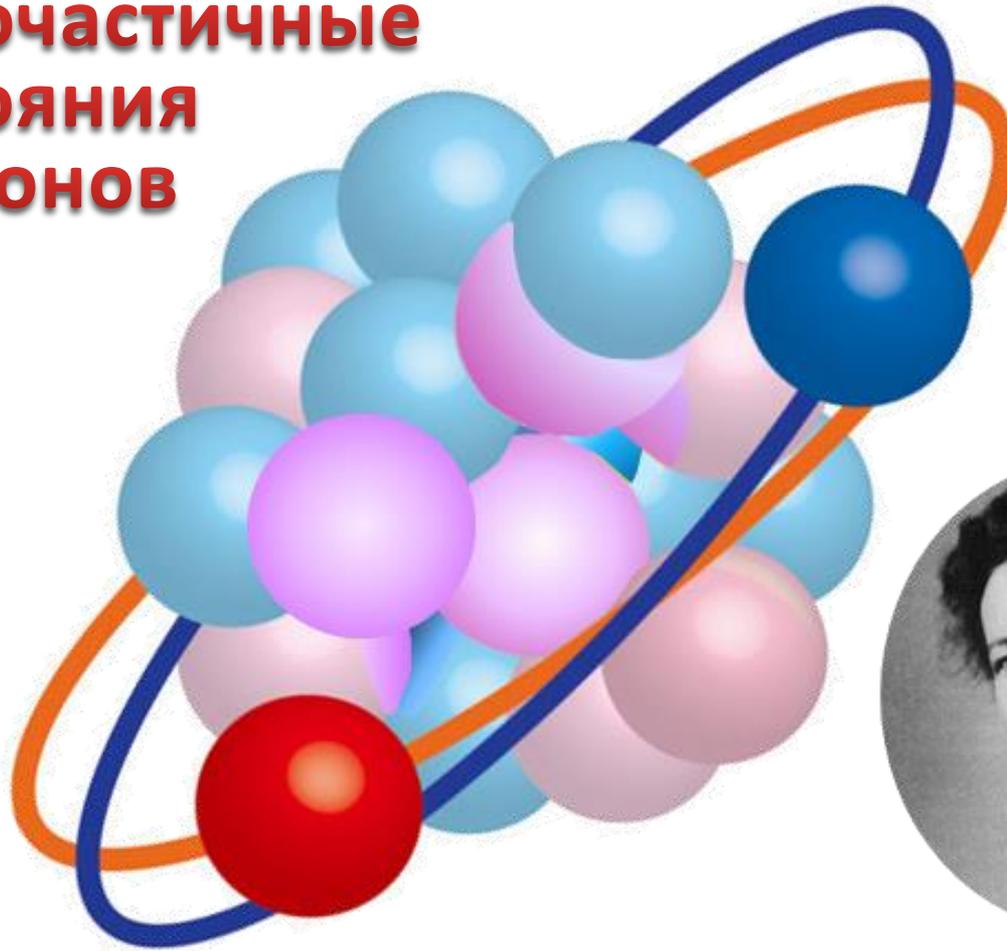


# Модель ядерных оболочек

Одночастичные  
состояния  
нуклонов



# Темы лекции

1. Ядерные модели. История ядерной модели оболочек.
2. Обоснование ядерной модели оболочек.  
Магические числа.
3. Ядерная потенциальная яма.
4. Одночастичные нуклонные уровни в потенциальных ямах различного типа. Заполнение этих уровней.
5. Учёт спин-орбитального расщепления.  
Объяснение магических чисел.
6. Реалистическая диаграмма нуклонных одночастичных уровней.
7. Спин и чётность основных состояний ядер в одночастичной модели оболочек.
8. Учёт спаривания нуклонов в одночастичной модели оболочек.
9. Заключительные замечания о ядерной модели оболочек.

# Модель ядерных оболочек

Модели ядра можно разбить на два больших класса:  
**микроскопические**,  
рассматривающие поведение отдельных нуклонов в ядре, и  
**коллективные**,  
рассматривающие согласованное движение  
больших групп нуклонов в ядре.  
Среди микроскопических моделей выделяется  
**модель оболочек**.  
Она во многом аналогична модели атомных оболочек,  
но имеет от неё ряд принципиальных отличий.



