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы в совокупности $\Leftrightarrow$ независимы в совокупности σ-алгебры $\mathcal{F}_{\xi_1}, \ldots, \mathcal{F}_{\xi_n}$, ими порожденные. Напомним, что

$$\mathcal{F}_{\xi_k} = \{\{\xi_k \in B_k\} : \ B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Рассмотрим для каждого $k = 1, \ldots, n$, систему событий $\mathcal{M}_{\xi_k} = \{\{\xi_k \leqslant x_k\} : \ x_k \in \mathbb{R}\}$. Легко видеть, что это π-система и $\sigma(\mathcal{M}_{\xi_k}) = \mathcal{F}_{\xi_k}$.

Согласно критерию независимости σ-алгебр (*независимы тогда и только тогда, когда независимы порождающие их π-системы*) получаем, что $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы в совокупности $\Leftrightarrow$ независимы в совокупности $\mathcal{M}_{\xi_1}, \ldots, \mathcal{M}_{\xi_n}$ $\Leftrightarrow$ для любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ события $\{\xi_1 \leqslant x_1\}, \ldots, \{\xi_n \leqslant x_n\}$ независимы в совокупности.

Доказательство критерия

По определению $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы в совокупности $\Leftrightarrow$ независимы в совокупности σ-алгебры $\mathcal{F}_{\xi_1}, \ldots, \mathcal{F}_{\xi_n}$, ими порожденные. Напомним, что

$$\mathcal{F}_{\xi_k} = \{\{\xi_k \in B_k\} : \; B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Рассмотрим для каждого $k = 1, \ldots, n$, систему событий $\mathcal{M}_{\xi_k} = \{\{\xi_k \leqslant x_k\} : \; x_k \in \mathbb{R}\}$. Легко видеть, что это π-система и $\sigma(\mathcal{M}_{\xi_k}) = \mathcal{F}_{\xi_k}$.

Согласно критерию независимости σ-алгебр (*независимы тогда и только тогда, когда независимы порождающие их π-системы*) получаем, что $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы в совокупности $\Leftrightarrow$ независимы в совокупности $\mathcal{M}_{\xi_1}, \ldots, \mathcal{M}_{\xi_n}$ $\Leftrightarrow$ для любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ события $\{\xi_1 \leqslant x_1\}, \ldots, \{\xi_n \leqslant x_n\}$ независимы в совокупности.

Последнее автоматически влечет, что для любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ выполняется равенство:

$$\mathsf{P}\left(\xi_1 \leqslant x_1, \ldots, \xi_n \leqslant x_n\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathsf{P}\left(\xi_j \leqslant x_j\right).$$

Доказательство критерия

В обратную сторону. Если для любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ выполняется равенство:

$$\mathsf{P}\left(\xi_1 \leqslant x_1, \ldots, \xi_n \leqslant x_n\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathsf{P}\left(\xi_j \leqslant x_j\right),$$

то переходя к пределу при некоторых $x_j \to +\infty$, мы получаем, что верхнее равенство верно и для любого поднабора вида

$$\mathsf{P}\left(\xi_{i_1} \leqslant x_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k} \leqslant x_{i_k}\right) = \prod_{j=1}^{k} \mathsf{P}\left(\xi_{i_j} \leqslant x_{i_j}\right),$$

что и означает, что для любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ события $\{\xi_1 \leqslant x_1\}, \ldots, \{\xi_n \leqslant x_n\}$ независимы в совокупности. Критерий доказан. $\square$

Доказательство критерия

В обратную сторону. Если для любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ выполняется равенство:

$$\mathsf{P}\left(\xi_1 \leqslant x_1, \ldots, \xi_n \leqslant x_n\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathsf{P}\left(\xi_j \leqslant x_j\right),$$

то переходя к пределу при некоторых $x_j \to +\infty$, мы получаем, что верхнее равенство верно и для любого поднабора вида

$$\mathsf{P}\left(\xi_{i_1} \leqslant x_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k} \leqslant x_{i_k}\right) = \prod_{j=1}^{k} \mathsf{P}\left(\xi_{i_j} \leqslant x_{i_j}\right),$$

что и означает, что для любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ события $\{\xi_1 \leqslant x_1\}, \ldots, \{\xi_n \leqslant x_n\}$ независимы в совокупности. Критерий доказан. $\square$

Замечание

С.в. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы в совокупности $\Leftrightarrow$ функция распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ является произведением функций распределения своих компонент $\xi_1, \ldots, \xi_n$, каждая от своей переменной.

Критерий независимости для векторов

Критерий независимости естественно обобщается и на случай случайных векторов.

Теорема (обобщенный критерий)

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *— случайные векторы,* $\xi_j \in \mathbb{R}^{k_j}$, $j = 1, \ldots, n$. *Тогда* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *— независимы в совокупности тогда и только тогда, когда для любых* $\overrightarrow{x}_1, \ldots, \overrightarrow{x}_n$, $\overrightarrow{x}_j \in \mathbb{R}^{k_j}$ *выполняется равенство:*

$$\mathsf{P}\left(\xi_1 \leqslant \overrightarrow{x}_1, \ldots, \xi_n \leqslant \overrightarrow{x}_n\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathsf{P}\left(\xi_j \leqslant \overrightarrow{x}_j\right).$$

Свойства независимости

Лемма (функции от независимых — независимы)

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *— независимые в совокупности случайные векторы,* $\xi_j \in \mathbb{R}^{k_j}$*,* $j = 1, \ldots, n$*, а* $f_1, \ldots, f_n$ *— борелевские функции,* $f_j : \mathbb{R}^{k_j} \to \mathbb{R}^{m_j}$*,* $j = 1, \ldots, n$*. Тогда независимы в совокупности и векторы* $f_1(\xi_1), \ldots, f_n(\xi_n)$*.*

Свойства независимости

Лемма (функции от независимых — независимы)

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *— независимые в совокупности случайные векторы,* $\xi_j \in \mathbb{R}^{k_j}$, $j = 1, \ldots, n$, *а* $f_1, \ldots, f_n$ *— борелевские функции,* $f_j : \mathbb{R}^{k_j} \to \mathbb{R}^{m_j}$, $j = 1, \ldots, n$. *Тогда независимы в совокупности и векторы* $f_1(\xi_1), \ldots, f_n(\xi_n)$.

Доказательство.

Обозначим $\eta_j = f_j(\xi_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда σ-алгебра, порожденная η_j, входит в $\mathcal{F}_{\xi_j}$, т.е. $\mathcal{F}_{\eta_j} \subset \mathcal{F}_{\xi_j}$.

Свойства независимости

Лемма (функции от независимых — независимы)

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *— независимые в совокупности случайные векторы,* $\xi_j \in \mathbb{R}^{k_j}$, $j = 1, \ldots, n$, *а* $f_1, \ldots, f_n$ *— борелевские функции,* $f_j : \mathbb{R}^{k_j} \to \mathbb{R}^{m_j}$, $j = 1, \ldots, n$. *Тогда независимы в совокупности и векторы* $f_1(\xi_1), \ldots, f_n(\xi_n)$.

Доказательство.

Обозначим $\eta_j = f_j(\xi_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда σ-алгебра, порожденная η_j, входит в $\mathcal{F}_{\xi_j}$, т.е. $\mathcal{F}_{\eta_j} \subset \mathcal{F}_{\xi_j}$.

Значит, $\mathcal{F}_{\eta_1}, \ldots, \mathcal{F}_{\eta_n}$ независимы в совокупности, как подсистемы независимых систем событий, что и обосновывает независимость $\eta_1, \ldots, \eta_n$.

□

Свойства независимости

Следствие

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}, \xi_{n_1+1}, \ldots, \xi_{n_1+n_2}$, ..., $\xi_{n_1+\ldots+n_k}$ *— независимые случайные величины, а* $f_1, \ldots, f_k$ *— борелевские функции,* $f_j : \mathbb{R}^{n_j} \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, k$. *Тогда независимы и случайные величины*
$f_1(\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}), \ldots, f_k(\xi_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1}, \ldots, \xi_{n_1+\ldots+n_k})$.

Свойства независимости

Следствие

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}, \xi_{n_1+1}, \ldots, \xi_{n_1+n_2}$, ..., $\xi_{n_1+\ldots+n_k}$ *— независимые случайные величины, а* $f_1, \ldots, f_k$ *— борелевские функции,* $f_j : \mathbb{R}^{n_j} \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, k$. *Тогда независимы и случайные величины*
$f_1(\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}), \ldots, f_k(\xi_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1}, \ldots, \xi_{n_1+\ldots+n_k})$.

Теорема (свойство (10) математического ожидания)

Пусть ξ *и* η *— независимые случайные величины с конечными математическими ожиданиями. Тогда* $\xi\eta$ *также имеет конечное математическое ожидание и*

$$\mathsf{E}\,\xi\eta = \mathsf{E}\,\xi \cdot \mathsf{E}\,\eta.$$

Доказательство свойства (10)

Пусть сначала ξ и η — простые случайные величины.

Доказательство свойства (10)

Пусть сначала ξ и η — простые случайные величины. Тогда представим их виде

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k I\{\xi = x_k\}, \ \ \eta = \sum_{j=1}^{m} y_j I\{\eta = y_j\},$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — значения ξ, а $y_1, \ldots, y_m$ — значения η.

Доказательство свойства (10)

Пусть сначала ξ и η — простые случайные величины. Тогда представим их виде

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k I\{\xi = x_k\}, \quad \eta = \sum_{j=1}^{m} y_j I\{\eta = y_j\},$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — значения ξ, а $y_1, \ldots, y_m$ — значения η. Тогда в силу линейности математического ожидания получаем, что

$$\mathsf{E}(\xi \cdot \eta) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_k y_j \, \mathsf{E}\left(I\{\xi = x_k\} \cdot I\{\eta = y_j\}\right) =$$

Доказательство свойства (10)

Пусть сначала ξ и η — простые случайные величины. Тогда представим их виде

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k I\{\xi = x_k\}, \quad \eta = \sum_{j=1}^{m} y_j I\{\eta = y_j\},$$

где $x_1, \dots, x_n$ — значения ξ, а $y_1, \dots, y_m$ — значения η. Тогда в силу линейности математического ожидания получаем, что

$$\mathsf{E}(\xi \cdot \eta) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_k y_j \, \mathsf{E} \left(I\{\xi = x_k\} \cdot I\{\eta = y_j\} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_k y_j \, \mathsf{P} \left(\xi = x_k, \eta = y_j \right) =$$

Доказательство свойства (10)

Пусть сначала ξ и η — простые случайные величины. Тогда представим их виде

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k I\{\xi = x_k\}, \quad \eta = \sum_{j=1}^{m} y_j I\{\eta = y_j\},$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — значения ξ, а $y_1, \ldots, y_m$ — значения η. Тогда в силу линейности математического ожидания получаем, что

$$\mathsf{E}(\xi \cdot \eta) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_k y_j \, \mathsf{E}\left(I\{\xi = x_k\} \cdot I\{\eta = y_j\}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_k y_j \mathsf{P}\left(\xi = x_k, \eta = y_j\right) =$$

(независимость)

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_k y_j \mathsf{P}(\xi = x_k) \mathsf{P}(\eta = y_j) =$$

Доказательство свойства (10)

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \mathsf{P}(\xi = x_k)\right) \left(\sum_{j=1}^{m} y_j \mathsf{P}(\eta = y_j)\right) = \mathsf{E}\,\xi \cdot \mathsf{E}\,\eta.$$

Доказательство свойства (10)

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \mathsf{P}(\xi = x_k)\right) \left(\sum_{j=1}^{m} y_j \mathsf{P}(\eta = y_j)\right) = \mathsf{E}\,\xi \cdot \mathsf{E}\,\eta.$$

Пусть теперь $\xi, \eta \geqslant 0$ — неотрицательные случайные величины.

Доказательство свойства (10)

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \mathsf{P}(\xi = x_k)\right)\left(\sum_{j=1}^{m} y_j \mathsf{P}(\eta = y_j)\right) = \mathsf{E}\,\xi \cdot \mathsf{E}\,\eta.$$

Пусть теперь $\xi, \eta \geqslant 0$ — неотрицательные случайные величины. По теореме о приближении простыми случайными величинами существуют такие последовательности простых с.в. $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$, что

Доказательство свойства (10)

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \mathsf{P}(\xi = x_k)\right) \left(\sum_{j=1}^{m} y_j \mathsf{P}(\eta = y_j)\right) = \mathsf{E}\,\xi \cdot \mathsf{E}\,\eta.$$

Пусть теперь $\xi, \eta \geqslant 0$ — неотрицательные случайные величины. По теореме о приближении простыми случайными величинами существуют такие последовательности простых с.в. $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$, что

- $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$, $0 \leqslant \eta_n \uparrow \eta$;

Доказательство свойства (10)

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \mathsf{P}(\xi = x_k)\right) \left(\sum_{j=1}^{m} y_j \mathsf{P}(\eta = y_j)\right) = \mathsf{E}\,\xi \cdot \mathsf{E}\,\eta.$$

Пусть теперь $\xi, \eta \geqslant 0$ — неотрицательные случайные величины. По теореме о приближении простыми случайными величинами существуют такие последовательности простых с.в. $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$, что

- $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$, $0 \leqslant \eta_n \uparrow \eta$;
- для всех $n \in \mathbb{N}$ случайная величина ξ_n является $\mathcal{F}_\xi$-измеримой;

Доказательство свойства (10)

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \mathsf{P}(\xi = x_k) \right) \left(\sum_{j=1}^{m} y_j \mathsf{P}(\eta = y_j) \right) = \mathsf{E}\,\xi \cdot \mathsf{E}\,\eta.$$

Пусть теперь $\xi, \eta \geqslant 0$ — неотрицательные случайные величины. По теореме о приближении простыми случайными величинами существуют такие последовательности простых с.в. $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$, что

- $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$, $0 \leqslant \eta_n \uparrow \eta$;
- для всех $n \in \mathbb{N}$ случайная величина ξ_n является $\mathcal{F}_\xi$-измеримой;
- для всех $n \in \mathbb{N}$ случайная величина η_n является $\mathcal{F}_\eta$-измеримой.

Доказательство свойства (10)

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \mathsf{P}(\xi = x_k)\right) \left(\sum_{j=1}^{m} y_j \mathsf{P}(\eta = y_j)\right) = \mathsf{E}\,\xi \cdot \mathsf{E}\,\eta.$$

Пусть теперь $\xi, \eta \geqslant 0$ — неотрицательные случайные величины. По теореме о приближении простыми случайными величинами существуют такие последовательности простых с.в. $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$, что

- $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$, $0 \leqslant \eta_n \uparrow \eta$;
- для всех $n \in \mathbb{N}$ случайная величина ξ_n является $\mathcal{F}_\xi$-измеримой;
- для всех $n \in \mathbb{N}$ случайная величина η_n является $\mathcal{F}_\eta$-измеримой.

Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ случайные величины ξ_n и η_n независимы. Кроме того, $0 \leqslant \xi_n \eta_n \uparrow \xi\eta$.

Доказательство свойства (10)

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \mathsf{P}(\xi = x_k)\right)\left(\sum_{j=1}^{m} y_j \mathsf{P}(\eta = y_j)\right) = \mathsf{E}\,\xi \cdot \mathsf{E}\,\eta.$$

Пусть теперь $\xi, \eta \geqslant 0$ — неотрицательные случайные величины. По теореме о приближении простыми случайными величинами существуют такие последовательности простых с.в. $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$, что

- $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$, $0 \leqslant \eta_n \uparrow \eta$;
- для всех $n \in \mathbb{N}$ случайная величина ξ_n является $\mathcal{F}_\xi$-измеримой;
- для всех $n \in \mathbb{N}$ случайная величина η_n является $\mathcal{F}_\eta$-измеримой.

Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ случайные величины ξ_n и η_n независимы. Кроме того, $0 \leqslant \xi_n\eta_n \uparrow \xi\eta$. Отсюда,

$$\mathsf{E}\,\xi\eta = \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n\eta_n = \lim_{n\to+\infty} (\mathsf{E}\,\xi_n \cdot \mathsf{E}\,\eta_n) =$$

Доказательство свойства (10)

$$= \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \cdot \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\eta_n = \mathsf{E}\,\xi \cdot \mathsf{E}\,\eta.$$

Доказательство свойства (10)

$$= \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \cdot \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\eta_n = \mathsf{E}\,\xi \cdot \mathsf{E}\,\eta.$$

Наконец, если ξ, η — произвольные с.в., то случайные величины $\xi^{\pm}$, $\eta^{\pm}$ также имеют конечные математические ожидания.

Доказательство свойства (10)

$$= \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \cdot \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\eta_n = \mathsf{E}\,\xi \cdot \mathsf{E}\,\eta.$$

Наконец, если ξ, η — произвольные с.в., то случайные величины $\xi^{\pm}$, $\eta^{\pm}$ также имеют конечные математические ожидания. Далее, заметим, что

$$(\xi\eta)^+ = \xi^+\eta^+ + \xi^-\eta^-, \quad (\xi\eta)^- = \xi^+\eta^- + \xi^-\eta^+.$$

Доказательство свойства (10)

$$= \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \cdot \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\eta_n = \mathsf{E}\,\xi \cdot \mathsf{E}\,\eta.$$

Наконец, если ξ, η — произвольные с.в., то случайные величины $\xi^\pm$, $\eta^\pm$ также имеют конечные математические ожидания. Далее, заметим, что

$$(\xi\eta)^+ = \xi^+\eta^+ + \xi^-\eta^-, \quad (\xi\eta)^- = \xi^+\eta^- + \xi^-\eta^+.$$

Теперь заметим, что $\xi^\pm$ и $\eta^\pm$ являются $\mathcal{F}_\xi$ - и, соответственно, $\mathcal{F}_\eta$ -измеримыми. Значит, они попарно независимы, и, следовательно, по доказанному выше случайные величины $(\xi\eta)^+$ и $(\xi\eta)^-$ имеют конечные математические ожидания.

Доказательство свойства (10)

$$= \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \cdot \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\eta_n = \mathsf{E}\,\xi \cdot \mathsf{E}\,\eta.$$

Наконец, если ξ, η — произвольные с.в., то случайные величины $\xi^{\pm}$, $\eta^{\pm}$ также имеют конечные математические ожидания. Далее, заметим, что

$$(\xi\eta)^{+} = \xi^{+}\eta^{+} + \xi^{-}\eta^{-}, \;\; (\xi\eta)^{-} = \xi^{+}\eta^{-} + \xi^{-}\eta^{+}.$$

Теперь заметим, что $\xi^{\pm}$ и $\eta^{\pm}$ являются $\mathcal{F}_{\xi}$ - и, соответственно, $\mathcal{F}_{\eta}$ -измеримыми. Значит, они попарно независимы, и, следовательно, по доказанному выше случайные величины $(\xi\eta)^{+}$ и $(\xi\eta)^{-}$ имеют конечные математические ожидания. В итоге,

$$\mathsf{E}\,\xi\eta = \mathsf{E}\,(\xi\eta)^{+} - \mathsf{E}\,(\xi\eta)^{-} = \mathsf{E}\,\xi^{+}\eta^{+} + \mathsf{E}\,\xi^{-}\eta^{-} - \mathsf{E}\,\xi^{+}\eta^{-} - \mathsf{E}\,\xi^{-}\eta^{+} =$$

Доказательство свойства (10)

$$= \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \cdot \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\eta_n = \mathsf{E}\,\xi \cdot \mathsf{E}\,\eta.$$

Наконец, если ξ, η — произвольные с.в., то случайные величины $\xi^{\pm}$, $\eta^{\pm}$ также имеют конечные математические ожидания. Далее, заметим, что

$$(\xi\eta)^{+} = \xi^{+}\eta^{+} + \xi^{-}\eta^{-}, \quad (\xi\eta)^{-} = \xi^{+}\eta^{-} + \xi^{-}\eta^{+}.$$

Теперь заметим, что $\xi^{\pm}$ и $\eta^{\pm}$ являются $\mathcal{F}_{\xi}$ - и, соответственно, $\mathcal{F}_{\eta}$ -измеримыми. Значит, они попарно независимы, и, следовательно, по доказанному выше случайные величины $(\xi\eta)^{+}$ и $(\xi\eta)^{-}$ имеют конечные математические ожидания. В итоге,

$$\mathsf{E}\,\xi\eta = \mathsf{E}\,(\xi\eta)^{+} - \mathsf{E}\,(\xi\eta)^{-} = \mathsf{E}\,\xi^{+}\eta^{+} + \mathsf{E}\,\xi^{-}\eta^{-} - \mathsf{E}\,\xi^{+}\eta^{-} - \mathsf{E}\,\xi^{-}\eta^{+} =$$

(независимость)

$$= \mathsf{E}\,\xi^{+}\,\mathsf{E}\,\eta^{+} + \mathsf{E}\,\xi^{-}\,\mathsf{E}\,\eta^{-} - \mathsf{E}\,\xi^{+}\,\mathsf{E}\,\eta^{-} - \mathsf{E}\,\xi^{-}\,\mathsf{E}\,\eta^{+} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \cdot \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\eta_n = \mathsf{E}\,\xi \cdot \mathsf{E}\,\eta.$$

Наконец, если ξ, η — произвольные с.в., то случайные величины $\xi^{\pm}$, $\eta^{\pm}$ также имеют конечные математические ожидания. Далее, заметим, что

$$(\xi\eta)^+ = \xi^+\eta^+ + \xi^-\eta^-, \;\; (\xi\eta)^- = \xi^+\eta^- + \xi^-\eta^+.$$

Теперь заметим, что $\xi^{\pm}$ и $\eta^{\pm}$ являются $\mathcal{F}_\xi$ - и, соответственно, $\mathcal{F}_\eta$ -измеримыми. Значит, они попарно независимы, и, следовательно, по доказанному выше случайные величины $(\xi\eta)^+$ и $(\xi\eta)^-$ имеют конечные математические ожидания. В итоге,

$$\mathsf{E}\,\xi\eta = \mathsf{E}\,(\xi\eta)^+ - \mathsf{E}\,(\xi\eta)^- = \mathsf{E}\,\xi^+\eta^+ + \mathsf{E}\,\xi^-\eta^- - \mathsf{E}\,\xi^+\eta^- - \mathsf{E}\,\xi^-\eta^+ =$$

(независимость)

$$= \mathsf{E}\,\xi^+\,\mathsf{E}\,\eta^+ + \mathsf{E}\,\xi^-\,\mathsf{E}\,\eta^- - \mathsf{E}\,\xi^+\,\mathsf{E}\,\eta^- - \mathsf{E}\,\xi^-\,\mathsf{E}\,\eta^+ =$$

$$= \left(\mathsf{E}\,\xi^+ - \mathsf{E}\,\xi^-\right)\left(\mathsf{E}\,\eta^+ - \mathsf{E}\,\eta^-\right) = \mathsf{E}\,\xi \cdot \mathsf{E}\,\eta. \qquad \square$$

Дисперсия и ковариация

Определение

Дисперсией случайной величины ξ *называется величина*

$$\mathsf{D}\,\xi = \mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\,\xi)^2,$$

если математическое ожидание ξ *конечно.*

Дисперсия и ковариация

Определение

Дисперсией случайной величины ξ *называется величина*

$$\mathsf{D}\,\xi = \mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\,\xi)^2,$$

если математическое ожидание ξ *конечно.*

Определение

Ковариацией случайных величин ξ *и* η *называется величина*

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathsf{E}\left((\xi - \mathsf{E}\,\xi)(\eta - \mathsf{E}\,\eta)\right).$$

Дисперсия и ковариация

Определение

Дисперсией случайной величины ξ *называется величина*

$$\mathsf{D}\,\xi = \mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\,\xi)^2,$$

если математическое ожидание ξ *конечно.*

Определение

Ковариацией случайных величин ξ *и* η *называется величина*

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathsf{E}\left((\xi - \mathsf{E}\,\xi)(\eta - \mathsf{E}\,\eta)\right).$$

Если $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$, *то говорят, что случайные величины* ξ *и* η *некоррелированы.*

Дисперсия и ковариация

Определение

Дисперсией случайной величины ξ *называется величина*

$$\mathsf{D}\,\xi = \mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\,\xi)^2,$$

если математическое ожидание ξ *конечно.*

Определение

Ковариацией случайных величин ξ *и* η *называется величина*

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta) = \mathsf{E}\left((\xi - \mathsf{E}\,\xi)(\eta - \mathsf{E}\,\eta)\right).$$

Если $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = 0$*, то говорят, что случайные величины* ξ *и* η *некоррелированы.*

Следствие

Если с.в. ξ *и* η *независимы и имеют конечные математические ожидания, то они некоррелированы.*

Коэффициент корреляции

Определение

Если дисперсии ξ и η конечны и положительны, то определен коэффициент корреляции случайных величин ξ и η:

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathrm{D}\,\xi \cdot \mathrm{D}\,\eta}}.$$

Свойства дисперсии и ковариации

Лемма (свойства дисперсии и ковариации)

1. *Ковариация билинейна.*

Свойства дисперсии и ковариации

Лемма (свойства дисперсии и ковариации)

1. *Ковариация билинейна.*
2. $\mathsf{D}\,\xi \geqslant 0$ *и равна нулю* $\Leftrightarrow \mathsf{P}(\xi = \mathsf{E}\,\xi) = 1$.

Свойства дисперсии и ковариации

Лемма (свойства дисперсии и ковариации)

1. *Ковариация билинейна.*
2. $\mathsf{D}\,\xi \geqslant 0$ *и равна нулю* $\Leftrightarrow \mathsf{P}(\xi = \mathsf{E}\,\xi) = 1$.
3. $\mathsf{D}(\xi + c) = \mathsf{D}\,\xi$, $\mathsf{D}(c\xi) = c^2\,\mathsf{D}\,\xi$, $c \in \mathbb{R}$.

Свойства дисперсии и ковариации

Лемма (свойства дисперсии и ковариации)

1. *Ковариация билинейна.*
2. $\mathsf{D}\,\xi \geqslant 0$ *и равна нулю* $\Leftrightarrow \mathsf{P}(\xi = \mathsf{E}\,\xi) = 1$.
3. $\mathsf{D}(\xi + c) = \mathsf{D}\,\xi$, $\mathsf{D}(c\xi) = c^2\,\mathsf{D}\,\xi$, $c \in \mathbb{R}$.
4. $$\mathsf{D}\,\xi = \mathrm{cov}(\xi,\xi), \quad \mathsf{D}\,\xi = \mathsf{E}\,\xi^2 - (\mathsf{E}\,\xi)^2, \quad \mathrm{cov}(\xi,\eta) = \mathsf{E}(\xi\eta) - \mathsf{E}\,\xi \cdot \mathsf{E}\,\eta.$$

Свойства дисперсии и ковариации

Лемма (свойства дисперсии и ковариации)

1. *Ковариация билинейна.*
2. $\mathsf{D}\,\xi \geqslant 0$ *и равна нулю* $\Leftrightarrow \mathsf{P}(\xi = \mathsf{E}\,\xi) = 1$.
3. $\mathsf{D}(\xi + c) = \mathsf{D}\,\xi$, $\mathsf{D}(c\xi) = c^2\,\mathsf{D}\,\xi$, $c \in \mathbb{R}$.
4. $$\mathsf{D}\,\xi = \mathsf{cov}(\xi, \xi), \;\; \mathsf{D}\,\xi = \mathsf{E}\,\xi^2 - (\mathsf{E}\,\xi)^2, \;\; \mathsf{cov}(\xi, \eta) = \mathsf{E}(\xi\eta) - \mathsf{E}\,\xi \cdot \mathsf{E}\,\eta.$$
5. *Неравенство Коши–Буняковского:*
$$|\,\mathsf{E}\,\xi\eta|^2 \leqslant \mathsf{E}\,\xi^2 \cdot \mathsf{E}\,\eta^2,$$
причем равенство достигается тогда и только тогда, когда с.в. ξ *и* η *линейно зависимы п.н.*

Лемма (свойства дисперсии и ковариации)

1. *Ковариация билинейна.*
2. $\mathsf{D}\,\xi \geqslant 0$ *и равна нулю* $\Leftrightarrow \mathsf{P}(\xi = \mathsf{E}\,\xi) = 1$.
3. $\mathsf{D}(\xi + c) = \mathsf{D}\,\xi$, $\mathsf{D}(c\xi) = c^2\,\mathsf{D}\,\xi$, $c \in \mathbb{R}$.
4. $$\mathsf{D}\,\xi = \mathrm{cov}(\xi, \xi), \quad \mathsf{D}\,\xi = \mathsf{E}\,\xi^2 - (\mathsf{E}\,\xi)^2, \quad \mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathsf{E}(\xi\eta) - \mathsf{E}\,\xi \cdot \mathsf{E}\,\eta.$$
5. *Неравенство Коши–Буняковского:*
$$|\,\mathsf{E}\,\xi\eta|^2 \leqslant \mathsf{E}\,\xi^2 \cdot \mathsf{E}\,\eta^2,$$
причем равенство достигается тогда и только тогда, когда с.в. ξ *и* η *линейно зависимы п.н.*
6. $|\rho(\xi, \eta)| \leqslant 1$, *причем* $= 1$ *тогда и только тогда, когда с.в.* $\xi - \mathsf{E}\,\xi$ *и* $\eta - \mathsf{E}\,\eta$ *линейно зависимы п.н.*

Доказательство леммы

Свойства 1), 2), 3) и 4) легко следуют из свойств математического ожидания и доказываются также, как и в случае дискретного вероятностного пространства.

Доказательство леммы

Свойства 1), 2), 3) и 4) легко следуют из свойств математического ожидания и доказываются также, как и в случае дискретного вероятностного пространства.

5) Рассмотрим $f(a) = \mathsf{E}(\xi + a\eta)^2 \geqslant 0$ как функцию от $a \in \mathbb{R}$.

Доказательство леммы

Свойства 1), 2), 3) и 4) легко следуют из свойств математического ожидания и доказываются также, как и в случае дискретного вероятностного пространства.

5) Рассмотрим $f(a) = \mathsf{E}(\xi + a\eta)^2 \geqslant 0$ как функцию от $a \in \mathbb{R}$. Заметим, что

$$0 \leqslant f(a) = \mathsf{E}\,\xi^2 + 2(\mathsf{E}\,\xi\eta) \cdot a + \mathsf{E}\,\eta^2 \cdot a^2$$

есть неотрицательный квадратный трехчлен.

Доказательство леммы

Свойства 1), 2), 3) и 4) легко следуют из свойств математического ожидания и доказываются также, как и в случае дискретного вероятностного пространства.

5) Рассмотрим $f(a) = \mathsf{E}(\xi + a\eta)^2 \geqslant 0$ как функцию от $a \in \mathbb{R}$. Заметим, что

$$0 \leqslant f(a) = \mathsf{E}\,\xi^2 + 2(\mathsf{E}\,\xi\eta) \cdot a + \mathsf{E}\,\eta^2 \cdot a^2$$

есть неотрицательный квадратный трехчлен. Значит, его дискриминант неположителен:

$$\frac{D}{4} = (\mathsf{E}\,\xi\eta)^2 - \mathsf{E}\,\xi^2 \cdot \mathsf{E}\,\eta^2 \leqslant 0.$$

Неравенство Коши–Буняковского доказано.

Доказательство леммы

Свойства 1), 2), 3) и 4) легко следуют из свойств математического ожидания и доказываются также, как и в случае дискретного вероятностного пространства.

5) Рассмотрим $f(a) = \mathsf{E}(\xi + a\eta)^2 \geqslant 0$ как функцию от $a \in \mathbb{R}$. Заметим, что

$$0 \leqslant f(a) = \mathsf{E}\,\xi^2 + 2(\mathsf{E}\,\xi\eta) \cdot a + \mathsf{E}\,\eta^2 \cdot a^2$$

есть неотрицательный квадратный трехчлен. Значит, его дискриминант неположителен:

$$\frac{D}{4} = (\mathsf{E}\,\xi\eta)^2 - \mathsf{E}\,\xi^2 \cdot \mathsf{E}\,\eta^2 \leqslant 0.$$

Неравенство Коши–Буняковского доказано.

Если же в нем случилось равенство, т.е. дискриминант равен нулю, то $f(a)$ имеет единственный корень a_0.

Доказательство леммы

Свойства 1), 2), 3) и 4) легко следуют из свойств математического ожидания и доказываются также, как и в случае дискретного вероятностного пространства.

5) Рассмотрим $f(a) = \mathsf{E}(\xi + a\eta)^2 \geqslant 0$ как функцию от $a \in \mathbb{R}$. Заметим, что

$$0 \leqslant f(a) = \mathsf{E}\,\xi^2 + 2(\mathsf{E}\,\xi\eta)\cdot a + \mathsf{E}\,\eta^2 \cdot a^2$$

есть неотрицательный квадратный трехчлен. Значит, его дискриминант неположителен:

$$\frac{D}{4} = (\mathsf{E}\,\xi\eta)^2 - \mathsf{E}\,\xi^2 \cdot \mathsf{E}\,\eta^2 \leqslant 0.$$

Неравенство Коши–Буняковского доказано.

Если же в нем случилось равенство, т.е. дискриминант равен нулю, то $f(a)$ имеет единственный корень a_0. Но $0 = f(a_0) = \mathsf{E}(\xi + a_0\eta)^2$ означает, что $\xi + a_0\eta = 0$ п.н.

Доказательство леммы

6) Заметим, что если обозначить $\xi' = \xi - \mathsf{E}\,\xi$, $\eta' = \eta - \mathsf{E}\,\eta$, то

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\mathsf{E}\,\xi'\eta'}{\sqrt{\mathsf{E}(\xi')^2\,\mathsf{E}(\eta')^2}}.$$

Доказательство леммы

6) Заметим, что если обозначить $\xi' = \xi - \mathsf{E}\,\xi$, $\eta' = \eta - \mathsf{E}\,\eta$, то

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\mathsf{E}\,\xi'\eta'}{\sqrt{\mathsf{E}(\xi')^2\,\mathsf{E}(\eta')^2}}.$$

Тогда неравенство $|\rho(\xi, \eta)| \leqslant 1$ эквивалентно неравенству Коши–Буняковского для с.в. ξ', η'.

Доказательство леммы

6) Заметим, что если обозначить $\xi' = \xi - \mathsf{E}\,\xi$, $\eta' = \eta - \mathsf{E}\,\eta$, то

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{\mathsf{E}\,\xi'\eta'}{\sqrt{\mathsf{E}(\xi')^2\,\mathsf{E}(\eta')^2}}.$$

Тогда неравенство $|\rho(\xi,\eta)| \leqslant 1$ эквивалентно неравенству Коши–Буняковского для с.в. ξ', η'. Согласно п. 5) равенство будет достигаться при линейной зависимости между ξ' и η'. $\square$

Следствия

Следствие (1)

Если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *— попарно некоррелированные с.в. с конечными дисперсиями, то*

$$\mathsf{D}\,(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}\,\xi_i.$$

Следствия

Следствие (1)

Если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *— попарно некоррелированные с.в. с конечными дисперсиями, то*

$$\mathsf{D}\,(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}\,\xi_i.$$

Доказательство.

Распишем через ковариацию и воспользуемся ее свойствами:

$$\mathsf{D}\,(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \mathrm{cov}\,(\xi_1 + \ldots + \xi_n, \xi_1 + \ldots + \xi_n) =$$

Следствия

Следствие (1)

Если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *— попарно некоррелированные с.в. с конечными дисперсиями, то*

$$\mathsf{D}\,(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}\,\xi_i.$$

Доказательство.

Распишем через ковариацию и воспользуемся ее свойствами:

$$\mathsf{D}\,(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \mathsf{cov}\,(\xi_1 + \ldots + \xi_n, \xi_1 + \ldots + \xi_n) =$$

(билинейность)

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \mathsf{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{cov}(\xi_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}\,\xi_i.$$

$\square$

Следствия

Следствие (2)

Если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *— независимые с.в. с конечными дисперсиями, то*

$$\mathsf{D}\,(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}\,\xi_i.$$

Следствие (2)

Если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *— независимые с.в. с конечными дисперсиями, то*

$$\mathsf{D}\,(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}\,\xi_i.$$

Доказательство.

Если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимы, то они и попарно некоррелированы. Далее, применяем предыдущее следствие. $\square$

Дисперсия случайного вектора

Определение

Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *— случайный вектор из* $\mathbb{R}^n$. *Его математическим ожиданием называется вектор* $\mathsf{E}\,\xi$ *из* $\mathbb{R}^n$, *составленный из математических ожиданий компонент, т.е.*

$$\mathsf{E}\,\xi = (\mathsf{E}\,\xi_1, \ldots, \mathsf{E}\,\xi_n)$$

Дисперсия случайного вектора

Определение

Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *— случайный вектор из* $\mathbb{R}^n$. *Его математическим ожиданием называется вектор* $\mathsf{E}\,\xi$ *из* $\mathbb{R}^n$, *составленный из математических ожиданий компонент, т.е.*

$$\mathsf{E}\,\xi = (\mathsf{E}\,\xi_1, \ldots, \mathsf{E}\,\xi_n)$$

Определение

Дисперсией (или матрицей ковариаций) случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *из* $\mathbb{R}^n$ *называется матрица размера* $n \times n$ *с элементами*

$$\mathsf{D}\,\xi = (\mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j) : \ i, j = 1, \ldots, n)\,.$$

Свойства матрицы ковариаций

Утверждение

Матрица ковариаций любого случайного вектора является симметрической и неотрицательно определенной.

Свойства матрицы ковариаций

Утверждение

Матрица ковариаций любого случайного вектора является симметрической и неотрицательно определенной.

Доказательство.

Симметричность $\mathrm{D}\,\xi$ следует из симметричности ковариации: $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathrm{cov}(\eta, \xi)$.

Свойства матрицы ковариаций

Утверждение

Матрица ковариаций любого случайного вектора является симметрической и неотрицательно определенной.

Доказательство.

Симметричность $\mathrm{D}\,\xi$ следует из симметричности ковариации: $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathrm{cov}(\eta, \xi)$. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — случайный вектор. Тогда для любого $z = (z_1, \ldots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$ выполнено

Свойства матрицы ковариаций

Утверждение

Матрица ковариаций любого случайного вектора является симметрической и неотрицательно определенной.

Доказательство.

Симметричность $\mathsf{D}\,\xi$ следует из симметричности ковариации: $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathrm{cov}(\eta, \xi)$. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — случайный вектор. Тогда для любого $z = (z_1, \ldots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$ выполнено

$$\langle \mathsf{D}\,\xi z, z\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} (\mathsf{D}\,\xi)_{ij} z_i z_j = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j) \cdot z_i z_j =$$

Свойства матрицы ковариаций

Утверждение

Матрица ковариаций любого случайного вектора является симметрической и неотрицательно определенной.

Доказательство.

Симметричность $\mathsf{D}\,\xi$ следует из симметричности ковариации: $\mathsf{cov}(\xi,\eta)=\mathsf{cov}(\eta,\xi)$. Пусть $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ — случайный вектор. Тогда для любого $z=(z_1,\ldots,z_n)^T\in\mathbb{R}^n$ выполнено

$$\langle \mathsf{D}\,\xi z, z\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}(\mathsf{D}\,\xi)_{ij}z_iz_j=\sum_{i,j=1}^{n}\mathsf{cov}(\xi_i,\xi_j)\cdot z_iz_j=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\mathsf{cov}(z_i\xi_i,z_j\xi_j)=\mathsf{cov}\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\xi_i,\sum_{j=1}^{n}z_j\xi_j\right)=\mathsf{D}\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\xi_i\right)\geqslant 0.$$

$\square$

Предельный переход под знаком E

Вопрос: предположим, что $\xi_n \to \xi$ (поточечно на Ω), верно ли, что тогда и $\mathsf{E}\,\xi_n \to \mathsf{E}\,\xi$?

Предельный переход под знаком E

Вопрос: предположим, что $\xi_n \to \xi$ (поточечно на Ω), верно ли, что тогда и $\mathsf{E}\,\xi_n \to \mathsf{E}\,\xi$?

Теорема (о монотонной сходимости)

Пусть ξ, η, $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— случайные величины. Тогда*

Предельный переход под знаком E

Вопрос: предположим, что $\xi_n \to \xi$ (поточечно на Ω), верно ли, что тогда и $\mathsf{E}\,\xi_n \to \mathsf{E}\,\xi$?

Теорема (о монотонной сходимости)

Пусть ξ, η, $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — случайные величины. Тогда

1. *Если $\mathsf{E}\,\eta > -\infty$, $\xi_n \geqslant \eta$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\xi_n \uparrow \xi$ при $n \to +\infty$, то $\mathsf{E}\,\xi_n \uparrow \mathsf{E}\,\xi$ при $n \to +\infty$.*
2. *Если $\mathsf{E}\,\eta < +\infty$, $\xi_n \leqslant \eta$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\xi_n \downarrow \xi$ при $n \to +\infty$, то $\mathsf{E}\,\xi_n \downarrow \mathsf{E}\,\xi$ при $n \to +\infty$.*

Предельный переход под знаком E

Вопрос: предположим, что $\xi_n \to \xi$ (поточечно на Ω), верно ли, что тогда и $\mathsf{E}\,\xi_n \to \mathsf{E}\,\xi$?