Гоепперт-Майер

Модель  
ядерных оболочек была  
сформулирована в **1949 г.**  
В **1953 г.** за создание  
этой модели  
**Мария Гепперт-Майер**  
и **Ханс Йенсен**  
были удостоены  
**Нобелевской премии.**



Jensen

Основной факт,  
подтверждающий оболочечное строение ядра,  
это «**магические числа**» нуклонов.

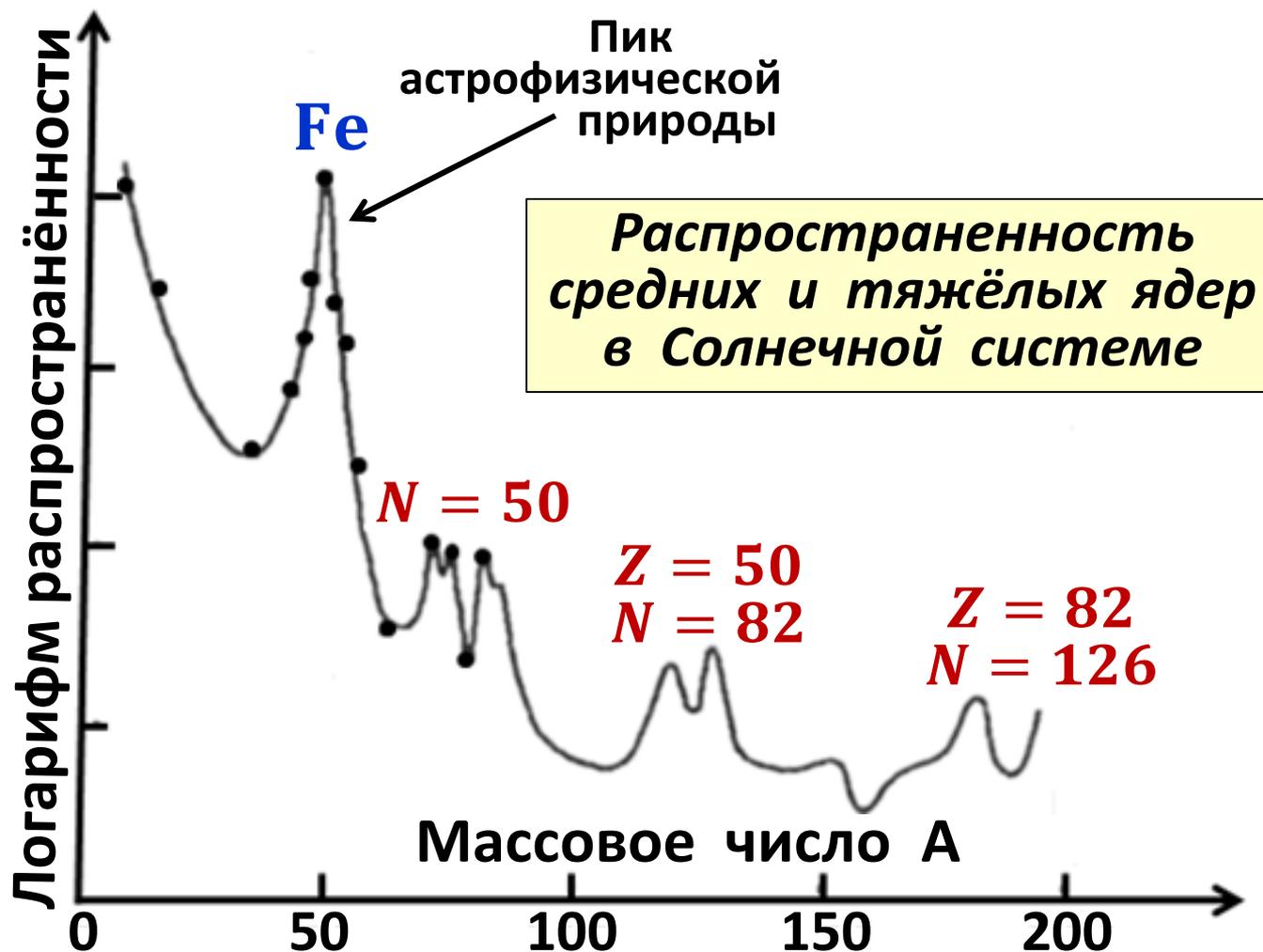
Ядра, у которых число нейтронов или протонов  
равно этим числам, обладают повышенной  
устойчивостью и распространённостью.