Теорема (о монотонной сходимости)

Пусть ξ, η, $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — случайные величины. Тогда

1. *Если $\mathsf{E}\,\eta > -\infty$, $\xi_n \geqslant \eta$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\xi_n \uparrow \xi$ при $n \to +\infty$, то $\mathsf{E}\,\xi_n \uparrow \mathsf{E}\,\xi$ при $n \to +\infty$.*
2. *Если $\mathsf{E}\,\eta < +\infty$, $\xi_n \leqslant \eta$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\xi_n \downarrow \xi$ при $n \to +\infty$, то $\mathsf{E}\,\xi_n \downarrow \mathsf{E}\,\xi$ при $n \to +\infty$.*

Доказательство. Заметим, что второй пункт сводится к первому домножением всех участвующих случайных величин на -1. Так что будем доказывать только первый пункт.

Доказательство теоремы

Будем сначала считать, что $\eta = 0$. Тогда все с.в. ξ_n неотрицательны и для каждого $n \in \mathbb{N}$ можно взять такую последовательность простых с.в. $\{\xi_n^{(k)}, k \in \mathbb{N}\}$, что $\xi_n^{(k)} \uparrow \xi_n$ при $k \to +\infty$.

Доказательство теоремы

Будем сначала считать, что $\eta = 0$. Тогда все с.в. ξ_n неотрицательны и для каждого $n \in \mathbb{N}$ можно взять такую последовательность простых с.в. $\{\xi_n^{(k)}, k \in \mathbb{N}\}$, что $\xi_n^{(k)} \uparrow \xi_n$ при $k \to +\infty$.

Обозначим $\zeta_k = \max\limits_{1 \leqslant n \leqslant k} \xi_n^{(k)}$. Тогда в силу монотонности последовательности $\xi_n^{(k)}$ получаем, что

$$\zeta_k = \max_{1 \leqslant n \leqslant k} \xi_n^{(k)} \leqslant \max_{1 \leqslant n \leqslant k} \xi_n^{(k+1)} \leqslant \max_{1 \leqslant n \leqslant k+1} \xi_n^{(k+1)} = \zeta_{k+1}.$$

Доказательство теоремы

Будем сначала считать, что $\eta = 0$. Тогда все с.в. ξ_n неотрицательны и для каждого $n \in \mathbb{N}$ можно взять такую последовательность простых с.в. $\{\xi_n^{(k)}, k \in \mathbb{N}\}$, что $\xi_n^{(k)} \uparrow \xi_n$ при $k \to +\infty$.

Обозначим $\zeta_k = \max\limits_{1 \leqslant n \leqslant k} \xi_n^{(k)}$. Тогда в силу монотонности последовательности $\xi_n^{(k)}$ получаем, что

$$\zeta_k = \max_{1 \leqslant n \leqslant k} \xi_n^{(k)} \leqslant \max_{1 \leqslant n \leqslant k} \xi_n^{(k+1)} \leqslant \max_{1 \leqslant n \leqslant k+1} \xi_n^{(k+1)} = \zeta_{k+1}.$$

Значит, последовательность $\{\zeta_k, k \in \mathbb{N}\}$ тоже не убывает. Обозначим $\zeta = \lim\limits_{k \to +\infty} \zeta_k$. Проверим, что $\xi = \zeta$.

Доказательство теоремы

Будем сначала считать, что $\eta = 0$. Тогда все с.в. ξ_n неотрицательны и для каждого $n \in \mathbb{N}$ можно взять такую последовательность простых с.в. $\{\xi_n^{(k)}, k \in \mathbb{N}\}$, что $\xi_n^{(k)} \uparrow \xi_n$ при $k \to +\infty$.

Обозначим $\zeta_k = \max\limits_{1 \leqslant n \leqslant k} \xi_n^{(k)}$. Тогда в силу монотонности последовательности $\xi_n^{(k)}$ получаем, что

$$\zeta_k = \max_{1 \leqslant n \leqslant k} \xi_n^{(k)} \leqslant \max_{1 \leqslant n \leqslant k} \xi_n^{(k+1)} \leqslant \max_{1 \leqslant n \leqslant k+1} \xi_n^{(k+1)} = \zeta_{k+1}.$$

Значит, последовательность $\{\zeta_k, k \in \mathbb{N}\}$ тоже не убывает. Обозначим $\zeta = \lim\limits_{k \to +\infty} \zeta_k$. Проверим, что $\xi = \zeta$.

С одной стороны, для любых $1 \leqslant n \leqslant k$ выполняются неравенства

$$\xi_n^{(k)} \leqslant \zeta_k.$$

Переходя к пределу по k, получаем, что $\xi_n \leqslant \zeta$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство теоремы

Будем сначала считать, что $\eta = 0$. Тогда все с.в. ξ_n неотрицательны и для каждого $n \in \mathbb{N}$ можно взять такую последовательность простых с.в. $\{\xi_n^{(k)}, k \in \mathbb{N}\}$, что $\xi_n^{(k)} \uparrow \xi_n$ при $k \to +\infty$.

Обозначим $\zeta_k = \max\limits_{1 \leqslant n \leqslant k} \xi_n^{(k)}$. Тогда в силу монотонности последовательности $\xi_n^{(k)}$ получаем, что

$$\zeta_k = \max_{1 \leqslant n \leqslant k} \xi_n^{(k)} \leqslant \max_{1 \leqslant n \leqslant k} \xi_n^{(k+1)} \leqslant \max_{1 \leqslant n \leqslant k+1} \xi_n^{(k+1)} = \zeta_{k+1}.$$

Значит, последовательность $\{\zeta_k, k \in \mathbb{N}\}$ тоже не убывает. Обозначим $\zeta = \lim\limits_{k \to +\infty} \zeta_k$. Проверим, что $\xi = \zeta$.

С одной стороны, для любых $1 \leqslant n \leqslant k$ выполняются неравенства

$$\xi_n^{(k)} \leqslant \zeta_k.$$

Переходя к пределу по k, получаем, что $\xi_n \leqslant \zeta$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Переходя к пределу по n, получаем, что $\xi \leqslant \zeta$.

Доказательство теоремы

С другой стороны, в силу монотонности последовательности $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$

$$\zeta_k = \max_{1 \leqslant n \leqslant k} \xi_n^{(k)} \leqslant \max_{1 \leqslant n \leqslant k} \xi_n = \xi_k.$$

Доказательство теоремы

С другой стороны, в силу монотонности последовательности $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$

$$\zeta_k = \max_{1 \leqslant n \leqslant k} \xi_n^{(k)} \leqslant \max_{1 \leqslant n \leqslant k} \xi_n = \xi_k.$$

Переходя к пределу по k, получаем, что $\zeta \leqslant \xi$. Значит, $\xi = \zeta$.

Доказательство теоремы

С другой стороны, в силу монотонности последовательности $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$

$$\zeta_k = \max_{1\leqslant n\leqslant k} \xi_n^{(k)} \leqslant \max_{1\leqslant n\leqslant k} \xi_n = \xi_k.$$

Переходя к пределу по k, получаем, что $\zeta \leqslant \xi$. Значит, $\xi = \zeta$.

Осталось показать, что $\mathsf{E}\,\xi_n \uparrow \mathsf{E}\,\xi$. По условию $\mathsf{E}\,\xi_n$ и $\mathsf{E}\,\xi$ определены и $\xi_n \uparrow \xi$. Значит, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n$ существует и $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \leqslant \mathsf{E}\,\xi$.

Доказательство теоремы

С другой стороны, в силу монотонности последовательности $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$

$$\zeta_k = \max_{1 \leqslant n \leqslant k} \xi_n^{(k)} \leqslant \max_{1 \leqslant n \leqslant k} \xi_n = \xi_k.$$

Переходя к пределу по k, получаем, что $\zeta \leqslant \xi$. Значит, $\xi = \zeta$.

Осталось показать, что $\mathsf{E}\,\xi_n \uparrow \mathsf{E}\,\xi$. По условию $\mathsf{E}\,\xi_n$ и $\mathsf{E}\,\xi$ определены и $\xi_n \uparrow \xi$. Значит, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n$ существует и $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \leqslant \mathsf{E}\,\xi$.

С другой стороны, $\zeta_k \leqslant \xi_k$ для всех k. При этом последовательность $\{\zeta_k, k \in \mathbb{N}\}$ не убывает, состоит из простых с.в. и $\zeta_k \uparrow \xi$. Значит,

$$\lim_{k\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_k \geqslant \lim_{k\to+\infty} \mathsf{E}\,\zeta_k = \mathsf{E}\,\xi.$$

Доказательство теоремы

С другой стороны, в силу монотонности последовательности $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$

$$\zeta_k = \max_{1 \leqslant n \leqslant k} \xi_n^{(k)} \leqslant \max_{1 \leqslant n \leqslant k} \xi_n = \xi_k.$$

Переходя к пределу по k, получаем, что $\zeta \leqslant \xi$. Значит, $\xi = \zeta$.

Осталось показать, что $\mathsf{E}\,\xi_n \uparrow \mathsf{E}\,\xi$. По условию $\mathsf{E}\,\xi_n$ и $\mathsf{E}\,\xi$ определены и $\xi_n \uparrow \xi$. Значит, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n$ существует и $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \leqslant \mathsf{E}\,\xi$.

С другой стороны, $\zeta_k \leqslant \xi_k$ для всех k. При этом последовательность $\{\zeta_k, k \in \mathbb{N}\}$ не убывает, состоит из простых с.в. и $\zeta_k \uparrow \xi$. Значит,

$$\lim_{k\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_k \geqslant \lim_{k\to+\infty} \mathsf{E}\,\zeta_k = \mathsf{E}\,\xi.$$

В итоге, показали, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n = \mathsf{E}\,\xi$.

Доказательство теоремы

С другой стороны, в силу монотонности последовательности $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$

$$\zeta_k = \max_{1 \leqslant n \leqslant k} \xi_n^{(k)} \leqslant \max_{1 \leqslant n \leqslant k} \xi_n = \xi_k.$$

Переходя к пределу по k, получаем, что $\zeta \leqslant \xi$. Значит, $\xi = \zeta$.

Осталось показать, что $\mathsf{E}\,\xi_n \uparrow \mathsf{E}\,\xi$. По условию $\mathsf{E}\,\xi_n$ и $\mathsf{E}\,\xi$ определены и $\xi_n \uparrow \xi$. Значит, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathsf{E}\,\xi_n$ существует и $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \leqslant \mathsf{E}\,\xi$.

С другой стороны, $\zeta_k \leqslant \xi_k$ для всех k. При этом последовательность $\{\zeta_k, k \in \mathbb{N}\}$ не убывает, состоит из простых с.в. и $\zeta_k \uparrow \xi$. Значит,

$$\lim_{k \to +\infty} \mathsf{E}\,\xi_k \geqslant \lim_{k \to +\infty} \mathsf{E}\,\zeta_k = \mathsf{E}\,\xi.$$

В итоге, показали, что $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathsf{E}\,\xi_n = \mathsf{E}\,\xi$.

Доказательство теоремы

Пусть теперь η — произвольная с.в. Если $\mathsf{E}\,\eta = +\infty$, тогда $\mathsf{E}\,\xi_n = +\infty$ для всех n и $\mathsf{E}\,\xi = +\infty$, т.е. искомое соотношение верно.

Доказательство теоремы

Пусть теперь η — произвольная с.в. Если $\mathsf{E}\,\eta = +\infty$, тогда $\mathsf{E}\,\xi_n = +\infty$ для всех n и $\mathsf{E}\,\xi = +\infty$, т.е. искомое соотношение верно.
Если же $\mathsf{E}\,\eta$ конечно, то рассмотрим последовательность $\xi_n - \eta$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство теоремы

Пусть теперь η — произвольная с.в. Если $\mathsf{E}\,\eta = +\infty$, тогда $\mathsf{E}\,\xi_n = +\infty$ для всех n и $\mathsf{E}\,\xi = +\infty$, т.е. искомое соотношение верно.
Если же $\mathsf{E}\,\eta$ конечно, то рассмотрим последовательность $\xi_n - \eta$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$0 \leqslant \xi_n - \eta \uparrow \xi - \eta$$

и по доказанному

$$\mathsf{E}(\xi_n - \eta) \uparrow \mathsf{E}(\xi - \eta).$$

Доказательство теоремы

Пусть теперь η — произвольная с.в. Если $\mathsf{E}\,\eta = +\infty$, тогда $\mathsf{E}\,\xi_n = +\infty$ для всех n и $\mathsf{E}\,\xi = +\infty$, т.е. искомое соотношение верно.
Если же $\mathsf{E}\,\eta$ конечно, то рассмотрим последовательность $\xi_n - \eta$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$0 \leqslant \xi_n - \eta \uparrow \xi - \eta$$

и по доказанному

$$\mathsf{E}(\xi_n - \eta) \uparrow \mathsf{E}(\xi - \eta).$$

Значит,

$$\mathsf{E}\,\eta + \mathsf{E}(\xi_n - \eta) \uparrow \mathsf{E}(\xi - \eta) + \mathsf{E}\,\eta.$$

Доказательство теоремы

Пусть теперь η — произвольная с.в. Если $\mathsf{E}\,\eta = +\infty$, тогда $\mathsf{E}\,\xi_n = +\infty$ для всех n и $\mathsf{E}\,\xi = +\infty$, т.е. искомое соотношение верно.
Если же $\mathsf{E}\,\eta$ конечно, то рассмотрим последовательность $\xi_n - \eta$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$0 \leqslant \xi_n - \eta \uparrow \xi - \eta$$

и по доказанному

$$\mathsf{E}(\xi_n - \eta) \uparrow \mathsf{E}(\xi - \eta).$$

Значит,

$$\mathsf{E}\,\eta + \mathsf{E}(\xi_n - \eta) \uparrow \mathsf{E}(\xi - \eta) + \mathsf{E}\,\eta.$$

Осталось заметить, что в силу конечности $\mathsf{E}\,\eta$ выполнены равенства:

$$\mathsf{E}\,\eta + \mathsf{E}(\xi_n - \eta) = \mathsf{E}\,\xi_n, \quad \mathsf{E}(\xi - \eta) + \mathsf{E}\,\eta = \mathsf{E}\,\xi.$$

$\square$

Следствия

Следствие (1)

Утверждение теоремы о монотонной сходимости сохраняется, если $\xi_n \uparrow \xi$ *п.н.*

Следствия

Следствие (1)

Утверждение теоремы о монотонной сходимости сохраняется, если $\xi_n \uparrow \xi$ *п.н.*

Доказательство.

Обозначим $A = \{\xi_n \uparrow \xi\}$. Тогда $\eta I_A \leqslant \xi_n I_A \uparrow \xi I_A$ и, значит, $\mathsf{E}(\xi_n I_A) \uparrow \mathsf{E}(\xi I_A)$. Осталось заметить, что $\mathsf{E}(\xi_n I_A) = \mathsf{E}\,\xi_n$, $\mathsf{E}\,\xi I_A = \mathsf{E}\,\xi$. □

Следствия

Следствие (1)

Утверждение теоремы о монотонной сходимости сохраняется, если $\xi_n \uparrow \xi$ *п.н.*

Доказательство.

Обозначим $A = \{\xi_n \uparrow \xi\}$. Тогда $\eta I_A \leqslant \xi_n I_A \uparrow \xi I_A$ и, значит, $\mathsf{E}(\xi_n I_A) \uparrow \mathsf{E}(\xi I_A)$. Осталось заметить, что $\mathsf{E}(\xi_n I_A) = \mathsf{E}\,\xi_n$, $\mathsf{E}\,\xi I_A = \mathsf{E}\,\xi$. □

Следствие (2)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\xi_n \geqslant 0$ *— неотрицательные с.в. и ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n$ *сходится п.н. Тогда*

$$\mathsf{E} \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n.$$

Следствия

Следствие (1)

Утверждение теоремы о монотонной сходимости сохраняется, если $\xi_n \uparrow \xi$ *п.н.*

Доказательство.

Обозначим $A = \{\xi_n \uparrow \xi\}$. Тогда $\eta I_A \leqslant \xi_n I_A \uparrow \xi I_A$ и, значит, $\mathsf{E}(\xi_n I_A) \uparrow \mathsf{E}(\xi I_A)$. Осталось заметить, что $\mathsf{E}(\xi_n I_A) = \mathsf{E}\,\xi_n$, $\mathsf{E}\,\xi I_A = \mathsf{E}\,\xi$. □

Следствие (2)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\xi_n \geqslant 0$ *— неотрицательные с.в. и ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n$ *сходится п.н. Тогда*

$$\mathsf{E} \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n.$$

Доказательство.

Достаточно заметить, что $0 \leqslant \sum\limits_{n=1}^{N} \xi_n \uparrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \xi_n$. □

Теория вероятностей. Лекция 22.04. Формулы для подсчета математических ожиданий

Д. А. Шабанов

мех-мат МГУ, второй курс

22.04.2020

Предельный переход под знаком E

Теорема (лемма Фату)

Пусть ξ, η, $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— случайные величины. Тогда*

Предельный переход под знаком E

Теорема (лемма Фату)

Пусть ξ, η, $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— случайные величины. Тогда*

1. *Если* $\mathsf{E}\,\eta > -\infty$, $\xi_n \geqslant \eta$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, *то*

$$\mathsf{E} \varliminf_{n\to+\infty} \xi_n \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n.$$

Предельный переход под знаком E

Теорема (лемма Фату)

Пусть ξ, η, $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— случайные величины. Тогда*

1. *Если* $\mathsf{E}\,\eta > -\infty$, $\xi_n \geqslant \eta$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, *то*

$$\mathsf{E} \varliminf_{n \to +\infty} \xi_n \leqslant \varliminf_{n \to +\infty} \mathsf{E}\,\xi_n.$$

2. *Если* $\mathsf{E}\,\eta < +\infty$, $\xi_n \leqslant \eta$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, *то*

$$\varlimsup_{n \to +\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \leqslant \mathsf{E} \varlimsup_{n \to +\infty} \xi_n.$$

Предельный переход под знаком E

Теорема (лемма Фату)

Пусть ξ, η, $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— случайные величины. Тогда*

1. *Если* $\mathsf{E}\,\eta > -\infty$, $\xi_n \geqslant \eta$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, *то*
$$\mathsf{E} \varliminf_{n\to+\infty} \xi_n \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n.$$
2. *Если* $\mathsf{E}\,\eta < +\infty$, $\xi_n \leqslant \eta$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, *то*
$$\varlimsup_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \leqslant \mathsf{E} \varlimsup_{n\to+\infty} \xi_n.$$
3. *Если* $|\xi_n| \leqslant \eta$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\mathsf{E}\,\eta$ *конечно, то*
$$\mathsf{E} \varliminf_{n\to+\infty} \xi_n \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \leqslant \mathsf{E} \varlimsup_{n\to+\infty} \xi_n.$$

Доказательство леммы Фату

1) Обозначим $\psi_n = \inf\limits_{k \geqslant n} \xi_k$.

Доказательство леммы Фату

1) Обозначим $\psi_n = \inf\limits_{k \geqslant n} \xi_k$. Тогда последовательность ψ_n не убывает и при этом

$$\lim_{n\to+\infty} \psi_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k \geqslant n} \xi_k = \varliminf_{n\to+\infty} \xi_n.$$

Доказательство леммы Фату

1) Обозначим $\psi_n = \inf\limits_{k \geqslant n} \xi_k$. Тогда последовательность ψ_n не убывает и при этом

$$\lim_{n\to+\infty} \psi_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geqslant n} \xi_k = \varliminf_{n\to+\infty} \xi_n.$$

По условию $\psi_n \geqslant \eta$ для всех $n \in \mathbb{N}$, поэтому по теореме о монотонной сходимости мы получаем, что

$$\mathsf{E} \varliminf_{n\to+\infty} \xi_n = \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\psi_n = \varliminf_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\psi_n \leqslant$$

Доказательство леммы Фату

1) Обозначим $\psi_n = \inf\limits_{k \geqslant n} \xi_k$. Тогда последовательность ψ_n не убывает и при этом

$$\lim_{n\to+\infty} \psi_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k \geqslant n} \xi_k = \varliminf_{n\to+\infty} \xi_n.$$

По условию $\psi_n \geqslant \eta$ для всех $n \in \mathbb{N}$, поэтому по теореме о монотонной сходимости мы получаем, что

$$\mathsf{E} \varliminf_{n\to+\infty} \xi_n = \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\psi_n = \varliminf_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\psi_n \leqslant$$

(т.к. $\psi_n \leqslant \xi_n$)

$$\leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n.$$

Доказательство леммы Фату

1) Обозначим $\psi_n = \inf\limits_{k \geqslant n} \xi_k$. Тогда последовательность ψ_n не убывает и при этом

$$\lim_{n \to +\infty} \psi_n = \lim_{n \to +\infty} \inf_{k \geqslant n} \xi_k = \varliminf_{n \to +\infty} \xi_n.$$

По условию $\psi_n \geqslant \eta$ для всех $n \in \mathbb{N}$, поэтому по теореме о монотонной сходимости мы получаем, что

$$\mathsf{E} \varliminf_{n \to +\infty} \xi_n = \lim_{n \to +\infty} \mathsf{E}\, \psi_n = \varliminf_{n \to +\infty} \mathsf{E}\, \psi_n \leqslant$$

(т.к. $\psi_n \leqslant \xi_n$)

$$\leqslant \varliminf_{n \to +\infty} \mathsf{E}\, \xi_n.$$

2) Следует из 1) заменой всех с.в. на противоположные (ξ_n на $-\xi_n$).

Доказательство леммы Фату

1) Обозначим $\psi_n = \inf\limits_{k \geqslant n} \xi_k$. Тогда последовательность ψ_n не убывает и при этом

$$\lim_{n \to +\infty} \psi_n = \lim_{n \to +\infty} \inf_{k \geqslant n} \xi_k = \varliminf_{n \to +\infty} \xi_n.$$

По условию $\psi_n \geqslant \eta$ для всех $n \in \mathbb{N}$, поэтому по теореме о монотонной сходимости мы получаем, что

$$\mathsf{E} \varliminf_{n \to +\infty} \xi_n = \lim_{n \to +\infty} \mathsf{E}\, \psi_n = \varliminf_{n \to +\infty} \mathsf{E}\, \psi_n \leqslant$$

(т.к. $\psi_n \leqslant \xi_n$)

$$\leqslant \varliminf_{n \to +\infty} \mathsf{E}\, \xi_n.$$

2) Следует из 1) заменой всех с.в. на противоположные (ξ_n на $-\xi_n$).

3) Следует мгновенно из 1) и 2). $\square$

Теорема Лебега

Теорема (Лебега, о мажорируемой сходимости)

Пусть ξ, η, $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— случайные величины. Если* $|\xi_n| \leqslant \eta$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, $\mathsf{E}\,\eta$ *конечно и* $\xi_n \to \xi$ *п.н., то* $\mathsf{E}\,\xi$ *тоже конечно и*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n = \mathsf{E}\,\xi, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,|\xi_n - \xi| = 0.$$

Теорема Лебега

Теорема (Лебега, о мажорируемой сходимости)

Пусть ξ, η, $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— случайные величины. Если* $|\xi_n| \leqslant \eta$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, $\mathsf{E}\,\eta$ *конечно и* $\xi_n \to \xi$ *п.н., то* $\mathsf{E}\,\xi$ *тоже конечно и*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n = \mathsf{E}\,\xi, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,|\xi_n - \xi| = 0.$$

Доказательство. Конечность $\mathsf{E}\,\xi$ вытекает из того, что $|\xi| \leqslant \eta$ п.н.

Теорема Лебега

Теорема (Лебега, о мажорируемой сходимости)

Пусть ξ, η, $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— случайные величины. Если* $|\xi_n| \leqslant \eta$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, $\mathsf{E}\,\eta$ *конечно и* $\xi_n \to \xi$ *п.н., то* $\mathsf{E}\,\xi$ *тоже конечно и*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathsf{E}\,\xi_n = \mathsf{E}\,\xi, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathsf{E}\,|\xi_n - \xi| = 0.$$

Доказательство. Конечность $\mathsf{E}\,\xi$ вытекает из того, что $|\xi| \leqslant \eta$ п.н. Далее, по условию имеем, что п.н.

$$\underline{\lim}_{n \to +\infty} \xi_n = \overline{\lim}_{n \to +\infty} \xi_n = \xi.$$

Теорема Лебега

Теорема (Лебега, о мажорируемой сходимости)

Пусть ξ, η, $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— случайные величины. Если* $|\xi_n| \leqslant \eta$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, $\mathsf{E}\,\eta$ *конечно и* $\xi_n \to \xi$ *п.н., то* $\mathsf{E}\,\xi$ *тоже конечно и*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n = \mathsf{E}\,\xi, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,|\xi_n - \xi| = 0.$$

Доказательство. Конечность $\mathsf{E}\,\xi$ вытекает из того, что $|\xi| \leqslant \eta$ п.н. Далее, по условию имеем, что п.н.

$$\varliminf_{n\to+\infty} \xi_n = \varlimsup_{n\to+\infty} \xi_n = \xi.$$

Отсюда, по лемме Фату

$$\mathsf{E}\,\xi = \mathsf{E}\,\varliminf_{n\to+\infty} \xi_n \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \leqslant \mathsf{E}\,\varlimsup_{n\to+\infty} \xi_n = \mathsf{E}\,\xi.$$

Теорема Лебега

Теорема (Лебега, о мажорируемой сходимости)

Пусть ξ, η, $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— случайные величины. Если* $|\xi_n| \leqslant \eta$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, $\mathsf{E}\,\eta$ *конечно и* $\xi_n \to \xi$ *п.н., то* $\mathsf{E}\,\xi$ *тоже конечно и*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n = \mathsf{E}\,\xi, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,|\xi_n - \xi| = 0.$$

Доказательство. Конечность $\mathsf{E}\,\xi$ вытекает из того, что $|\xi| \leqslant \eta$ п.н. Далее, по условию имеем, что п.н.

$$\varliminf_{n\to+\infty} \xi_n = \varlimsup_{n\to+\infty} \xi_n = \xi.$$

Отсюда, по лемме Фату

$$\mathsf{E}\,\xi = \mathsf{E} \varliminf_{n\to+\infty} \xi_n \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n \leqslant \mathsf{E} \varlimsup_{n\to+\infty} \xi_n = \mathsf{E}\,\xi.$$

Значит, существует предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\xi_n = \mathsf{E}\,\xi$.

Доказательство теоремы Лебега

Для доказательства второго утверждения введем с.в.

$$\widetilde{\xi} = \xi \cdot I\{\lim_{n\to+\infty} \xi_n = \xi\}.$$

Доказательство теоремы Лебега

Для доказательства второго утверждения введем с.в.

$$\widetilde{\xi} = \xi \cdot I\{\lim_{n\to+\infty} \xi_n = \xi\}.$$

Тогда $\widetilde{\xi} = \xi$ п.н. и, значит, $\mathsf{E}\,|\xi_n - \xi| = \mathsf{E}\,|\xi_n - \widetilde{\xi}|$. С другой стороны, $|\widetilde{\xi}| \leqslant \eta$.

Доказательство теоремы Лебега

Для доказательства второго утверждения введем с.в.

$$\widetilde{\xi} = \xi \cdot I\{\lim_{n\to+\infty} \xi_n = \xi\}.$$

Тогда $\widetilde{\xi} = \xi$ п.н. и, значит, $\mathsf{E}\,|\xi_n - \xi| = \mathsf{E}\,|\xi_n - \widetilde{\xi}|$. С другой стороны, $|\widetilde{\xi}| \leqslant \eta$.

Рассмотрим теперь последовательность $\psi_n = |\xi_n - \widetilde{\xi}|$. Заметим, что $\psi_n \to 0$ п.н. и $|\psi_n| \leqslant 2\eta$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Значит, в силу уже доказанного

$$\lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,|\xi_n - \xi| = \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\,\psi_n = 0.$$

□

Замена переменных в интеграле Лебега

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, ξ — случайная величина на нем, причем $\mathsf{E}\,\xi$ конечно. Тогда

$$\mathsf{E}\,\xi = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\mathsf{P}(d\omega)$$

— интеграл Лебега по вероятностной мере P.

Замена переменных в интеграле Лебега

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, ξ — случайная величина на нем, причем $\mathsf{E}\,\xi$ конечно. Тогда

$$\mathsf{E}\,\xi = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\mathsf{P}(d\omega)$$

— интеграл Лебега по вероятностной мере P.

Также определен

$$\int\limits_{A} \xi(\omega)\mathsf{P}(d\omega) = \mathsf{E}(\xi I_A), \;\; A \in \mathcal{F}.$$

Замена переменных в интеграле Лебега

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, ξ — случайная величина на нем, причем $\mathsf{E}\,\xi$ конечно. Тогда

$$\mathsf{E}\,\xi = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\mathsf{P}(d\omega)$$

— интеграл Лебега по вероятностной мере P.

Также определен

$$\int\limits_{A} \xi(\omega)\mathsf{P}(d\omega) = \mathsf{E}(\xi I_A), \;\; A \in \mathcal{F}.$$

Вопрос: можно ли считать математическое ожидание с помощью распределения?

Замена переменных в интеграле Лебега

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, ξ — случайная величина на нем, причем $\mathsf{E}\,\xi$ конечно. Тогда

$$\mathsf{E}\,\xi = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\mathsf{P}(d\omega)$$

— интеграл Лебега по вероятностной мере P.

Также определен

$$\int\limits_{A} \xi(\omega)\mathsf{P}(d\omega) = \mathsf{E}(\xi I_A), \;\; A \in \mathcal{F}.$$

Вопрос: можно ли считать математическое ожидание с помощью распределения? Мы умеем это делать по определению для простых случайных величин. А что будет в общем случае?

Другое вероятностное пространство

С другой стороны, P_ξ, распределение с.в. ξ — это вероятностная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Следовательно, для случайных величин на вероятностном пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathsf{P}_\xi)$ тоже определено математическое ожидание.

Другое вероятностное пространство

С другой стороны, P_ξ, распределение с.в. ξ — это вероятностная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Следовательно, для случайных величин на вероятностном пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathsf{P}_\xi)$ тоже определено математическое ожидание.

Случайные величины на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathsf{P}_\xi)$ — это борелевские функции.

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g(x) \mathsf{P}_\xi(dx)$$

— математическое ожидание с. в. $g(x)$.

Другое вероятностное пространство

С другой стороны, P_ξ, распределение с.в. ξ — это вероятностная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Следовательно, для случайных величин на вероятностном пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathsf{P}_\xi)$ тоже определено математическое ожидание.

Случайные величины на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathsf{P}_\xi)$ — это борелевские функции.

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\mathsf{P}_\xi(dx)$$

— математическое ожидание с. в. $g(x)$.

Аналогично для $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\int\limits_{A} g(x)\mathsf{P}_\xi(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(g(x)I_A(x)\right)\mathsf{P}_\xi(dx).$$

Формула замены переменных

Вопрос: пусть ξ — с. в. Можно ли найти $\mathsf{E}\, g(\xi)$, зная только распределение P_ξ?

Формула замены переменных

Вопрос: пусть ξ — с. в. Можно ли найти $\mathsf{E}\,g(\xi)$, зная только распределение P_ξ?

Теорема (формула замены переменных в интеграле Лебега)

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — случайный вектор на нем. Тогда для $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, для $\forall$ борелевской функции $g(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выполнено

$$\mathsf{E}(g(\xi)I\{\xi \in B\}) = \int\limits_{\{\xi \in B\}} g(\xi)d\mathsf{P} = \int\limits_B g(x)\mathsf{P}_\xi(dx).$$

(в том смысле, что все м. о. конечны (бесконечны, не определены) одновременно)

Доказательство формулы замены переменных

Пусть сначала $g(x) = I_A(x)$, где $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство формулы замены переменных

Пусть сначала $g(x) = I_A(x)$, где $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.Тогда

$$\int\limits_B g(x)\mathsf{P}_\xi(dx) = \int\limits_{A\cap B} \mathsf{P}_\xi(dx) = \mathsf{P}_\xi(A \cap B) = \mathsf{P}(\xi \in A \cap B) =$$

Доказательство формулы замены переменных

Пусть сначала $g(x) = I_A(x)$, где $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.Тогда

$$\int\limits_B g(x) \mathsf{P}_\xi(dx) = \int\limits_{A\cap B} \mathsf{P}_\xi(dx) = \mathsf{P}_\xi(A \cap B) = \mathsf{P}(\xi \in A \cap B) =$$

$$= \mathsf{E}\, I\{\xi \in A \cap B\} = \mathsf{E}(I\{\xi \in A\} \cdot I\{\xi \in B\}) =$$

Доказательство формулы замены переменных

Пусть сначала $g(x) = I_A(x)$, где $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\int\limits_B g(x) \mathsf{P}_\xi(dx) = \int\limits_{A\cap B} \mathsf{P}_\xi(dx) = \mathsf{P}_\xi(A \cap B) = \mathsf{P}(\xi \in A \cap B) =$$

$$= \mathsf{E}\, I\{\xi \in A \cap B\} = \mathsf{E}(I\{\xi \in A\} \cdot I\{\xi \in B\}) =$$

$$= \mathsf{E}(g(\xi) I\{\xi \in B\}) = \int\limits_{\{\xi\in B\}} g(\xi) d\mathsf{P}.$$

Доказательство формулы замены переменных

Пусть сначала $g(x) = I_A(x)$, где $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.Тогда

$$\int\limits_B g(x)\mathsf{P}_\xi(dx) = \int\limits_{A\cap B} \mathsf{P}_\xi(dx) = \mathsf{P}_\xi(A \cap B) = \mathsf{P}(\xi \in A \cap B) =$$

$$= \mathsf{E}\, I\{\xi \in A \cap B\} = \mathsf{E}(I\{\xi \in A\} \cdot I\{\xi \in B\}) =$$

$$= \mathsf{E}(g(\xi)I\{\xi \in B\}) = \int\limits_{\{\xi \in B\}} g(\xi)d\mathsf{P}.$$

В силу линейности всех интегралов формула будет верна для простых неотрицательных функций $g(x)$.

Доказательство формулы замены переменных

Если $g(x)$ — неотрицательная функция, то возьмем последовательность простых неотрицательных функций $g_n(x)$, которые к ней монотонно сходятся: $g_n(x) \uparrow g(x)$.

Доказательство формулы замены переменных

Если $g(x)$ — неотрицательная функция, то возьмем последовательность простых неотрицательных функций $g_n(x)$, которые к ней монотонно сходятся: $g_n(x) \uparrow g(x)$. По теореме о монотонной сходимости

$$\int\limits_B g_n(x) \mathsf{P}_\xi(dx) \to \int\limits_B g(x) \mathsf{P}_\xi(dx),$$

Доказательство формулы замены переменных

Если $g(x)$ — неотрицательная функция, то возьмем последовательность простых неотрицательных функций $g_n(x)$, которые к ней монотонно сходятся: $g_n(x) \uparrow g(x)$. По теореме о монотонной сходимости

$$\int\limits_B g_n(x) \mathsf{P}_\xi(dx) \to \int\limits_B g(x) \mathsf{P}_\xi(dx),$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \end{array}$$

$$\mathsf{E}(g_n(\xi) I\{\xi \in B\}) \to \mathsf{E}(g(\xi) I\{\xi \in B\}).$$

Доказательство формулы замены переменных

Если $g(x)$ — неотрицательная функция, то возьмем последовательность простых неотрицательных функций $g_n(x)$, которые к ней монотонно сходятся: $g_n(x) \uparrow g(x)$. По теореме о монотонной сходимости

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int\limits_B g_n(x)\mathsf{P}_\xi(dx) & \to & \displaystyle\int\limits_B g(x)\mathsf{P}_\xi(dx), \\ \Vert & & \Vert \\ \mathsf{E}(g_n(\xi)I\{\xi \in B\}) & \to & \mathsf{E}(g(\xi)I\{\xi \in B\}). \end{array}$$

Следовательно, равенство верно и для неотрицательных $g(x)$.

Доказательство формулы замены переменных

Если $g(x)$ — неотрицательная функция, то возьмем последовательность простых неотрицательных функций $g_n(x)$, которые к ней монотонно сходятся: $g_n(x) \uparrow g(x)$. По теореме о монотонной сходимости

$$\begin{array}{ccc} \int\limits_B g_n(x)\mathsf{P}_\xi(dx) & \to & \int\limits_B g(x)\mathsf{P}_\xi(dx), \\ \| & & \| \\ \mathsf{E}(g_n(\xi)I\{\xi \in B\}) & \to & \mathsf{E}(g(\xi)I\{\xi \in B\}). \end{array}$$

Следовательно, равенство верно и для неотрицательных $g(x)$.

Если $g(x)$ — произвольная функция, то разложим $g(x) = g^+(x) - g^-(x)$ и воспользуемся определением математического ожидания.

Доказательство формулы замены переменных

Если $g(x)$ — неотрицательная функция, то возьмем последовательность простых неотрицательных функций $g_n(x)$, которые к ней монотонно сходятся: $g_n(x) \uparrow g(x)$. По теореме о монотонной сходимости

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int\limits_B g_n(x)\mathsf{P}_\xi(dx) & \to & \displaystyle\int\limits_B g(x)\mathsf{P}_\xi(dx), \\ \| & & \| \\ \mathsf{E}(g_n(\xi)I\{\xi \in B\}) & \to & \mathsf{E}(g(\xi)I\{\xi \in B\}). \end{array}$$

Следовательно, равенство верно и для неотрицательных $g(x)$.

Если $g(x)$ — произвольная функция, то разложим $g(x) = g^+(x) - g^-(x)$ и воспользуемся определением математического ожидания.

Заметим, что все математические ожидания конечны (бесконечны, не определены) одновременно. Теорема доказана.

$\square$

Следствия формулы замены переменных

Следствие (1)

Для вычисления математического ожидания функции от случайного вектора достаточно знать его распределение. Пусть ξ *– случайный вектор из* $\mathbb{R}^n$*,* $g(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *– борелевская функция. Тогда*

$$\mathsf{E}\, g(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x) \mathsf{P}_\xi(dx).$$

Следствия формулы замены переменных

Следствие (1)

Для вычисления математического ожидания функции от случайного вектора достаточно знать его распределение. Пусть ξ *– случайный вектор из* $\mathbb{R}^n$, $g(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *– борелевская функция. Тогда*

$$\mathsf{E}\, g(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \mathsf{P}_\xi(dx).$$

Доказательство.

Надо положить $B = \mathbb{R}^n$ в теореме о замене переменных. □

Следствия формулы замены переменных

Следствие (1)

Для вычисления математического ожидания функции от случайного вектора достаточно знать его распределение. Пусть ξ – случайный вектор из $\mathbb{R}^n$, $g(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – борелевская функция. Тогда

$$\mathsf{E}\, g(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x) \mathsf{P}_\xi(dx).$$

Доказательство.

Надо положить $B = \mathbb{R}^n$ в теореме о замене переменных. $\square$

Определение

Случайные величины (векторы) ξ и η называются одинаково распределенными, если они имеют одинаковое распределение: $\mathsf{P}_\xi = \mathsf{P}_\eta$. Обозначение $\xi \stackrel{d}{=} \eta$.

Следствия формулы замены переменных

Следствие (2)

Если $\xi \overset{d}{=} \eta$, *то для* $\forall$ *борелевской функции* $g(x)$ *выполнено* $\mathsf{E}\, g(\xi) = \mathsf{E}\, g(\eta)$.

Следствия формулы замены переменных

Следствие (2)

Если $\xi \stackrel{d}{=} \eta$, *то для* $\forall$ *борелевской функции* $g(x)$ *выполнено* $\mathsf{E}\, g(\xi) = \mathsf{E}\, g(\eta)$.

Доказательство.

$$\mathsf{E}\, g(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x) \mathsf{P}_\xi(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x) \mathsf{P}_\eta(dx) = \mathsf{E}\, g(\eta).$$

$\square$

Следствия формулы замены переменных

Следствие (2)

Если $\xi \overset{d}{=} \eta$, *то для* $\forall$ *борелевской функции* $g(x)$ *выполнено* $\mathsf{E}\, g(\xi) = \mathsf{E}\, g(\eta)$.

Доказательство.

$$\mathsf{E}\, g(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathsf{P}_\xi(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathsf{P}_\eta(dx) = \mathsf{E}\, g(\eta).$$

$\square$

Следствие (3)

Если ξ *— случайная величина, то* $\mathsf{E}\,\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} x\,\mathsf{P}_\xi(dx)$.

Следствия формулы замены переменных

Следствие (2)

Если $\xi \overset{d}{=} \eta$, *то для* $\forall$ *борелевской функции* $g(x)$ *выполнено* $\mathsf{E}\, g(\xi) = \mathsf{E}\, g(\eta)$.

Доказательство.

$$\mathsf{E}\, g(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x) \mathsf{P}_\xi(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x) \mathsf{P}_\eta(dx) = \mathsf{E}\, g(\eta).$$

$\square$

Следствие (3)

Если ξ *— случайная величина, то* $\mathsf{E}\,\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} x\, \mathsf{P}_\xi(dx)$.

Доказательство.

Надо положить $g(x) = x$ в следствии 1. $\square$

Дискретные распределения

Как вычислять $\int_{\mathbb{R}} g(x) \mathsf{P}_\xi(dx)$ для разных классов распределений?

Дискретные распределения

Как вычислять $\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathsf{P}_\xi(dx)$ для разных классов распределений?

Следствие (4)

Пусть ξ *— дискретная случайная величина со значениями в* $\mathcal{X} = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. *Тогда*

$$\mathsf{E}\, g(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n)\mathsf{P}(\xi = x_n).$$

Дискретные распределения

Как вычислять $\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathsf{P}_\xi(dx)$ для разных классов распределений?

Следствие (4)

Пусть ξ *— дискретная случайная величина со значениями в* $\mathcal{X} = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. *Тогда*

$$\mathsf{E}\, g(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n)\mathsf{P}(\xi = x_n).$$

Доказательство. Пусть сначала $g(x) \geqslant 0$.

Дискретные распределения

Как вычислять $\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathsf{P}_\xi(dx)$ для разных классов распределений?

Следствие (4)

Пусть ξ *— дискретная случайная величина со значениями в* $\mathcal{X} = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. *Тогда*

$$\mathsf{E}\, g(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n)\mathsf{P}(\xi = x_n).$$

Доказательство. Пусть сначала $g(x) \geqslant 0$. Тогда рассмотрим $\eta_n = \sum_{k=1}^{n} g(x_k) I\{\xi = x_k\}$. Следовательно, $\eta_n \uparrow g(\xi)$ и η_n — это простые с.в.

Дискретные распределения

Как вычислять $\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathsf{P}_\xi(dx)$ для разных классов распределений?

Следствие (4)

Пусть ξ *— дискретная случайная величина со значениями в* $\mathcal{X} = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. *Тогда*

$$\mathsf{E}\, g(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n)\mathsf{P}(\xi = x_n).$$

Доказательство. Пусть сначала $g(x) \geqslant 0$. Тогда рассмотрим $\eta_n = \sum_{k=1}^{n} g(x_k) I\{\xi = x_k\}$. Следовательно, $\eta_n \uparrow g(\xi)$ и η_n — это простые с.в. По теореме о монотонной сходимости

$$\mathsf{E}\, g(\xi) = \lim_n \mathsf{E}\,\eta_n = \lim_n \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\mathsf{P}(\xi = x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)\mathsf{P}(\xi = x_k).$$

Дискретные распределения

Для произвольной функции $g(x)$ разложим ее в виде суммы $g(x) = g^+(x) - g^-(x)$.

Дискретные распределения

Для произвольной функции $g(x)$ разложим ее в виде суммы $g(x) = g^+(x) - g^-(x)$. Тогда

$$g^+(\xi) = \sum_{k \in K} g(x_k) I\{\xi = x_k\}, \quad g^-(\xi) = \sum_{k \notin K} (-g(x_k)) I\{\xi = x_k\},$$

где $K = \{k \in \mathbb{N} : \; g(x_k) \geqslant 0\}$.

Дискретные распределения

Для произвольной функции $g(x)$ разложим ее в виде суммы $g(x) = g^+(x) - g^-(x)$. Тогда

$$g^+(\xi) = \sum_{k \in K} g(x_k) I\{\xi = x_k\}, \;\; g^-(\xi) = \sum_{k \notin K} (-g(x_k)) I\{\xi = x_k\},$$

где $K = \{k \in \mathbb{N} : \; g(x_k) \geqslant 0\}$. В силу уже доказанного

$$\mathsf{E}\, g^+(\xi) = \sum_{k \in K} g(x_k) \mathsf{P}(\xi = x_k),$$

$$\mathsf{E}\, g^-(\xi) = \sum_{k \notin K} (-g(x_k)) \mathsf{P}(\xi = x_k) = -\sum_{k \notin K} g(x_k) \mathsf{P}(\xi = x_k).$$

Дискретные распределения

Для произвольной функции $g(x)$ разложим ее в виде суммы $g(x) = g^+(x) - g^-(x)$. Тогда

$$g^+(\xi) = \sum_{k \in K} g(x_k) I\{\xi = x_k\}, \quad g^-(\xi) = \sum_{k \notin K} (-g(x_k)) I\{\xi = x_k\},$$

где $K = \{k \in \mathbb{N} : \; g(x_k) \geqslant 0\}$. В силу уже доказанного

$$\mathsf{E}\, g^+(\xi) = \sum_{k \in K} g(x_k) \mathsf{P}(\xi = x_k),$$

$$\mathsf{E}\, g^-(\xi) = \sum_{k \notin K} (-g(x_k)) \mathsf{P}(\xi = x_k) = -\sum_{k \notin K} g(x_k) \mathsf{P}(\xi = x_k).$$

Наконец, если оба ряда сходятся, то определению математического ожидания

$$\mathsf{E}\, g(\xi) = \mathsf{E}\, g^+(\xi) - \mathsf{E}\, g^-(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n) \mathsf{P}(\xi = x_n).$$

Следствие (5)

Если P — *дискретная вероятностная мера на* $\mathbb{R}$, *сосредоточенная на* $\mathcal{X} = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, *то*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\mathsf{P}(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n)\mathsf{P}(\{x_n\}).$$

Абсолютно непрерывные распределения

Следствие (6)

Пусть ξ *— абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью* $p(x)$*. Тогда для любой борелевской функции* $g(x)$ *выполнено*

$$\mathsf{E}\, g(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)p(x)dx.$$

Следствие (6)

Пусть ξ — абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью $p(x)$. Тогда для любой борелевской функции $g(x)$ выполнено

$$\mathsf{E}\, g(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)p(x)dx.$$

Прежде чем доказывать следствие надо понять что такое $\int_A f(x)dx$ для произвольной борелевской функции?

Следствие (6)

Пусть ξ — абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью $p(x)$. Тогда для любой борелевской функции $g(x)$ выполнено

$$\mathsf{E}\, g(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)p(x)dx.$$

Прежде чем доказывать следствие надо понять что такое $\int_A f(x)dx$ для произвольной борелевской функции? Из курса действительного анализа известно, что интеграл Лебега можно определить не только по вероятностной мере, но и по σ-конечной мере. В нашем случае — это мера Лебега на $\mathbb{R}$.

Доказательство следствия 6

Начнем с того, что покажем, что $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ выполнено

$$\mathsf{P}_\xi(B) = \int\limits_B p(x)dx.$$

Доказательство следствия 6

Начнем с того, что покажем, что $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ выполнено

$$\mathsf{P}_\xi(B) = \int\limits_B p(x)dx.$$

Для множеств вида $(-\infty; y]$ это верно по определению, так как

$$\mathsf{P}_\xi((-\infty; y]) = F_\xi(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} p(x)dx.$$

Доказательство следствия 6

Начнем с того, что покажем, что $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ выполнено

$$\mathsf{P}_\xi(B) = \int\limits_B p(x)dx.$$

Для множеств вида $(-\infty; y]$ это верно по определению, так как

$$\mathsf{P}_\xi((-\infty; y]) = F_\xi(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} p(x)dx.$$

Далее, определим $\mathsf{Q}(B) = \int\limits_B p(x)dx$, $B \in \mathcal{B}$. Из свойств интеграла Лебега следует, что Q — тоже вероятностная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Следовательно, $\mathsf{Q} = \mathsf{P}_\xi$, так как они имеют одинаковые функции распределения.

Доказательство следствия 6

Начнем с того, что покажем, что $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ выполнено

$$\mathsf{P}_\xi(B) = \int\limits_B p(x)dx.$$

Для множеств вида $(-\infty; y]$ это верно по определению, так как

$$\mathsf{P}_\xi((-\infty; y]) = F_\xi(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} p(x)dx.$$

Далее, определим $\mathsf{Q}(B) = \int\limits_B p(x)dx$, $B \in \mathcal{B}$. Из свойств интеграла Лебега следует, что Q — тоже вероятностная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Следовательно, $\mathsf{Q} = \mathsf{P}_\xi$, так как они имеют одинаковые функции распределения.

Тем самым, искомая формула верна для $g(x) = I_B(x)$. Далее, повторяем доказательство теоремы о замене переменных. $\square$

Абсолютно непрерывные распределения

Следствие (7)

Если $\xi \in \mathbb{R}^n$ *— случайный вектор с плотностью* $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*. Тогда для любой борелевской функции* $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *выполнено*

$$\mathsf{E}\, g(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)p(x)dx.$$

Следствие (7)

Если $\xi \in \mathbb{R}^n$ *— случайный вектор с плотностью* $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. *Тогда для любой борелевской функции* $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *выполнено*

$$\mathsf{E}\, g(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)p(x)dx.$$

Доказательство.

Все аналогично следствию 6. $\square$

Абсолютно непрерывные распределения

Следствие (7)

Если $\xi \in \mathbb{R}^n$ *— случайный вектор с плотностью* $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*. Тогда для любой борелевской функции* $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *выполнено*

$$\mathsf{E}\, g(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)p(x)dx.$$

Доказательство.

Все аналогично следствию 6. □

Следствие (8)

Если P *— абсолютно непрерывная вероятностная мера на* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*, то*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\mathsf{P}(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)p(x)dx.$$

Общий случай

Следствие (9)

Мы помним, что для каждой ф.р. $F(x)$ *на* $\mathbb{R}$ *имеет место представление* $F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x)$, *где* F_1 *— дискретная ф.р.,* F_2 *— абсолютно непрерывная ф.р.,* F_3 *— сингулярная ф.р. Пусть* $\alpha_3 = 0$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g(x)dF(x) = \alpha_1 \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)dF_1(x) + \alpha_2 \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)dF_2(x),$$

где $dF(x) := \mathsf{P}(dx)$, P *— мера, соответствующая* $F(x)$.

Общий случай

Следствие (9)

Мы помним, что для каждой ф.р. $F(x)$ на $\mathbb{R}$ имеет место представление $F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x)$, где F_1 — дискретная ф.р., F_2 — абсолютно непрерывная ф.р., F_3 — сингулярная ф.р. Пусть $\alpha_3 = 0$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g(x)dF(x) = \alpha_1 \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)dF_1(x) + \alpha_2 \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)dF_2(x),$$

где $dF(x) := \mathsf{P}(dx)$, P — мера, соответствующая $F(x)$.

Доказательство.

Следует из того, что $\mathsf{P}(B) = \alpha_1 \mathsf{P}_1(B) + \alpha_2 \mathsf{P}_2(B)$. $\square$

Примеры

Задача

Пусть $\xi \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$ *— случайная величина, имеющая гамма-распределение с параметрами* $\alpha, \beta > 0$ *т.,е. ее плотность равна*

$$p_\xi(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} I\{x > 0\}.$$

Найдите $\mathsf{E}\,\xi$.

Примеры

Задача

Пусть $\xi \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$ *— случайная величина, имеющая гамма-распределение с параметрами* $\alpha, \beta > 0$ *т.,е. ее плотность равна*

$$p_\xi(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} I\{x > 0\}.$$

Найдите $\mathsf{E}\,\xi$*.*

Решение. Считаем по формуле:

$$\mathsf{E}\,\xi = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\beta^\alpha x^\alpha e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} dx = \left\{ u = x\beta, dx = \frac{du}{\beta} \right\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

□

Примеры

Задача

Функция распределения случайной величины ξ *имеет вид*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

Найдите $\mathsf{E}\,\xi$.

Примеры

Задача

Функция распределения случайной величины ξ *имеет вид*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

Найдите $\mathsf{E}\,\xi$.

Решение. У этой ф.р. есть и дискретная, и абсолютно непрерывная части:

$$\mathsf{E}\,\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} x \cdot dF(x) = \int\limits_0^1 xe^{-x}dx + 1 \times (F(1) - F(1-0)) =$$

$$= -(xe^{-x} + e^{-x})|_0^1 + \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e} + \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e}.$$

Прямое произведение вероятностных пространств

Определение

Пусть $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathsf{P}_1)$ *и* $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathsf{P}_2)$ *— два вероятностных пространства. Тогда вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ *называется их прямым произведением, если*

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2,$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma(\{B_1 \times B_2\} : B_i \in \mathcal{F}_i)$$

— σ*-алгебра, порожденная прямоугольниками.*

$$\mathsf{P} = \mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2$$

— вероятностная мера на $(\Omega, \mathcal{F})$*, такая что* $\mathsf{P}(B_1 \times B_2) = \mathsf{P}_1(B_1)\mathsf{P}_2(B_2)$*.*

Прямое произведение вероятностных пространств

Определение

Пусть $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathsf{P}_1)$ *и* $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathsf{P}_2)$ *— два вероятностных пространства. Тогда вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ *называется их прямым произведением, если*

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2,$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma(\{B_1 \times B_2\} : B_i \in \mathcal{F}_i)$$

— σ*-алгебра, порожденная прямоугольниками.*

$$\mathsf{P} = \mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2$$

— вероятностная мера на $(\Omega, \mathcal{F})$*, такая что* $\mathsf{P}(B_1 \times B_2) = \mathsf{P}_1(B_1)\mathsf{P}_2(B_2)$*.*

Лемма

Указанная мера P *существует и единственна.*

Доказательство леммы

Конечные объединения непересекающихся прямоугольников образуют алгебру $\mathcal{A}$, причем $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$. Если мы проверим, что мера $\mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2$ является вероятностной мерой на $\mathcal{A}$, то по теореме Каратеодори её можно единственным образом продолжить на $\mathcal{F}$.

Доказательство леммы

Конечные объединения непересекающихся прямоугольников образуют алгебру $\mathcal{A}$, причем $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$. Если мы проверим, что мера $\mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2$ является вероятностной мерой на $\mathcal{A}$, то по теореме Каратеодори её можно единственным образом продолжить на $\mathcal{F}$.

Проверим, что $\mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2$ — счетно–аддитивна на $\mathcal{A}$. Для этого достаточно проверить, что если прямоугольник $A \times B$ представим в виде $A \times B = \sqcup_{n=1}^{+\infty}(A_n \times B_n)$, то

$$(\mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2)(A \times B) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2)(A_n \times B_n).$$

Доказательство леммы

Конечные объединения непересекающихся прямоугольников образуют алгебру $\mathcal{A}$, причем $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$. Если мы проверим, что мера $\mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2$ является вероятностной мерой на $\mathcal{A}$, то по теореме Каратеодори её можно единственным образом продолжить на $\mathcal{F}$.

Проверим, что $\mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2$ — счетно–аддитивна на $\mathcal{A}$. Для этого достаточно проверить, что если прямоугольник $A \times B$ представим в виде $A \times B = \sqcup_{n=1}^{+\infty}(A_n \times B_n)$, то

$$(\mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2)(A \times B) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2)(A_n \times B_n).$$

Для $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим следующую функцию $f_n(\omega_1, \omega_2)$, $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2$:

$$f_n(\omega_1, \omega_2) = I\{\omega_1 \in A_n\} \cdot I\{\omega_2 \in B_n\}.$$

Доказательство леммы

Конечные объединения непересекающихся прямоугольников образуют алгебру $\mathcal{A}$, причем $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$. Если мы проверим, что мера $\mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2$ является вероятностной мерой на $\mathcal{A}$, то по теореме Каратеодори её можно единственным образом продолжить на $\mathcal{F}$.

Проверим, что $\mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2$ — счетно–аддитивна на $\mathcal{A}$. Для этого достаточно проверить, что если прямоугольник $A \times B$ представим в виде $A \times B = \sqcup_{n=1}^{+\infty}(A_n \times B_n)$, то

$$(\mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2)(A \times B) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2)(A_n \times B_n).$$

Для $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим следующую функцию $f_n(\omega_1, \omega_2)$, $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2$:

$$f_n(\omega_1, \omega_2) = I\{\omega_1 \in A_n\} \cdot I\{\omega_2 \in B_n\}.$$

Заметим, что для любой точки $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ выполнено

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\omega_1, \omega_2) = I\{\omega_1 \in A\} \cdot I\{\omega_2 \in B\}.$$

Доказательство леммы

С другой стороны, при фиксированном ω_1, каждая функция $f_n(\omega_1, \omega_2)$ есть с.в. на $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathsf{P}_2)$. Возьмем ее математическое ожидание:

$$f_n(\omega_1) := \mathsf{E}_2\, f_n(\omega_1, \omega_2) = \mathsf{P}_2(B_n) \cdot I\{\omega_1 \in A_n\}.$$

Доказательство леммы

С другой стороны, при фиксированном ω_1, каждая функция $f_n(\omega_1, \omega_2)$ есть с.в. на $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathsf{P}_2)$. Возьмем ее математическое ожидание:

$$f_n(\omega_1) := \mathsf{E}_2\, f_n(\omega_1, \omega_2) = \mathsf{P}_2(B_n) \cdot I\{\omega_1 \in A_n\}.$$

Но $I\{\omega_1 \in A\} \cdot I\{\omega_2 \in B\}$ — тоже с.в. на $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathsf{P}_2)$ при фиксированном ω_1. Стало быть, по теореме о монотонной сходимости:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\omega_1) = \mathsf{P}_2(B) \cdot I\{\omega_1 \in A\}.$$

Доказательство леммы

С другой стороны, при фиксированном ω_1, каждая функция $f_n(\omega_1, \omega_2)$ есть с.в. на $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathsf{P}_2)$. Возьмем ее математическое ожидание:

$$f_n(\omega_1) := \mathsf{E}_2\, f_n(\omega_1, \omega_2) = \mathsf{P}_2(B_n) \cdot I\{\omega_1 \in A_n\}.$$

Но $I\{\omega_1 \in A\} \cdot I\{\omega_2 \in B\}$ — тоже с.в. на $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathsf{P}_2)$ при фиксированном ω_1. Стало быть, по теореме о монотонной сходимости:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\omega_1) = \mathsf{P}_2(B) \cdot I\{\omega_1 \in A\}.$$

Но теперь функции $f_n(\omega_1)$ — это случайные величины на $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathsf{P}_1)$. Их математические ожидания равны:

$$\mathsf{E}_1\, f_n(\omega_1) = \mathsf{P}_2(B_n) \cdot \mathsf{P}_1(A_n).$$

Доказательство леммы

С другой стороны, при фиксированном ω_1, каждая функция $f_n(\omega_1, \omega_2)$ есть с.в. на $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathsf{P}_2)$. Возьмем ее математическое ожидание:

$$f_n(\omega_1) := \mathsf{E}_2\, f_n(\omega_1, \omega_2) = \mathsf{P}_2(B_n) \cdot I\{\omega_1 \in A_n\}.$$

Но $I\{\omega_1 \in A\} \cdot I\{\omega_2 \in B\}$ — тоже с.в. на $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathsf{P}_2)$ при фиксированном ω_1. Стало быть, по теореме о монотонной сходимости:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\omega_1) = \mathsf{P}_2(B) \cdot I\{\omega_1 \in A\}.$$

Но теперь функции $f_n(\omega_1)$ — это случайные величины на $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathsf{P}_1)$. Их математические ожидания равны:

$$\mathsf{E}_1\, f_n(\omega_1) = \mathsf{P}_2(B_n) \cdot \mathsf{P}_1(A_n).$$

Далее, $\mathsf{P}_2(B) \cdot I\{\omega_1 \in A\}$ — это тоже с.в. на $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathsf{P}_1)$. Все с.в. неотрицательны, поэтому по теореме о монотонной сходимости

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathsf{P}_2(B_n) \cdot \mathsf{P}_1(A_n) = \mathsf{E}_1\left(\mathsf{P}_2(B) \cdot I\{\omega_1 \in A\}\right) = \mathsf{P}_2(B) \cdot \mathsf{P}_1(A). \qquad \square$$

Двойной интеграл = повторный

Теорема (Фубини)

Если $\xi(\omega_1,\omega_2)$ — это случайная величина вероятностного пространства $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$, которое является прямым произведением $(\Omega_1,\mathcal{F}_1,\mathsf{P}_1)$ и $(\Omega_2,\mathcal{F}_2,\mathsf{P}_2)$, с условием, что

$$\int_\Omega |\xi(\omega_1,\omega_2)|d\mathsf{P} < +\infty,$$

то величины $\int\limits_{\Omega_1} \xi(\omega_1,\omega_2)\mathsf{P}_1(d\omega_1)$, $\int\limits_{\Omega_2} \xi(\omega_1,\omega_2)\mathsf{P}_2(d\omega_2)$ определены п.н. относительно P_2 и P_1, являются измеримыми относительно $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_1$, соответственно, и, кроме того,

$$\int_\Omega \xi(\omega_1,\omega_2)d\mathsf{P} = \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} \xi(\omega_1,\omega_2)\mathsf{P}_1(d\omega_1)\right)\mathsf{P}_2(d\omega_2)$$

$$= \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} \xi(\omega_1,\omega_2)\mathsf{P}_2(d\omega_2)\right)\mathsf{P}_1(d\omega_1).$$

Теория вероятностей. Лекция 29.04. Сходимости случайных величин

Д. А. Шабанов

мех-мат МГУ, второй курс

29.04.2020

Прямое произведение вероятностных пространств

Утверждение

Пусть ξ, η *— две независимые случайные величины. Тогда* $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathsf{P}_{(\xi,\eta)})$ *есть прямое произведение пространств* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathsf{P}_\xi)$ *и* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathsf{P}_\eta)$*.*

Прямое произведение вероятностных пространств

Утверждение

Пусть ξ, η — две независимые случайные величины. Тогда $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathsf{P}_{(\xi,\eta)})$ есть прямое произведение пространств $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathsf{P}_\xi)$ и $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathsf{P}_\eta)$.

Доказательство.

В силу того, что $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, достаточно проверить, что $\mathsf{P}_{(\xi,\eta)} = \mathsf{P}_\xi \times \mathsf{P}_\eta$.

Прямое произведение вероятностных пространств

Утверждение

Пусть ξ, η *— две независимые случайные величины. Тогда* $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathsf{P}_{(\xi,\eta)})$ *есть прямое произведение пространств* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathsf{P}_\xi)$ *и* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathsf{P}_\eta)$*.*

Доказательство.

В силу того, что $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, достаточно проверить, что $\mathsf{P}_{(\xi,\eta)} = \mathsf{P}_\xi \times \mathsf{P}_\eta$. Пусть $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, тогда

$$\mathsf{P}_{(\xi,\eta)}(B_1 \times B_2) = \mathsf{P}((\xi,\eta) \in B_1 \times B_2) = \mathsf{P}(\xi \in B_1, \eta \in B_2)$$

$$= \big|\text{пользуемся независимостью}\big| = \mathsf{P}(\xi \in B_1)\mathsf{P}(\eta \in B_2) = \mathsf{P}_\xi(B_1)\mathsf{P}_\eta(B_2).$$

$\square$

Свертка распределений

Лемма (о свертке распределений)

Пусть ξ, η *— две независимые случайные величины. Тогда функция распределения их суммы* $F_{\xi+\eta}$ *равна*

$$F_{\xi+\eta}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\xi(y-x)dF_\eta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\eta(y-x)dF_\xi(x).$$

Свертка распределений

Лемма (о свертке распределений)

Пусть ξ, η — две независимые случайные величины. Тогда функция распределения их суммы $F_{\xi+\eta}$ равна

$$F_{\xi+\eta}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\xi(y-x)dF_\eta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\eta(y-x)dF_\xi(x).$$

Доказательство.

$$F_{\xi+\eta}(y) = \mathsf{P}(\xi+\eta \leqslant y) = |\text{замена переменных}| = \int_{\mathbb{R}^2} I\{x+z \leqslant y\}\mathsf{P}_{(\xi,\eta)}(dx, dz) =$$

Лемма (о свертке распределений)

Пусть ξ, η — две независимые случайные величины. Тогда функция распределения их суммы $F_{\xi+\eta}$ равна

$$F_{\xi+\eta}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\xi(y-x)dF_\eta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\eta(y-x)dF_\xi(x).$$

Доказательство.

$$F_{\xi+\eta}(y) = \mathsf{P}(\xi+\eta \leqslant y) = |\text{замена переменных}| = \int_{\mathbb{R}^2} I\{x+z \leqslant y\}\mathsf{P}_{(\xi,\eta)}(dx, dz) =$$

$$= |\text{т. к. } \mathsf{P}_{(\xi,\eta)} = \mathsf{P}_\xi \times \mathsf{P}_\eta| = \int_{\mathbb{R}^2} I\{x+z \leqslant y\}\mathsf{P}_\eta(dz)\mathsf{P}_\xi(dx) =$$

Свертка распределений

Лемма (о свертке распределений)

Пусть ξ, η *— две независимые случайные величины. Тогда функция распределения их суммы* $F_{\xi+\eta}$ *равна*

$$F_{\xi+\eta}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\xi(y-x)dF_\eta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\eta(y-x)dF_\xi(x).$$

Доказательство.

$$F_{\xi+\eta}(y) = \mathsf{P}(\xi+\eta \leqslant y) = |\text{замена переменных}| = \int_{\mathbb{R}^2} I\{x+z \leqslant y\}\mathsf{P}_{(\xi,\eta)}(dx, dz) =$$

$$= |\text{т. к. } \mathsf{P}_{(\xi,\eta)} = \mathsf{P}_\xi \times \mathsf{P}_\eta| = \int_{\mathbb{R}^2} I\{x + z \leqslant y\}\mathsf{P}_\eta(dz)\mathsf{P}_\xi(dx) =$$

$$= |\text{теорема Фубини}| = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} I\{x + z \leqslant y\}\mathsf{P}_\eta(dz) \right) \mathsf{P}_\xi(dx) =$$

Свертка распределений

Лемма (о свертке распределений)

Пусть ξ, η — две независимые случайные величины. Тогда функция распределения их суммы $F_{\xi+\eta}$ равна

$$F_{\xi+\eta}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\xi(y-x)dF_\eta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\eta(y-x)dF_\xi(x).$$

Доказательство.

$$F_{\xi+\eta}(y) = \mathsf{P}(\xi+\eta \leqslant y) = |\text{замена переменных}| = \int_{\mathbb{R}^2} I\{x+z \leqslant y\}\mathsf{P}_{(\xi,\eta)}(dx,dz) =$$

$$= |\text{т. к. } \mathsf{P}_{(\xi,\eta)} = \mathsf{P}_\xi \times \mathsf{P}_\eta| = \int_{\mathbb{R}^2} I\{x+z \leqslant y\}\mathsf{P}_\eta(dz)\mathsf{P}_\xi(dx) =$$

$$= |\text{теорема Фубини}| = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} I\{x+z \leqslant y\}\mathsf{P}_\eta(dz) \right) \mathsf{P}_\xi(dx) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathsf{P}(\eta \leqslant y-x)\mathsf{P}_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}} F_\eta(y-x)dF_\xi(x). \qquad \square$$

Формула свертки

Следствие (формула свертки)

Если ξ, η *— две независимые случайные величины с плотностями* $p_\xi(x)$ *и* $p_\eta(y)$, *то сумма* $\xi + \eta$ *тоже имеет плотность, причем*

$$p_{\xi+\eta}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} p_\xi(y-x)p_\eta(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} p_\eta(y-x)p_\xi(x)dx.$$

Формула свертки

Следствие (формула свертки)

Если ξ, η *— две независимые случайные величины с плотностями* $p_\xi(x)$ *и* $p_\eta(y)$, *то сумма* $\xi + \eta$ *тоже имеет плотность, причем*

$$p_{\xi+\eta}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} p_\xi(y-x)p_\eta(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} p_\eta(y-x)p_\xi(x)dx.$$

Замечание

Сумма независимых с.в. $\xi + \eta$ *будет иметь плотность, если хотя бы одна из с.в. абсолютно непрерывна.*

Доказательство формулы свертки

Согласно лемме о свертке

$$F_{\xi+\eta}(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\xi(z-x)dF_\eta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\xi(z-x)p_\eta(x)dx =$$

Доказательство формулы свертки

Согласно лемме о свертке

$$F_{\xi+\eta}(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\xi(z-x)dF_\eta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\xi(z-x)p_\eta(x)dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{-\infty}^{z-x} p_\xi(y)dy \right) p_\eta(x)dx = |y' = y + x| =$$

Доказательство формулы свертки

Согласно лемме о свертке

$$F_{\xi+\eta}(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\xi(z-x)dF_\eta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\xi(z-x)p_\eta(x)dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{-\infty}^{z-x} p_\xi(y)dy \right) p_\eta(x)dx = |y' = y + x| =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{-\infty}^{z} p_\xi(y'-x)dy' \right) p_\eta(x)dx = |\text{теорема Фубини}| =$$

Доказательство формулы свертки

Согласно лемме о свертке

$$F_{\xi+\eta}(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\xi(z-x)dF_\eta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\xi(z-x)p_\eta(x)dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{-\infty}^{z-x} p_\xi(y)dy \right) p_\eta(x)dx = |y' = y + x| =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{-\infty}^{z} p_\xi(y'-x)dy' \right) p_\eta(x)dx = |\text{теорема Фубини}| =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{z} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} p_\xi(y'-x)p_\eta(x)dx \right) dy'.$$

Следовательно, внутренний интеграл и есть плотность $\xi + \eta$. □

Пример

Задача

Случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы, $\xi_i \sim Gamma(\alpha, \lambda_i)$. Найдите распределение $\xi_1 + \xi_2$.

Пример

Задача

Случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы, $\xi_i \sim Gamma(\alpha, \lambda_i)$. Найдите распределение $\xi_1 + \xi_2$.

Решение. Плотность ξ_i имеет плотность

$$p_{\xi_i}(x) = \frac{\alpha^{\lambda_i} x^{\lambda_i - 1}}{\Gamma(\lambda_i)} e^{-\alpha x} I\{x > 0\}.$$

Пример

Задача

Случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы, $\xi_i \sim Gamma(\alpha, \lambda_i)$. Найдите распределение $\xi_1 + \xi_2$.

Решение. Плотность ξ_i имеет плотность

$$p_{\xi_i}(x) = \frac{\alpha^{\lambda_i} x^{\lambda_i - 1}}{\Gamma(\lambda_i)} e^{-\alpha x} I\{x > 0\}.$$

Отсюда, по формуле свертки

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\alpha^{\lambda_1} y^{\lambda_1 - 1}}{\Gamma(\lambda_1)} e^{-\alpha y} I\{y > 0\} \cdot \frac{\alpha^{\lambda_2} (x-y)^{\lambda_2 - 1}}{\Gamma(\lambda_2)} e^{-\alpha(x-y)} I\{x-y > 0\} dy =$$

Пример

Задача

Случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы, $\xi_i \sim Gamma(\alpha, \lambda_i)$. Найдите распределение $\xi_1 + \xi_2$.

Решение. Плотность ξ_i имеет плотность

$$p_{\xi_i}(x) = \frac{\alpha^{\lambda_i} x^{\lambda_i - 1}}{\Gamma(\lambda_i)} e^{-\alpha x} I\{x > 0\}.$$

Отсюда, по формуле свертки

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\alpha^{\lambda_1} y^{\lambda_1 - 1}}{\Gamma(\lambda_1)} e^{-\alpha y} I\{y > 0\} \cdot \frac{\alpha^{\lambda_2} (x-y)^{\lambda_2 - 1}}{\Gamma(\lambda_2)} e^{-\alpha(x-y)} I\{x-y > 0\} dy =$$

(если $x < 0$, то индикаторы несовместны)

$$= \frac{\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)} e^{-\alpha x} \int\limits_0^x y^{\lambda_1 - 1} (x-y)^{\lambda_2 - 1} dy =$$

Пример

$$= \frac{\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)} e^{-\alpha x} \cdot x^{\lambda_1+\lambda_2-1} B(\lambda_1, \lambda_2) =$$

Пример

$$= \frac{\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)} e^{-\alpha x} \cdot x^{\lambda_1+\lambda_2-1} B(\lambda_1, \lambda_2) =$$

$$= \frac{\alpha^{\lambda_1+\lambda_2} x^{\lambda_1+\lambda_2-1}}{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2)} e^{-\alpha x} \cdot I\{x > 0\}.$$

Значит, $\xi_1 + \xi_2 \sim Gamma(\alpha, \lambda_1 + \lambda_2)$. $\square$

Замечания

Замечание (1)

Если $\xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^m$ *— независимые случайные векторы, то* $(\mathbb{R}^{n+m}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}), \mathsf{P}_{(\xi,\eta)})$ *есть прямое произведение* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathsf{P}_\xi)$ *и* $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m), \mathsf{P}_\eta)$.

Замечания

Замечание (1)

Если $\xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^m$ *— независимые случайные векторы, то* $(\mathbb{R}^{n+m}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}), \mathsf{P}_{(\xi,\eta)})$ *есть прямое произведение* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathsf{P}_\xi)$ *и* $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m), \mathsf{P}_\eta)$.

Замечание (2)

Если $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \ldots F_n(x_n)$ *— многомерная ф. р., образованная как произведение одномерных ф. р.* F_i, *то соответствующая ей мера* P *на* $\mathbb{R}^n$ *есть* $\mathsf{P} = \mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2 \times \ldots \times \mathsf{P}_n$, *"произведение" мер* P_i, *соответствующих ф. р.* F_i. *Стало быть, по теореме Фубини*

$$dF(x_1, x_2, \ldots, x_n) = dF_1(x_1) \ldots dF_n(x_n).$$

Неравенство Маркова

Теорема (неравенство Маркова)

Если $\xi \geqslant 0$— *неотрицательная с. в. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}(\xi \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathsf{E}\,\xi}{\varepsilon}.$$

Неравенство Маркова

Теорема (неравенство Маркова)

Если $\xi \geqslant 0$*— неотрицательная с. в. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}(\xi \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathsf{E}\,\xi}{\varepsilon}.$$

Доказательство.

$$\mathsf{P}(\xi \geqslant \varepsilon) = \mathsf{E}\, I\{\xi \geqslant \varepsilon\} \leqslant \mathsf{E}\left(\frac{\xi}{\varepsilon} I\{\xi \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \frac{\mathsf{E}\,\xi}{\varepsilon}.$$

$\square$

Неравенство Чебышёва

Теорема (неравенство Чебышёва)

Если ξ*— произвольная с. в.,* $\mathsf{D}\,\xi < +\infty$*. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}(|\xi - \mathsf{E}\,\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathsf{D}\xi}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Чебышёва

Теорема (неравенство Чебышёва)

Если ξ *— произвольная с. в.,* $\mathsf{D}\,\xi < +\infty$*. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}(|\xi - \mathsf{E}\,\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathsf{D}\xi}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство.

$$\mathsf{P}(|\xi - \mathsf{E}\,\xi| \geqslant \varepsilon) = \mathsf{P}(|\xi - \mathsf{E}\,\xi|^2 \geqslant \varepsilon^2) \leqslant |\text{нер-во Маркова}| \leqslant \frac{\mathsf{E}\,|\xi - \mathsf{E}\,\xi|^2}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{\mathsf{D}\xi}{\varepsilon^2}.$$

$\square$

Неравенство Йенсена

Теорема (неравенство Йенсена)

Пусть $g(x)$ *— выпуклая книзу борелевская функция,* $\mathsf{E}\,|\xi| < +\infty$*. Тогда*

$$g(\mathsf{E}\,\xi) \leqslant \mathsf{E}\,g(\xi).$$

Неравенство Йенсена

Теорема (неравенство Йенсена)

Пусть $g(x)$ *— выпуклая книзу борелевская функция,* $\mathsf{E}\,|\xi| < +\infty$*. Тогда*

$$g(\mathsf{E}\,\xi) \leqslant \mathsf{E}\,g(\xi).$$

Доказательство.

Если $g(x)$ выпукла книзу, то $\forall x_0 \in \mathbb{R}\ \exists \lambda(x_0)$, т. ч. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$g(x) \geqslant g(x_0) + (x - x_0)\lambda(x_0).$$

Неравенство Йенсена

Теорема (неравенство Йенсена)

Пусть $g(x)$ *— выпуклая книзу борелевская функция,* $\mathsf{E}\,|\xi| < +\infty$. *Тогда*

$$g(\mathsf{E}\,\xi) \leqslant \mathsf{E}\,g(\xi).$$

Доказательство.

Если $g(x)$ выпукла книзу, то $\forall x_0 \in \mathbb{R}\ \exists \lambda(x_0)$, т. ч. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$g(x) \geqslant g(x_0) + (x - x_0)\lambda(x_0).$$

Положим $x_0 = \mathsf{E}\,\xi,\ x = \xi$. Тогда

$$g(\xi) \geqslant g(\mathsf{E}\,\xi) + (\xi - \mathsf{E}\,\xi)\lambda(\mathsf{E}\,\xi).$$

Неравенство Йенсена

Теорема (неравенство Йенсена)

Пусть $g(x)$ *— выпуклая книзу борелевская функция,* $\mathsf{E}\,|\xi| < +\infty$*. Тогда*

$$g(\mathsf{E}\,\xi) \leqslant \mathsf{E}\,g(\xi).$$

Доказательство.

Если $g(x)$ выпукла книзу, то $\forall x_0 \in \mathbb{R}\ \exists \lambda(x_0)$, т. ч. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$g(x) \geqslant g(x_0) + (x - x_0)\lambda(x_0).$$

Положим $x_0 = \mathsf{E}\,\xi,\ \ x = \xi$. Тогда

$$g(\xi) \geqslant g(\mathsf{E}\,\xi) + (\xi - \mathsf{E}\,\xi)\lambda(\mathsf{E}\,\xi).$$

Берем математическое ожидание от обеих частей неравенства:

$$\mathsf{E}\,g(\xi) \geqslant g(\mathsf{E}\,\xi) + \lambda(\mathsf{E}\,\xi)\,\mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\,\xi).$$

Заметим, что $\mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\,\xi) = 0$. Следовательно, $\mathsf{E}\,g(\xi) \geqslant g(\mathsf{E}\,\xi)$. $\square$

Сходимости случайных величин

Определение

Последовательность с. в. $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится по вероятности к с. в.* ξ, *если* $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$.

Сходимости случайных величин

Определение

Последовательность с. в. $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится по вероятности к с. в.* ξ, *если* $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$.

Определение

Последовательность с. в. $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится с вероятностью* 1 *к с. в.* ξ *(сходится почти наверное), если*

$$\mathsf{P}(\lim_n \xi_n = \xi) = \mathsf{P}\left(\omega : \lim_n \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\right) = 1.$$

Обозначения: $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, $\xi_n \to \xi$ *п.н.*, $\xi_n \to \xi$ P-*п.н.*.

Сходимости случайных величин

Определение

Последовательность с.в. $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится в среднем порядка* $p > 0$ *к с.в.* ξ *(сходится в* L^p*), если*

$$\mathsf{E}\,|\xi_n - \xi|^p \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$.

Сходимости случайных величин

Определение

Последовательность с.в. $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится в среднем порядка* $p > 0$ *к с.в.* ξ *(сходится в* L^p*), если*

$$\mathsf{E}\,|\xi_n - \xi|^p \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$.

Определение

Последовательность с.в. $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится по распределению к с.в.* ξ*, если для любой ограниченной непрерывной функции* $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *выполнено*

$$\mathsf{E}\,f(\xi_n) \to \mathsf{E}\,f(\xi) \text{ при } n \to \infty.$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$.

Закон больших чисел

Теорема (закон больших чисел в форме Чебышёва)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — *последовательность попарно некоррелированных с.в., причем для некоторой* $c > 0$ *выполнено* $\forall k \ \mathsf{D}\,\xi_k \leqslant c$. *Обозначим* $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. *Тогда*

$$\frac{S_n - \mathsf{E}\,S_n}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0.$$

Закон больших чисел

Теорема (закон больших чисел в форме Чебышёва)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность попарно некоррелированных с.в., причем для некоторой* $c > 0$ *выполнено* $\forall k \;\; \mathsf{D}\,\xi_k \leqslant c$. *Обозначим* $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. *Тогда*

$$\frac{S_n - \mathsf{E}\,S_n}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0.$$

Доказательство.

Оценим $\mathsf{D}\,S_n$. В силу попарной некоррелированности

$$\mathsf{D}\,S_n = \mathsf{D}(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}\,\xi_i \leqslant cn.$$

Закон больших чисел

Теорема (закон больших чисел в форме Чебышёва)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность попарно некоррелированных с.в., причем для некоторой* $c > 0$ *выполнено* $\forall k \ \mathsf{D}\,\xi_k \leqslant c$. *Обозначим* $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. *Тогда*

$$\frac{S_n - \mathsf{E}\,S_n}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0.$$

Доказательство.

Оценим $\mathsf{D}\,S_n$. В силу попарной некоррелированности

$$\mathsf{D}\,S_n = \mathsf{D}(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}\,\xi_i \leqslant cn.$$

Тогда $\mathsf{D}(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n^2}\,\mathsf{D}\,S_n \leqslant \frac{c}{n}$. Из неравенства Чебышёва получаем:

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_n - \mathsf{E}\,S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) = \mathsf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{\mathsf{E}\,S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathsf{D}\,\frac{S_n}{n}}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{c}{\varepsilon^2 n} \longrightarrow 0.$$

Следствие ЗБЧ в форме Чебышёва

Следствие

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— независимые с.в.,* $\forall k \;\; \mathsf{D}\,\xi_k \leqslant c, \mathsf{E}\,\xi_k = a$. *Тогда*

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} a \quad \textit{при } n \to \infty.$$

Следствие ЗБЧ в форме Чебышёва

Следствие

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— независимые с.в.,* $\forall k\ \ \mathsf{D}\,\xi_k \leqslant c, \mathsf{E}\,\xi_k = a$*. Тогда*

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} a \quad \text{при } n \to \infty.$$

Доказательство.