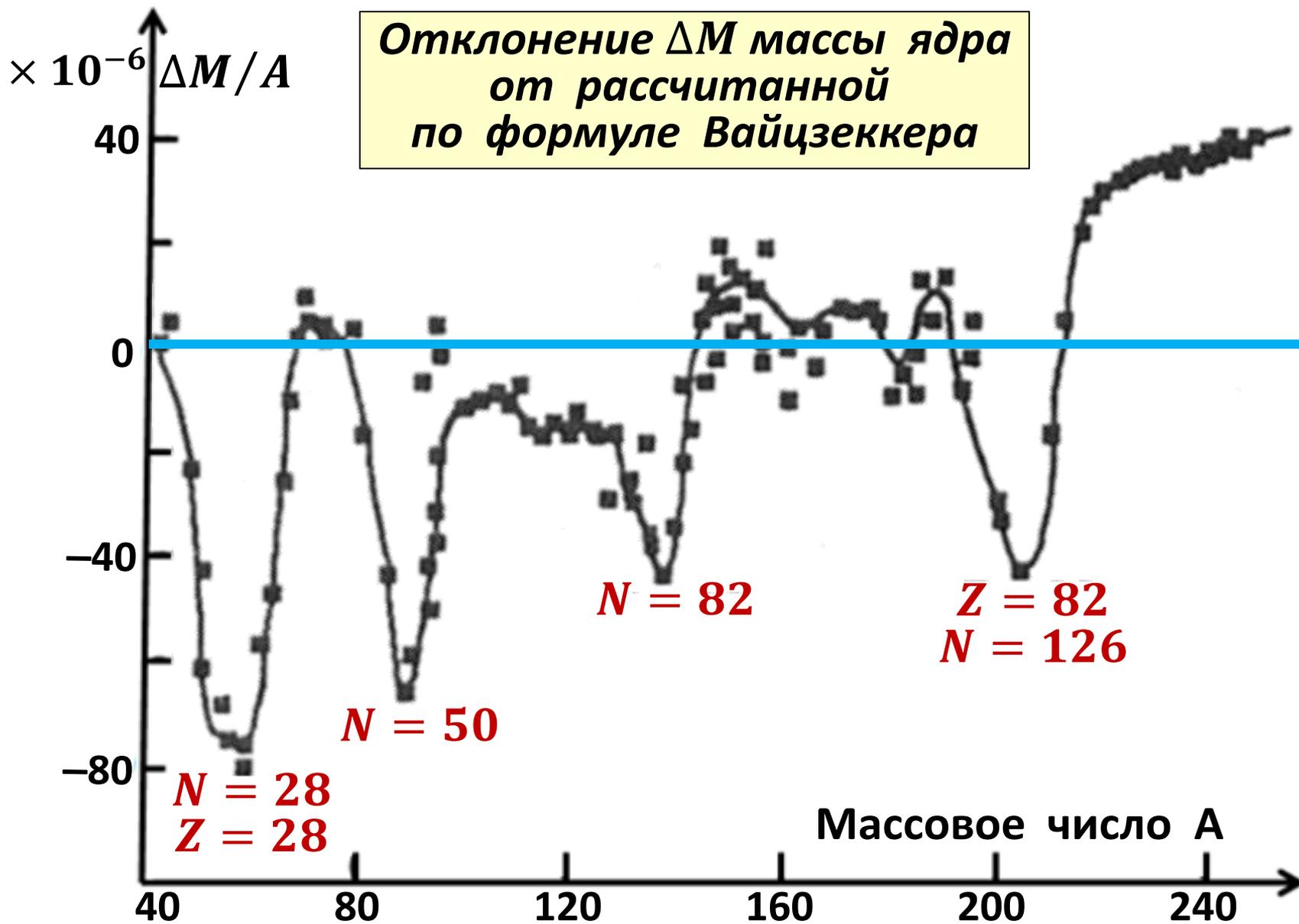
**Магические числа нуклонов:**

**2, 8, 20, 28, 50, 82, 126**

Магическим числам нуклонов отвечают ядра  
с заполненными нуклонными оболочками,  
имеющие особую устойчивость,  
подобно атомам благородных газов  
с заполненными атомными оболочками.