Очевидно, т.к. $\mathsf{E}\,S_n = na$. □

Следствие ЗБЧ в форме Чебышёва

Следствие

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— независимые с.в.,* $\forall k \;\; \mathsf{D}\,\xi_k \leqslant c, \mathsf{E}\,\xi_k = a.$ *Тогда*

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} a \quad \textit{при } n \to \infty.$$

Доказательство.

Очевидно, т.к. $\mathsf{E}\,S_n = na.$ □

Смысл ЗБЧ: пусть $\xi_1 \ldots \xi_n, \ldots$ — независимые наблюдения одного и того же эксперимента. Тогда их среднее арифметическое сходится к среднему значению одного результата $\mathsf{E}\,\xi_i = a$.

Следствие ЗБЧ в форме Чебышёва

Следствие

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— независимые с.в.,* $\forall k \;\; \mathsf{D}\,\xi_k \leqslant c, \mathsf{E}\,\xi_k = a$. *Тогда*

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} a \quad \text{\textit{при} } n \to \infty.$$

Доказательство.

Очевидно, т.к. $\mathsf{E}\,S_n = na$. □

Смысл ЗБЧ: пусть $\xi_1 \ldots \xi_n, \ldots$ — независимые наблюдения одного и того же эксперимента. Тогда их среднее арифметическое сходится к среднему значению одного результата $\mathsf{E}\,\xi_i = a$.
Если, например, ξ_i — индикаторы появления некоторого события A в эксперименте, т.е. $\xi_i = I\{A \text{ произошло в } i\text{-ом эксперименте}\}$, то $\nu_n(A) = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}$ — частота появления A, $\mathsf{E}\,\xi_n = \mathsf{P}(A)$. Тогда ЗБЧ гласит:

$$\nu_n(A) \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathsf{P}(A).$$

Это эффект устойчивости частот, который постулировался в начале курса.

Критерий сходимости с вероятностью 1

Лемма (критерий сходимости с вероятностью 1)

$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ *выполнено* $\mathsf{P}\left(\sup\limits_{k \geqslant n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) \to 0$ *при* $n \to +\infty$.

Критерий сходимости с вероятностью 1

Лемма (критерий сходимости с вероятностью 1)

$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ *выполнено* $\mathsf{P}\left(\sup\limits_{k \geqslant n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) \to 0$ *при* $n \to +\infty$.

Доказательство. Пусть $A_n^\varepsilon = \{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}$, а $A^\varepsilon = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k \geqslant n} A_k^\varepsilon$. Тогда

$$\{\omega : \xi_n(\omega) \nrightarrow \xi(\omega)\} = \bigcup_{m=1}^\infty A^{\frac{1}{m}}.$$

Критерий сходимости с вероятностью 1

Лемма (критерий сходимости с вероятностью 1)

$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ *выполнено* $\mathsf{P}\left(\sup\limits_{k \geqslant n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) \to 0$ *при* $n \to +\infty$.

Доказательство. Пусть $A_n^\varepsilon = \{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}$, а $A^\varepsilon = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k \geqslant n} A_k^\varepsilon$. Тогда

$$\{\omega : \xi_n(\omega) \nrightarrow \xi(\omega)\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} A^{\frac{1}{m}}.$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}(\xi_n \nrightarrow \xi) = 0 \Leftrightarrow \mathsf{P}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \ \forall m \in \mathbb{N}\ \mathsf{P}\left(A^{\frac{1}{m}}\right) = 0$$

Критерий сходимости с вероятностью 1

Лемма (критерий сходимости с вероятностью 1)

$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ *выполнено* $\mathsf{P}\left(\sup\limits_{k \geqslant n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) \to 0$ *при* $n \to +\infty$.

Доказательство. Пусть $A_n^\varepsilon = \{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}$, а $A^\varepsilon = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k \geqslant n} A_k^\varepsilon$. Тогда

$$\{\omega : \xi_n(\omega) \nrightarrow \xi(\omega)\} = \bigcup_{m=1}^\infty A^{\frac{1}{m}}.$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}(\xi_n \nrightarrow \xi) = 0 \Leftrightarrow \mathsf{P}\left(\bigcup_{m=1}^\infty A^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \ \forall m \in \mathbb{N}\ \mathsf{P}\left(A^{\frac{1}{m}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \mathsf{P}(A^\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \big|\text{непрерывность вероятн. меры}\big|$$

Критерий сходимости с вероятностью 1

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \mathsf{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k^\varepsilon\right) \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Событие $\{\bigcup_{k\geqslant n} A_k^\varepsilon\}$ и есть $\{\sup\limits_{k\geqslant n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\}$. $\square$

Критерий сходимости с вероятностью 1

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \mathsf{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k^{\varepsilon}\right) \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Событие $\{\bigcup_{k\geqslant n} A_k^{\varepsilon}\}$ и есть $\{\sup\limits_{k\geqslant n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\}$. $\square$

Замечание

Заметим, что утверждение $\forall \varepsilon > 0 \ \mathsf{P}\left(\sup\limits_{k\geqslant n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) \to 0$ *при* $n \to +\infty$.

эквивалентно тому, что $\forall \varepsilon > 0 \ \mathsf{P}\left(\sup\limits_{k\geqslant n} |\xi_k - \xi| \geqslant \varepsilon\right) \to 0$ *при* $n \to +\infty$.

Достаточное условие сходимости п.н.

Следствие

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность с.в., причем для любого* $\varepsilon > 0$ *сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathsf{P}\left(|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right) < +\infty.$$

Тогда $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$.

Достаточное условие сходимости п.н.

Следствие

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность с.в., причем для любого* $\varepsilon > 0$ *сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathsf{P}\left(|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right) < +\infty.$$

Тогда $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$*.*

Доказательство.

$$\mathsf{P}\left(\sup_{k \geqslant n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) = \mathsf{P}\left(\bigcup_{k \geqslant n} \{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\}\right) \leqslant$$

Достаточное условие сходимости п.н.

Следствие

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность с.в., причем для любого* $\varepsilon > 0$ *сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathsf{P}\left(|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right) < +\infty.$$

Тогда $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$.

Доказательство.

$$\mathsf{P}\left(\sup_{k \geqslant n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) = \mathsf{P}\left(\bigcup_{k \geqslant n} \{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathsf{P}\left(|\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0 \quad \text{при } n \to +\infty$$

как остаток сходящегося ряда. $\square$

Взаимоотношение видов сходимости

Теорема (взаимоотношение видов сходимости)

Имеют место соотношения:

1. $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$
2. $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$
3. $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{d} \xi$

Взаимоотношение видов сходимости

Теорема (взаимоотношение видов сходимости)

Имеют место соотношения:

1. $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$
2. $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$
3. $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{d} \xi$

Доказательство. 1) Используем лемму:

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ выполнено } \mathsf{P}(\sup_{k \geqslant n} |\xi_k - \xi| \geqslant \varepsilon) \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Но $\{|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\} \subset \{\sup_{k \geqslant n} |\xi_k - \xi| \geqslant \varepsilon\}$. Значит,

$$\mathsf{P}(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Взаимоотношение видов сходимости

Теорема (взаимоотношение видов сходимости)

Имеют место соотношения:

1. $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$
2. $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$
3. $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{d} \xi$

Доказательство. 1) Используем лемму:

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ выполнено } \mathsf{P}(\sup_{k \geqslant n} |\xi_k - \xi| \geqslant \varepsilon) \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Но $\{|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\} \subset \{\sup_{k \geqslant n} |\xi_k - \xi| \geqslant \varepsilon\}$. Значит,

$$\mathsf{P}(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

2) Применяем неравенство Маркова:

$$\mathsf{P}(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) = \mathsf{P}(|\xi_n - \xi|^p \geqslant \varepsilon^p) \leqslant \frac{\mathsf{E}\,|\xi_n - \xi|^p}{\varepsilon^p} \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Доказательство теоремы

3) Пусть $f(x)$ — ограниченная непрерывная функция на $\mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant c$. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Выберем N так, чтобы

$$\mathsf{P}(|\xi| > N) \leqslant \frac{\varepsilon}{4c}.$$

Доказательство теоремы

3) Пусть $f(x)$ — ограниченная непрерывная функция на $\mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant c$. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Выберем N так, чтобы

$$\mathsf{P}(|\xi| > N) \leqslant \frac{\varepsilon}{4c}.$$

На отрезке $[-N, N]$ $f(x)$ равномерно непрерывна, т.е. $\exists \delta > 0 : \forall x, y$ с условиями $|x| \leqslant N$, $|x - y| \leqslant \delta$ выполнено

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Доказательство теоремы

3) Пусть $f(x)$ — ограниченная непрерывная функция на $\mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant c$. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Выберем N так, чтобы

$$\mathsf{P}(|\xi| > N) \leqslant \frac{\varepsilon}{4c}.$$

На отрезке $[-N, N]$ $f(x)$ равномерно непрерывна, т.е. $\exists \delta > 0 : \forall x, y$ с условиями $|x| \leqslant N,\ |x - y| \leqslant \delta$ выполнено

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим следующее разбиение Ω :

$$A_1 = \{|\xi_n - \xi| \leqslant \delta\} \cap \{|\xi| \leqslant N\},$$

$$A_2 = \{|\xi_n - \xi| \leqslant \delta\} \cap \{|\xi| > N\},$$

$$A_3 = \{|\xi_n - \xi| > \delta\}.$$

Доказательство теоремы

Тогда

$$|\mathsf{E}\, f(\xi_n) - \mathsf{E}\, f(\xi)| \leqslant \mathsf{E}\,|f(\xi_n) - f(\xi)| \leqslant \mathsf{E}\,[|f(\xi_n) - f(\xi)|(I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3})] = \odot$$

На множестве A_1 выполнено $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, значит,

$$\mathsf{E}\,|f(\xi_n) - f(\xi)| I_{A_1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

На множествах A_2, A_3 выполнено $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leqslant 2c$, значит,

$$\mathsf{E}\,|f(\xi_n) - f(\xi)|(I_{A_2} + I_{A_3}) \leqslant 2c \cdot (\mathsf{P}(A_2) + \mathsf{P}(A_3)).$$

Доказательство теоремы

Тогда

$$|\,\mathsf{E}\,f(\xi_n)-\mathsf{E}\,f(\xi)|\leqslant \mathsf{E}\,|f(\xi_n)-f(\xi)|\leqslant \mathsf{E}\,[|f(\xi_n)-f(\xi)|(I_{A_1}+I_{A_2}+I_{A_3})]=\odot$$

На множестве A_1 выполнено $|f(\xi_n)-f(\xi)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$, значит,

$$\mathsf{E}\,|f(\xi_n)-f(\xi)|I_{A_1}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

На множествах A_2, A_3 выполнено $|f(\xi_n)-f(\xi)|\leqslant 2c$, значит,

$$\mathsf{E}\,|f(\xi_n)-f(\xi)|(I_{A_2}+I_{A_3})\leqslant 2c\cdot(\mathsf{P}(A_2)+\mathsf{P}(A_3)).$$

В итоге,

$$\odot\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+2c\,(\mathsf{P}(A_2)+\mathsf{P}(A_3))\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+2c\,(\mathsf{P}(|\xi|>N)+2c\cdot\mathsf{P}(|\xi_n-\xi|>\delta)$$

$$\leqslant|\text{ выбор } N|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+2c\cdot\mathsf{P}(|\xi_n-\xi|>\delta)=\varepsilon+2c\cdot\mathsf{P}(|\xi_n-\xi|>\delta).$$

Доказательство теоремы

Тогда

$$|\mathsf{E} f(\xi_n) - \mathsf{E} f(\xi)| \leqslant \mathsf{E}|f(\xi_n) - f(\xi)| \leqslant \mathsf{E}\left[|f(\xi_n) - f(\xi)|(I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3})\right] = \odot$$

На множестве A_1 выполнено $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, значит,

$$\mathsf{E}|f(\xi_n) - f(\xi)| I_{A_1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

На множествах A_2, A_3 выполнено $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leqslant 2c$, значит,

$$\mathsf{E}|f(\xi_n) - f(\xi)|(I_{A_2} + I_{A_3}) \leqslant 2c \cdot (\mathsf{P}(A_2) + \mathsf{P}(A_3)).$$

В итоге,

$$\odot \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2c\,(\mathsf{P}(A_2) + \mathsf{P}(A_3)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2c\,(\mathsf{P}(|\xi| > N) + 2c \cdot \mathsf{P}(|\xi_n - \xi| > \delta)$$

$$\leqslant |\text{ выбор } N| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + 2c \cdot \mathsf{P}(|\xi_n - \xi| > \delta) = \varepsilon + 2c \cdot \mathsf{P}(|\xi_n - \xi| > \delta).$$

Но $\mathsf{P}(|\xi_n - \xi| > \delta) \to 0$ при $n \to +\infty$, т.к. $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$. Значит, $\forall \varepsilon > 0$ выполнено $\overline{\lim\limits_n} |\mathsf{E} f(\xi_n) - \mathsf{E} f(\xi)| \leqslant \varepsilon$. Получаем:

$$\mathsf{E} f(\xi_n) \to \mathsf{E} f(\xi), \text{ и } \xi_n \xrightarrow{d} \xi. \qquad \square$$

Замечание

Замечание

Сходимость по распределению — это, на самом деле, сходимость не самих с.в., а их распределений.

Замечание

Замечание

Сходимость по распределению — это, на самом деле, сходимость не самих с.в., а их распределений.

Схема:

$$\begin{array}{ccccc} \text{п.н.} & \searrow\!\!\searrow & & & \\ & & \mathsf{P} & \Longrightarrow & d \\ L^p & \nearrow\!\!\nearrow & & & \end{array}$$

Обратных стрелок нигде нет, можно привести контрпримеры.

“Обратная” стрелка

Лемма

Если $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$*, то найдется такая подпоследовательность* $\{\xi_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$*, что* $\xi_{n_k} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$ *при* $k \to \infty$.

"Обратная" стрелка

Лемма

Если $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$*, то найдется такая подпоследовательность* $\{\xi_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$*, что* $\xi_{n_k} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$ *при* $k \to \infty$*.*

Доказательство. Для любого $k \in \mathbb{N}$ выберем $n_k > n_{k-1}$ так, чтобы для всех $n \geqslant n_k$ было выполнено

$$\mathsf{P}\left(|\xi_n - \xi| \geqslant \frac{1}{k}\right) \leqslant 2^{-k}.$$

Выбор возможен в силу того, что $\mathsf{P}\left(|\xi_n - \xi| \geqslant \frac{1}{k}\right) \to 0$ при $n \to \infty$.

“Обратная” стрелка

Лемма

Если $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$, *то найдется такая подпоследовательность* $\{\xi_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$, *что* $\xi_{n_k} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. Для любого $k \in \mathbb{N}$ выберем $n_k > n_{k-1}$ так, чтобы для всех $n \geqslant n_k$ было выполнено

$$\mathsf{P}\left(|\xi_n - \xi| \geqslant \frac{1}{k}\right) \leqslant 2^{-k}.$$

Выбор возможен в силу того, что $\mathsf{P}\left(|\xi_n - \xi| \geqslant \frac{1}{k}\right) \to 0$ при $n \to \infty$. Проверим, что подпоследовательность $\{\xi_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$ искомая. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $k_0 > 1/\varepsilon$. Тогда

$$\sum_{k \geqslant k_0} \mathsf{P}\left(|\xi_{n_k} - \xi| > \varepsilon\right) \leqslant \sum_{k \geqslant k_0} \mathsf{P}\left(|\xi_{n_k} - \xi| \geqslant \frac{1}{k}\right) \leqslant \sum_{k \geqslant k_0} 2^{-k} < +\infty.$$

Согласно достаточному условию сходимости п.н. получаем, что $\xi_{n_k} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$. $\square$

Усиленный закон больших чисел I

Теорема (усиленный закон больших чисел в форме Кантелли)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность независимых с.в., причем для некоторой* $c > 0$ *выполнено* $\forall n\ \mathsf{E}(\xi_n - \mathsf{E}\,\xi_n)^4 \leqslant c$. *Обозначим* $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. *Тогда*

$$\frac{S_n - \mathsf{E}\,S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

Усиленный закон больших чисел I

Теорема (усиленный закон больших чисел в форме Кантелли)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность независимых с.в., причем для некоторой* $c > 0$ *выполнено* $\forall n \ \mathsf{E}(\xi_n - \mathsf{E}\,\xi_n)^4 \leqslant c$. *Обозначим* $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. *Тогда*

$$\frac{S_n - \mathsf{E}\,S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\mathsf{E}\,\xi_n = 0$ для всех n, иначе просто перейдем к с.в. $\xi_n - \mathsf{E}\,\xi_n$.

Усиленный закон больших чисел I

Теорема (усиленный закон больших чисел в форме Кантелли)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность независимых с.в., причем для некоторой* $c > 0$ *выполнено* $\forall n \ \mathsf{E}(\xi_n - \mathsf{E}\,\xi_n)^4 \leqslant c$*. Обозначим* $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$*. Тогда*

$$\frac{S_n - \mathsf{E}\,S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\mathsf{E}\,\xi_n = 0$ для всех n, иначе просто перейдем к с.в. $\xi_n - \mathsf{E}\,\xi_n$.

Нам необходимо показать, что $S_n/n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$. Для этого достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathsf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) < +\infty.$$

Усиленный закон больших чисел I

Теорема (усиленный закон больших чисел в форме Кантелли)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность независимых с.в., причем для некоторой* $c > 0$ *выполнено* $\forall n \ \mathsf{E}(\xi_n - \mathsf{E}\,\xi_n)^4 \leqslant c$. *Обозначим* $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. *Тогда*

$$\frac{S_n - \mathsf{E}\,S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\mathsf{E}\,\xi_n = 0$ для всех n, иначе просто перейдем к с.в. $\xi_n - \mathsf{E}\,\xi_n$.

Нам необходимо показать, что $S_n/n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$. Для этого достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathsf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) < +\infty.$$

Используя неравенство Маркова, получаем:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathsf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathsf{P}\left(|S_n| > n\varepsilon\right) =$$

Доказательство теоремы

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathsf{P}\left(|S_n|^4 > n^4\varepsilon^4\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathsf{E}\, S_n^4}{n^4\varepsilon^4}.$$

Доказательство теоремы

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathsf{P}\left(|S_n|^4 > n^4\varepsilon^4\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathsf{E}\, S_n^4}{n^4\varepsilon^4}.$$

Покажем, что $\mathsf{E}\, S_n^4 = O(n^2)$. Этого будет достаточно для обоснования сходимости ряда.

Доказательство теоремы

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathsf{P}\left(|S_n|^4 > n^4\varepsilon^4\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathsf{E}\, S_n^4}{n^4\varepsilon^4}.$$

Покажем, что $\mathsf{E}\, S_n^4 = O(n^2)$. Этого будет достаточно для обоснования сходимости ряда. Имеет место равенство:

$$\mathsf{E}\, S_n^4 = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \mathsf{E}\, \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l.$$

В силу независимости с.в. и условия $\mathsf{E}\, \xi_i = 0$ для всех i слагаемое $\mathsf{E}\, \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l$ не будет нулевым только, если все различные индексы входят в четных степенях. Следовательно,

$$\mathsf{E}\, S_n^4 = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\, \xi_i^4 + 6 \cdot \sum_{i<j} \mathsf{E}\, \xi_i^2 \cdot \mathsf{E}\, \xi_j^2.$$

Доказательство теоремы

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathsf{P}\left(|S_n|^4 > n^4\varepsilon^4\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathsf{E}\, S_n^4}{n^4\varepsilon^4}.$$

Покажем, что $\mathsf{E}\, S_n^4 = O(n^2)$. Этого будет достаточно для обоснования сходимости ряда. Имеет место равенство:

$$\mathsf{E}\, S_n^4 = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \mathsf{E}\, \xi_i\xi_j\xi_k\xi_l.$$

В силу независимости с.в. и условия $\mathsf{E}\, \xi_i = 0$ для всех i слагаемое $\mathsf{E}\, \xi_i\xi_j\xi_k\xi_l$ не будет нулевым только, если все различные индексы входят в четных степенях. Следовательно,

$$\mathsf{E}\, S_n^4 = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\, \xi_i^4 + 6 \cdot \sum_{i<j} \mathsf{E}\, \xi_i^2 \cdot \mathsf{E}\, \xi_j^2.$$

По условию теоремы $\mathsf{E}\, \xi_i^4 \leqslant c$, а $\mathsf{E}\, \xi_i^2 \leqslant \sqrt{\mathsf{E}\, \xi_i^4} \leqslant \sqrt{c}$.

Доказательство теоремы

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathsf{P}\left(|S_n|^4 > n^4\varepsilon^4\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathsf{E}\, S_n^4}{n^4\varepsilon^4}.$$

Покажем, что $\mathsf{E}\, S_n^4 = O(n^2)$. Этого будет достаточно для обоснования сходимости ряда. Имеет место равенство:

$$\mathsf{E}\, S_n^4 = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \mathsf{E}\, \xi_i\xi_j\xi_k\xi_l.$$

В силу независимости с.в. и условия $\mathsf{E}\, \xi_i = 0$ для всех i слагаемое $\mathsf{E}\, \xi_i\xi_j\xi_k\xi_l$ не будет нулевым только, если все различные индексы входят в четных степенях. Следовательно,

$$\mathsf{E}\, S_n^4 = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\, \xi_i^4 + 6 \cdot \sum_{i<j} \mathsf{E}\, \xi_i^2 \cdot \mathsf{E}\, \xi_j^2.$$

По условию теоремы $\mathsf{E}\, \xi_i^4 \leqslant c$, а $\mathsf{E}\, \xi_i^2 \leqslant \sqrt{\mathsf{E}\, \xi_i^4} \leqslant \sqrt{c}$. В итоге,

$$\mathsf{E}\, S_n^4 \leqslant n \cdot c + 6n(n-1) \cdot c \leqslant 6c \cdot n^2 = O(n^2). \qquad \square$$

Смысл УЗБЧ

Следствие

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— независимые с.в.,* $\forall n \;\; \mathsf{E}\,\xi_n^4 \leqslant c, \mathsf{E}\,\xi_n = a$. *Тогда*

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} a \quad \text{при } n \to \infty.$$

Смысл УЗБЧ

Следствие

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— независимые с.в.,* $\forall n\ \mathsf{E}\,\xi_n^4 \leqslant c, \mathsf{E}\,\xi_n = a.$ *Тогда*

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} a \quad \text{при } n \to \infty.$$

Усиленный закон больших чисел теоретически обосновывает феномен устойчивости частот появления события при проведении независимых однородных случайных экспериментов:

Смысл УЗБЧ

Следствие

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— независимые с.в.,* $\forall n \;\; \mathsf{E}\,\xi_n^4 \leqslant c, \mathsf{E}\,\xi_n = a$. *Тогда*

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} a \quad \textit{при } n \to \infty.$$

Усиленный закон больших чисел теоретически обосновывает феномен устойчивости частот появления события при проведении независимых однородных случайных экспериментов: если

$$\xi_i = I\{A \text{ произошло в } i\text{-ом эксперименте}\},$$

то $\nu_n(A) = \frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}$ — частота появления A, $\mathsf{E}\,\xi_n = \mathsf{P}(A)$. Тогда УЗБЧ гласит, что

$$\nu_n(A) \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathsf{P}(A).$$

Теория вероятностей. Лекция 06.05. Усиленный закон больших чисел

Д. А. Шабанов

мех-мат МГУ, второй курс

06.05.2020

Фундаментальность с вероятностью 1

Определение

Последовательность чисел $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ *называется фундаментальной, если* $|x_n - x_m| \to 0$ *при* $n, m \to +\infty$ *(или* $\sup_{k \geqslant n} |x_k - x_n| \to 0$ *при* $n \to +\infty$).

Фундаментальность с вероятностью 1

Определение

Последовательность чисел $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ *называется фундаментальной, если* $|x_n - x_m| \to 0$ *при* $n, m \to +\infty$ *(или* $\sup_{k \geqslant n} |x_k - x_n| \to 0$ *при* $n \to +\infty$*).*

Теорема (критерий Коши)

Последовательность чисел $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится* $\Longleftrightarrow$ *она фундаментальна.*

Фундаментальность с вероятностью 1

Определение

Последовательность чисел $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ *называется фундаментальной, если* $|x_n - x_m| \to 0$ *при* $n, m \to +\infty$ *(или* $\sup_{k \geqslant n} |x_k - x_n| \to 0$ *при* $n \to +\infty$*).*

Теорема (критерий Коши)

Последовательность чисел $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится* $\Longleftrightarrow$ *она фундаментальна.*

Определение

Последовательность с.в. $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *называется фундаментальной с вероятностью* 1*, если*

$$\mathsf{P}(\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ фундаментальна}) = 1.$$

Критерий Коши сходимости п.н.

Теорема (критерий Коши сходимости п.н.)

Последовательность с.в. $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится п. н.* $\Longleftrightarrow$ *она фундаментальна с вероятностью* 1.

Критерий Коши сходимости п.н.

Теорема (критерий Коши сходимости п.н.)

Последовательность с.в. $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится п. н.* $\iff$ *она фундаментальна с вероятностью* 1.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ Пусть $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$. Обозначим $\Omega' = \{\omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\}$. Тогда $\forall \omega \in \Omega'$ последовательность $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна, причем $\mathsf{P}(\Omega') = 1$. Значит,

$$\mathsf{P}(\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ фундаментальна}) \geqslant \mathsf{P}(\Omega') = 1.$$

Критерий Коши сходимости п.н.

Теорема (критерий Коши сходимости п.н.)

Последовательность с.в. $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится п. н.* $\Longleftrightarrow$ *она фундаментальна с вероятностью* 1.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ Пусть $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$. Обозначим $\Omega' = \{\omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\}$. Тогда $\forall \omega \in \Omega'$ последовательность $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна, причем $\mathsf{P}(\Omega') = 1$. Значит,

$$\mathsf{P}(\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ фундаментальна}) \geqslant \mathsf{P}(\Omega') = 1.$$

$(\Leftarrow)$ Положим $A = \{\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ фундаментальна}\}$. По условию $\mathsf{P}(A) = 1$. Для любого $\omega \in A$ определим $\xi(\omega)$ как предел $\lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega)$. Если же $\omega \notin A$, то положим $\xi(\omega) = 0$.

Критерий Коши сходимости п.н.

Теорема (критерий Коши сходимости п.н.)

Последовательность с.в. $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится п. н.* $\Longleftrightarrow$ *она фундаментальна с вероятностью* 1.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$. Обозначим $\Omega' = \{\omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\}$. Тогда $\forall \omega \in \Omega'$ последовательность $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна, причем $\mathsf{P}(\Omega') = 1$. Значит,

$$\mathsf{P}(\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ фундаментальна}) \geqslant \mathsf{P}(\Omega') = 1.$$

($\Leftarrow$) Положим $A = \{\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ фундаментальна}\}$. По условию $\mathsf{P}(A) = 1$. Для любого $\omega \in A$ определим $\xi(\omega)$ как предел $\lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega)$. Если же $\omega \notin A$, то положим $\xi(\omega) = 0$. Тем самым, для любого $\omega \in \Omega$ выполнено

$$\xi(\omega) = \lim_{n\to\infty} (\xi_n I_A)(\omega).$$

Значит, ξ — с.в. (как предел с.в.), $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, ведь $\mathsf{P}(\xi_n \to \xi) \geqslant \mathsf{P}(A) = 1$. $\square$

Критерий фундаментальности

Лемма (критерий фундаментальности с вероятностью 1)

Последовательность с.в. $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *фундаментальна с вероятностью* $1 \Leftrightarrow$ *для любого* $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left(\sup_{k \geqslant n} |\xi_k - \xi_n| > \varepsilon\right) \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Критерий фундаментальности

Лемма (критерий фундаментальности с вероятностью 1)

Последовательность с.в. $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна с вероятностью $1 \Leftrightarrow$ для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left(\sup_{k \geqslant n} |\xi_k - \xi_n| > \varepsilon\right) \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Доказательство. Обозначим $A^{\varepsilon}_{m,k} = \{\omega : |\xi_m(\omega) - \xi_k(\omega)| > \varepsilon\}$, а $A^{\varepsilon} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k,m \geqslant n} A^{\varepsilon}_{m,k}$. Тогда

$$\{\omega : \{\xi_n(\omega), n \in \mathbb{N}\} \text{ не фундаментальна}\} = \bigcup_{N=1}^{\infty} A^{\frac{1}{N}}.$$

Критерий фундаментальности

Лемма (критерий фундаментальности с вероятностью 1)

Последовательность с.в. $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна с вероятностью $1 \Leftrightarrow$ для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left(\sup_{k \geqslant n} |\xi_k - \xi_n| > \varepsilon\right) \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Доказательство. Обозначим $A^{\varepsilon}_{m,k} = \{\omega : |\xi_m(\omega) - \xi_k(\omega)| > \varepsilon\}$, а $A^{\varepsilon} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k,m \geqslant n} A^{\varepsilon}_{m,k}$. Тогда

$$\{\omega : \{\xi_n(\omega), n \in \mathbb{N}\} \text{ не фундаментальна}\} = \bigcup_{N=1}^{\infty} A^{\frac{1}{N}}.$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}(\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ не фундаментальна}) = 0 \Leftrightarrow \mathsf{P}\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} A^{\frac{1}{N}}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

Критерий фундаментальности

Лемма (критерий фундаментальности с вероятностью 1)

Последовательность с.в. $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна с вероятностью $1 \Leftrightarrow$ для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left(\sup_{k \geqslant n} |\xi_k - \xi_n| > \varepsilon\right) \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Доказательство. Обозначим $A^{\varepsilon}_{m,k} = \{\omega : |\xi_m(\omega) - \xi_k(\omega)| > \varepsilon\}$, а $A^{\varepsilon} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k,m \geqslant n} A^{\varepsilon}_{m,k}$. Тогда

$$\{\omega : \{\xi_n(\omega), n \in \mathbb{N}\} \text{ не фундаментальна}\} = \bigcup_{N=1}^{\infty} A^{\frac{1}{N}}.$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}(\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ не фундаментальна}) = 0 \Leftrightarrow \mathsf{P}\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} A^{\frac{1}{N}}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \forall N \in \mathbb{N} \ \mathsf{P}\left(A^{\frac{1}{N}}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \mathsf{P}(A^{\varepsilon}) = 0 \Leftrightarrow$$

Доказательство критерия фундаментальности

(в силу непрерывности вероятностной меры)

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \mathsf{P}\left(\bigcup_{k,m\geqslant n} A^{\varepsilon}_{m,k}\right) \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Событие $\{\bigcup_{k,m\geqslant n} A^{\varepsilon}_{m,k}\}$ есть в точности $\{\sup\limits_{k,m\geqslant n} |\xi_k - \xi_m| > \varepsilon\}$.

Доказательство критерия фундаментальности

(в силу непрерывности вероятностной меры)

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \mathsf{P}\left(\bigcup_{k,m \geqslant n} A^{\varepsilon}_{m,k}\right) \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Событие $\{\bigcup_{k,m\geqslant n} A^{\varepsilon}_{m,k}\}$ есть в точности $\{\sup\limits_{k,m\geqslant n} |\xi_k - \xi_m| > \varepsilon\}$.

Осталось заметить, что

$$\{\sup_{k,m\geqslant n} |\xi_k - \xi_m| > \varepsilon\} \subset \{\sup_{k\geqslant n} |\xi_k - \xi_n| > \frac{\varepsilon}{2}\}$$

и

$$\{\sup_{k\geqslant n} |\xi_k - \xi_n| > \varepsilon\} \subset \{\sup_{k,m\geqslant n} |\xi_k - \xi_m| > \varepsilon\},$$

что дает искомое утверждение:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \mathsf{P}\left(\sup_{k,m\geqslant n} |\xi_k - \xi_m| > \varepsilon\right) \to 0 \Leftrightarrow \;\forall \varepsilon > 0 \;\; \mathsf{P}\left(\sup_{k\geqslant n} |\xi_k - \xi_n| > \varepsilon\right) \to 0.$$

Неравенство Колмогорова

Теорема (Неравенство Колмогорова)

Пусть $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ *— независимые с.в., причем* $\forall i \;\; \mathsf{E}\,\xi_i = 0$ *и* $\mathsf{E}\,\xi_i^2 < +\infty$. *Обозначим* $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$, $k = 1, \ldots, n$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *выполняется неравенство:*

$$\mathsf{P}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathsf{E}\,S_n^2}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Колмогорова

Теорема (Неравенство Колмогорова)

Пусть $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ *— независимые с.в., причем* $\forall i \;\; \mathsf{E}\,\xi_i = 0$ *и* $\mathsf{E}\,\xi_i^2 < +\infty$. *Обозначим* $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$, $k = 1, \ldots, n$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *выполняется неравенство:*

$$\mathsf{P}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathsf{E}\,S_n^2}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство: Обозначим $A = \{\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant \varepsilon\}$. Для каждого $k = 1, \ldots, n$ положим

$$A_k = \{|S_i| < \varepsilon \text{ для } i = 1, \ldots, k-1, \;\; |S_k| \geqslant \varepsilon\}.$$

Неравенство Колмогорова

Теорема (Неравенство Колмогорова)

Пусть $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ — *независимые с.в., причем* $\forall i \ \ \mathsf{E}\,\xi_i = 0$ *и* $\mathsf{E}\,\xi_i^2 < +\infty$. *Обозначим* $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$, $k = 1, \ldots, n$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *выполняется неравенство:*

$$\mathsf{P}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathsf{E}\,S_n^2}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство: Обозначим $A = \{\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant \varepsilon\}$. Для каждого $k = 1, \ldots, n$ положим

$$A_k = \{|S_i| < \varepsilon \text{ для } i = 1, \ldots, k-1, \ \ |S_k| \geqslant \varepsilon\}.$$

Тогда $A_k \cap A_j = \varnothing$ при $k \neq j$ и $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. Следовательно,

$$\mathsf{E}\,S_n^2 \geqslant \mathsf{E}(S_n^2 I_A) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(S_n^2 I_{A_k}).$$

Доказательство неравенства Колмогорова

Рассмотрим последнее слагаемое:

$$\mathsf{E}(S_n^2 I_{A_k}) = \mathsf{E}(S_k + \xi_{k+1} + \ldots + \xi_n)^2 I_{A_k}$$

$$= \mathsf{E}(S_k^2 I_{A_k}) + 2\,\mathsf{E}[(S_k I_{A_k})(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n)] + \mathsf{E}(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n)^2 I_{A_k}.$$

Доказательство неравенства Колмогорова

Рассмотрим последнее слагаемое:

$$\mathsf{E}(S_n^2 I_{A_k}) = \mathsf{E}(S_k + \xi_{k+1} + \ldots + \xi_n)^2 I_{A_k}$$

$$= \mathsf{E}(S_k^2 I_{A_k}) + 2\,\mathsf{E}[(S_k I_{A_k})(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n)] + \mathsf{E}(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n)^2 I_{A_k}.$$

Заметим, что при $k < n$ событие A_k зависит от $S_1, \ldots, S_k$, т.е. от $\xi_1, \ldots . \xi_k$. Значит, $S_k I_{A_k}$ независимо с $(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n)$. Следовательно,

$$\mathsf{E}(S_k I_{A_k})(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n) = \mathsf{E}\, S_k I_{A_k} \cdot \mathsf{E}(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n) = 0.$$

Доказательство неравенства Колмогорова

Рассмотрим последнее слагаемое:

$$\mathsf{E}(S_n^2 I_{A_k}) = \mathsf{E}(S_k + \xi_{k+1} + \ldots + \xi_n)^2 I_{A_k}$$

$$= \mathsf{E}(S_k^2 I_{A_k}) + 2\,\mathsf{E}[(S_k I_{A_k})(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n)] + \mathsf{E}(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n)^2 I_{A_k}.$$

Заметим, что при $k < n$ событие A_k зависит от $S_1, \ldots, S_k$, т.е. от $\xi_1, \ldots .\xi_k$. Значит, $S_k I_{A_k}$ независимо с $(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n)$. Следовательно,

$$\mathsf{E}(S_k I_{A_k})(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n) = \mathsf{E}\, S_k I_{A_k} \cdot \mathsf{E}(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n) = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$\mathsf{E}(S_k^2 I_{A_k}) \geqslant \mathsf{E}\, S_k^2 I_{A_k} + \mathsf{E}(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n)^2 I_{A_k} \geqslant \mathsf{E}\, S_k^2 I_{A_k}$$

$$\geqslant \big|\text{т.к. } |S_k| \geqslant \varepsilon \text{ на } A_k\big| \geqslant \varepsilon^2 \mathsf{P}(A_k).$$

Доказательство неравенства Колмогорова

Рассмотрим последнее слагаемое:

$$\mathsf{E}(S_n^2 I_{A_k}) = \mathsf{E}(S_k + \xi_{k+1} + \ldots + \xi_n)^2 I_{A_k}$$

$$= \mathsf{E}(S_k^2 I_{A_k}) + 2\,\mathsf{E}[(S_k I_{A_k})(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n)] + \mathsf{E}(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n)^2 I_{A_k}.$$

Заметим, что при $k < n$ событие A_k зависит от $S_1, \ldots, S_k$, т.е. от $\xi_1, \ldots . \xi_k$. Значит, $S_k I_{A_k}$ независимо с $(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n)$. Следовательно,

$$\mathsf{E}(S_k I_{A_k})(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n) = \mathsf{E}\, S_k I_{A_k} \cdot \mathsf{E}(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n) = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$\mathsf{E}(S_k^2 I_{A_k}) \geqslant \mathsf{E}\, S_k^2 I_{A_k} + \mathsf{E}(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n)^2 I_{A_k} \geqslant \mathsf{E}\, S_k^2 I_{A_k}$$

$$\geqslant \big|\text{т.к. } |S_k| \geqslant \varepsilon \text{ на } A_k\big| \geqslant \varepsilon^2 \mathsf{P}(A_k).$$

В итоге,

$$\mathsf{E}\, S_n^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^2 \mathsf{P}(A_k) = \varepsilon^2 \mathsf{P}(A).$$

Теорема Колмогорова– Хинчина

Теорема (Колмогоров–Хинчин, достаточное условие сходимости ряда п.н.)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— независимые с.в., причем* $\forall i \;\; \mathsf{E}\,\xi_i = 0$. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}\,\xi_n^2 < +\infty$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n$ *сходится с вероятностью* 1.

Теорема Колмогорова– Хинчина

Теорема (Колмогоров–Хинчин, достаточное условие сходимости ряда п.н.)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— независимые с.в., причем* $\forall i \ \ \mathsf{E}\,\xi_i = 0$. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}\,\xi_n^2 < +\infty$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n$ *сходится с вероятностью* 1.

Доказательство: Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится с вероятностью 1
$\Leftrightarrow$ (по критерию Коши) последовательность $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна с вероятностью 1
$\Leftrightarrow$ (критерий фундаментальности с вероятностью 1) для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left(\sup_{k \geqslant n} |S_k - S_n| > \varepsilon\right) \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Теорема Колмогорова– Хинчина

Теорема (Колмогоров–Хинчин, достаточное условие сходимости ряда п.н.)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— независимые с.в., причем* $\forall i \;\; \mathsf{E}\,\xi_i = 0$. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}\,\xi_n^2 < +\infty$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n$ *сходится с вероятностью* 1.

Доказательство: Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится с вероятностью 1
$\Leftrightarrow$ (по критерию Коши) последовательность $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна с вероятностью 1
$\Leftrightarrow$ (критерий фундаментальности с вероятностью 1) для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left(\sup_{k \geqslant n} |S_k - S_n| > \varepsilon\right) \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Далее,

$$\left\{\sup_{k \geqslant n} |S_k - S_n| > \varepsilon\right\} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \left\{\max_{n \leqslant k \leqslant n+N} |S_k - S_n| > \varepsilon\right\}.$$

Доказательство теоремы Колмогорова-Хинчина

Но в силу непрерывности вероятностной меры

$$\mathsf{P}\left(\sup_{k\geqslant n}|S_k - S_n| > \varepsilon\right) = \lim_{N\to\infty}\mathsf{P}\left(\max_{0\leqslant k\leqslant N}|S_{k+n} - S_n| > \varepsilon\right)$$

Доказательство теоремы Колмогорова-Хинчина

Но в силу непрерывности вероятностной меры

$$\mathsf{P}\left(\sup_{k\geqslant n}|S_k - S_n| > \varepsilon\right) = \lim_{N\to\infty}\mathsf{P}\left(\max_{0\leqslant k\leqslant N}|S_{k+n} - S_n| > \varepsilon\right)$$

$$\leqslant |\text{нер-во Колмогорова}| \leqslant \lim_{N\to\infty}\frac{\mathsf{E}(S_{n+N} - S_n)^2}{\varepsilon^2} = \lim_{N\to\infty}\frac{\mathsf{D}(S_{n+N} - S_n)}{\varepsilon^2} =$$

Доказательство теоремы Колмогорова-Хинчина

Но в силу непрерывности вероятностной меры

$$\mathsf{P}\left(\sup_{k\geqslant n}|S_k - S_n| > \varepsilon\right) = \lim_{N\to\infty} \mathsf{P}\left(\max_{0\leqslant k\leqslant N}|S_{k+n} - S_n| > \varepsilon\right)$$

$$\leqslant \left|\text{нер-во Колмогорова}\right| \leqslant \lim_{N\to\infty}\frac{\mathsf{E}(S_{n+N}-S_n)^2}{\varepsilon^2} = \lim_{N\to\infty}\frac{\mathsf{D}(S_{n+N}-S_n)}{\varepsilon^2} =$$

$$= \left|\text{независимость } \xi_{n+1},\ldots,\xi_{n+N}\right| = \lim_{N\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=n+1}^{n+N}\mathsf{E}\,\xi_k^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathsf{E}\,\xi_k^2 \to 0.$$

как остаток сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{+\infty}\mathsf{E}\,\xi_k^2$.

Доказательство теоремы Колмогорова-Хинчина

Но в силу непрерывности вероятностной меры

$$\mathsf{P}\left(\sup_{k\geqslant n}|S_k - S_n| > \varepsilon\right) = \lim_{N\to\infty}\mathsf{P}\left(\max_{0\leqslant k\leqslant N}|S_{k+n} - S_n| > \varepsilon\right)$$

$$\leqslant \left|\text{нер-во Колмогорова}\right| \leqslant \lim_{N\to\infty}\frac{\mathsf{E}(S_{n+N} - S_n)^2}{\varepsilon^2} = \lim_{N\to\infty}\frac{\mathsf{D}(S_{n+N} - S_n)}{\varepsilon^2} =$$

$$= \left|\text{независимость } \xi_{n+1},\ldots,\xi_{n+N}\right| = \lim_{N\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=n+1}^{n+N}\mathsf{E}\,\xi_k^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathsf{E}\,\xi_k^2 \to 0.$$

как остаток сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{+\infty}\mathsf{E}\,\xi_k^2$.

По критерию получаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\xi_n$ сходится п.н.

$\square$

Лемма Тёплица

Для доказательства УЗБЧ нам еще понадобятся две леммы из анализа.

Лемма Тёплица

Для доказательства УЗБЧ нам еще понадобятся две леммы из анализа.

Лемма (Тёплиц)

Пусть $a_n \geqslant 0,\ \ b_n = \sum_{j=1}^{n} a_j,\ \ b_n \uparrow +\infty$. *Пусть* $x_k \to x$ *при* $k \to +\infty$. *Тогда*

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \to x \text{ при } n \to +\infty.$$

Лемма Тёплица

Для доказательства УЗБЧ нам еще понадобятся две леммы из анализа.

Лемма (Тёплиц)

Пусть $a_n \geqslant 0, \ \ b_n = \sum_{j=1}^{n} a_j, \ \ b_n \uparrow +\infty$. *Пусть* $x_k \to x$ *при* $k \to +\infty$. *Тогда*

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \to x \text{ при } n \to +\infty.$$

Доказательство: Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем $n_0 = n_0(\varepsilon) : |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > n_0$. Выберем $n_1 > n_0$ с условием $\frac{1}{b_{n_1}} \sum_{j=1}^{n_0} a_j |x_j - x| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Лемма Тёплица

Для доказательства УЗБЧ нам еще понадобятся две леммы из анализа.

Лемма (Тёплиц)

Пусть $a_n \geqslant 0,\ \ b_n = \sum_{j=1}^{n} a_j,\ \ b_n \uparrow +\infty$. *Пусть* $x_k \to x$ *при* $k \to +\infty$. *Тогда*

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \to x \text{ при } n \to +\infty.$$

Доказательство: Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем $n_0 = n_0(\varepsilon) : |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > n_0$. Выберем $n_1 > n_0$ с условием $\frac{1}{b_{n_1}} \sum_{j=1}^{n_0} a_j |x_j - x| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда $\forall n > n_1$

$$\left| \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j - x \right| \leqslant \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} a_j |x_j - x| = \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n_0} a_j |x_j - x| + \frac{1}{b_n} \sum_{j=n_0+1}^{n} a_j |x_j - x|$$

$$\leqslant \frac{1}{b_{n_1}} \sum_{j=1}^{n_0} a_j |x_j - x| + \frac{1}{b_n} \sum_{j=n_0+1}^{n} a_j |x_j - x| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и означает, что $\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \to x$ при $n \to +\infty$. $\square$

Лемма Кронекера

Лемма (Кронекер)

Пусть $b_n > 0$, $b_n \uparrow +\infty$ *и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится. Тогда*

$$\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} x_j b_j \to 0 \quad \textit{при } n \to +\infty.$$

Лемма (Кронекер)

Пусть $b_n > 0$, $b_n \uparrow +\infty$ *и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится. Тогда*

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} x_j b_j \to 0 \quad \textit{при } n \to +\infty.$$

Доказательство: Пусть $b_0 = 0, S_0 = 0$. Обозначим $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} b_j x_j = \sum_{j=1}^{n} b_j (S_j - S_{j-1}) = b_n S_n - b_0 S_0 - \sum_{j=1}^{n} S_{j-1}(b_j - b_{j-1}).$$

Лемма Кронекера

Лемма (Кронекер)

Пусть $b_n > 0,\ \ b_n \uparrow +\infty$ *и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится. Тогда*

$$\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} x_j b_j \to 0 \quad \text{при } n \to +\infty.$$

Доказательство: Пусть $b_0 = 0, S_0 = 0$. Обозначим $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} b_j x_j = \sum_{j=1}^{n} b_j (S_j - S_{j-1}) = b_n S_n - b_0 S_0 - \sum_{j=1}^{n} S_{j-1}(b_j - b_{j-1}).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} x_j b_j = S_n - \frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} S_{j-1} a_j,$$

где $a_j = b_j - b_{j-1} \geqslant 0$. По лемме Тёплица правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$.

Лемма Бореля–Кантелли

Определение

Пусть $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность событий. Событием* $\{A_n$ *б.ч.*$\}$ *называется событие, состоящее в том, что произошло бесконечное число событий из* $\{A_n\}$*. Формально,*

$$\{A_n \text{ б.ч.}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k \geqslant n} A_k \right).$$

Лемма Бореля–Кантелли

Определение

Пусть $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность событий. Событием* $\{A_n \text{ б.ч.}\}$ *называется событие, состоящее в том, что произошло бесконечное число событий из* $\{A_n\}$*. Формально,*

$$\{A_n \text{ б.ч.}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k \geqslant n} A_k \right).$$

Лемма (Борель–Кантелли)

1. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) < \infty$, *то* $\mathsf{P}(\{A_n \text{ б.ч.}\}) = 0.$
2. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) = \infty$ *и события* $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ *независимы, то* $\mathsf{P}(\{A_n \text{ б.ч.}\}) = 1.$

Доказательство леммы Бореля-Кантелли

1) $\{A_n \text{ б.ч.}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k \geqslant n} A_k \right)$, поэтому из непрерывности вероятностной меры следует, что

$$\mathsf{P}(\{A_n \text{ б.ч.}\}) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcup_{k \geqslant n} A_k \right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathsf{P}(A_k) = 0,$$

т.к. $\sum_{k=n}^{\infty} \mathsf{P}(A_k) \to 0$ как остаток сходящегося ряда. $\square$

Доказательство леммы Бореля-Кантелли

1) $\{A_n \text{ б.ч.}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k \geqslant n} A_k\right)$, поэтому из непрерывности вероятностной меры следует, что

$$\mathsf{P}(\{A_n \text{ б.ч.}\}) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathsf{P}(A_k) = 0,$$

т.к. $\sum_{k=n}^{\infty} \mathsf{P}(A_k) \to 0$ как остаток сходящегося ряда. $\square$

2) $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ независимы $\Leftrightarrow$ $\{\overline{A}_n, n \in \mathbb{N}\}$ независимы. Следовательно,

$$\forall N \geqslant n \ \ \mathsf{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A}_k\right) = \prod_{k=n}^{N} \mathsf{P}(\overline{A}_k).$$

Доказательство леммы Бореля-Кантелли

Тогда

$$\mathsf{P}(\{A_n \text{ б.ч.}\}) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Omega \backslash \bigcap_{k\geqslant n} \overline{A}_k\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A}_k\right)$$

Доказательство леммы Бореля-Кантелли

Тогда

$$\mathsf{P}(\{A_n \text{ б.ч.}\}) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Omega \setminus \bigcap_{k\geqslant n} \overline{A}_k\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A}_k\right)$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A}_k\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} \mathsf{P}(\overline{A}_k) =$$

Доказательство леммы Бореля-Кантелли

Тогда

$$\mathsf{P}(\{A_n \text{ б.ч.}\}) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Omega \setminus \bigcap_{k\geqslant n} \overline{A}_k\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A}_k\right)$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A}_k\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} \mathsf{P}(\overline{A}_k) =$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} (1 - \mathsf{P}(A_k)) \geqslant$$

Доказательство леммы Бореля-Кантелли

Тогда

$$\mathsf{P}(\{A_n \text{ б.ч.}\}) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Omega \setminus \bigcap_{k\geqslant n} \overline{A}_k\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A}_k\right)$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A}_k\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} \mathsf{P}(\overline{A}_k) =$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} (1 - \mathsf{P}(A_k)) \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} e^{-\mathsf{P}(A_k)} = 1 - \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} e^{-\sum\limits_{k=n}^{N} \mathsf{P}(A_k)} = 1,$$

т.к. $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \lim\limits_{N} e^{-\sum\limits_{k=n}^{N} \mathsf{P}(A_k)} = e^{-\sum\limits_{k=n}^{\infty} \mathsf{P}(A_k)} = e^{-\infty} = 0.$ $\square$

Вспомогательное утверждение

Утверждение

Если ξ — неотрицательная с.в., то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\xi \geqslant n) \leqslant \mathsf{E}\,\xi \left(\leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\xi \geqslant n) \right).$$

Вспомогательное утверждение

Утверждение

Если ξ — неотрицательная с.в., то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\xi \geqslant n) \leqslant \mathsf{E}\,\xi \left(\leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\xi \geqslant n) \right).$$

Доказательство.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\xi \geqslant n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathsf{P}(k \leqslant \xi < k+1) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathsf{P}(k \leqslant \xi < k+1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathsf{P}(k \leqslant \xi < k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{E}(k \cdot I\{k \leqslant \xi < k+1\}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{E}(\xi \cdot I\{k \leqslant \xi < k+1\}) = \left|\text{монотонная сходимость}\right| = \mathsf{E}\,\xi.$$

$\square$

Усиленный закон больших чисел II

Определение

Случайные величины $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *называются одинаково распределенными, если все с.в.* ξ_α *имеют одинаковую функцию распределения.*

Обозначение: $\xi \stackrel{\mathsf{d}}{=} \eta$ (ξ и η одинаково распределены)

Усиленный закон больших чисел II

Определение

Случайные величины $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{N}\}$ *называются одинаково распределенными, если все с.в.* ξ_α *имеют одинаковую функцию распределения.*

Обозначение: $\xi \stackrel{\mathsf{d}}{=} \eta$ (ξ и η одинаково распределены)

Теорема (уже доказали)

Если $\xi \stackrel{d}{=} \eta$, *то* $\mathsf{E}\, g(\xi) = \mathsf{E}\, g(\eta)$ *для любой борелевской функции* $g(x)$.

Усиленный закон больших чисел II

Определение

Случайные величины $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{N}\}$ *называются одинаково распределенными, если все с.в.* ξ_α *имеют одинаковую функцию распределения.*

Обозначение: $\xi \overset{\mathsf{d}}{=} \eta$ (ξ и η одинаково распределены)

Теорема (уже доказали)

Если $\xi \overset{d}{=} \eta$, *то* $\mathsf{E}\, g(\xi) = \mathsf{E}\, g(\eta)$ *для любой борелевской функции* $g(x)$.

Теорема (усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *– последовательность независимых одинаково распределенных случайных величины (н.о.р.с.в.), причем* $\mathsf{E}\,|\xi_1| < \infty$. *Тогда*

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} a = \mathsf{E}\,\xi_1 \quad \text{при } n \to +\infty.$$

Доказательство УЗБЧ в форме Колмогорова

Без ограничения общности, считаем, что $a = \mathsf{E}\,\xi_1 = 0$. Имеем $\mathsf{E}\,|\xi_1| < \infty$. Из одинаковой распределенности получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|\xi_1| \geqslant n) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|\xi_n| \geqslant n) < \infty.$$

Доказательство УЗБЧ в форме Колмогорова

Без ограничения общности, считаем, что $a = \mathsf{E}\,\xi_1 = 0$. Имеем $\mathsf{E}\,|\xi_1| < \infty$. Из одинаковой распределенности получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|\xi_1| \geqslant n) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|\xi_n| \geqslant n) < \infty.$$

По лемме Бореля-Кантелли

$$\mathsf{P}(\{|\xi_n| \geqslant n\} \text{ б.ч.}) = 0.$$

Следовательно, с вероятностью 1 для всех n, кроме лишь конечного числа, выполнено $\{|\xi_n| < n\}$. Обозначим это событие через Ω'.

Доказательство УЗБЧ в форме Колмогорова

Без ограничения общности, считаем, что $a = \mathsf{E}\,\xi_1 = 0$. Имеем $\mathsf{E}\,|\xi_1| < \infty$. Из одинаковой распределенности получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|\xi_1| \geqslant n) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|\xi_n| \geqslant n) < \infty.$$

По лемме Бореля-Кантелли

$$\mathsf{P}(\{|\xi_n| \geqslant n\} \text{ б.ч.}) = 0.$$

Следовательно, с вероятностью 1 для всех n, кроме лишь конечного числа, выполнено $\{|\xi_n| < n\}$. Обозначим это событие через Ω'.

Обозначим $\tilde{\xi}_n = \xi_n I\{|\xi_n| < n\}$.

Доказательство УЗБЧ в форме Колмогорова

Без ограничения общности, считаем, что $a = \mathsf{E}\,\xi_1 = 0$. Имеем $\mathsf{E}\,|\xi_1| < \infty$. Из одинаковой распределенности получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|\xi_1| \geqslant n) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|\xi_n| \geqslant n) < \infty.$$

По лемме Бореля-Кантелли

$$\mathsf{P}(\{|\xi_n| \geqslant n\} \text{ б.ч.}) = 0.$$

Следовательно, с вероятностью 1 для всех n, кроме лишь конечного числа, выполнено $\{|\xi_n| < n\}$. Обозначим это событие через Ω'.

Обозначим $\tilde{\xi}_n = \xi_n I\{|\xi_n| < n\}$. Заметим, что для любого фиксированного $\omega \in \Omega'$ выполнено $\tilde{\xi}_n(\omega) = \xi_n(\omega)\ \forall n$, кроме лишь конечного числа значений, тогда для любого $\omega \in \Omega'$

$$\frac{\xi_1(\omega) + \ldots + \xi_n(\omega)}{n} \to 0 \Leftrightarrow \frac{\tilde{\xi}_1(\omega) + \ldots + \tilde{\xi}_n(\omega)}{n} \to 0.$$

Доказательство УЗБЧ в форме Колмогорова

Что можно сказать про $\mathsf{E}\,\tilde{\xi}_n$?

Доказательство УЗБЧ в форме Колмогорова

Что можно сказать про $\mathsf{E}\,\tilde{\xi}_n$?

$$\mathsf{E}\,\tilde{\xi}_n = \mathsf{E}(\xi_n I\{|\xi_n| < n\}) = |\text{одинак. распред.}| =$$

$$= \mathsf{E}(\xi_1 I\{|\xi_1| < n\}) \to \mathsf{E}\,\xi_1 = 0 \text{ при } n \to \infty \quad \text{(по теореме Лебега).}$$

Доказательство УЗБЧ в форме Колмогорова

Что можно сказать про $\mathsf{E}\,\tilde{\xi}_n$?

$$\mathsf{E}\,\tilde{\xi}_n = \mathsf{E}(\xi_n I\{|\xi_n| < n\}) = |\text{одинак. распред.}| =$$

$$= \mathsf{E}(\xi_1 I\{|\xi_1| < n\}) \to \mathsf{E}\,\xi_1 = 0 \text{ при } n \to \infty \quad (\text{по теореме Лебега}).$$

Отсюда по лемме Тёплица

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\,\tilde{\xi}_k \to 0,$$

поэтому

$$\frac{\tilde{\xi}_1 + \ldots + \tilde{\xi}_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0 \Leftrightarrow \frac{(\tilde{\xi}_1 - \mathsf{E}\,\tilde{\xi}_1) + \ldots + (\tilde{\xi}_n - \mathsf{E}\,\tilde{\xi}_n)}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

Доказательство УЗБЧ в форме Колмогорова

Что можно сказать про $\mathsf{E}\,\tilde{\xi}_n$?

$$\mathsf{E}\,\tilde{\xi}_n = \mathsf{E}(\xi_n I\{|\xi_n| < n\}) = |\text{одинак. распред.}| =$$

$$= \mathsf{E}(\xi_1 I\{|\xi_1| < n\}) \to \mathsf{E}\,\xi_1 = 0 \text{ при } n \to \infty \quad (\text{по теореме Лебега}).$$

Отсюда по лемме Тёплица

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\,\tilde{\xi}_k \to 0,$$

поэтому

$$\frac{\tilde{\xi}_1 + \ldots + \tilde{\xi}_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0 \Leftrightarrow \frac{(\tilde{\xi}_1 - \mathsf{E}\,\tilde{\xi}_1) + \ldots + (\tilde{\xi}_n - \mathsf{E}\,\tilde{\xi}_n)}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

Введем обозначение $\overline{\xi}_n = \tilde{\xi}_n - \mathsf{E}\,\tilde{\xi}_n$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\xi}_n}{n}$ сходится п.н, то, применяя лемму Кронекера $(b_n = n, x_n = \frac{\overline{\xi}_n}{n})$, мы получим, что

$$\frac{\overline{\xi}_1 + \ldots + \overline{\xi}_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

Доказательство УЗБЧ в форме Колмогорова

Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(\bar{\xi}_n/n)$ п.н. достаточно проверить (по теореме Колмогорова–Хинчина), что сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}\,\bar{\xi}_n^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{D}\,\tilde{\xi}_n}{n^2} < \infty.$$

Доказательство УЗБЧ в форме Колмогорова

Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(\overline{\xi}_n/n)$ п.н. достаточно проверить (по теореме Колмогорова–Хинчина), что сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}\,\overline{\xi}_n^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{D}\,\tilde{\xi}_n}{n^2} < \infty.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}\,\overline{\xi}_n^2}{n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}\,\tilde{\xi}_n^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,\mathsf{E}\left(\xi_n^2 I\{|\xi_n| < n\}\right) = |\text{одинак. распред.}|$$

Доказательство УЗБЧ в форме Колмогорова

Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(\bar{\xi}_n/n)$ п.н. достаточно проверить (по теореме Колмогорова–Хинчина), что сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}\,\overline{\xi}_n^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{D}\,\tilde{\xi}_n}{n^2} < \infty.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}\,\overline{\xi}_n^2}{n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}\,\tilde{\xi}_n^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,\mathsf{E}\left(\xi_n^2 I\{|\xi_n| < n\}\right) = |\text{одинак. распред.}|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,\mathsf{E}\left(\xi_1^2 I\{|\xi_1| < n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\left(\xi_1^2 I\{k-1 \leqslant |\xi_1| < k\}\right) =$$

Доказательство УЗБЧ в форме Колмогорова

Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(\overline{\xi}_n/n)$ п.н. достаточно проверить (по теореме Колмогорова–Хинчина), что сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}\,\overline{\xi}_n^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{D}\,\tilde{\xi}_n}{n^2} < \infty.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}\,\overline{\xi}_n^2}{n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}\,\tilde{\xi}_n^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,\mathsf{E}\left(\xi_n^2 I\{|\xi_n| < n\}\right) = |\text{одинак. распред.}|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,\mathsf{E}\left(\xi_1^2 I\{|\xi_1| < n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\left(\xi_1^2 I\{k-1 \leqslant |\xi_1| < k\}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\left(\xi_1^2 I\{k-1 \leqslant |\xi_1| < k\}\right) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant \left|\text{т.к. } \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{2}{k}\right| \leqslant$$

Доказательство УЗБЧ в форме Колмогорова

Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(\overline{\xi}_n/n)$ п.н. достаточно проверить (по теореме Колмогорова–Хинчина), что сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathsf{E}\,\overline{\xi}_n^2}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathsf{D}\,\tilde{\xi}_n}{n^2}<\infty.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathsf{E}\,\overline{\xi}_n^2}{n^2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathsf{E}\,\tilde{\xi}_n^2}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,\mathsf{E}\left(\xi_n^2 I\{|\xi_n|<n\}\right)=|\text{одинак. распред.}|$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,\mathsf{E}\left(\xi_1^2 I\{|\xi_1|<n\}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}\left(\xi_1^2 I\{k-1\leqslant|\xi_1|<k\}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{E}\left(\xi_1^2 I\{k-1\leqslant|\xi_1|<k\}\right)\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2}\leqslant\left|\text{т.к. }\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{2}{k}\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\mathsf{E}\left(\xi_1^2 I\{k-1\leqslant|\xi_1|<k\}\right)\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{E}\left(|\xi_1| I\{k-1\leqslant|\xi_1|<k\}\right)=$$

Доказательство УЗБЧ в форме Колмогорова

Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(\overline{\xi}_n/n)$ п.н. достаточно проверить (по теореме Колмогорова–Хинчина), что сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathsf{E}\,\overline{\xi}_n^2}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathsf{D}\,\tilde{\xi}_n}{n^2}<\infty.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathsf{E}\,\overline{\xi}_n^2}{n^2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathsf{E}\,\tilde{\xi}_n^2}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,\mathsf{E}\left(\xi_n^2 I\{|\xi_n|<n\}\right)=|\text{одинак. распред.}|$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,\mathsf{E}\left(\xi_1^2 I\{|\xi_1|<n\}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}\left(\xi_1^2 I\{k-1\leqslant|\xi_1|<k\}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{E}\left(\xi_1^2 I\{k-1\leqslant|\xi_1|<k\}\right)\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2}\leqslant\left|\text{т.к. }\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{2}{k}\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\mathsf{E}\left(\xi_1^2 I\{k-1\leqslant|\xi_1|<k\}\right)\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{E}\left(|\xi_1| I\{k-1\leqslant|\xi_1|<k\}\right)=$$

$$=\left|\text{ монотонная сходимость }\right|=2\,\mathsf{E}\,|\xi_1|<\infty.\qquad\square$$

Слабая сходимость функций распределения

Определение

Пусть $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность ф.р. на* $\mathbb{R}$. *Она называется слабо сходящейся к функции* $F(x)$, *если для любой ограниченной непрерывной функции* $f(x)$ *выполнено*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dF_n(x) \to \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dF(x), \ \ n \to \infty.$$

Обозначение: $F_n \xrightarrow{\mathsf{w}} F$.

Слабая сходимость функций распределения

Определение

Пусть $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность ф.р. на* $\mathbb{R}$. *Она называется слабо сходящейся к функции* $F(x)$, *если для любой ограниченной непрерывной функции* $f(x)$ *выполнено*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dF_n(x) \to \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dF(x), \;\; n \to \infty.$$

Обозначение: $F_n \xrightarrow{\text{w}} F$.
Наблюдение: если $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность с.в., то

$$\xi_n \xrightarrow{\text{d}} \xi \Leftrightarrow F_{\xi_n} \xrightarrow{\text{w}} F_{\xi}.$$

Слабая сходимость функций распределения

Определение

Пусть $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность ф.р. на* $\mathbb{R}$. *Она называется слабо сходящейся к функции* $F(x)$, *если для любой ограниченной непрерывной функции* $f(x)$ *выполнено*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x) dF_n(x) \to \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) dF(x), \ \ n \to \infty.$$

Обозначение: $F_n \xrightarrow{\text{w}} F$.

Наблюдение: если $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность с.в., то

$$\xi_n \xrightarrow{\text{d}} \xi \Leftrightarrow F_{\xi_n} \xrightarrow{\text{w}} F_\xi.$$

Доказательство. Следует из формулы замены переменных:

$$\mathsf{E} f(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) dF_\xi(x).$$

Слабая сходимость вероятностных мер

Определение

Последовательность ф.р $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ *на* $\mathbb{R}$ *называется сходящейся в основном к ф.р.* $F(x)$*, если* $F_n \to F(x)$ *для всех* $x \in \mathbb{C}(F)$*, где* $\mathbb{C}(F)$ *— множество точек непрерывности ф.р.* $F(x)$.

Обозначение: $F_n \Rightarrow F$.

Слабая сходимость вероятностных мер

Определение

Последовательность ф.р $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ на $\mathbb{R}$ называется сходящейся в основном к ф.р. $F(x)$, если $F_n \to F(x)$ для всех $x \in \mathbb{C}(F)$, где $\mathbb{C}(F)$ — множество точек непрерывности ф.р. $F(x)$.

Обозначение: $F_n \Rightarrow F$.

Пусть $\{\mathsf{P}_n, n \in \mathbb{N}\}$ — вероятностные меры на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$.

Определение

Последовательность $\{\mathsf{P}_n, n \in \mathbb{N}\}$ называется слабо сходящейся к вероятностной мере P на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$, если для любой $f(x)$, непрерывной ограниченной функции на $\mathbb{R}^m$, выполнено

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\mathsf{P}_n(dx) \to \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\mathsf{P}(dx), \;\; n \to \infty.$$

Обозначение: $\mathsf{P}_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \mathsf{P}$.

Сходимость в основном вероятностных мер

Следствие

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \xi$ — *с.в. Тогда* $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow F_{\xi_n} \xrightarrow{w} F_\xi \Leftrightarrow \mathsf{P}_{\xi_n} \xrightarrow{w} \mathsf{P}_\xi$.

Следствие

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \xi$ *— с.в. Тогда* $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow F_{\xi_n} \xrightarrow{w} F_\xi \Leftrightarrow \mathsf{P}_{\xi_n} \xrightarrow{w} \mathsf{P}_\xi$.

Определение

Последовательность вероятностных мер $\{\mathsf{P}_n, n \in \mathbb{N}\}$ *на* $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ *называется сходящейся в основном к мере* P, *если*

$$\mathsf{P}_n(A) \to \mathsf{P}(A)$$

для любого $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ *т.,ч.* $\mathsf{P}(\partial A) = 0$, *где через* ∂A *обозначена граница множества* A, *т.е.*

$$\partial A = [A] \cap [\overline{A}],$$

$[A]$ *— это замыкание множества* $[A]$.

Обозначение: $\mathsf{P}_n \Rightarrow \mathsf{P}$.

Теорема Александрова

Теорема (Александров)

Для вероятностных мер $\{\mathsf{P}_n, n \in \mathbb{N}\}, \mathsf{P}$ *на* $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ *следующие свойства эквивалентны:*

1. $\mathsf{P}_n \xrightarrow{w} \mathsf{P}$,
2. $\overline{\lim\limits_n} \mathsf{P}_n(F) \leqslant \mathsf{P}(F)$ *для любого замкнутого* F,
3. $\underline{\lim\limits_n} \mathsf{P}_n(G) \geqslant \mathsf{P}(G)$ *для любого открытого* G,
4. $\mathsf{P}_n \Rightarrow \mathsf{P}$.

Теорема Александрова

Теорема (Александров)

Для вероятностных мер $\{\mathsf{P}_n, n \in \mathbb{N}\}, \mathsf{P}$ *на* $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ *следующие свойства эквивалентны:*

1. $\mathsf{P}_n \xrightarrow{w} \mathsf{P}$,
2. $\overline{\lim\limits_n} \mathsf{P}_n(F) \leqslant \mathsf{P}(F)$ *для любого замкнутого* F,
3. $\underline{\lim\limits_n} \mathsf{P}_n(G) \geqslant \mathsf{P}(G)$ *для любого открытого* G,
4. $\mathsf{P}_n \Rightarrow \mathsf{P}$.

Теорема (эквивалентность определений сходимостей)

Для вероятностных мер $\{\mathsf{P}_n, n \in \mathbb{N}\}, \mathsf{P}$ *на* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *и для соответствующих им ф.р.* $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}, F(x)$ *следующие свойства эквивалентны:*

1. $\mathsf{P}_n \xrightarrow{w} \mathsf{P}$,
2. $\mathsf{P}_n \Rightarrow \mathsf{P}$,
3. $F_n \xrightarrow{w} F$,
4. $F_n \Rightarrow F$.

Доказательство эквивалентности сходимостей

По теореме Александрова (1) $\Leftrightarrow$ (2).

Доказательство эквивалентности сходимостей

По теореме Александрова (1) $\Leftrightarrow$ (2).

По следствию 1 мы знаем, что (1) $\Leftrightarrow$ (3), поэтому достаточно установить, что (2) $\Leftrightarrow$ (4).

Доказательство эквивалентности сходимостей

По теореме Александрова (1) $\Leftrightarrow$ (2).

По следствию 1 мы знаем, что (1) $\Leftrightarrow$ (3), поэтому достаточно установить, что (2) $\Leftrightarrow$ (4).

($\Rightarrow$) Пусть выполнено (2). Если $\mathsf{P}_n \Rightarrow \mathsf{P}$, то $\forall x \in \mathbb{R}$ т.,ч. $\mathsf{P}(\{x\}) = 0$, выполнено

$$\mathsf{P}_n((-\infty, x]) \to \mathsf{P}((-\infty, x]).$$

Но это в точности означает, что $F_n(x) \longrightarrow F(x)$ для подобных x. Осталось заметить, что $\mathsf{P}(\{x_0\}) = 0 \Leftrightarrow F(x)$ не имеет скачка в т. $x_0 \Leftrightarrow \ F(x)$ непрерывна в т. x_0.

Доказательство эквивалентности сходимостей

По теореме Александрова (1) $\Leftrightarrow$ (2).

По следствию 1 мы знаем, что (1) $\Leftrightarrow$ (3), поэтому достаточно установить, что (2) $\Leftrightarrow$ (4).

($\Rightarrow$) Пусть выполнено (2). Если $\mathsf{P}_n \Rightarrow \mathsf{P}$, то $\forall x \in \mathbb{R}$ т.,ч. $\mathsf{P}(\{x\}) = 0$, выполнено

$$\mathsf{P}_n((-\infty, x]) \to \mathsf{P}((-\infty, x]).$$

Но это в точности означает, что $F_n(x) \longrightarrow F(x)$ для подобных x. Осталось заметить, что $\mathsf{P}(\{x_0\}) = 0 \Leftrightarrow F(x)$ не имеет скачка в т. $x_0 \Leftrightarrow \; F(x)$ непрерывна в т. x_0.

($\Leftarrow$) Покажем, что $\varliminf\limits_n \mathsf{P}_n(A) \geqslant \mathsf{P}(A)$ для любого открытого A. По теореме Александрова этого будет достаточно для доказательства (2).
Если $A \subset \mathbb{R}$ — открыто, то имеет место представление: $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k$, где $I_k = (a_k, b_k)$ — интервалы.

Доказательство эквивалентности сходимостей

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем в интервале $I_k = (a_k, b_k)$ полуинтервал $I'_k = (a'_k, b'_k]$ так, чтобы a'_k и b'_k были точками непрерывности $F(x)$ и при этом

$$\mathsf{P}((a_k, b_k)) \leqslant \mathsf{P}(I'_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Доказательство эквивалентности сходимостей

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем в интервале $I_k = (a_k, b_k)$ полуинтервал $I'_k = (a'_k, b'_k]$ так, чтобы a'_k и b'_k были точками непрерывности $F(x)$ и при этом

$$\mathsf{P}((a_k, b_k)) \leqslant \mathsf{P}(I'_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Такой выбор возможен (даже если $a_k = -\infty$ или $b_k = +\infty$) в силу непрерывности вероятностной меры и того факта, что $F(x)$ имеет не более чем счетное число точек разрыва.

Доказательство эквивалентности сходимостей

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем в интервале $I_k = (a_k, b_k)$ полуинтервал $I'_k = (a'_k, b'_k]$ так, чтобы a'_k и b'_k были точками непрерывности $F(x)$ и при этом

$$\mathsf{P}((a_k, b_k)) \leqslant \mathsf{P}(I'_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Такой выбор возможен (даже если $a_k = -\infty$ или $b_k = +\infty$) в силу непрерывности вероятностной меры и того факта, что $F(x)$ имеет не более чем счетное число точек разрыва.
Таким образом, для любого $N \in \mathbb{N}$

$$\underline{\lim}_n \mathsf{P}_n(A) = \underline{\lim}_n \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}_n(I_k) \geqslant \underline{\lim}_n \sum_{k=1}^{N} \mathsf{P}_n(I_k) \geqslant$$

Доказательство эквивалентности сходимостей

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем в интервале $I_k = (a_k, b_k)$ полуинтервал $I'_k = (a'_k, b'_k]$ так, чтобы a'_k и b'_k были точками непрерывности $F(x)$ и при этом

$$\mathsf{P}((a_k, b_k)) \leqslant \mathsf{P}(I'_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Такой выбор возможен (даже если $a_k = -\infty$ или $b_k = +\infty$) в силу непрерывности вероятностной меры и того факта, что $F(x)$ имеет не более чем счетное число точек разрыва.
Таким образом, для любого $N \in \mathbb{N}$

$$\varliminf_n \mathsf{P}_n(A) = \varliminf_n \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}_n(I_k) \geqslant \varliminf_n \sum_{k=1}^{N} \mathsf{P}_n(I_k) \geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_n \sum_{k=1}^{N} \mathsf{P}_n(I'_k) \geqslant \sum_{k=1}^{N} \varliminf_n \mathsf{P}_n(I'_k).$$

Доказательство эквивалентности сходимостей

Устремляя $N \to +\infty$, получаем, что

$$\varliminf_n \mathsf{P}_n(A) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \varliminf_n \mathsf{P}_n(I'_k).$$

Доказательство эквивалентности сходимостей

Устремляя $N \to +\infty$, получаем, что

$$\underline{\lim_n} \mathsf{P}_n(A) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \underline{\lim_n} \mathsf{P}_n(I'_k).$$

Но $\mathsf{P}_n(I'_k) = F_n(b'_k) - F_n(a'_k) \to F(b'_k) - F(a'_k)$ при $n \to \infty$, т.к. $F_n \Rightarrow F$.
Стало быть,

$$\underline{\lim_n} \mathsf{P}_n(A) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} (F(b'_k) - F(a'_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(I'_k) \geqslant |\text{выбор } I'_k|$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} (\mathsf{P}(I_k) - \frac{\varepsilon}{2^k}) = \mathsf{P}(A) - \varepsilon.$$

Доказательство эквивалентности сходимостей

Устремляя $N \to +\infty$, получаем, что

$$\underline{\lim}_{n} \mathsf{P}_n(A) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \underline{\lim}_{n} \mathsf{P}_n(I'_k).$$

Но $\mathsf{P}_n(I'_k) = F_n(b'_k) - F_n(a'_k) \to F(b'_k) - F(a'_k)$ при $n \to \infty$, т.к. $F_n \Rightarrow F$. Стало быть,

$$\underline{\lim}_{n} \mathsf{P}_n(A) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} (F(b'_k) - F(a'_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(I'_k) \geqslant |\text{выбор } I'_k|$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} (\mathsf{P}(I_k) - \frac{\varepsilon}{2^k}) = \mathsf{P}(A) - \varepsilon.$$

В силу произвольности ε получаем искомое неравенство: для любого открытого $A \in \mathbb{R}$

$$\underline{\lim}_{n} \mathsf{P}_n(A) \geqslant \mathsf{P}(A).$$

Смысл сходимости по распределению

Следствие

Последовательность с.в. $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится по распределению к с.в.* $\xi \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{C}(F_\xi)$ *— точки непрерывности ф.р.* ξ *выполнено*

$$F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x).$$

Смысл сходимости по распределению

Следствие

Последовательность с.в. $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится по распределению к с.в.* $\xi \Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{C}(F_\xi)$ — *точки непрерывности ф.р.* ξ *выполнено*

$$F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x).$$

Смысл сходимости по распределению: аппроксимация распределений.

Смысл сходимости по распределению

Следствие

Последовательность с.в. $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится по распределению к с.в.* $\xi \Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{C}(F_\xi)$ *— точки непрерывности ф.р.* ξ *выполнено*

$$F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x).$$

Смысл сходимости по распределению: аппроксимация распределений.

Пусть η — некоторая с.в. со сложным распределением (т.е. сложно вычислить ф.р. F_η).

Предположим, что $\xi_n \xrightarrow{\text{d}} \xi$, причем у ξ "хорошее распределение" (легко вычислить ф.р., или она известна) и, кроме того, $\eta \stackrel{\text{d}}{=} \xi_m$ с большим номером m. Тогда можно считать, что $F_\eta \sim F_\xi$ (при некоторых допущениях).

Теория вероятностей. Лекция 06.05. Схема Бернулли и характеристические функции

Д. А. Шабанов

мех-мат МГУ, второй курс

06.05.2020

Слабая сходимость

Пусть (S, ρ) — метрическое пространство.

Определение

Борелевской сигма-алгеброй, $\mathcal{B}(S)$, на (S, ρ) называется минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые множества в S.

Слабая сходимость

Пусть (S, ρ) — метрическое пространство.

Определение

Борелевской сигма-алгеброй, $\mathcal{B}(S)$, на (S, ρ) называется минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые множества в S.

Определение

Пусть задано метрическое пространство (S, ρ) и последовательность $\{\mathsf{Q}_n\}_{n=1}^{\infty}$ вероятностных мер на $(S, \mathcal{B}(S))$. Будем говорить, что Q_n слабо сходятся к вероятностной мере Q на $(S, \mathcal{B}(S))$, если для любой ограниченной непрерывной функции $f\colon S \mapsto \mathbb{R}$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_S f(x)\mathsf{Q}_n(dx) = \int\limits_S f(x)\mathsf{Q}(dx).$$

Обозначение: $\mathsf{Q}_n \xrightarrow{w} \mathsf{Q}$.

Теорема Александрова

Утверждение

Если пространство (S, ρ) *сепарабельно, то* $\mathcal{B}(S)$ *является минимальной* σ*-алгеброй, содержащей все открытые шары.*

Теорема Александрова

Утверждение

Если пространство (S, ρ) сепарабельно, то $\mathcal{B}(S)$ является минимальной σ-алгеброй, содержащей все открытые шары.

Теорема (Александров)

Пусть $\{\mathsf{Q}_n\}_{n=1}^{\infty}$ и Q — вероятностные меры на метрическом пространстве (S, ρ). Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $\mathsf{Q}_n \xrightarrow{w} \mathsf{Q}$,
2. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \mathsf{Q}_n(F) \leqslant \mathsf{Q}(F)$ *для любого замкнутого множества* $F \subset S$,
3. $\varliminf\limits_{n\to\infty} \mathsf{Q}_n(G) \geqslant \mathsf{Q}(G)$ *для любого открытого множества* $G \subset S$,
4. *Для любого борелевского множества* $B \in \mathcal{B}(S)$ *такого, что* $\mathsf{Q}(\partial B) = 0$, *выполнено* $\mathsf{Q}_n(B) \to \mathsf{Q}(B)$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство теоремы Александрова

(1)⇒(2). Пусть $F \subset S$ — замкнутое множество. Для произвольного $\varepsilon > 0$ введём функцию

$$f_\varepsilon(x) = \left(1 - \frac{\rho(x, F)}{\varepsilon}\right)^+, \text{ где } \rho(x, F) = \inf_{y \in F} \rho(x, y).$$

Заметим, что она неотрицательна, непрерывна и ограничена, $f_\varepsilon(x) = 1$ для всех $x \in F$ и $f_\varepsilon(x) \leqslant \mathbf{I}\{x \in F^\varepsilon\}$, где $F^\varepsilon = \{x \in S \colon \rho(x, F) \leqslant \varepsilon\}$.

Доказательство теоремы Александрова

(1)⇒(2). Пусть $F \subset S$ — замкнутое множество. Для произвольного $\varepsilon > 0$ введём функцию

$$f_\varepsilon(x) = \left(1 - \frac{\rho(x,F)}{\varepsilon}\right)^+, \text{ где } \rho(x,F) = \inf_{y\in F} \rho(x,y).$$

Заметим, что она неотрицательна, непрерывна и ограничена, $f_\varepsilon(x) = 1$ для всех $x \in F$ и $f_\varepsilon(x) \leqslant \mathbf{I}\{x \in F^\varepsilon\}$, где $F^\varepsilon = \{x \in S \colon \rho(x,F) \leqslant \varepsilon\}$. Тогда верна следующая цепочка соотношений:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathsf{Q}_n(F) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \int\limits_S \mathbf{I}\{x \in F\}\mathsf{Q}_n(dx) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \int\limits_S f_\varepsilon(x)\mathsf{Q}_n(dx) =$$
$$= \int\limits_S f_\varepsilon(x)\mathsf{Q}(dx) \leqslant \int\limits_S \mathbf{I}\{x \in F^\varepsilon\}\mathsf{Q}(dx) = \mathsf{Q}(F^\varepsilon),$$

Доказательство теоремы Александрова

(1)⇒(2). Пусть $F \subset S$ — замкнутое множество. Для произвольного $\varepsilon > 0$ введём функцию

$$f_\varepsilon(x) = \left(1 - \frac{\rho(x,F)}{\varepsilon}\right)^+, \text{ где } \rho(x,F) = \inf_{y \in F} \rho(x,y).$$

Заметим, что она неотрицательна, непрерывна и ограничена, $f_\varepsilon(x) = 1$ для всех $x \in F$ и $f_\varepsilon(x) \leqslant \mathbf{I}\{x \in F^\varepsilon\}$, где $F^\varepsilon = \{x \in S\colon \rho(x,F) \leqslant \varepsilon\}$. Тогда верна следующая цепочка соотношений:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathsf{Q}_n(F) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_S \mathbf{I}\{x \in F\}\mathsf{Q}_n(dx) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_S f_\varepsilon(x)\mathsf{Q}_n(dx) =$$

$$= \int_S f_\varepsilon(x)\mathsf{Q}(dx) \leqslant \int_S \mathbf{I}\{x \in F^\varepsilon\}\mathsf{Q}(dx) = \mathsf{Q}(F^\varepsilon),$$

Осталось заметить, что F^ε монотонно сжимается к F при $\varepsilon \to 0$ в силу замкнутости F. В силу непрерывности вероятностной меры $\mathsf{Q}(F^\varepsilon) \to \mathsf{Q}(F)$. Следовательно, при устремлении ε к нулю получаем искомое неравенство.