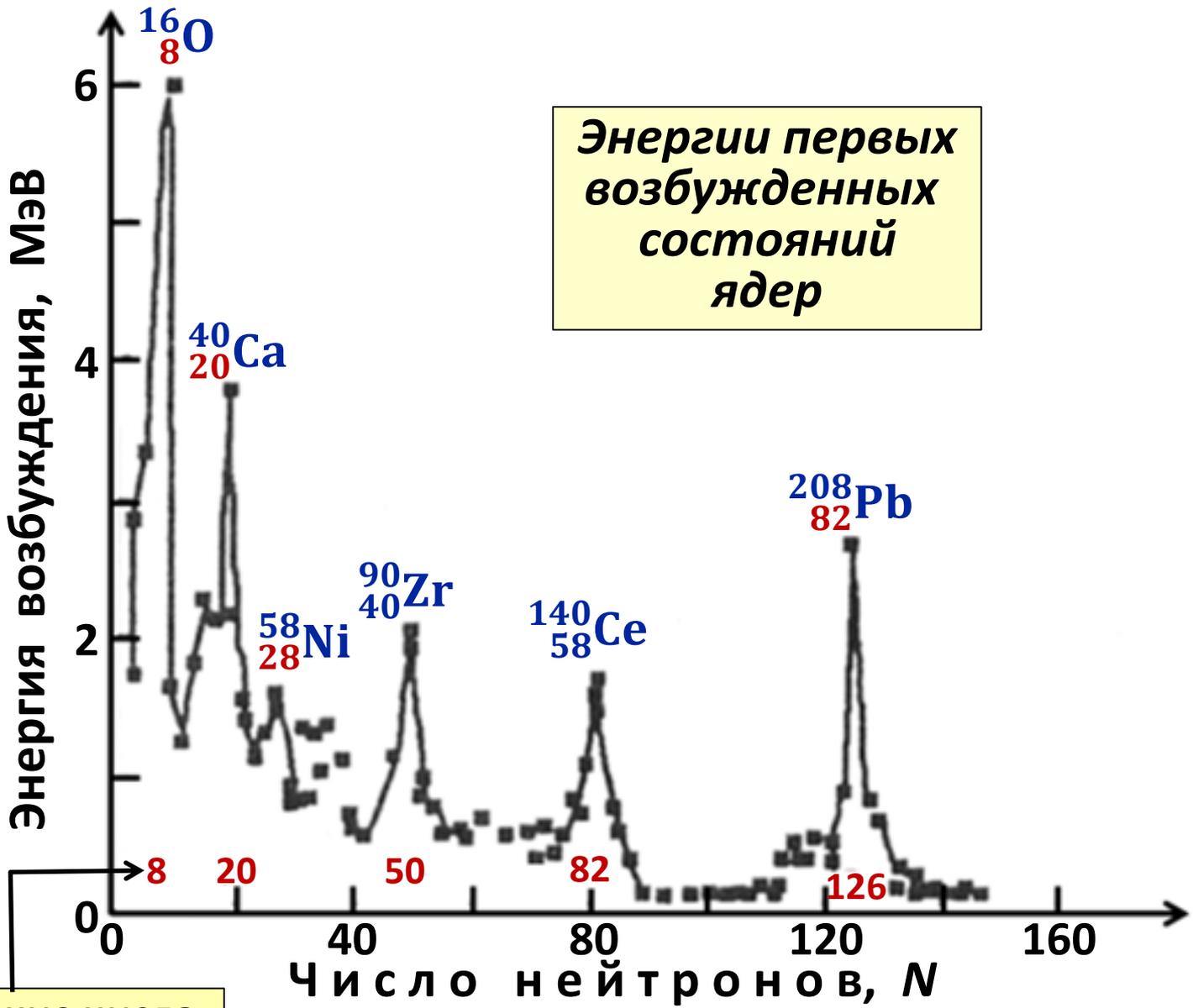
# Экспериментальные данные, подтверждающие наличие магических ядер:





*Отклонение энергии  
отделения нейтрона  
от рассчитанной  
по формуле Вайцзеккера*



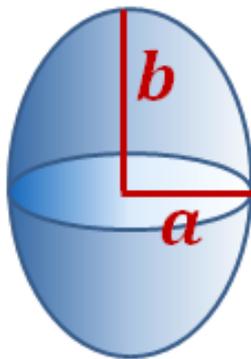
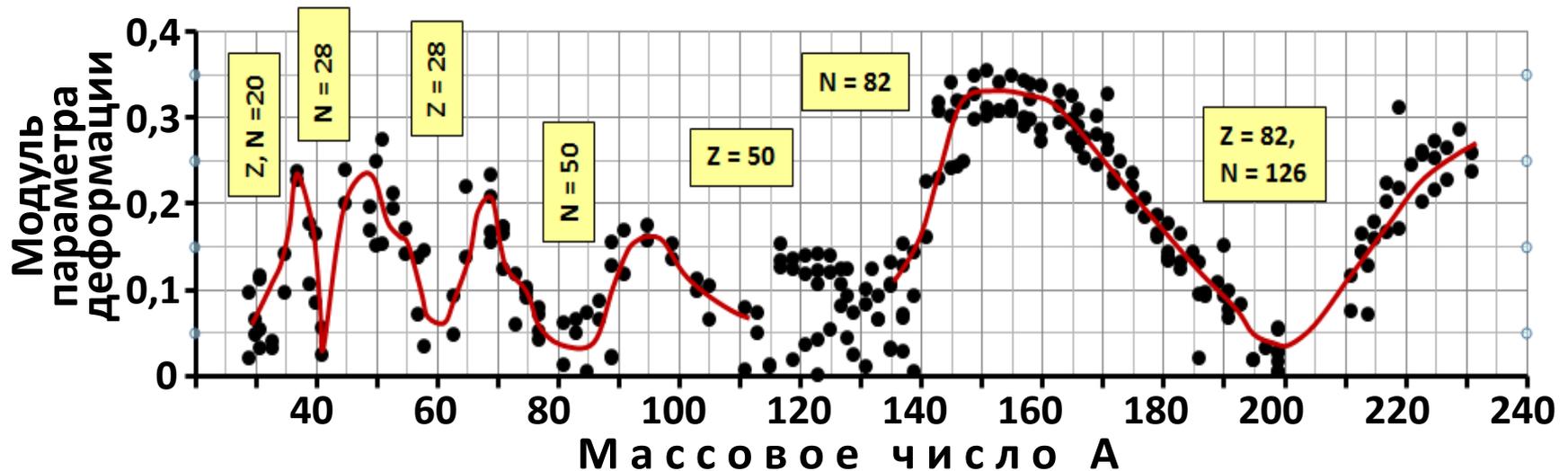