Доказательство теоремы Александрова

(2)$\Leftrightarrow$(3) Эквивалентность второго и третьего пунктов очевидна, так как от одного к другому можно переходить, рассматривая дополнения множеств.

Доказательство теоремы Александрова

(2)$\Leftrightarrow$(3) Эквивалентность второго и третьего пунктов очевидна, так как от одного к другому можно переходить, рассматривая дополнения множеств.

(2),(3)$\Rightarrow$(4) Возьмём произвольное борелевское множество $B \in \mathcal{B}(S)$ с условием $\mathsf{Q}(\partial B) = 0$.

Доказательство теоремы Александрова

(2)$\Leftrightarrow$(3) Эквивалентность второго и третьего пунктов очевидна, так как от одного к другому можно переходить, рассматривая дополнения множеств.

(2),(3)$\Rightarrow$(4) Возьмём произвольное борелевское множество $B \in \mathcal{B}(S)$ с условием $\mathsf{Q}(\partial B) = 0$. Введём два множества:

- $F = [B] = B \cup \partial B$ (замыкание B);
- $G = B \setminus \partial B$ (внутренность B).

Заметим, что F замкнуто, а G открыто, причём $\mathsf{Q}(F) = \mathsf{Q}(B) = \mathsf{Q}(G)$ (так как $\mathsf{Q}(\partial B) = 0$).

Доказательство теоремы Александрова

(2)⇔(3) Эквивалентность второго и третьего пунктов очевидна, так как от одного к другому можно переходить, рассматривая дополнения множеств.

(2),(3)⇒(4) Возьмём произвольное борелевское множество $B \in \mathcal{B}(S)$ с условием $\mathsf{Q}(\partial B) = 0$. Введём два множества:

- $F = [B] = B \cup \partial B$ (замыкание B);
- $G = B \setminus \partial B$ (внутренность B).

Заметим, что F замкнуто, а G открыто, причём $\mathsf{Q}(F) = \mathsf{Q}(B) = \mathsf{Q}(G)$ (так как $\mathsf{Q}(\partial B) = 0$). Тогда несложно показать, что искомый предел существует и равен $\mathsf{Q}(B)$:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathsf{Q}_n(B) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathsf{Q}_n(F) \leqslant \mathsf{Q}(F) = \mathsf{Q}(B),$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathsf{Q}_n(B) \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathsf{Q}_n(G) \geqslant \mathsf{Q}(G) = \mathsf{Q}(B).$$

Доказательство теоремы Александрова

(2)⇔(3) Эквивалентность второго и третьего пунктов очевидна, так как от одного к другому можно переходить, рассматривая дополнения множеств.

(2),(3)⇒(4) Возьмём произвольное борелевское множество $B \in \mathcal{B}(S)$ с условием $\mathsf{Q}(\partial B) = 0$. Введём два множества:

- $F = [B] = B \cup \partial B$ (замыкание B);
- $G = B \setminus \partial B$ (внутренность B).

Заметим, что F замкнуто, а G открыто, причём $\mathsf{Q}(F) = \mathsf{Q}(B) = \mathsf{Q}(G)$ (так как $\mathsf{Q}(\partial B) = 0$). Тогда несложно показать, что искомый предел существует и равен $\mathsf{Q}(B)$:

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{Q}_n(B) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{Q}_n(F) \leqslant \mathsf{Q}(F) = \mathsf{Q}(B),$$
$$\varliminf_{n\to\infty} \mathsf{Q}_n(B) \geqslant \varliminf_{n\to\infty} \mathsf{Q}_n(G) \geqslant \mathsf{Q}(G) = \mathsf{Q}(B).$$

Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{Q}_n(B) = \mathsf{Q}(B)$.

Доказательство теоремы Александрова

(4)⇒(1). Возьмём произвольную ограниченную непрерывную функцию $f\colon S \mapsto \mathbb{R}$. Пусть $|f(x)| < M$ для всех $x \in S$. Рассмотрим множество:

$$D = \{t \in [-M, M]\colon \mathsf{Q}(\{x \in S\colon f(x) = t\}) > 0\}.$$

Данное множество не более, чем счётно.

Доказательство теоремы Александрова

(4)$\Rightarrow$(1). Возьмём произвольную ограниченную непрерывную функцию $f\colon S \mapsto \mathbb{R}$. Пусть $|f(x)| < M$ для всех $x \in S$. Рассмотрим множество:

$$D = \{t \in [-M, M]\colon \mathsf{Q}(\{x \in S\colon f(x) = t\}) > 0\}.$$

Данное множество не более, чем счётно. Теперь зафиксируем произвольное натуральное k и возьмём разбиение $-M = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = M$ отрезка $[-M, M]$ такое, что ни одно из t_i не содержится в D.

Доказательство теоремы Александрова

(4)⇒(1). Возьмём произвольную ограниченную непрерывную функцию $f\colon S \mapsto \mathbb{R}$. Пусть $|f(x)| < M$ для всех $x \in S$. Рассмотрим множество:

$$D = \{t \in [-M, M] \colon \mathsf{Q}(\{x \in S \colon f(x) = t\}) > 0\}.$$

Данное множество не более, чем счётно. Теперь зафиксируем произвольное натуральное k и возьмём разбиение $-M = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = M$ отрезка $[-M, M]$ такое, что ни одно из t_i не содержится в D.

Далее, построим набор множеств $\{B_i\}_{i=1}^k$ по следующему правилу:

$$B_i = \{x \in S \colon t_{i-1} \leqslant f(x) < t_i\}.$$

Заметим, что $\partial B_i \subseteq f^{-1}(\{t_{i-1}\}) \cup f^{-1}(\{t_i\})$. Но оба прообраза имеют нулевую меру, поэтому граница B_i тоже имеет нулевую меру. Следовательно, $\mathsf{Q}_n(B_i) \to \mathsf{Q}(B_i)$ при $n \to \infty$ для всех $i = 1, \ldots, k$.

Доказательство теоремы Александрова

(4)⇒(1). Возьмём произвольную ограниченную непрерывную функцию $f\colon S \mapsto \mathbb{R}$. Пусть $|f(x)| < M$ для всех $x \in S$. Рассмотрим множество:

$$D = \{t \in [-M, M] \colon \mathsf{Q}(\{x \in S \colon f(x) = t\}) > 0\}.$$

Данное множество не более, чем счётно. Теперь зафиксируем произвольное натуральное k и возьмём разбиение $-M = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = M$ отрезка $[-M, M]$ такое, что ни одно из t_i не содержится в D.

Далее, построим набор множеств $\{B_i\}_{i=1}^k$ по следующему правилу:

$$B_i = \{x \in S \colon t_{i-1} \leqslant f(x) < t_i\}.$$

Заметим, что $\partial B_i \subseteq f^{-1}(\{t_{i-1}\}) \cup f^{-1}(\{t_i\})$. Но оба прообраза имеют нулевую меру, поэтому граница B_i тоже имеет нулевую меру. Следовательно, $\mathsf{Q}_n(B_i) \to \mathsf{Q}(B_i)$ при $n \to \infty$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Теперь рассмотрим следующий верхний предел:

$$\Delta = \varlimsup_{n\to\infty} \left| \int\limits_S f(x)\mathsf{Q}_n(dx) - \int\limits_S f(x)\mathsf{Q}(dx) \right|.$$

Доказательство теоремы Александрова

Ограничим её сверху суммой трёх верхних пределов:

$$\Delta \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \left| \int_S f(x)\mathsf{Q}_n(dx) - \sum_{i=1}^{k} t_{i-1}\mathsf{Q}_n(B_i) \right| +$$

$$+ \varlimsup_{n\to\infty} \left| \sum_{i=1}^{k} t_{i-1}\mathsf{Q}_n(B_i) - \sum_{i=1}^{k} t_{i-1}\mathsf{Q}(B_i) \right| +$$

$$+ \varlimsup_{n\to\infty} \left| \int_S f(x)\mathsf{Q}(dx) - \sum_{i=1}^{k} t_{i-1}\mathsf{Q}(B_i) \right|$$

Второй предел равен нулю. Теперь покажем, что первый (а так же и третий) предел не превосходит $\max\limits_{i=1,\ldots,k} |t_i - t_{i-1}|$.

Доказательство теоремы Александрова

Ограничим её сверху суммой трёх верхних пределов:

$$\Delta \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \left| \int_S f(x)\mathsf{Q}_n(dx) - \sum_{i=1}^{k} t_{i-1}\mathsf{Q}_n(B_i) \right| +$$

$$+ \varlimsup_{n\to\infty} \left| \sum_{i=1}^{k} t_{i-1}\mathsf{Q}_n(B_i) - \sum_{i=1}^{k} t_{i-1}\mathsf{Q}(B_i) \right| +$$

$$+ \varlimsup_{n\to\infty} \left| \int_S f(x)\mathsf{Q}(dx) - \sum_{i=1}^{k} t_{i-1}\mathsf{Q}(B_i) \right|$$

Второй предел равен нулю. Теперь покажем, что первый (а так же и третий) предел не превосходит $\max\limits_{i=1,\ldots,k} |t_i - t_{i-1}|$. Для этого заметим, что

$$\int_S f(x)\mathsf{Q}_n(dx) = \sum_{i=1}^{k} \int_{B_i} f(x)\mathsf{Q}_n(dx),$$

и

Доказательство теоремы Александрова

$$t_{i-1}\mathsf{Q}_n(B_i) \leqslant \int\limits_{B_i} f(x)\mathsf{Q}_n(dx) \leqslant t_i\mathsf{Q}_n(B_i).$$

Доказательство теоремы Александрова

$$t_{i-1}\mathsf{Q}_n(B_i) \leqslant \int\limits_{B_i} f(x)\mathsf{Q}_n(dx) \leqslant t_i\mathsf{Q}_n(B_i).$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_S f(x)\mathsf{Q}_n(dx) - \sum_{i=1}^k t_{i-1}\mathsf{Q}_n(B_i)\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1})\mathsf{Q}_n(B_i)\right| \leqslant \max_{i=1,\ldots,k} |t_i - t_{i-1}|.$$

Доказательство теоремы Александрова

$$t_{i-1}\mathsf{Q}_n(B_i) \leqslant \int\limits_{B_i} f(x)\mathsf{Q}_n(dx) \leqslant t_i\mathsf{Q}_n(B_i).$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_S f(x)\mathsf{Q}_n(dx) - \sum_{i=1}^k t_{i-1}\mathsf{Q}_n(B_i)\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1})\mathsf{Q}_n(B_i)\right| \leqslant \max_{i=1,\ldots,k} |t_i - t_{i-1}|.$$

Отсюда получаем, что

$$\Delta \leqslant 2 \max_{i=1,\ldots,k} |t_i - t_{i-1}|.$$

Но этот максимум стремится к нулю при устремлении диаметра разбиения к нулю. Следовательно, $\Delta = 0$ и имеет место слабая сходимость. $\square$

Предельные теоремы для схемы Бернулли

Описание схемы:

Проходит серия независимых однородных случайных экспериментов. Для каждого эксперимента мы фиксируем “успех” (произошло интересующее нас событие) или “неудачу”. Нас интересует распределение числа успехов после проведения большого числа экспериментов.

Предельные теоремы для схемы Бернулли

Описание схемы:
Проходит серия независимых однородных случайных экспериментов. Для каждого эксперимента мы фиксируем "успех" (произошло интересующее нас событие) или "неудачу". Нас интересует распределение числа успехов после проведения большого числа экспериментов.
Математическая модель:
Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — н.о.р. с.в., $\mathsf{P}(\xi_i = 1) = p$, $\mathsf{P}(\xi_i = 0) = 1 - p = q$. Такие с.в. имеют распределение Бернулли, $Bin(1, p)$.
Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ — число "успехов" в схеме Бернулли.

Задача

$S_n \sim Bin(n, p)$, т.е. $\forall k = 0, \ldots, n \quad \mathsf{P}(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

Предельные теоремы для схемы Бернулли

Описание схемы:
Проходит серия независимых однородных случайных экспериментов. Для каждого эксперимента мы фиксируем "успех" (произошло интересующее нас событие) или "неудачу". Нас интересует распределение числа успехов после проведения большого числа экспериментов.
Математическая модель:
Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — н.о.р. с.в., $\mathsf{P}(\xi_i = 1) = p$, $\mathsf{P}(\xi_i = 0) = 1 - p = q$. Такие с.в. имеют распределение Бернулли, $Bin(1, p)$.
Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ — число "успехов" в схеме Бернулли.

Задача

$S_n \sim Bin(n, p)$, т.е. $\forall k = 0, \ldots, n \quad \mathsf{P}(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

История: Бернулли, 1701, ЗБЧ для схемы Бернулли:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} p, \quad n \to \infty.$$

Несмотря на то, что распределение S_n известно, вычисление вероятностей типа $\mathsf{P}(|\frac{S_n}{n} - p| \geqslant \varepsilon)$ напрямую достаточно затруднительно. При малых p возможна пуассоновская аппроксимация.

Теорема Пуассона

Теорема (Пуассон)

Пусть $p = p(n)$ *такова, что* $pn \to \lambda > 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда* $\forall k \in \mathbb{Z}_+$

$$\mathsf{P}(S_n = k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Теорема Пуассона

Теорема (Пуассон)

Пусть $p = p(n)$ *такова, что* $pn \to \lambda > 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда* $\forall k \in \mathbb{Z}_+$

$$\mathsf{P}(S_n = k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Доказательство.

$$\mathsf{P}(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} (\lambda + o(1))^k \left(1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{n-k} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \text{ при фиксированном } k, \;\; n \to \infty.$$

□

Следствие

Следствие

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — *с.в.,* $\xi_n \sim Bin(n, p(n))$, *причем* $np(n) \to \lambda > 0$. *Тогда*

$$\xi_n \xrightarrow{d} \eta \sim Pois(\lambda).$$

(другое обозначение: $\xi_n \xrightarrow{d} Pois(\lambda)$*)*

Следствие

Следствие

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— с.в.,* $\xi_n \sim Bin(n, p(n))$*, причем* $np(n) \to \lambda > 0$*. Тогда*

$$\xi_n \xrightarrow{d} \eta \sim Pois(\lambda).$$

(другое обозначение: $\xi_n \xrightarrow{d} Pois(\lambda)$*)*

Доказательство.

$\xi_n \xrightarrow{d} \eta \Leftrightarrow F_{\xi_n}(x) \longrightarrow F_\eta(x)$ для всех $x \in \mathbb{C}(F_\eta)$. Но все случайные величины принимают значение в $\mathbb{Z}_+$. Следовательно, достаточно проверить, что $\forall k \in Z_+$

$$\mathsf{P}(\xi_n \leqslant k) \to \mathsf{P}(\eta \leqslant k) \;\; n \to \infty,$$

что напрямую вытекает из теоремы Пуассона. □

Теорема Муавра–Лапласа

В случае $np \to \infty$ есть нормальная аппроксимация.

Теорема (Муавр - Лаплас)

Пусть $S_n \sim Bin(n,p), p \in (0,1)$ *— фиксировано. Обозначим*

$$\mathsf{P}_n(a,b) = \mathsf{P}\left(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b\right)$$

Тогда

$$\sup_{-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty} \left| \mathsf{P}_n(a,b) - \int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Следствие

Следствие

В условиях теоремы Муавра-Лапласа

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{d} \eta \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Следствие

Следствие

В условиях теоремы Муавра-Лапласа

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{\mathsf{d}} \eta \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Доказательство.

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{\mathsf{d}} \eta \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathsf{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant x\right) \to F_\eta(x) = \Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy,$$

что и утверждает теорема Муавра-Лапласа. $\square$

Пример

Задача

Кость подбрасывается 12000 раз. Какова вероятность того, что шестерок выпадет от 1800 до 2100.

Пример

Задача

Кость подбрасывается 12000 раз. Какова вероятность того, что шестерок выпадет от 1800 до 2100.

Решение: Искомая вероятность равна

$$\sum_{1800 \leqslant k \leqslant 2100} C_{12000}^{k} \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{12000-k}.$$

Пример

Задача

Кость подбрасывается 12000 раз. Какова вероятность того, что шестерок выпадет от 1800 до 2100.

Решение: Искомая вероятность равна

$$\sum_{1800\leqslant k\leqslant 2100} C_{12000}^{k}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{12000-k}.$$

По теореме Муавра-Лапласа эта вероятность примерно равна

$$\Phi\left(\frac{2100-2000}{\sqrt{12000\frac{1}{6}\frac{5}{6}}}\right)-\Phi\left(\frac{1800-2000}{\sqrt{12000\frac{1}{6}\frac{5}{6}}}\right)=\Phi\left(\sqrt{6}\right)-\Phi\left(-2\sqrt{6}\right)\approx 0,992.$$

$\square$

Характеристические функции

Определение

Пусть ξ — *случайная величина. Её характеристической функцией называется*

$$\varphi_\xi(t) = \mathsf{E}\, e^{it\xi}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Характеристические функции

Определение

Пусть ξ *— случайная величина. Её характеристической функцией называется*

$$\varphi_\xi(t) = \mathsf{E}\, e^{it\xi}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Замечание: характеристическая функция является в общем случае комплекснозначной. Можно понимать $\mathsf{E}\, e^{it\xi}$ как сумму $\mathsf{E} \cos t\xi + i\, \mathsf{E} \sin t\xi$.

Характеристические функции

Определение

Если $F(x)$ — *функция распределения на* $\mathbb{R}$. *Тогда её характеристической функцией называется*

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x), \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Характеристические функции

Определение

Если $F(x)$ — функция распределения на $\mathbb{R}$. Тогда её характеристической функцией называется

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x), \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Если P *— вероятностная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, то её характеристической функцией называется*

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathsf{P}(dx), \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Характеристические функции

Определение

Если $F(x)$ — функция распределения на $\mathbb{R}$. Тогда её характеристической функцией называется

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x), \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Если P *— вероятностная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, то её характеристической функцией называется*

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathsf{P}(dx), \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Наблюдение: $\varphi_\xi(t)$ — х.ф. с.в. ξ. $\Longleftrightarrow$ $\varphi_\xi(t)$ — х.ф. для $F_\xi(x)$ и P_ξ.

Характеристические функции

Определение

Если $F(x)$ — функция распределения на $\mathbb{R}$. Тогда её характеристической функцией называется

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x), \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Если P *— вероятностная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, то её характеристической функцией называется*

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathsf{P}(dx), \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Наблюдение: $\varphi_\xi(t)$ — х.ф. с.в. ξ. $\Longleftrightarrow$ $\varphi_\xi(t)$ — х.ф. для $F_\xi(x)$ и P_ξ.
Доказательство:

$$\varphi_\xi(t) = \mathsf{E}\, e^{it\xi} = |\text{замена переменных}| = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathsf{P}_\xi(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_\xi(x).$$

Характеристические функции

Определение

Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *— случайный вектор. Его характеристической функцией называется*

$$\varphi_\xi(t) = \mathsf{E}\, e^{i\langle t, \xi\rangle}, \ \ t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n,$$

где $\langle t, \xi\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} t_k \xi_k.$

Характеристические функции

Определение

Пусть $F(x), x \in \mathbb{R}^n$ — функция распределения в $\mathbb{R}^n$. Её характеристической функцией называется

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle} dF(x), \;\; t \in \mathbb{R}^n.$$

Характеристические функции

Определение

Пусть $F(x), x \in \mathbb{R}^n$ *— функция распределения в* $\mathbb{R}^n$*. Её характеристической функцией называется*

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle} dF(x), \ \ t \in \mathbb{R}^n.$$

Если P *— вероятностная мера на* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$*, то её характеристической функцией называется*

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle} \mathsf{P}(dx), \ \ t \in \mathbb{R}^n.$$

Характеристические функции

Определение

Пусть $F(x), x \in \mathbb{R}^n$ *— функция распределения в* $\mathbb{R}^n$. *Её характеристической функцией называется*

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle} dF(x), \;\; t \in \mathbb{R}^n.$$

Если P *— вероятностная мера на* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, *то её характеристической функцией называется*

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle} \mathsf{P}(dx), \;\; t \in \mathbb{R}^n.$$

Наблюдение: $\varphi_\xi(t)$ — х.ф. $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \Longleftrightarrow \varphi_\xi(t)$ — х.ф. для ф.р. $F_\xi(x), x \in \mathbb{R}^n$ и х.ф. распределения P_ξ.

Примеры

1. $\xi \sim Pois(\lambda)$ — пуассоновская с.в.

$$\varphi_\xi(t) = \mathsf{E}\, e^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{e^{it}\lambda}e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Примеры

1. $\xi \sim Pois(\lambda)$ — пуассоновская с.в.

$$\varphi_\xi(t) = \mathsf{E}\, e^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{e^{it}\lambda} e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

2. $\xi \sim Exp(\lambda)$ — экспоненциальная с.в.

$$\varphi_\xi(t) = \mathsf{E}\, e^{it\xi} = \int\limits_0^{\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int\limits_0^{\infty} e^{(it-\lambda)x} dx$$

$$= \lambda \frac{e^{(it-\lambda)x}}{it-\lambda}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

Примеры

3. $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$ — стандартная нормальная с.в. В силу нечетности синуса получаем представление:

$$\varphi_\xi(t) = \mathsf{E}\, e^{it\xi} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Примеры

3. $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$ — стандартная нормальная с.в. В силу нечетности синуса получаем представление:

$$\varphi_\xi(t) = \mathsf{E}\, e^{it\xi} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Продифференцируем $\varphi_\xi(t)$:

$$\varphi'_\xi(t) = \int_{\mathbb{R}} \sin(tx)(-x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx =$$

Примеры

3. $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$ — стандартная нормальная с.в. В силу нечетности синуса получаем представление:

$$\varphi_\xi(t) = \mathsf{E}\, e^{it\xi} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Продифференцируем $\varphi_\xi(t)$:

$$\varphi'_\xi(t) = \int_{\mathbb{R}} \sin(tx)(-x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx =$$

(интегрируем по частям)

$$= \sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - t \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = -t \cdot \varphi_\xi(t).$$

Примеры

3. $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$ — стандартная нормальная с.в. В силу нечетности синуса получаем представление:

$$\varphi_\xi(t) = \mathsf{E}\, e^{it\xi} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Продифференцируем $\varphi_\xi(t)$:

$$\varphi'_\xi(t) = \int_{\mathbb{R}} \sin(tx)(-x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

(интегрируем по частям)

$$= \sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - t \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -t \cdot \varphi_\xi(t).$$

Получили дифференциальное уравнение $\varphi'_\xi(t) = -t \cdot \varphi_\xi(t)$ или $(\ln \varphi_\xi(t))' = -t$. Значит, $\varphi_\xi(t) = C \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$ для некоторой $C > 0$. С учетом начального условия $\varphi_\xi(0) = 1$, ответ равен

$$\varphi_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Основные свойства хар. функций

Свойство (1)

Если $\varphi(t)$ *— х.ф. с.в.* ξ, *то*

$$|\varphi(t)| \leqslant \varphi(0) = 1.$$

Свойство (1)

Если $\varphi(t)$ *— х.ф. с.в.* ξ, *то*

$$|\varphi(t)| \leqslant \varphi(0) = 1.$$

Доказательство.

$$|\varphi(t)| = |\,\mathsf{E}\, e^{it\xi}| \leqslant \mathsf{E}\,|e^{it\xi}| = 1, \quad \varphi(0) = \mathsf{E}\, e^{0i\xi} = 1.$$

$\square$

Основные свойства хар. функций

Свойство (1)

Если $\varphi(t)$ *— х.ф. с.в.* ξ*, то*

$$|\varphi(t)| \leqslant \varphi(0) = 1.$$

Доказательство.

$$|\varphi(t)| = |\,\mathsf{E}\, e^{it\xi}| \leqslant \mathsf{E}\,|e^{it\xi}| = 1, \quad \varphi(0) = \mathsf{E}\, e^{0i\xi} = 1.$$

$\square$

Свойство (2)

Пусть $\varphi(t)$ *— х.ф. с.в.* ξ*, а* $\eta = a\xi + b,\ \ a, b \in \mathbb{R}$*. Тогда*

$$\varphi_\eta(t) = e^{itb}\varphi(at).$$

Основные свойства хар. функций

Свойство (1)

Если $\varphi(t)$ *— х.ф. с.в.* ξ*, то*

$$|\varphi(t)| \leqslant \varphi(0) = 1.$$

Доказательство.

$$|\varphi(t)| = |\,\mathsf{E}\, e^{it\xi}| \leqslant \mathsf{E}\,|e^{it\xi}| = 1, \quad \varphi(0) = \mathsf{E}\, e^{0i\xi} = 1.$$

$\square$

Свойство (2)

Пусть $\varphi(t)$ *— х.ф. с.в.* ξ*, а* $\eta = a\xi + b,\ \ a, b \in \mathbb{R}$*. Тогда*

$$\varphi_\eta(t) = e^{itb}\varphi(at).$$

Доказательство.

$$\varphi_\eta(t) = \mathsf{E}\, e^{it\eta} = \mathsf{E}\, e^{it(a\xi+b)} = e^{itb}\,\mathsf{E}\, e^{i(at)\xi} = e^{itb}\varphi(at).$$

$\square$

Основные свойства хар. функций

Свойство (3)

Пусть $\varphi(t)$ *— х.ф. с.в.* φ. *Тогда* $\varphi(t)$ *равномерно непрерывна на* $\mathbb{R}$.

Основные свойства хар. функций

Свойство (3)

Пусть $\varphi(t)$ — х.ф. с.в. φ. Тогда $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Рассмотрим

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)| = |\,\mathsf{E}\, e^{i(t+h)\xi} - \mathsf{E}\, e^{it\xi}| = |\,\mathsf{E}[e^{it\xi}(e^{ih\xi}-1)]| \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{E}\,|e^{it\xi}(e^{ih\xi}-1)| = \mathsf{E}\,|e^{ih\xi}-1|.$$

Ясно, что $e^{ih\xi}-1 \to 0$ п.н. при $h \to 0$. При этом, $|e^{ih\xi}-1| \leqslant 2$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости.

$$\mathsf{E}\,|e^{ih\xi}-1| \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Значит, $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. $\square$

Основные свойства хар. функций

Свойство (3)

Пусть $\varphi(t)$ — х.ф. с.в. φ. Тогда $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Рассмотрим

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)| = |\,\mathsf{E}\, e^{i(t+h)\xi} - \mathsf{E}\, e^{it\xi}| = |\,\mathsf{E}[e^{it\xi}(e^{ih\xi}-1)]| \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{E}\,|e^{it\xi}(e^{ih\xi}-1)| = \mathsf{E}\,|e^{ih\xi}-1|.$$

Ясно, что $e^{ih\xi}-1 \to 0$ п.н. при $h \to 0$. При этом, $|e^{ih\xi}-1| \leqslant 2$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости.

$$\mathsf{E}\,|e^{ih\xi}-1| \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Значит, $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. $\square$

Свойство (4)

Пусть $\varphi(t)$ — х.ф. с.в. ξ. Тогда $\varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$ (комплексное сопряжение).

Основные свойства хар. функций

Свойство (3)

Пусть $\varphi(t)$ — *х.ф. с.в.* φ. *Тогда* $\varphi(t)$ *равномерно непрерывна на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Рассмотрим

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)| = |\,\mathsf{E}\,e^{i(t+h)\xi} - \mathsf{E}\,e^{it\xi}| = |\,\mathsf{E}[e^{it\xi}(e^{ih\xi}-1)]| \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{E}\,|e^{it\xi}(e^{ih\xi}-1)| = \mathsf{E}\,|e^{ih\xi}-1|.$$

Ясно, что $e^{ih\xi}-1 \to 0$ п.н. при $h \to 0$. При этом, $|e^{ih\xi}-1| \leqslant 2$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости.

$$\mathsf{E}\,|e^{ih\xi}-1| \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Значит, $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. □

Свойство (4)

Пусть $\varphi(t)$ — *х.ф. с.в.* ξ. *Тогда* $\varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$ *(комплексное сопряжение).*

Доказательство.

$$\varphi(t) = \mathsf{E}\,e^{it\xi} = \mathsf{E}\,\overline{e^{-it\xi}} = \overline{\mathsf{E}\,e^{-it\xi}} = \overline{\varphi(-t)}.$$

Основные свойства хар. функций

Свойство (5)

Единственность. Х.ф. случайных величин ξ *и* η *совпадают* $\Longleftrightarrow \xi \overset{d}{=} \eta$.

Основные свойства хар. функций

Свойство (5)

Единственность. Х.ф. случайных величин ξ *и* η *совпадают* $\iff \xi \overset{d}{=} \eta$.

(докажем позже)

Основные свойства хар. функций

Свойство (5)

Единственность. Х.ф. случайных величин ξ *и* η *совпадают* $\Longleftrightarrow \xi \overset{d}{=} \eta$.

(докажем позже)

Свойство (6)

Пусть $\varphi_\xi(t)$ *— х.ф. с.в.* ξ*. Тогда* $\varphi(t)$ *— действительнозначная функция* $\Longleftrightarrow$ *распределение* ξ *симметрично, т.е.* $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathsf{P}(\xi \in B) = \mathsf{P}(-\xi \in B) \quad (\xi \overset{d}{=} -\xi).$$

Основные свойства хар. функций

Свойство (5)

Единственность. Х.ф. случайных величин ξ и η совпадают $\Longleftrightarrow \xi \overset{d}{=} \eta$.

(докажем позже)

Свойство (6)

Пусть $\varphi_\xi(t)$ — х.ф. с.в. ξ. Тогда $\varphi(t)$ — действительнозначная функция $\Longleftrightarrow$ *распределение ξ симметрично, т.е.* $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathsf{P}(\xi \in B) = \mathsf{P}(-\xi \in B) \quad (\xi \overset{d}{=} -\xi).$$

Доказательство. $(\Rightarrow)$ По свойствам 2) и 4) х.ф. $-\xi$ равна

$$\varphi_{-\xi}(t) = \varphi_\xi(-t) = \overline{\varphi_\xi(-t)} = \varphi_\xi(t).$$

По свойству 5) это означает, что распределения ξ и $-\xi$ совпадают.

Основные свойства хар. функций

Свойство (5)

Единственность. Х.ф. случайных величин ξ *и* η *совпадают* $\iff \xi \overset{d}{=} \eta$.

(докажем позже)

Свойство (6)

Пусть $\varphi_\xi(t)$ — *х.ф. с.в.* ξ. *Тогда* $\varphi(t)$ — *действительнозначная функция* $\iff$ *распределение* ξ *симметрично, т.е.* $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathsf{P}(\xi \in B) = \mathsf{P}(-\xi \in B) \quad (\xi \overset{d}{=} -\xi).$$

Доказательство. $(\Rightarrow)$ По свойствам 2) и 4) х.ф. $-\xi$ равна

$$\varphi_{-\xi}(t) = \varphi_\xi(-t) = \overline{\varphi_\xi(-t)} = \varphi_\xi(t).$$

По свойству 5) это означает, что распределения ξ и $-\xi$ совпадают.

$(\Leftarrow)$ Раз $\xi \overset{d}{=} -\xi$, то их х.ф. равны. Отсюда по свойствам 2) и 4) получаем:

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_{-\xi}(t) = \varphi_\xi(-t) = \overline{\varphi_\xi(t)} \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Основные свойства хар. функций

Свойство (7)

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *— независимые с.в.,* $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. *Тогда*

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t).$$

Основные свойства хар. функций

Свойство (7)

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *— независимые с.в.,* $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$*. Тогда*

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t).$$

Доказательство.

$$\varphi_{S_n}(t) = \mathsf{E}\, e^{iS_n t} = \mathsf{E}\, e^{i(\xi_1 + \ldots + \xi_n)t} = \mathsf{E}\left(e^{i\xi_1 t} \cdot \ldots \cdot e^{i\xi_n t}\right) =$$

$$= \left|\text{независимость}\right| = \mathsf{E}\, e^{i\xi_1 t} \cdot \ldots \cdot \mathsf{E}\, e^{i\xi_n t} = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t).$$

$\square$

Теорема о производных х.ф.

Теорема (о производных х.ф.)

Пусть $\varphi(t)$ — *х.ф. с.в.* ξ. *Пусть* $\mathsf{E}\,|\xi|^n < \infty$ *для некоторого* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\forall r \leqslant n$ *существует производная* $\varphi^{(r)}(t)$, *причем*

Теорема о производных х.ф.

Теорема (о производных х.ф.)

Пусть $\varphi(t)$ *— х.ф. с.в.* ξ. *Пусть* $\mathsf{E}\,|\xi|^n < \infty$ *для некоторого* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\forall r \leqslant n$ *существует производная* $\varphi^{(r)}(t)$, *причем*

1. $$\varphi^{(r)}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} (ix)^r e^{itx} dF_\xi(x) = \mathsf{E}(i\xi)^r e^{it\xi},$$

2. $$\mathsf{E}\,\xi^r = \frac{\varphi^{(r)}(0)}{i^r},$$

3. $$\varphi(t) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(it)^r}{r!}\,\mathsf{E}\,\xi^r + \frac{(it)^n}{n!}\varepsilon_n(t),$$

   где $|\varepsilon_n(t)| \leqslant 3\,\mathsf{E}\,|\xi|^n$ *и* $\varepsilon_n(t) \to 0$ *при* $t \to 0$.

Доказательство теоремы

1) Пусть $\mathsf{E}\,|\xi|^n < \infty$. Тогда $\mathsf{E}\,|\xi|^r$ конечно $\forall r \leqslant n$ ($|\xi|^r \leqslant |\xi|^n + 1$). Рассмотрим

$$\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = \frac{1}{h}\left(\mathsf{E}\,e^{i(t+h)\xi} - \mathsf{E}\,e^{it\xi}\right) = \mathsf{E}\left[e^{i\xi t}\left(\frac{e^{ih\xi} - 1}{h}\right)\right].$$

Заметим, что по теореме Лебега о мажорируемой сходимости данная величина сходится к $\mathsf{E}\,e^{it\xi}(i\xi)$ при $h \to 0$, т.к. $\frac{e^{ih\xi}-1}{h} \xrightarrow{\text{п.н.}} i\xi$ при $h \to 0$ и $|e^{ih\xi} - 1| \leqslant |h\xi|$, а $\mathsf{E}\,|\xi| < \infty$.

Доказательство теоремы

1) Пусть $\mathsf{E}\,|\xi|^n < \infty$. Тогда $\mathsf{E}\,|\xi|^r$ конечно $\forall r \leqslant n$ ($|\xi|^r \leqslant |\xi|^n + 1$). Рассмотрим

$$\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} = \frac{1}{h}\left(\mathsf{E}\,e^{i(t+h)\xi} - \mathsf{E}\,e^{it\xi}\right) = \mathsf{E}\left[e^{i\xi t}\left(\frac{e^{ih\xi}-1}{h}\right)\right].$$

Заметим, что по теореме Лебега о мажорируемой сходимости данная величина сходится к $\mathsf{E}\,e^{it\xi}(i\xi)$ при $h \to 0$, т.к. $\frac{e^{ih\xi}-1}{h} \xrightarrow{\text{п.н.}} i\xi$ при $h \to 0$ и $|e^{ih\xi}-1| \leqslant |h\xi|$, а $\mathsf{E}\,|\xi| < \infty$.

Стало быть, у $\varphi(t)$ есть производная

$$\varphi'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} = \int_{\mathbb{R}} (ix)e^{itx}\,dF_\xi(x).$$

Существование и формулы для следующих производных устанавливаются аналогичным образом по индукции.

Доказательство теоремы

1) Пусть $\mathsf{E}\,|\xi|^n < \infty$. Тогда $\mathsf{E}\,|\xi|^r$ конечно $\forall r \leqslant n$ ($|\xi|^r \leqslant |\xi|^n + 1$). Рассмотрим

$$\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = \frac{1}{h}\left(\mathsf{E}\,e^{i(t+h)\xi} - \mathsf{E}\,e^{it\xi}\right) = \mathsf{E}\left[e^{i\xi t}\left(\frac{e^{ih\xi} - 1}{h}\right)\right].$$

Заметим, что по теореме Лебега о мажорируемой сходимости данная величина сходится к $\mathsf{E}\,e^{it\xi}(i\xi)$ при $h \to 0$, т.к. $\frac{e^{ih\xi}-1}{h} \xrightarrow{\text{п.н.}} i\xi$ при $h \to 0$ и $|e^{ih\xi} - 1| \leqslant |h\xi|$, а $\mathsf{E}\,|\xi| < \infty$.

Стало быть, у $\varphi(t)$ есть производная

$$\varphi'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = \int_{\mathbb{R}} (ix) e^{itx} dF_\xi(x).$$

Существование и формулы для следующих производных устанавливаются аналогичным образом по индукции.

2) Формула $\mathsf{E}\,\xi^r = i^{-r}\varphi^{(r)}(0)$, очевидно, следует из представления производной.

Доказательство теоремы

3) Докажем третье утверждение. Рассмотрим

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iy)^k}{k!} + \frac{(iy)^n}{n!}[\cos(\theta_1 y) + i \sin(\theta_2 y)],$$

где $|\theta_1| \leqslant 1, |\theta_2| \leqslant 1$.Тогда

$$e^{it\xi(\omega)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it\xi(\omega))^k}{k!} + \frac{(it\xi(\omega))^n}{n!}[\cos(\theta_1(\omega)\xi(\omega)t) + i \sin(\theta_2(\omega)\xi(\omega)t)].$$

Доказательство теоремы

3) Докажем третье утверждение. Рассмотрим

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(iy)^k}{k!}+\frac{(iy)^n}{n!}[\cos(\theta_1 y)+i\sin(\theta_2 y)],$$

где $|\theta_1|\leqslant 1, |\theta_2|\leqslant 1$.Тогда

$$e^{it\xi(\omega)}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(it\xi(\omega))^k}{k!}+\frac{(it\xi(\omega))^n}{n!}[\cos(\theta_1(\omega)\xi(\omega)t)+i\sin(\theta_2(\omega)\xi(\omega)t)].$$

Значит,

$$\varphi(t)=\mathsf{E}\,e^{it\xi}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(it)^k}{k!}\,\mathsf{E}\,\xi^k+\frac{(it)^n}{n!}\left(\mathsf{E}\,\xi^n+\varepsilon_n(t)\right),$$

где $\varepsilon_n(t)=\mathsf{E}[\xi^n(\cos(\theta_1\xi t)+i\sin(\theta_2\xi t)-1)]$.

Доказательство теоремы

3) Докажем третье утверждение. Рассмотрим

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iy)^k}{k!} + \frac{(iy)^n}{n!}[\cos(\theta_1 y) + i\sin(\theta_2 y)],$$

где $|\theta_1| \leqslant 1, |\theta_2| \leqslant 1$.Тогда

$$e^{it\xi(\omega)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it\xi(\omega))^k}{k!} + \frac{(it\xi(\omega))^n}{n!}[\cos(\theta_1(\omega)\xi(\omega)t) + i\sin(\theta_2(\omega)\xi(\omega)t)].$$

Значит,

$$\varphi(t) = \mathsf{E}\, e^{it\xi} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!}\, \mathsf{E}\,\xi^k + \frac{(it)^n}{n!}\left(\mathsf{E}\,\xi^n + \varepsilon_n(t)\right),$$

где $\varepsilon_n(t) = \mathsf{E}[\xi^n(\cos(\theta_1\xi t) + i\sin(\theta_2\xi t) - 1)]$. Ясно, что $|\varepsilon_n(t)| \leqslant 3\,\mathsf{E}\,|\xi|^n$. Кроме того, по теореме Лебега $\varepsilon_n(t) \to 0$ при $t \to 0$, ведь $\xi^n(\cos(\theta_1\xi t)) + i\sin(\theta_2\xi t) - 1) \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$ при $t \to 0$ и не превосходит по модулю $3|\xi|^n$. $\square$

Теория вероятностей. Лекция 13.05. Метод характеристических функций

Д. А. Шабанов

мех-мат МГУ, второй курс

13.05.2020

Характеристические функции

Теорема (о разложении в ряд х.ф.)

Пусть $\varphi(t)$ *— х.ф. с.в.* ξ*. Пусть также* $\mathsf{E}\,|\xi|^n < \infty$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$*. Если для некоторого* $T \in (0; +\infty]$ *выполнено*

$$\varlimsup_{n} \left(\frac{\mathsf{E}\,|\xi|^n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{T},$$

то для всех t *из* $(-T; T)$ *выполняется равенство*

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}\,\mathsf{E}\,\xi^n.$$

Доказательство теоремы о разложении в ряд х.ф.

Пусть $t \in (-T; T)$. Тогда

$$\varlimsup_n \left(\frac{\mathsf{E}\,|\xi|^n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{T} < \frac{1}{|t|} \Rightarrow \varlimsup_n \left(\frac{\mathsf{E}\,|\xi|^n \cdot |t|^n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} < 1.$$

Доказательство теоремы о разложении в ряд х.ф.

Пусть $t \in (-T; T)$. Тогда

$$\overline{\lim_n} \left(\frac{\mathsf{E}\,|\xi|^n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{T} < \frac{1}{|t|} \Rightarrow \overline{\lim_n} \left(\frac{\mathsf{E}\,|\xi|^n \cdot |t|^n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} < 1.$$

По признаку Коши ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\mathsf{E}\,|\xi|^n |t|^n}{n!}$ сходится. По теореме о производных х.ф.

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} \mathsf{E}\,\xi^k + R_n(t),$$

где $|R_n(t)| \leqslant 3\frac{|t|^n}{n!} \mathsf{E}\,|\xi|^n \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство теоремы о разложении в ряд х.ф.

Пусть $t \in (-T; T)$. Тогда

$$\overline{\lim_n} \left(\frac{\mathsf{E}\,|\xi|^n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{T} < \frac{1}{|t|} \Rightarrow \overline{\lim_n} \left(\frac{\mathsf{E}\,|\xi|^n \cdot |t|^n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} < 1.$$

По признаку Коши ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\mathsf{E}\,|\xi|^n |t|^n}{n!}$ сходится. По теореме о производных х.ф.

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!}\,\mathsf{E}\,\xi^k + R_n(t),$$

где $|R_n(t)| \leqslant 3\frac{|t|^n}{n!}\,\mathsf{E}\,|\xi|^n \to 0$ при $n \to \infty$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем искомое разложение:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!}\,\mathsf{E}\,\xi^k.$$

Теорема единственности для х.ф.

Теорема (единственности)

Пусть $F(x)$ *и* $G(x)$ *— две функции распределения на* $\mathbb{R}$. *Тогда их характеристические функции равны* $\Leftrightarrow F = G$.

Теорема единственности для х.ф.

Теорема (единственности)

Пусть $F(x)$ *и* $G(x)$ *— две функции распределения на* $\mathbb{R}$*. Тогда их характеристические функции равны* $\Leftrightarrow F = G$.

Доказательство:

$(\Leftarrow)$ очевидно, т.к. в этом случае

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} dG(x).$$

Теорема единственности для х.ф.

Теорема (единственности)

Пусть $F(x)$ *и* $G(x)$ *— две функции распределения на* $\mathbb{R}$*. Тогда их характеристические функции равны* $\Leftrightarrow F = G$.

Доказательство:

$(\Leftarrow)$ очевидно, т.к. в этом случае

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} dG(x).$$

$(\Rightarrow)$ Зафиксируем $a, b \in \mathbb{R}$ и возьмем малое $\varepsilon > 0$. Рассмотрим функцию $f_\varepsilon(x)$:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a \text{ или } x \geqslant b+\varepsilon; \\ \frac{x-a}{\varepsilon}, & x \in [a, a+\varepsilon]; \\ 1, & x \in [a+\varepsilon, b]; \\ \frac{b+\varepsilon-x}{\varepsilon}, & x \in [b, b+\varepsilon]. \end{cases}$$

Покажем, что $\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dF(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dG(x)$.

Доказательство теоремы единственности

Выберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $[a, b + \varepsilon] \subset [-n, n]$. По теореме Вейерштрасса функцию $f_\varepsilon(x)$ можно на отрезке приблизить тригонометрическими многочленами, значит, существует функция

$$f_\varepsilon^n(x) = \sum_{k \in K} a_k e^{i \frac{\pi k}{n} x},$$

где K — конечное подмножество $\mathbb{Z}, a_k \in \mathbb{C}$, с условием

$$\sup_{x \in [-n, n]} |f_\varepsilon^n(x) - f_\varepsilon(x)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Выберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $[a, b+\varepsilon] \subset [-n, n]$. По теореме Вейерштрасса функцию $f_\varepsilon(x)$ можно на отрезке приблизить тригонометрическими многочленами, значит, существует функция

$$f_\varepsilon^n(x) = \sum_{k \in K} a_k e^{i\frac{\pi k}{n}x},$$

где K — конечное подмножество $\mathbb{Z}, a_k \in \mathbb{C}$, с условием

$$\sup_{x \in [-n,n]} |f_\varepsilon^n(x) - f_\varepsilon(x)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Заметим, что функция $f_\varepsilon^n(x)$ — периодическая с периодом $2n$. По построению $|f_\varepsilon^n(x)| \leqslant 2$ на $[-n, n]$, значит, и на всей прямой $|f_\varepsilon^n(x)| \leqslant 2$. По условию

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} dG(x)$$

для всех $t \in \mathbb{R}$. Значит, для всех n

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x) dF(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x) dG(x).$$

Доказательство теоремы единственности

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dF(x) - \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dG(x)\right| = \left|\int\limits_{-n}^{n} f_\varepsilon(x)dF(x) - \int\limits_{-n}^{n} f_\varepsilon(x)dG(x)\right| \leqslant$$

Доказательство теоремы единственности

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dF(x) - \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dG(x)\right| = \left|\int\limits_{-n}^{n} f_\varepsilon(x)dF(x) - \int\limits_{-n}^{n} f_\varepsilon(x)dG(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{-n}^{n} f_\varepsilon^n(x)dF(x) - \int\limits_{-n}^{n} f_\varepsilon^n(x)dG(x)\right| +$$

$$+ \int\limits_{-n}^{n} |f_\varepsilon^n(x) - f_\varepsilon(x)|dF(x) + \int\limits_{-n}^{n} |f_\varepsilon^n(x) - f_\varepsilon(x)|dG(x) \leqslant$$

$$\leqslant \left| \text{так как } \int\limits_{-n}^{n} |f_\varepsilon^n(x) - f_\varepsilon(x)|dF(x) \leqslant \frac{1}{n} \text{ и } \int\limits_{-n}^{n} |f_\varepsilon^n(x) - f_\varepsilon(x)|dG(x) \leqslant \frac{1}{n} \right| \leqslant$$

Доказательство теоремы единственности

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dF(x) - \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dG(x)\right| = \left|\int\limits_{-n}^{n} f_\varepsilon(x)dF(x) - \int\limits_{-n}^{n} f_\varepsilon(x)dG(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{-n}^{n} f_\varepsilon^n(x)dF(x) - \int\limits_{-n}^{n} f_\varepsilon^n(x)dG(x)\right| +$$

$$+ \int\limits_{-n}^{n} |f_\varepsilon^n(x) - f_\varepsilon(x)|dF(x) + \int\limits_{-n}^{n} |f_\varepsilon^n(x) - f_\varepsilon(x)|dG(x) \leqslant$$

$$\leqslant \left|\text{так как } \int\limits_{-n}^{n} |f_\varepsilon^n(x) - f_\varepsilon(x)|dF(x) \leqslant \frac{1}{n} \text{ и } \int\limits_{-n}^{n} |f_\varepsilon^n(x) - f_\varepsilon(x)|dG(x) \leqslant \frac{1}{n}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{n} + \left|\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x)dF(x) - \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x)dG(x)\right| + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} |f_\varepsilon^n(x)|dF(x) +$$

Доказательство теоремы единственности

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} |f_\varepsilon^n(x)| dG(x) \leqslant \left|\text{так как } |f_\varepsilon^n(x)| \leqslant 2\right| \leqslant$$

Доказательство теоремы единственности

$$+\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} |f_\varepsilon^n(x)|dG(x) \leqslant |\text{так как } |f_\varepsilon^n(x)| \leqslant 2| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{n} + 2\left(\int\limits_{-\infty}^{-n} dF(x) + \int\limits_{n+0}^{\infty} dF(x) + \int\limits_{-\infty}^{-n} dG(x) + \int\limits_{n+0}^{\infty} dG(x)\right) =$$

$$= \frac{2}{n} + +2\left(F(-n) + 1 - F(n) + G(-n) + 1 - G(n)\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство теоремы единственности

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} |f_\varepsilon^n(x)| dG(x) \leqslant |\text{так как } |f_\varepsilon^n(x)| \leqslant 2| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{n} + 2\left(\int\limits_{-\infty}^{-n} dF(x) + \int\limits_{n+0}^{\infty} dF(x) + \int\limits_{-\infty}^{-n} dG(x) + \int\limits_{n+0}^{\infty} dG(x)\right) =$$

$$= \frac{2}{n} + +2\left(F(-n) + 1 - F(n) + G(-n) + 1 - G(n)\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Итак, мы доказали, $\forall \varepsilon > 0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dF(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dG(x).$$

При $\varepsilon \to 0$ выполнено $f_\varepsilon(x) \to I_{(a,b]}(x)$, и функции $f_\varepsilon(x)$ равномерно ограничены. Значит, по теореме Лебега

Доказательство теоремы единственности

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon dF(x) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int\limits_{\mathbb{R}} I_{(a,b]}(x)dF(x) = \int\limits_{a+0}^{b} dF(x) = F(b) - F(a).$$

Доказательство теоремы единственности

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon dF(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int\limits_{\mathbb{R}} I_{(a,b]}(x)dF(x) = \int\limits_{a+0}^{b} dF(x) = F(b) - F(a).$$

Следовательно, для всех $a < b$

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a).$$

Значит, устремляя $a \to -\infty$, получаем искомое:

$$F(b) = G(b) \ \ \forall b \in \mathbb{R}.$$

Теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы единственности

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon dF(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int\limits_{\mathbb{R}} I_{(a,b]}(x)dF(x) = \int\limits_{a+0}^{b} dF(x) = F(b) - F(a).$$

Следовательно, для всех $a < b$

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a).$$

Значит, устремляя $a \to -\infty$, получаем искомое:

$$F(b) = G(b) \ \ \forall b \in \mathbb{R}.$$

Теорема доказана. $\square$

Замечание

Теорема единственности верна и для характеристических функций случайных векторов.

Пример

Задача

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 — независимые и нормальные, $\xi \sim \mathcal{N}(a_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$. Найдите распределение $\xi_1 + \xi_2$.

Пример

Задача

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 — независимые и нормальные, $\xi \sim \mathcal{N}(a_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$. Найдите распределение $\xi_1 + \xi_2$.

Решение. Начнем с вычисления характеристических функций ξ_1 и ξ_2. Заметим, что если $\xi_j \sim \mathcal{N}(a_j, \sigma_j^2)$, то

$$\frac{\xi_j - a_j}{\sigma_j} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Значит, х.ф. ξ_j равна

$$\varphi_{\xi_j}(t) = e^{i \cdot a_j t - \frac{\sigma_j^2 t^2}{2}}.$$

Пример

Задача

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 — независимые и нормальные, $\xi \sim \mathcal{N}(a_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$. Найдите распределение $\xi_1 + \xi_2$.

Решение. Начнем с вычисления характеристических функций ξ_1 и ξ_2. Заметим, что если $\xi_j \sim \mathcal{N}(a_j, \sigma_j^2)$, то

$$\frac{\xi_j - a_j}{\sigma_j} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Значит, х.ф. ξ_j равна

$$\varphi_{\xi_j}(t) = e^{i \cdot a_j t - \frac{\sigma_j^2 t^2}{2}}.$$

В силу независимости

$$\varphi_{\xi_1 + \xi_2}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \cdot \varphi_{\xi_2}(t) = e^{i \cdot (a_1 + a_2) t - \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) t^2}{2}}.$$

Пример

Задача

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 — независимые и нормальные, $\xi \sim \mathcal{N}(a_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$. Найдите распределение $\xi_1 + \xi_2$.

Решение. Начнем с вычисления характеристических функций ξ_1 и ξ_2. Заметим, что если $\xi_j \sim \mathcal{N}(a_j, \sigma_j^2)$, то

$$\frac{\xi_j - a_j}{\sigma_j} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Значит, х.ф. ξ_j равна

$$\varphi_{\xi_j}(t) = e^{i \cdot a_j t - \frac{\sigma_j^2 t^2}{2}}.$$

В силу независимости

$$\varphi_{\xi_1 + \xi_2}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \cdot \varphi_{\xi_2}(t) = e^{i \cdot (a_1 + a_2) t - \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) t^2}{2}}.$$

Это х.ф. распределения $\mathcal{N}(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. В силу теоремы единственности получаем, что

$$\xi_1 + \xi_2 \sim \mathcal{N}(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Многомерные характеристические функции

Теорема (критерий независимости набора с.в. в терминах х.ф.)

Компоненты случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ *независимы в совокупности* $\Leftrightarrow$ *х.ф.* ξ *есть произведение х.ф. компонент.*

Многомерные характеристические функции

Теорема (критерий независимости набора с.в. в терминах х.ф.)

Компоненты случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *независимы в совокупности* $\Leftrightarrow$ *х.ф.* ξ *есть произведение х.ф. компонент.*

Доказательство: $(\Rightarrow)$

$$\varphi_\xi(t_1, \ldots, t_n) = \mathsf{E}\, e^{i \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k t_k} = \mathsf{E} \prod_{k=1}^{n} e^{i t_k \xi_k} = \left|\text{независимость}\right| =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathsf{E}\, e^{i t_k \xi_k} = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t_k).$$

Многомерные характеристические функции

Теорема (критерий независимости набора с.в. в терминах х.ф.)

Компоненты случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *независимы в совокупности* $\Leftrightarrow$ *х.ф.* ξ *есть произведение х.ф. компонент.*

Доказательство: $(\Rightarrow)$

$$\varphi_\xi(t_1, \ldots, t_n) = \mathsf{E}\, e^{i \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k t_k} = \mathsf{E} \prod_{k=1}^{n} e^{i t_k \xi_k} = |\text{независимость}| =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathsf{E}\, e^{i t_k \xi_k} = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t_k).$$

$(\Leftarrow)$ Обозначим через $F_1(x), \ldots, F_n(x)$ — ф.р. случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Введем

$$G(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \cdot \ldots \cdot F_n(x_n).$$

Это будет многомерная ф.р. Пусть $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — случайный вектор с ф.р. $G(x_1, \ldots, x_n)$.

Доказательство теоремы

Тогда компоненты η независимы, причем $\eta_j \stackrel{d}{=} \xi_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$.

Доказательство теоремы

Тогда компоненты η независимы, причем $\eta_j \overset{d}{=} \xi_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Отсюда получаем, что

$$\varphi_\xi(t_1, \ldots, t_n) = |\text{условие}| = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t_k) = |\text{о.р.}| = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\eta_k}(t_k) =$$

Доказательство теоремы

Тогда компоненты η независимы, причем $\eta_j \stackrel{d}{=} \xi_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Отсюда получаем, что

$$\varphi_\xi(t_1, \ldots, t_n) = |\text{условие}| = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t_k) = |\text{о.р.}| = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\eta_k}(t_k) =$$

$$= |\text{независимость } \eta_1, \ldots, \eta_n| = \varphi_\eta(t_1, \ldots, t_n).$$

Доказательство теоремы

Тогда компоненты η независимы, причем $\eta_j \stackrel{d}{=} \xi_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Отсюда получаем, что

$$\varphi_\xi(t_1, \ldots, t_n) = |\text{условие}| = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t_k) = |\text{о.р.}| = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\eta_k}(t_k) =$$

$$= \big|\text{независимость } \eta_1, \ldots, \eta_n\big| = \varphi_\eta(t_1, \ldots, t_n).$$

В итоге, характеристические функции случайных векторов ξ и η. По теореме единственности совпадают и их функции распределения:

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n) = G(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \cdot \ldots \cdot F_n(x_n).$$

Согласно критерию независимости для ф.р. получаем, что $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы в совокупности. $\square$

Формулы обращения

Можно ли явным образом восстановить ф.р. по характеристической функции?

Формулы обращения

Можно ли явным образом восстановить ф.р. по характеристической функции?

Теорема (формула обращения)

Пусть $\varphi(t)$ *— х.ф. для ф.р.* $F(x)$ *на прямой. Тогда*
1) $\forall a, b \;\; a < b, \;\; a, b \in \mathbb{C}(F)$ *выполнено*

$$F(b) - F(a) = \lim_{c \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-c}^{c} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt.$$

2) Если $\int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt < +\infty$, *то* $F(x)$ *имеет плотность* $f(x)$, *причем*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt.$$

Характеристические функции

Как выяснить, является ли функция характеристической?

Характеристические функции

Как выяснить, является ли функция характеристической?

Определение

Функция (комплекснозначная) $\varphi(t), t \in \mathbb{R}$ *называется неотрицательно определенной, если* $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \forall t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}\ \ \forall z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ *выполнено*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \varphi(t_i - t_j) z_i \overline{z_j} \geqslant 0.$$

Характеристические функции

Как выяснить, является ли функция характеристической?

Определение

Функция (комплекснозначная) $\varphi(t), t \in \mathbb{R}$ *называется неотрицательно определенной, если* $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R} \ \ \forall z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ *выполнено*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \varphi(t_i - t_j) z_i \overline{z_j} \geqslant 0.$$

Теорема (Бохнер–Хинчин)

Пусть $(\varphi(t), \ t \in \mathbb{R})$ *— комплекснозначная функция, причем* $\varphi(0) = 1$ *и* $\varphi(t)$ *непрерывна в нуле. Тогда* $\varphi(t)$ *является характеристической функцией некоторой с.в.* $\Leftrightarrow$ $\varphi(t)$ *неотрицательно определена.*

Доказательство теоремы Бохнера-Хинчина

($\Rightarrow$) Пусть $\varphi(t)$ — х.ф. с.в. ξ. Пусть $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\sum_{k,j=1}^{n} \varphi(t_k - t_j) z_k \overline{z_j} = \sum_{k,j=1}^{n} \mathsf{E}\, e^{i(t_k - t_j)\xi} z_k \overline{z_j} = \mathsf{E} \sum_{k,j=1}^{n} e^{i(t_k - t_j)\xi} z_k \overline{z_j}$$

$$= \mathsf{E} \sum_{k,j=1}^{n} (z_k e^{it_k\xi}) \overline{(z_j e^{it_j\xi})} = \mathsf{E} \left| \sum_{k=1}^{n} z_k e^{it_k\xi} \right|^2 \geqslant 0.$$

$\square$

Плотность и относительная компактность

Определение

Семейство вероятностных мер $\{\mathsf{P}_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *на* $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ *называется относительно компактным, если любая последовательность* $\{\mathsf{P}_{\alpha_n}, n \in \mathbb{N}\} \subset \{\mathsf{P}_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Плотность и относительная компактность

Определение

Семейство вероятностных мер $\{\mathsf{P}_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *на* $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ *называется относительно компактным, если любая последовательность* $\{\mathsf{P}_{\alpha_n}, n \in \mathbb{N}\} \subset \{\mathsf{P}_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Определение

Семейство вероятностных мер $\{\mathsf{P}_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *на* $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ *называется плотным, если* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ *компакт* $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}^m$ *т.,ч. для любого* $\alpha \in \mathfrak{A}$

$$\mathsf{P}_\alpha(\mathbb{R}^m \backslash K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Плотность и относительная компактность

Определение

Семейство вероятностных мер $\{\mathsf{P}_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *на* $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ *называется относительно компактным, если любая последовательность* $\{\mathsf{P}_{\alpha_n}, n \in \mathbb{N}\} \subset \{\mathsf{P}_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Определение

Семейство вероятностных мер $\{\mathsf{P}_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *на* $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ *называется плотным, если* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ *компакт* $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}^m$ *т.,ч. для любого* $\alpha \in \mathfrak{A}$

$$\mathsf{P}_\alpha(\mathbb{R}^m \backslash K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Теорема (Ю. В. Прохоров)

Семейство вероятностных мер $\{\mathsf{P}_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *на* $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ *является относительно компактным* $\Leftrightarrow$ *оно является плотным.*

Пусть $\{\mathsf{P}_n, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность вероятностных мер на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Лемма (1)

Пусть $\{\mathsf{P}_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— плотное семейство и любая слабо сходящаяся подпоследовательность* $\{\mathsf{P}_{n'}\}$ *слабо сходится к одной и той же мере* P*. Тогда* $\mathsf{P}_n \xrightarrow{w} \mathsf{P}$*.*

Метод характеристических функций

Пусть $\{\mathsf{P}_n, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность вероятностных мер на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Лемма (1)

Пусть $\{\mathsf{P}_n, n \in \mathbb{N}\}$ — плотное семейство и любая слабо сходящаяся подпоследовательность $\{\mathsf{P}_{n'}\}$ слабо сходится к одной и той же мере P. Тогда $\mathsf{P}_n \xrightarrow{w} \mathsf{P}$.

Доказательство. Предположим, что $\mathsf{P}_n \overset{w}{\nrightarrow} \mathsf{P}$. Тогда существует $f(x)$ — ограниченная непрерывная функция т.,ч.

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\mathsf{P}_n(dx) \nrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\mathsf{P}(dx).$$

Доказательство леммы 1

Значит, $\exists \varepsilon_0 > 0$ и подпоследовательность $\{n'\} \subset \mathbb{N}$ т.,ч. для любого n'

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \mathsf{P}_{n'}(dx) - \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \mathsf{P}(dx) \right| \geqslant \varepsilon_0.$$

Доказательство леммы 1

Значит, $\exists \varepsilon_0 > 0$ и подпоследовательность $\{n'\} \subset \mathbb{N}$ т.,ч. для любого n'

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \mathsf{P}_{n'}(dx) - \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \mathsf{P}(dx) \right| \geqslant \varepsilon_0.$$

По теореме Прохорова существует подпоследовательность $\{\mathsf{P}_{n''}\} \subset \{\mathsf{P}_{n'}\}$ т.,ч. $\mathsf{P}_{n''}$ слабо сходится. По условию леммы $\mathsf{P}_{n''} \xrightarrow{\mathsf{w}} \mathsf{P}$. Значит,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \mathsf{P}_{n''}(dx) \to \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \mathsf{P}(dx).$$

Противоречие с выбором последовательности $\{\mathsf{P}_{n'}\}$. $\square$

Метод характеристических функций

Лемма (2)

Пусть $\{\mathsf{P}_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— плотное семейство, а* $\{\varphi_n(t), n \in \mathbb{N}\}$ *— соответствующие им х.ф. Тогда последовательность* $\{\mathsf{P}_n, n \in \mathbb{N}\}$ *слабо сходится* $\Longleftrightarrow$ $\forall t \in \mathbb{R}\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$.

Метод характеристических функций

Лемма (2)

Пусть $\{\mathsf{P}_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— плотное семейство, а* $\{\varphi_n(t), n \in \mathbb{N}\}$ *— соответствующие им х.ф. Тогда последовательность* $\{\mathsf{P}_n, n \in \mathbb{N}\}$ *слабо сходится* $\iff$ $\forall t \in \mathbb{R} \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$.

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Пусть $\mathsf{P}_n \xrightarrow{\mathsf{w}} \mathsf{P}$. Тогда $\cos tx, \sin tx$ — непрерывные ограниченные функции. Значит,

$$\varphi_n(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathsf{P}_n(dx) \longrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathsf{P}(dx).$$

Доказательство леммы 2

($\Leftarrow$) Покажем, что любая слабо сходящейся последовательность $\{\mathsf{P}_{n'}\} \subset \{\mathsf{P}_n\}$ сходится к некоторому единому пределу. Обозначим $\varphi(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$.

Доказательство леммы 2

($\Leftarrow$) Покажем, что любая слабо сходящейся последовательность $\{\mathsf{P}_{n'}\} \subset \{\mathsf{P}_n\}$ сходится к некоторому единому пределу. Обозначим $\varphi(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$.

Пусть $\mathsf{P}_{n'} \xrightarrow{\mathrm{w}} \mathsf{P}$, где P — некоторая вероятностная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Тогда х.ф. $\varphi_{n'}(t)$ сходится к х.ф. P :

$$\varphi_{n'}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathsf{P}_{n'}(dx) \underset{n'\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathsf{P}(dx) = \psi(t).$$

Но по условию $\varphi_{n'}(t) \longrightarrow \varphi(t)$. Значит, $\psi(t) = \varphi(t)$.

Доказательство леммы 2

$(\Leftarrow)$ Покажем, что любая слабо сходящейся последовательность $\{\mathsf{P}_{n'}\} \subset \{\mathsf{P}_n\}$ сходится к некоторому единому пределу. Обозначим $\varphi(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$.

Пусть $\mathsf{P}_{n'} \xrightarrow{\mathrm{w}} \mathsf{P}$, где P — некоторая вероятностная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Тогда х.ф. $\varphi_{n'}(t)$ сходится к х.ф. P :

$$\varphi_{n'}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathsf{P}_{n'}(dx) \underset{n'\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathsf{P}(dx) = \psi(t).$$

Но по условию $\varphi_{n'}(t) \longrightarrow \varphi(t)$. Значит, $\psi(t) = \varphi(t)$.

По теореме Прохорова слабо сходящаяся последовательность существует, значит, у любого предела $(\mathsf{P}_{n''} \xrightarrow{\mathrm{w}} \mathsf{Q})$ х.ф. должна быть равна $\varphi(t)$.

По теореме единственности $\mathsf{Q} = \mathsf{P}$. Значит, по лемме 1 имеет место слабая сходимость $\mathsf{P}_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \mathsf{P}$. $\square$

Метод характеристических функций

Лемма (3)

Пусть P — *вероятностная мера на* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, *а* $\varphi(t)$ — *её характеристическая функция. Тогда* $\forall a > 0$

$$\int\limits_{|x| \geqslant \frac{1}{a}} \mathsf{P}(dx) \leqslant \frac{7}{a} \int\limits_{0}^{a} (1 - \operatorname{Re} \varphi(t)) dt.$$

Метод характеристических функций

Лемма (3)

Пусть P — *вероятностная мера на* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, *а* $\varphi(t)$ — *её характеристическая функция. Тогда* $\forall a > 0$

$$\int\limits_{|x| \geqslant \frac{1}{a}} \mathsf{P}(dx) \leqslant \frac{7}{a} \int\limits_0^a (1 - \operatorname{Re} \varphi(t)) dt.$$

Доказательство. Напомним, что $\operatorname{Re} \varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos tx \, \mathsf{P}(dx)$. По теореме Фубини

$$\frac{1}{a} \int\limits_0^a (1 - \operatorname{Re} \varphi(t)) dt = \frac{1}{a} \int\limits_0^a \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos tx) \mathsf{P}(dx) \right) dt =$$

Лемма (3)

Пусть P *— вероятностная мера на* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, *а* $\varphi(t)$ *— её характеристическая функция. Тогда* $\forall a > 0$

$$\int\limits_{|x| \geqslant \frac{1}{a}} \mathsf{P}(dx) \leqslant \frac{7}{a} \int\limits_0^a (1 - \operatorname{Re}\varphi(t))dt.$$

Доказательство. Напомним, что $\operatorname{Re}\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos tx\, \mathsf{P}(dx)$. По теореме Фубини

$$\frac{1}{a}\int\limits_0^a (1 - \operatorname{Re}\varphi(t))dt = \frac{1}{a}\int\limits_0^a \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos tx) \mathsf{P}(dx) \right) dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{a} \int\limits_0^a (1 - \cos tx)dt \right] \mathsf{P}(dx) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin ax}{ax} \right) \mathsf{P}(dx) \geqslant$$

Доказательство леммы 3

$$\geqslant \int\limits_{|x|\geqslant \frac{1}{a}} \left(1 - \frac{\sin ax}{ax}\right) \mathsf{P}(dx) \geqslant \inf_{|y|\geqslant 1} \left(1 - \frac{\sin y}{y}\right) \int\limits_{|x|\geqslant \frac{1}{a}} \mathsf{P}(dx)$$

$$\geqslant \left|\text{т.к. } 1 - \sin 1 \geqslant \frac{1}{7}\right| \geqslant \frac{1}{7} \int\limits_{|x|\geqslant \frac{1}{a}} \mathsf{P}(dx).$$

$\square$

Метод характеристических функций

Теорема (непрерывности для х.ф.)

Пусть $\{\mathsf{P}_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность вероятностных мер на* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, *а* $\{\varphi_n(t), n \in \mathbb{N}\}$ *— соответствующие им х.ф.*

1) Если $\mathsf{P}_n \xrightarrow{w} \mathsf{P}$, *то* $\forall t \in \mathbb{R}\ \ \varphi_n(t) \to \varphi(t)$, *где* $\varphi(t)$ *— х.ф.* P.

2) Если $\forall t \in \mathbb{R}\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$, *причем функция* $\varphi(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ *непрерывна в нуле, то* $\varphi(t)$ *является х.ф. некоторой вероятностной меры* P *и* $\mathsf{P}_n \xrightarrow{w} \mathsf{P}$.

Метод характеристических функций

Теорема (непрерывности для х.ф.)

Пусть $\{\mathsf{P}_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность вероятностных мер на* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*, а* $\{\varphi_n(t), n \in \mathbb{N}\}$ *— соответствующие им х.ф.*
1) Если $\mathsf{P}_n \xrightarrow{w} \mathsf{P}$*, то* $\forall t \in \mathbb{R}\ \ \varphi_n(t) \to \varphi(t)$*, где* $\varphi(t)$ *— х.ф.* P*.*
2) Если $\forall t \in \mathbb{R}\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$*, причем функция* $\varphi(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ *непрерывна в нуле, то* $\varphi(t)$ *является х.ф. некоторой вероятностной меры* P *и* $\mathsf{P}_n \xrightarrow{w} \mathsf{P}$*.*

Доказательство. 1) Сразу следует из того, что $\cos(tx)$ и $\sin(tx)$ — непрерывные ограниченные функции.

Теорема (непрерывности для х.ф.)

Пусть $\{\mathsf{P}_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность вероятностных мер на* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, *а* $\{\varphi_n(t), n \in \mathbb{N}\}$ *— соответствующие им х.ф.*
1) Если $\mathsf{P}_n \xrightarrow{w} \mathsf{P}$, *то* $\forall t \in \mathbb{R}$ $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$, *где* $\varphi(t)$ *— х.ф.* P.
2) Если $\forall t \in \mathbb{R}$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$, *причем функция* $\varphi(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ *непрерывна в нуле, то* $\varphi(t)$ *является х.ф. некоторой вероятностной меры* P *и* $\mathsf{P}_n \xrightarrow{w} \mathsf{P}$.

Доказательство. 1) Сразу следует из того, что $\cos(tx)$ и $\sin(tx)$ — непрерывные ограниченные функции.
2) Покажем, что $\{\mathsf{P}_n, n \in \mathbb{N}\}$ — плотное семейство. Согласно лемме 3

$$\mathsf{P}_n\left(\mathbb{R}\backslash[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]\right) \leqslant \int\limits_{|x|\geqslant \frac{1}{a}} \mathsf{P}_n(dx)$$

$$\leqslant \frac{7}{a}\int\limits_0^a (1 - \operatorname{Re}\varphi_n(t))dt \to \frac{7}{a}\int\limits_0^a (1 - \operatorname{Re}\varphi(t))dt \quad \text{(по теореме Лебега).}$$

Доказательство теоремы непрерывности

Раз $\varphi(t)$ непрерывна в нуле и $\varphi(0) = 1$ (т.к. $\varphi_n(0) = 1 \;\; \forall n$), то существует a т.,ч. $1 - \operatorname{Re}\varphi(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{14}$ для заданного $\varepsilon > 0$ и всех $t \in [0, a]$. Значит,

$$\frac{7}{a}\int\limits_0^a (1 - \operatorname{Re}\varphi(t))dt \leqslant \frac{7}{a} a \frac{\varepsilon}{14} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $\exists N$ т.,ч. $\forall n > N$

$$\mathsf{P}_n\left(\mathbb{R}\backslash[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]\right) \leqslant \varepsilon,$$

что и означает плотность множества $\{\mathsf{P}_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Доказательство теоремы непрерывности

Раз $\varphi(t)$ непрерывна в нуле и $\varphi(0) = 1$ (т.к. $\varphi_n(0) = 1 \;\; \forall n$), то существует a т.,ч. $1 - \operatorname{Re}\varphi(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{14}$ для заданного $\varepsilon > 0$ и всех $t \in [0, a]$. Значит,

$$\frac{7}{a}\int\limits_0^a (1 - \operatorname{Re}\varphi(t))dt \leqslant \frac{7}{a} a \frac{\varepsilon}{14} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $\exists N$ т.,ч. $\forall n > N$

$$\mathsf{P}_n\left(\mathbb{R}\backslash[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]\right) \leqslant \varepsilon,$$

что и означает плотность множества $\{\mathsf{P}_n, n \in \mathbb{N}\}$.
В силу леммы 2 мы получаем, что существует вероятностная мера P на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ т.,ч. $\mathsf{P}_n \xrightarrow{\mathsf{w}} \mathsf{P}$. Но тогда $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_n(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx}\mathsf{P}_n(dx) \to \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx}\mathsf{P}(dx) = \psi(t).$$

По условию же $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$. Значит, $\varphi(t) = \psi(t)$ является х.ф. меры P. $\square$

Центральная предельная теорема

Следствие

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \xi$ *— с.в. Тогда* $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \iff \forall t \in \mathbb{R}\ \ \varphi_{\xi_n}(t) \to \varphi_\xi(t)$.

Центральная предельная теорема

Следствие

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \xi$ *— с.в. Тогда* $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \iff \forall t \in \mathbb{R} \;\; \varphi_{\xi_n}(t) \to \varphi_\xi(t)$.

Теорема (Центральная предельная теорема)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность независимых с.в. с одинаковым распределением, причем* $0 < \mathsf{D}\,\xi_n < +\infty$. *Обозначим* $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. *Тогда*

$$\frac{S_n - \mathsf{E}\,S_n}{\sqrt{\mathsf{D}\,S_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Центральная предельная теорема

Следствие

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \xi$ *— с.в. Тогда* $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \iff \forall t \in \mathbb{R}\ \ \varphi_{\xi_n}(t) \to \varphi_\xi(t)$.

Теорема (Центральная предельная теорема)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность независимых с.в. с одинаковым распределением, причем* $0 < \mathsf{D}\,\xi_n < +\infty$. *Обозначим* $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. *Тогда*

$$\frac{S_n - \mathsf{E}\,S_n}{\sqrt{\mathsf{D}\,S_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Доказательство. Положим $a = \mathsf{E}\,\xi_i, \sigma^2 = \mathsf{D}\,\xi_i$. Обозначим $\eta_i = \frac{\xi_i - a}{\sigma}$. Тогда $\mathsf{E}\,\eta_i = 0, \mathsf{D}\,\eta_i = 1$ и они одинаково распределены. Кроме того,

$$\frac{S_n - \mathsf{E}\,S_n}{\sqrt{\mathsf{D}\,S_n}} = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\eta_1 + \ldots + \eta_n}{\sqrt{n}}.$$

Доказательство ЦПТ

В силу теоремы непрерывности нам достаточно показать, что х.ф. $\zeta_n = \frac{\eta_1+\ldots+\eta_n}{\sqrt{n}}$ сходится к $e^{-\frac{t^2}{2}}$ при $n \to +\infty$, то есть к х.ф. $\mathcal{N}(0,1)$.

Доказательство ЦПТ

В силу теоремы непрерывности нам достаточно показать, что х.ф. $\zeta_n = \frac{\eta_1+\ldots+\eta_n}{\sqrt{n}}$ сходится к $e^{-\frac{t^2}{2}}$ при $n \to +\infty$, то есть к х.ф. $\mathcal{N}(0,1)$.

$$\varphi_{\zeta_n}(t) = \mathsf{E}\, e^{i\frac{S_n - \mathsf{E}\, S_n}{\sqrt{\mathsf{D}\, S_n}}t} = \mathsf{E}\, e^{i\frac{\eta_1+\ldots+\eta_n}{\sqrt{n}}t} = \left|\text{независимость } \eta_1, \ldots, \eta_n\right|$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \varphi_{\eta_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left|\text{одинак. распред.}\right| = \left(\varphi_{\eta_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$

Доказательство ЦПТ

В силу теоремы непрерывности нам достаточно показать, что х.ф. $\zeta_n = \frac{\eta_1+\ldots+\eta_n}{\sqrt{n}}$ сходится к $e^{-\frac{t^2}{2}}$ при $n \to +\infty$, то есть к х.ф. $\mathcal{N}(0,1)$.

$$\varphi_{\zeta_n}(t) = \mathsf{E}\, e^{i\frac{S_n - \mathsf{E}\, S_n}{\sqrt{\mathsf{D}\, S_n}}t} = \mathsf{E}\, e^{i\frac{\eta_1+\ldots+\eta_n}{\sqrt{n}}t} = \left|\text{независимость } \eta_1,\ldots,\eta_n\right|$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \varphi_{\eta_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left|\text{одинак. распред.}\right| = \left(\varphi_{\eta_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$

По теореме о производных х.ф. при $s \to 0$ выполнено

$$\varphi_{\eta_1}(s) = 1 + is\,\mathsf{E}\,\eta_1 - \frac{1}{2}s^2\,\mathsf{E}\,\eta_1^2 + o(s^2).$$

Доказательство ЦПТ

В силу теоремы непрерывности нам достаточно показать, что х.ф. $\zeta_n = \frac{\eta_1 + \ldots + \eta_n}{\sqrt{n}}$ сходится к $e^{-\frac{t^2}{2}}$ при $n \to +\infty$, то есть к х.ф. $\mathcal{N}(0,1)$.

$$\varphi_{\zeta_n}(t) = \mathsf{E}\, e^{i\frac{S_n - \mathsf{E}\, S_n}{\sqrt{\mathsf{D}\, S_n}}t} = \mathsf{E}\, e^{i\frac{\eta_1 + \ldots + \eta_n}{\sqrt{n}}t} = \left|\text{независимость } \eta_1, \ldots, \eta_n\right|$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \varphi_{\eta_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left|\text{одинак. распред.}\right| = \left(\varphi_{\eta_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$

По теореме о производных х.ф. при $s \to 0$ выполнено

$$\varphi_{\eta_1}(s) = 1 + is\,\mathsf{E}\,\eta_1 - \frac{1}{2}s^2\,\mathsf{E}\,\eta_1^2 + o(s^2).$$

Вспомним, что $\mathsf{E}\,\eta_1 = 0$, а $\mathsf{E}\,\eta_1^2 = 1$. Значит,

$$\varphi_{\zeta_n}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Теория вероятностей. Лекция 20.05. Центральная предельная теорема

Д. А. Шабанов

мех-мат МГУ, второй курс

20.05.2020

Центральная предельная теорема

Теорема (Центральная предельная теорема)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность независимых с.в. с одинаковым распределением, причем* $0 < \mathsf{D}\,\xi_n < +\infty$. *Обозначим* $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. *Тогда*

$$\frac{S_n - \mathsf{E}\,S_n}{\sqrt{\mathsf{D}\,S_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Следствия

Следствие (1)

В условиях ЦПТ $\forall x \in \mathbb{R}$ *выполнено*

$$\mathsf{P}\left(\frac{S_n - \mathsf{E}\, S_n}{\sqrt{\mathsf{D}\, S_n}} \leqslant x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = \Phi(x).$$

Следствия

Следствие (1)

В условиях ЦПТ $\forall x \in \mathbb{R}$ *выполнено*

$$\mathsf{P}\left(\frac{S_n - \mathsf{E}\,S_n}{\sqrt{\mathsf{D}\,S_n}} \leqslant x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = \Phi(x).$$

Доказательство.

$$\frac{S_n - \mathsf{E}\,S_n}{\sqrt{\mathsf{D}\,S_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \Leftrightarrow$$

ф.р. $\frac{S_n - \mathsf{E}\,S_n}{\sqrt{\mathsf{D}\,S_n}}$ сходится к ф.р. $\mathcal{N}(0,1)$ во всех точках непрерывности.
Но $\Phi(x)$ непрерывна на всей $\mathbb{R}$. $\square$

Следствия

Следствие (2)

В условиях ЦПТ обозначим $\mathsf{E}\,\xi_i = a, \mathsf{D}\,\xi_i = \sigma^2$. *Тогда*

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Следствия

Следствие (2)

В условиях ЦПТ обозначим $\mathsf{E}\,\xi_i = a, \mathsf{D}\,\xi_i = \sigma^2$. *Тогда*

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Доказательство.

Заметим, что если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, то $c\,\xi_n \xrightarrow{d} c\,\xi$ для любого $c \in \mathbb{R}$. Значит,

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right) = \frac{S_n - \mathsf{E}\,S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \sigma \cdot \mathcal{N}(0,1) = \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

$\square$

Следствия

Данное следствие показывает, что с вероятностью $\sim 0,99$ выполнено

$$\sqrt{n}\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \leqslant 3\sigma.$$

Следствия

Данное следствие показывает, что с вероятностью $\sim 0,99$ выполнено

$$\sqrt{n}\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \leqslant 3\sigma.$$

Из УЗБЧ мы знаем, что

$$\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

Следствия

Данное следствие показывает, что с вероятностью $\sim 0,99$ выполнено

$$\sqrt{n}\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \leqslant 3\sigma.$$

Из УЗБЧ мы знаем, что

$$\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

ЦПТ показывает, что типичная скорость убывания к нулю такой последовательности есть $O(n^{-1/2})$.

Теорема Берри–Эссеена

Какова скорость сходимости в самой ЦПТ? Как быстро мы приближаемся к ф.р. $\mathcal{N}(0,1)$?

Теорема Берри–Эссеена

Какова скорость сходимости в самой ЦПТ? Как быстро мы приближаемся к ф.р. $\mathcal{N}(0,1)$?

Теорема (Берри–Эссеен)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— н.о.р.с.в.,* $\mathsf{E}\,|\xi_i|^3 < +\infty, \mathsf{E}\,\xi_i = a, \mathsf{D}\,\xi_i = \sigma^2 > 0.$ *Обозначим*

$$T_n = \frac{S_n - \mathsf{E}\,S_n}{\sqrt{\mathsf{D}\,S_n}}.$$

Тогда существует такая абсолютная константа $C > 0$*, что*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{T_n}(x) - \Phi(x)| \leqslant C \cdot \frac{\mathsf{E}\,|\xi_1 - a|^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}.$$

Теорема Берри–Эссеена

Какова скорость сходимости в самой ЦПТ? Как быстро мы приближаемся к ф.р. $\mathcal{N}(0,1)$?

Теорема (Берри–Эссеен)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— н.о.р.с.в.,* $\mathsf{E}\,|\xi_i|^3 < +\infty, \mathsf{E}\,\xi_i = a, \mathsf{D}\,\xi_i = \sigma^2 > 0.$
Обозначим

$$T_n = \frac{S_n - \mathsf{E}\,S_n}{\sqrt{\mathsf{D}\,S_n}}.$$

Тогда существует такая абсолютная константа $C > 0$, *что*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{T_n}(x) - \Phi(x)| \leqslant C \cdot \frac{\mathsf{E}\,|\xi_1 - a|^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}.$$

Что известно про константу? В общем случае C нельзя взять меньше, чем $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sim 0,3989$. И известно, что

$$C \leqslant 0,478\ldots.$$

Пример

Пример

Складываются 10^4 чисел, каждое из которых было вычислено с точностью 10^{-6}. Найти в каких пределах лежит суммарная ошибка с вероятностью $0,99$, считая все ошибки независимыми.

Пример

Пример

Складываются 10^4 чисел, каждое из которых было вычислено с точностью 10^{-6}. Найти в каких пределах лежит суммарная ошибка с вероятностью $0,99$, считая все ошибки независимыми.

Решение. $\xi_i \sim U(-10^{-6}, 10^{-6}), \mathsf{E}\,\xi_i = a = 0, \ \ \sigma^2 = \mathsf{D}\,\xi_i = \frac{1}{3}10^{-12}$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ — суммарная ошибка. Согласно ЦПТ

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_n - \mathsf{E}\,S_n}{\sqrt{\mathsf{D}\,S_n}}\right| \leqslant u\right) \approx \Phi(u) - \Phi(-u),$$

где $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ — ф.р. $\mathcal{N}(0,1)$. Из таблиц значений при $u = 2,58$ верно $\Phi(u) - \Phi(-u) \geqslant 0,99$. Значит,

$$\mathsf{P}(|S_n| \leqslant 2,58\sqrt{\mathsf{D}\,S_n}) \geqslant 0,99 - \frac{2C}{6\sqrt{n}},$$

где $2,58\sqrt{\mathsf{D}\,S_n} = 2,58 \cdot 10^{-6}\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{n} \approx 148,95 \cdot 10^{-6}$. $\square$

Сходимость случайных векторов

Определение

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \xi$ — *случайные векторы размерности* m. *Тогда последовательность* ξ_n *сходится к* ξ

1. *с вероятностью* 1 (*почти наверное,* $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$), *если*

$$\mathsf{P}(\lim_{n\to+\infty} \xi_n = \xi) = 1.$$

Сходимость случайных векторов

Определение

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \xi$ *— случайные векторы размерности* m. *Тогда последовательность* ξ_n *сходится к* ξ

1. *с вероятностью* 1 (*почти наверное,* $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$), *если*

$$\mathsf{P}(\lim_{n\to+\infty} \xi_n = \xi) = 1.$$

2. *по вероятности* ($\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$), *если* $\forall \varepsilon > 0$ *выполнено*

$$\mathsf{P}(||\xi_n - \xi||_2 \geqslant \varepsilon) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

где $||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$ *для* $x \in \mathbb{R}^m$.

Сходимость случайных векторов

Определение

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \xi$ *— случайные векторы размерности* m. *Тогда последовательность* ξ_n *сходится к* ξ

1. *с вероятностью* 1 (*почти наверное,* $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$), *если*

$$\mathsf{P}(\lim_{n\to+\infty} \xi_n = \xi) = 1.$$

2. *по вероятности* ($\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$), *если* $\forall \varepsilon > 0$ *выполнено*

$$\mathsf{P}(||\xi_n - \xi||_2 \geqslant \varepsilon) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

где $||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$ *для* $x \in \mathbb{R}^m$.

3. *по распределению* ($\xi_n \xrightarrow{d} \xi$), *если для любой ограниченной непрерывной функции* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *выполнено*

$$\mathsf{E}\, f(\xi_n) \to \mathsf{E}\, f(\xi) \text{ при } n \to \infty.$$

Сходимость случайных векторов

Упражнение (1)

Для сходимости почти наверное и по вероятности векторная сходимость эквивалентна соответствующим сходимостям компонент:
если $\xi = (\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)})$, $\xi_n = (\xi_n^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(m)})$, то

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \iff \forall i = 1, \ldots, m \;\; \xi_n^{(i)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi^{(i)},$$

$$\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi \iff \forall i = 1, \ldots, m \;\; \xi_n^{(i)} \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi^{(i)}.$$

Сходимость случайных векторов

Упражнение (1)

Для сходимости почти наверное и по вероятности векторная сходимость эквивалентна соответствующим сходимостям компонент:
если $\xi = (\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)})$, $\xi_n = (\xi_n^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(m)})$, то

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Longleftrightarrow \forall i = 1, \ldots, m \;\; \xi_n^{(i)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi^{(i)},$$

$$\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi \Longleftrightarrow \forall i = 1, \ldots, m \;\; \xi_n^{(i)} \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi^{(i)}.$$

Упражнение (2)

Для сходимости по распределению векторная сходимость влечет сходимость компонент:
если $\xi = (\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)})$, $\xi_n = (\xi_n^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(m)})$, то

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Longrightarrow \forall i = 1, \ldots, m \;\; \xi_n^{(i)} \xrightarrow{d} \xi^{(i)},$$

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Взаимоотношение видов сходимостей

Упражнение (3, взаимоотношение видов сходимостей)

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \;\Rightarrow\; \xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi \;\Rightarrow\; \xi_n \xrightarrow{d} \xi.$$

Взаимоотношение видов сходимостей

Упражнение (3, взаимоотношение видов сходимостей)

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \;\Rightarrow\; \xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi \;\Rightarrow\; \xi_n \xrightarrow{d} \xi.$$

Замечание

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \;\Leftrightarrow\; \mathsf{P}_{\xi_n} \xrightarrow{w} \mathsf{P}_{\xi} \;\Leftrightarrow\; F_{\xi_n} \xrightarrow{w} F_{\xi} \;\Leftrightarrow\; (\textit{т. Александрова})\ \mathsf{P}_{\xi_n} \Longrightarrow \mathsf{P}_{\xi}.$$

Взаимоотношение видов сходимостей

Упражнение (3, взаимоотношение видов сходимостей)

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \;\Rightarrow\; \xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi \;\Rightarrow\; \xi_n \xrightarrow{d} \xi.$$

Замечание

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \;\Leftrightarrow\; \mathsf{P}_{\xi_n} \xrightarrow{w} \mathsf{P}_\xi \;\Leftrightarrow\; F_{\xi_n} \xrightarrow{w} F_\xi \;\Leftrightarrow\; (\text{т. Александрова})\; \mathsf{P}_{\xi_n} \Longrightarrow \mathsf{P}_\xi.$$

Что такое $F_{\xi_n} \Rightarrow F_\xi$?

Теорема

Пусть случайный вектор $\xi \in \mathbb{R}^m$ таков, что его функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывна. Тогда

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \;\Leftrightarrow\; F_{\xi_n}(x) \longrightarrow F_\xi(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Теорема о наследовании сходимости

Ключевым утверждением, позволяющим работать со сходимостями, является теорема о наследовании сходимости.

Теорема о наследовании сходимости

Ключевым утверждением, позволяющим работать со сходимостями, является теорема о наследовании сходимости.

Теорема (о наследовании сходимости)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \xi$ *— случайные векторы размерности* m. *Пусть* $h(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *— функция, непрерывная почти всюду относительно распределения* ξ *(т.е.* $\exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ *т.,ч.* h *непрерывна на* B *и* $\mathsf{P}(\xi \in B) = 1$.*) Тогда*

1. $$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \;\Rightarrow\; h(\xi_n) \xrightarrow{\text{п.н.}} h(\xi),$$

Теорема о наследовании сходимости

Ключевым утверждением, позволяющим работать со сходимостями, является теорема о наследовании сходимости.

Теорема (о наследовании сходимости)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \xi$ *— случайные векторы размерности* m. *Пусть* $h(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *— функция, непрерывная почти всюду относительно распределения* ξ *(т.е.* $\exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ *т.,ч.* h *непрерывна на* B *и* $\mathsf{P}(\xi \in B) = 1$.*)* *Тогда*

1. $$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \;\Rightarrow\; h(\xi_n) \xrightarrow{\text{п.н.}} h(\xi),$$

2. $$\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi \;\Rightarrow\; h(\xi_n) \xrightarrow{\mathsf{P}} h(\xi),$$

Теорема о наследовании сходимости

Ключевым утверждением, позволяющим работать со сходимостями, является теорема о наследовании сходимости.

Теорема (о наследовании сходимости)

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \xi$ *— случайные векторы размерности* m. *Пусть* $h(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *— функция, непрерывная почти всюду относительно распределения* ξ *(т.е.* $\exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ *т.,ч.* h *непрерывна на* B *и* $\mathsf{P}(\xi \in B) = 1$.*)*
Тогда

1. $$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \quad \Rightarrow \quad h(\xi_n) \xrightarrow{\text{п.н.}} h(\xi),$$
2. $$\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi \quad \Rightarrow \quad h(\xi_n) \xrightarrow{\mathsf{P}} h(\xi),$$
3. $$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \quad \Rightarrow \quad h(\xi_n) \xrightarrow{d} h(\xi).$$

Доказательство теоремы о наследовании сходимости

1)

$$\mathsf{P}(\lim_{n\to\infty} h(\xi_n) = h(\xi)) \geqslant \mathsf{P}(\lim_{n\to\infty} h(\xi_n) = h(\xi), \xi \in B) \geqslant$$
$$\geqslant \left|\text{т.к. } h \text{ непр. на } B\right| \geqslant \mathsf{P}(\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi,\ \ \xi \in B) = 1,$$

т.к. оба события имеют полную вероятность.

Доказательство теоремы о наследовании сходимости

1)

$$\mathsf{P}(\lim_{n\to\infty} h(\xi_n) = h(\xi)) \geqslant \mathsf{P}(\lim_{n\to\infty} h(\xi_n) = h(\xi), \xi \in B) \geqslant$$

$$\geqslant |\text{т.к. } h \text{ непр. на } B| \geqslant \mathsf{P}(\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi, \;\; \xi \in B) = 1,$$

т.к. оба события имеют полную вероятность.

2) Пусть $h(\xi_n) \overset{\mathsf{P}}{\not\to} h(\xi)$. Тогда $\exists \varepsilon_0, \delta_0 > 0$ и подпоследовательность ξ_{n_k} т.,ч.

$$\mathsf{P}(||h(\xi_{n_k}) - h(\xi)||_2 \geqslant \varepsilon_0) \geqslant \delta_0 \;\; \forall k.$$

Доказательство теоремы о наследовании сходимости

1)

$$\mathsf{P}(\lim_{n\to\infty} h(\xi_n) = h(\xi)) \geqslant \mathsf{P}(\lim_{n\to\infty} h(\xi_n) = h(\xi), \xi \in B) \geqslant$$

$$\geqslant |\text{т.к. } h \text{ непр. на } B| \geqslant \mathsf{P}(\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi,\ \ \xi \in B) = 1,$$

т.к. оба события имеют полную вероятность.

2) Пусть $h(\xi_n) \overset{\mathsf{P}}{\not\to} h(\xi)$. Тогда $\exists \varepsilon_0, \delta_0 > 0$ и подпоследовательность ξ_{n_k} т.,ч.

$$\mathsf{P}(||h(\xi_{n_k}) - h(\xi)||_2 \geqslant \varepsilon_0) \geqslant \delta_0\ \ \forall k.$$

Но $\xi_{n_k} \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$, значит, существует подпоследовательность $\xi_{n_{k_s}} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$ при $s \to \infty$. Согласно 1) получаем, что $h(\xi_{n_{k_s}}) \xrightarrow{\text{п.н.}} h(\xi)$. Значит, $h(\xi_{n_{k_s}}) \xrightarrow{\mathsf{P}} h(\xi)$ при $s \to \infty$. Противоречие с выбором подпоследовательности ξ_{n_k}.

Доказательство теоремы о наследовании сходимости

3) Обозначим Q_n — распределение $h(\xi_n)$, Q — распределение $h(\xi)$. Хотим показать, что $\mathsf{Q}_n \xrightarrow{\mathsf{w}} \mathsf{Q}$. По теореме Александрова достаточно показать, что для любого замкнутого $F \subset \mathbb{R}^k$ выполнено

$$\varlimsup_n \mathsf{Q}_n(F) \leqslant \mathsf{Q}(F).$$

Доказательство теоремы о наследовании сходимости

3) Обозначим Q_n — распределение $h(\xi_n)$, Q — распределение $h(\xi)$. Хотим показать, что $\mathsf{Q}_n \xrightarrow{\text{w}} \mathsf{Q}$. По теореме Александрова достаточно показать, что для любого замкнутого $F \subset \mathbb{R}^k$ выполнено

$$\overline{\lim_n} \mathsf{Q}_n(F) \leqslant \mathsf{Q}(F).$$

Имеем,

$$\overline{\lim_n} \mathsf{Q}_n(F) = \overline{\lim_n} \mathsf{P}_{\xi_n}(h^{-1}(F)) \leqslant \overline{\lim_n} \mathsf{P}_{\xi_n}([h^{-1}(F)]) \leqslant$$

$$\leqslant |\text{т.к.} \mathsf{P}_{\xi_n} \xrightarrow{w} \mathsf{P}_\xi| \leqslant \mathsf{P}_\xi([h^{-1}(F)]).$$

Доказательство теоремы о наследовании сходимости

3) Обозначим Q_n — распределение $h(\xi_n)$, Q — распределение $h(\xi)$. Хотим показать, что $\mathsf{Q}_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \mathsf{Q}$. По теореме Александрова достаточно показать, что для любого замкнутого $F \subset \mathbb{R}^k$ выполнено

$$\overline{\lim_n} \mathsf{Q}_n(F) \leqslant \mathsf{Q}(F).$$

Имеем,

$$\overline{\lim_n} \mathsf{Q}_n(F) = \overline{\lim_n} \mathsf{P}_{\xi_n}(h^{-1}(F)) \leqslant \overline{\lim_n} \mathsf{P}_{\xi_n}([h^{-1}(F)]) \leqslant$$

$$\leqslant |\text{т.к.} \mathsf{P}_{\xi_n} \xrightarrow{w} \mathsf{P}_\xi| \leqslant \mathsf{P}_\xi([h^{-1}(F)]).$$

Но в силу замкнутости F

$$[h^{-1}(F)] \subset \overline{B} \cup h^{-1}(F),$$

ведь если $x_n \to x$, $x_n \in h^{-1}(F)$ и $x \in B$, то $h(x) \in F$. Значит, т.к. $\mathsf{P}_\xi(\overline{B}) = 0$, выполнено $\mathsf{P}_\xi([h^{-1}(F)]) = \mathsf{P}_\xi(h^{-1}(F)) = \mathsf{Q}(F)$. $\square$

УЗБЧ для случайных векторов

Наблюдение: (УЗБЧ для случайных векторов)
Пусть $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ — нез.о.р. с. векторы из $\mathbb{R}^m$, $\mathsf{E}\, X_1$ конечно. Тогда

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathsf{E}\, X_1.$$

УЗБЧ для случайных векторов

Наблюдение: (УЗБЧ для случайных векторов)
Пусть $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ — нез.о.р. с. векторы из $\mathbb{R}^m$, $\mathsf{E}\, X_1$ конечно. Тогда

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathsf{E}\, X_1.$$

Вопрос: каков многомерный аналог ЦПТ?

Гауссовские случайные векторы

Определение

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *называется гауссовским (или нормальным), если его характеристическая функция имеет вид*

$$\varphi_\xi(t) = e^{i\langle t,a\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma\, t,t\rangle},$$

где $a \in \mathbb{R}^n$*, а* Σ *— матрица* $n \times n$*, симметрическая и неотрицательно определенная.*
Обозначение: $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$.

Гауссовские случайные векторы

Определение

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *называется гауссовским (или нормальным), если его характеристическая функция имеет вид*

$$\varphi_\xi(t) = e^{i\langle t, a\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma\, t, t\rangle},$$

где $a \in \mathbb{R}^n$, *а* Σ *— матрица* $n \times n$, *симметрическая и неотрицательно определенная.*

Обозначение: $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$.

Теорема (о трёх эквивалентных определениях)

1. $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\top$ *— гауссовский вектор.* $\Longleftrightarrow$

Гауссовские случайные векторы

Определение

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называется гауссовским (или нормальным), если его характеристическая функция имеет вид

$$\varphi_\xi(t) = e^{i\langle t, a\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma\, t, t\rangle},$$

где $a \in \mathbb{R}^n$, а Σ — матрица $n \times n$, симметрическая и неотрицательно определенная.
Обозначение: $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$.

Теорема (о трёх эквивалентных определениях)

1. $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\top$ *— гауссовский вектор.*$\Longleftrightarrow$
2. $\xi = A\eta + a$ п.н., где $a \in \mathbb{R}^n, A \in Mat(n \times m), \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)^\top, \eta_j$ — *независимые* $\mathcal{N}(0, 1)$. $\Longleftrightarrow$

Гауссовские случайные векторы

Определение

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *называется гауссовским (или нормальным), если его характеристическая функция имеет вид*

$$\varphi_\xi(t) = e^{i\langle t,a\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma\, t,t\rangle},$$

где $a \in \mathbb{R}^n$, *а* Σ *— матрица* $n \times n$, *симметрическая и неотрицательно определенная.*

Обозначение: $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$.

Теорема (о трёх эквивалентных определениях)

1. $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\top$ *— гауссовский вектор.* $\Longleftrightarrow$
2. $\xi = A\eta + a$ п.н., где $a \in \mathbb{R}^n, A \in Mat(n \times m), \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)^\top, \eta_j$ — *независимые* $\mathcal{N}(0, 1)$. $\Longleftrightarrow$
3. $\forall \tau \in \mathbb{R}^n$ *случайная величина* $\langle \tau, \xi\rangle$ *имеет одномерное нормальное распределение.*

Гауссовские случайные векторы

Определение

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ называется гауссовским (или нормальным), если его характеристическая функция имеет вид

$$\varphi_\xi(t) = e^{i\langle t, a\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma\, t, t\rangle},$$

где $a \in \mathbb{R}^n$, а Σ — матрица $n \times n$, симметрическая и неотрицательно определенная.

Обозначение: $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$.

Теорема (о трёх эквивалентных определениях)

1. $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top$ *— гауссовский вектор.* $\Longleftrightarrow$
2. $\xi = A\eta + a$ п.н., где $a \in \mathbb{R}^n, A \in Mat(n \times m), \eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)^\top, \eta_j$ — *независимые* $\mathcal{N}(0, 1)$. $\Longleftrightarrow$
3. $\forall \tau \in \mathbb{R}^n$ *случайная величина* $\langle \tau, \xi \rangle$ *имеет одномерное нормальное распределение.*

Замечание: константы считаем вырожденным нормальным распределением.

Доказательство теоремы

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$. Раз $\Sigma \geqslant 0$ и симметрическая, то существует ортогональное преобразование C т.,ч.

$$C\Sigma C^\top = D,$$

где D — диагональная матрица вида
$$\begin{pmatrix} d_1 & & \dots & & & 0 \\ & d_2 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ & & & d_m & & \\ & & & & 0 & \\ 0 & & \dots & & & 0 \end{pmatrix},$$

где $d_j > 0, j = 1, \dots, m$.

Доказательство теоремы

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$. Раз $\Sigma \geqslant 0$ и симметрическая, то существует ортогональное преобразование C т.,ч.

$$C\Sigma C^\top = D,$$

где D — диагональная матрица вида
$$\begin{pmatrix} d_1 & & \dots & & & 0 \\ & d_2 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ & & & d_m & & \\ & & & & 0 & \\ 0 & & \dots & & & 0 \end{pmatrix},$$
где $d_j > 0, j = 1, \dots, m$. Рассмотрим $\xi' = C(\xi - a)$. Тогда

$$\varphi_{\xi'}(\tau) = \mathsf{E}\, e^{i\langle \tau, \xi' \rangle} = \mathsf{E}\, e^{i\langle \tau, C\xi \rangle - i\langle \tau, Ca \rangle} = e^{-i\langle C^T \tau, a \rangle}\, \mathsf{E}\, e^{i\langle C^\top \tau, \xi \rangle} =$$
$$= e^{-i\langle C^\top \tau, a \rangle} \varphi_\xi(C^\top \tau) = e^{-i\langle C^\top \tau, a \rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma C^\top \tau, C^\top \tau \rangle + i\langle C^\top \tau, a \rangle} =$$
$$= e^{-\frac{1}{2}\langle C\Sigma C^\top \tau, \tau \rangle} = e^{-\frac{1}{2}\langle D\tau, \tau \rangle} = \prod_{k=1}^{m} e^{-\frac{1}{2} d_k \tau_k^2}.$$

Доказательство теоремы

Следовательно, вектор ξ' состоит из независимых компонент, причем $\xi'_j \sim \mathcal{N}(0, d_j), j = 1, \ldots, m$ и $\xi'_j = 0$ п.н. при $j > m$. Рассмотрим $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)^\top$, где $\eta_j = \frac{\xi'_j}{\sqrt{d_j}}$.

Доказательство теоремы

Следовательно, вектор ξ' состоит из независимых компонент, причем $\xi'_j \sim \mathcal{N}(0, d_j), j = 1, \ldots, m$ и $\xi'_j = 0$ п.н. при $j > m$. Рассмотрим $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)^\top$, где $\eta_j = \frac{\xi'_j}{\sqrt{d_j}}$. Тогда компоненты η — это независимые $\mathcal{N}(0,1)$ с.в. и с вероятностью 1 $\xi' = B\eta$,

где $B = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_m} \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$

есть матрица размера $n \times m$.

Доказательство теоремы

Следовательно, вектор ξ' состоит из независимых компонент, причем $\xi'_j \sim \mathcal{N}(0, d_j), j = 1, \ldots, m$ и $\xi'_j = 0$ п.н. при $j > m$. Рассмотрим $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)^\top$, где $\eta_j = \frac{\xi'_j}{\sqrt{d_j}}$. Тогда компоненты η — это независимые $\mathcal{N}(0, 1)$ с.в. и с вероятностью 1 $\xi' = B\eta$,

где $B = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_m} \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$

есть матрица размера $n \times m$.Отсюда

$$\xi = C^\top \xi' + a = C^\top B\eta + a = A\eta + a \ \text{ п.н.}$$

Доказательство теоремы

2) $\Rightarrow$ 3) $\langle \tau, \xi \rangle = \langle \tau, A\eta + a \rangle = \langle A^T \tau, \eta \rangle + \langle \tau, a \rangle = \sum_{k=1}^{m} (A^T \tau)_k \eta_k + \langle \tau, a \rangle$ — линейная комбинация независимых нормальных с.в. тоже является нормальной с.в.

Доказательство теоремы

2) $\Rightarrow$ 3) $\langle \tau, \xi \rangle = \langle \tau, A\eta + a \rangle = \langle A^T\tau, \eta \rangle + \langle \tau, a \rangle = \sum_{k=1}^{m} (A^T\tau)_k \eta_k + \langle \tau, a \rangle$ — линейная комбинация независимых нормальных с.в. тоже является нормальной с.в.

3) $\Rightarrow$ 1) Мы знаем, что $\forall \tau \in \mathbb{R}^n$ с.в. $\langle \tau, \xi \rangle$ является нормальной. Значит, все $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — это нормальные с.в. и имеют конечные $\mathsf{E}\,\xi_i$ и $\mathsf{D}\,\xi_i$.

Пусть $\langle \tau, \xi \rangle \sim \mathcal{N}(a_\tau, \sigma_\tau^2)$. Тогда

$$a_\tau = \mathsf{E}\langle \tau, \xi \rangle = \langle \tau, \mathsf{E}\,\xi \rangle = \langle \tau, a \rangle.$$

$$\sigma_\tau^2 = \mathsf{D}\langle \tau, \xi \rangle = \mathsf{E}(\langle \tau, \xi \rangle - \mathsf{E}\langle \tau, \xi \rangle)^2 = \mathsf{E}(\langle \tau, \xi - \mathsf{E}\,\xi \rangle)^2 =$$

$$= \mathsf{E}\sum_{i,j} (\xi_i - \mathsf{E}\,\xi_i)(\xi_j - \mathsf{E}\,\xi_j)\tau_i\tau_j = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j)\tau_i\tau_j = \langle \mathsf{D}\,\xi \cdot \tau, \tau \rangle,$$

где $\mathsf{D}\,\xi = \Sigma$ — матрица ковариаций вектора ξ.

Доказательство теоремы

2) $\Rightarrow$ 3) $\langle \tau, \xi \rangle = \langle \tau, A\eta + a \rangle = \langle A^T \tau, \eta \rangle + \langle \tau, a \rangle = \sum_{k=1}^m (A^T \tau)_k \eta_k + \langle \tau, a \rangle$ — линейная комбинация независимых нормальных с.в. тоже является нормальной с.в.

3) $\Rightarrow$ 1) Мы знаем, что $\forall \tau \in \mathbb{R}^n$ с.в. $\langle \tau, \xi \rangle$ является нормальной. Значит, все $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — это нормальные с.в. и имеют конечные $\mathsf{E}\,\xi_i$ и $\mathsf{D}\,\xi_i$.

Пусть $\langle \tau, \xi \rangle \sim \mathcal{N}(a_\tau, \sigma_\tau^2)$. Тогда

$$a_\tau = \mathsf{E}\langle \tau, \xi \rangle = \langle \tau, \mathsf{E}\,\xi \rangle = \langle \tau, a \rangle.$$

$$\sigma_\tau^2 = \mathsf{D}\langle \tau, \xi \rangle = \mathsf{E}(\langle \tau, \xi \rangle - \mathsf{E}\langle \tau, \xi \rangle)^2 = \mathsf{E}(\langle \tau, \xi - \mathsf{E}\,\xi \rangle)^2 =$$

$$= \mathsf{E}\sum_{i,j} (\xi_i - \mathsf{E}\,\xi_i)(\xi_j - \mathsf{E}\,\xi_j)\tau_i \tau_j = \sum_{i,j=1}^n \mathsf{cov}(\xi_i, \xi_j)\tau_i\tau_j = \langle \mathsf{D}\,\xi \cdot \tau, \tau \rangle,$$

где $\mathsf{D}\,\xi = \Sigma$ — матрица ковариаций вектора ξ. Отсюда

$$\varphi_\xi(\tau) = \mathsf{E}\,e^{i\langle \xi, \tau \rangle} = \varphi_{\langle \xi, \tau \rangle}(1) = e^{ia_\tau - \frac{1}{2}\sigma_\tau^2} = e^{i\langle a, \tau \rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma\tau, \tau \rangle},$$

где $a = \mathsf{E}\,\xi, \Sigma = \mathsf{D}\,\xi$. Значит, $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$. $\square$

Свойства гауссовских векторов

Следствие (существование)

$\varphi(t) = e^{i\langle t,a\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma t,t\rangle}$ *действительно является многомерной х.ф.*

Свойства гауссовских векторов

Следствие (существование)

$\varphi(t) = e^{i\langle t,a\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma t,t\rangle}$ *действительно является многомерной х.ф.*

Доказательство.

Пусть $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)^\top$ — независимые $\mathcal{N}(0,1)$, а матрицы C и B — из доказательства $1) \Rightarrow 2)$. Тогда вектор $\xi = C^\top B\eta + a$ имеет х.ф. $\varphi(t)$. $\square$

Свойства гауссовских векторов

Следствие (существование)

$\varphi(t) = e^{i\langle t,a\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma t,t\rangle}$ *действительно является многомерной х.ф.*

Доказательство.

Пусть $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)^\top$ — независимые $\mathcal{N}(0,1)$, а матрицы C и B — из доказательства $1) \Rightarrow 2)$. Тогда вектор $\xi = C^\top B\eta + a$ имеет х.ф. $\varphi(t)$. $\square$

Следствие (смысл параметров)

Если $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$, *то* $a = \mathsf{E}\,\xi, \Sigma = \mathsf{D}\,\xi$ *— матрица ковариаций.*

Свойства гауссовских векторов

Следствие (существование)

$\varphi(t) = e^{i\langle t,a\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma t,t\rangle}$ *действительно является многомерной х.ф.*

Доказательство.

Пусть $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)^\top$ — независимые $\mathcal{N}(0,1)$, а матрицы C и B — из доказательства $1) \Rightarrow 2)$. Тогда вектор $\xi = C^\top B\eta + a$ имеет х.ф. $\varphi(t)$. □

Следствие (смысл параметров)

Если $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$, *то* $a = \mathsf{E}\,\xi, \Sigma = \mathsf{D}\,\xi$ *— матрица ковариаций.*

Доказательство.

Следует из доказательства $3) \Rightarrow 1)$. □

Следствие

Любое линейное преобразование гауссовского вектора является гауссовским вектором.

Свойства гауссовских векторов

Следствие

Любое линейное преобразование гауссовского вектора является гауссовским вектором.

Доказательство.

Пусть ξ — гауссовский вектор, а $\delta = B\xi + b$, $b \in \mathbb{R}^k$, $B \in Mat(k \times n)$. Тогда $\xi = A\eta + a$ п.н., где компоненты η — независимые $\mathcal{N}(0,1)$ с.в.

Свойства гауссовских векторов

Следствие

Любое линейное преобразование гауссовского вектора является гауссовским вектором.

Доказательство.

Пусть ξ — гауссовский вектор, а $\delta = B\xi + b$, $b \in \mathbb{R}^k$, $B \in Mat(k \times n)$. Тогда $\xi = A\eta + a$ п.н., где компоненты η — независимые $\mathcal{N}(0,1)$ с.в. Следовательно,

$$\delta = (BA)\eta + Ba + b \text{ п.н.}$$

Значит, по второму определению δ тоже является гауссовским вектором. $\square$

Свойства гауссовских векторов

Следствие (критерий независимости компонент)

Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\top$ *— гауссовский вектор. Тогда* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *— независимы в совокупности* $\Leftrightarrow$ *они попарно некоррелированы.*

Свойства гауссовских векторов

Следствие (критерий независимости компонент)

Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\top$ *— гауссовский вектор. Тогда* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *— независимы в совокупности* $\Leftrightarrow$ *они попарно некоррелированы.*

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ Верно для любых с.в. с конечным вторым моментом.

Свойства гауссовских векторов

Следствие (критерий независимости компонент)

Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top$ — гауссовский вектор. Тогда $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимы в совокупности $\Leftrightarrow$ они попарно некоррелированы.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Верно для любых с.в. с конечным вторым моментом.
($\Leftarrow$) Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$. Если $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ при $i \neq j$, то $\Sigma = \mathrm{D}\,\xi$ диагональна. Значит,

$$\varphi_\xi(t) = e^{i\langle a,t\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma t, t\rangle} = \prod_{k=1}^{n} e^{i a_k t_k - \frac{1}{2}\sigma_k^2 t_k^2} = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t_k).$$

По критерию независимости для х.ф. получаем, что $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимы в совокупности. □

Свойства гауссовских векторов

Обобщение: Если $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$ и Σ имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} C_{1_{k_1 \times k_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{r_{k_r \times k_r}} \end{pmatrix}, \text{ где } k_1 + \ldots + k_r = n \text{ — размеры блоков.}$$

Тогда случайные векторы $(\xi_1, \ldots, \xi_{k_1})$, $(\xi_{k_1+1}, \ldots, \xi_{k_1+k_2}), \ldots$, $(\xi_{k_1+\ldots+k_{r-1}+1}, \ldots, \xi_n)$ — независимы в совокупности.

Свойства гауссовских векторов

Обобщение: Если $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$ и Σ имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} C_{1_{k_1 \times k_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{r_{k_r \times k_r}} \end{pmatrix},$$ где $k_1 + \ldots + k_r = n$ — размеры блоков.

Тогда случайные векторы $(\xi_1, \ldots, \xi_{k_1})$, $(\xi_{k_1+1}, \ldots, \xi_{k_1+k_2}), \ldots,$ $(\xi_{k_1+\ldots+k_{r-1}+1}, \ldots, \xi_n)$ — независимы в совокупности.

Теорема (о плотности)

Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$, причем $\Sigma > 0$ (положительно определена). Тогда вектор ξ имеет плотность

$$p_\xi(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}\langle \Sigma^{-1}(x-a), x-a\rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Свойства гауссовских векторов

Замечание: Вектор гауссовский, значит, его компоненты нормальные с.в. Обратное неверно.

Свойства гауссовских векторов

Замечание: Вектор гауссовский, значит, его компоненты нормальные с.в. Обратное неверно.
Доказательство: Контрпример.
Пусть X, Y — независимые с.в., $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\mathsf{P}(Y=1) = \mathsf{P}(Y=-1) = \frac{1}{2}$.

Свойства гауссовских векторов

Замечание: Вектор гауссовский, значит, его компоненты нормальные с.в. Обратное неверно.
Доказательство: Контрпример.
Пусть X, Y — независимые с.в., $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\mathsf{P}(Y=1) = \mathsf{P}(Y=-1) = \frac{1}{2}$.
Рассмотрим $Z = XY$. Тогда
$\mathsf{P}(Z \leqslant x) = \frac{1}{2}\mathsf{P}(X \leqslant x) + \frac{1}{2}\mathsf{P}(X \geqslant -x) = \mathsf{P}(X \leqslant x)$, т.к. $X \stackrel{d}{=} -X$. Значит, $Z \stackrel{d}{=} X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Кроме того,

$$\mathsf{E}(XZ) = \mathsf{E}(X^2Y) = \mathsf{E}\,X^2\,\mathsf{E}\,Y = 0.$$

Свойства гауссовских векторов

Замечание: Вектор гауссовский, значит, его компоненты нормальные с.в. Обратное неверно.
Доказательство: Контрпример.
Пусть X, Y — независимые с.в., $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\mathsf{P}(Y=1) = \mathsf{P}(Y=-1) = \frac{1}{2}$.
Рассмотрим $Z = XY$. Тогда
$\mathsf{P}(Z \leqslant x) = \frac{1}{2}\mathsf{P}(X \leqslant x) + \frac{1}{2}\mathsf{P}(X \geqslant -x) = \mathsf{P}(X \leqslant x)$, т.к. $X \stackrel{d}{=} -X$. Значит, $Z \stackrel{d}{=} X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Кроме того,

$$\mathsf{E}(XZ) = \mathsf{E}(X^2 Y) = \mathsf{E}\,X^2\,\mathsf{E}\,Y = 0.$$

Покажем, что (X, Z) не является гауссовский вектором. Если бы это было так, то с.в. $X + Z$ была бы одномерной нормальной. Но

$$\mathsf{P}(X + Z = 0) = \mathsf{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}.$$

Для нормальности с.в. это невозможно. Значит, (X, Z) — не гауссовский вектор.

Многомерная ЦПТ

Теорема (многомерная центральная предельная теорема)

Пусть $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ — *независимые одинаково распределенные случайные векторы из* $\mathbb{R}^m$, $\mathsf{E}\, X_n = a$, $\mathsf{D}\, X_n = \Sigma$. *Обозначим* $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. *Тогда*

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma).$$

Многомерная ЦПТ

Теорема (многомерная центральная предельная теорема)

Пусть $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— независимые одинаково распределенные случайные векторы из* $\mathbb{R}^m, \mathsf{E}\, X_n = a, \mathsf{D}\, X_n = \Sigma$. *Обозначим* $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. *Тогда*

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma).$$

Доказательство. Обозначим $T_n = \sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right)$. Достаточно показать, что х.ф. T_n сходится к х.ф. $\mathcal{N}(0, \Sigma)$.

Многомерная ЦПТ

Теорема (многомерная центральная предельная теорема)

Пусть $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— независимые одинаково распределенные случайные векторы из* $\mathbb{R}^m$, $\mathsf{E}\, X_n = a$, $\mathsf{D}\, X_n = \Sigma$. *Обозначим* $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. *Тогда*

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma).$$

Доказательство. Обозначим $T_n = \sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right)$. Достаточно показать, что х.ф. T_n сходится к х.ф. $\mathcal{N}(0, \Sigma)$.

$$\varphi_{T_n}(t) = \mathsf{E}\, e^{i\langle T_n, t\rangle} = \mathsf{E}\, e^{i\langle S_n - na, \frac{t}{\sqrt{n}}\rangle} = |\text{независимость } X_1, \ldots, X_n| =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathsf{E}\, e^{i\langle X_k - a, \frac{t}{\sqrt{n}}\rangle} = \left(\mathsf{E}\, e^{i\langle X_1 - a, \frac{t}{\sqrt{n}}\rangle}\right)^n = |\text{разложение х.ф. в ряд}| =$$

$$= \left(1 + i\,\mathsf{E}\left\langle X_1 - a, \frac{t}{\sqrt{n}}\right\rangle - \frac{1}{2}\,\mathsf{E}\left\langle X_1 - a, \frac{t}{\sqrt{n}}\right\rangle^2 + o\left(\frac{||t||^2}{n}\right)\right)^n.$$

Гауссовские случайные величины

Пусть $X_1 = (X_{1,1}, \ldots, X_{1,m})$, $a = (a_1, \ldots, a_m)$. Тогда

Пусть $X_1 = (X_{1,1}, \ldots, X_{1,m})$, $a = (a_1, \ldots, a_m)$. Тогда

$$\varphi_{T_n}(t) =$$

$$= \left(1 + i\left\langle \mathsf{E}(X_1) - a, \frac{t}{\sqrt{n}}\right\rangle - \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m} \mathsf{E}(X_{1,k} - a_k)(X_{1,j} - a_j)\frac{t_k t_j}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n =$$

$$= \left|\text{т.к. } \mathsf{E}\, X_1 - a = 0\right| = \left(1 - \frac{1}{2}\langle \Sigma t, t\rangle \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{2}\langle \Sigma t, t\rangle},$$

где $e^{-\frac{1}{2}\langle \Sigma t, t\rangle}$ — это х.ф. $\mathcal{N}(0, \Sigma)$. □

Пусть $X_1 = (X_{1,1}, \dots, X_{1,m})$, $a = (a_1, \dots, a_m)$. Тогда

$$\varphi_{T_n}(t) =$$

$$= \left(1 + i\left\langle \mathsf{E}(X_1) - a, \frac{t}{\sqrt{n}} \right\rangle - \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m} \mathsf{E}(X_{1,k} - a_k)(X_{1,j} - a_j)\frac{t_k t_j}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n =$$

$$= |\text{т.к. } \mathsf{E}\, X_1 - a = 0| = \left(1 - \frac{1}{2}\langle \Sigma t, t\rangle \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{2}\langle \Sigma t, t\rangle},$$

где $e^{-\frac{1}{2}\langle \Sigma t, t\rangle}$ — это х.ф. $\mathcal{N}(0, \Sigma)$. $\square$

Замечание: для х.ф. случайных векторов выполнены все естественные обобщения свойств одномерных х.ф. (теорема единственности, разложение в ряд, теорема непрерывности и т.п.)

Благодарности

Благодарности объявляются:

Благодарности

Благодарности объявляются:

- старостам групп 207–212 за организационную помощь в проведении курса!

Благодарности

Благодарности объявляются:

- старостам групп 207–212 за организационную помощь в проведении курса!
- Алексею Хачиянцу (магистратура ФКН ВШЭ) за материалы для подготовки он-лайн лекций!

Благодарности

Благодарности объявляются:

- старостам групп 207–212 за организационную помощь в проведении курса!
- Алексею Хачиянцу (магистратура ФКН ВШЭ) за материалы для подготовки он-лайн лекций!
- Алисе Гросс (5 курс мех-мата МГУ) за большую работу по подготовке презентаций!

Благодарности

Благодарности объявляются:

- старостам групп 207–212 за организационную помощь в проведении курса!
- Алексею Хачиянцу (магистратура ФКН ВШЭ) за материалы для подготовки он-лайн лекций!
- Алисе Гросс (5 курс мех-мата МГУ) за большую работу по подготовке презентаций!
- всем слушателям курса!