*Энергии первых возбужденных состояний ядер*

Магические числа нейтронов

*Данные, показывающие  
что магические ядра сферические*

Модули параметров деформации ядер с  $A = 39 \div 241$

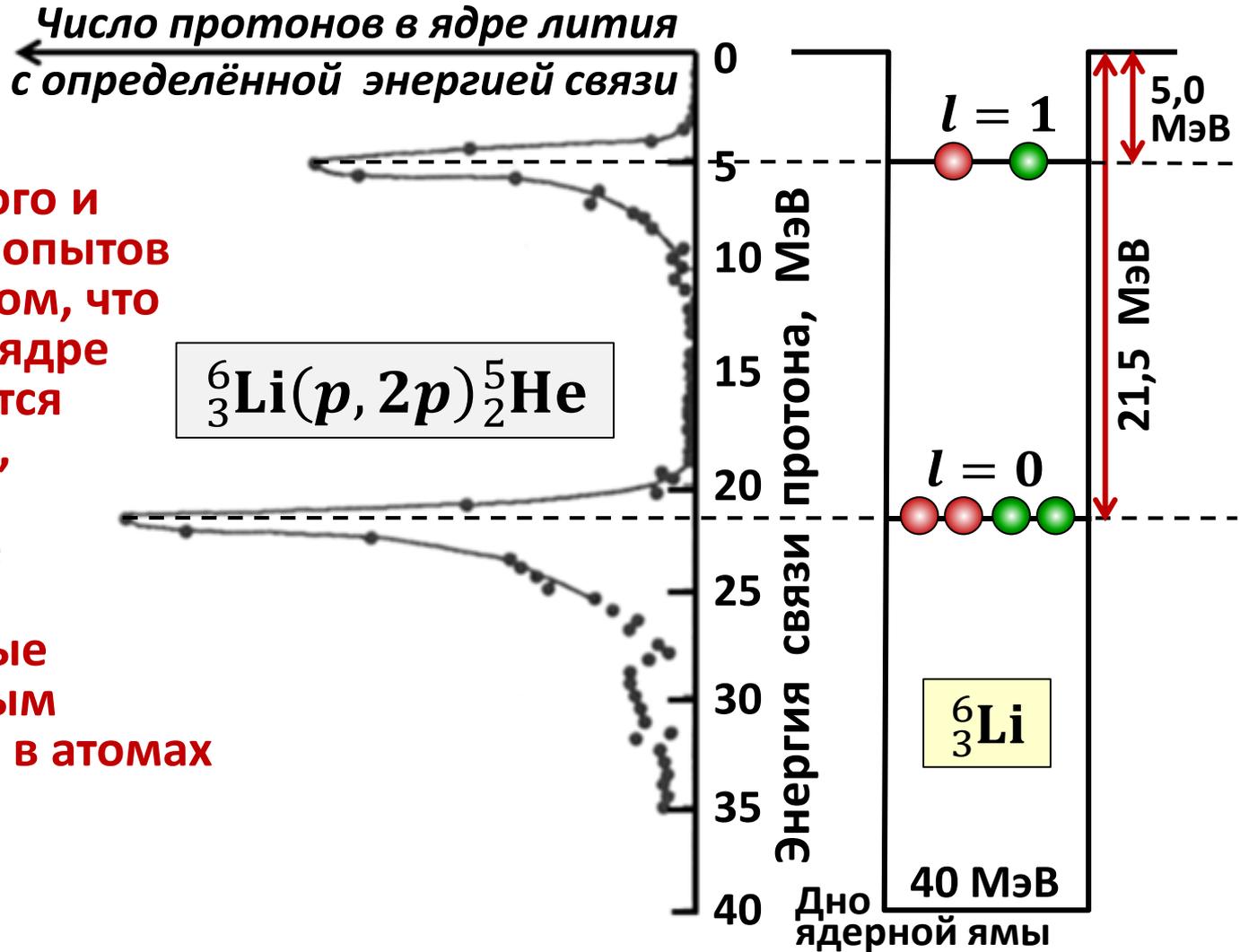


Параметр деформации  $\beta = \frac{b-a}{\bar{R}}$ ,

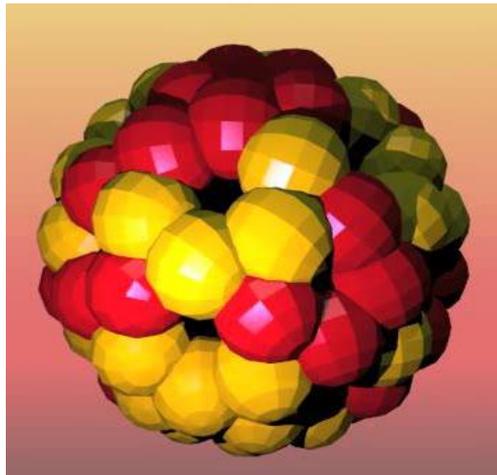
где  $\bar{R} = \frac{1}{2}(b+a)$ .

Эксперимент доказывающий существование в ядре  ${}^6_3\text{Li}$  двух нуклонных состояний (оболочек) с  $l = 0$  и  $l = 1$

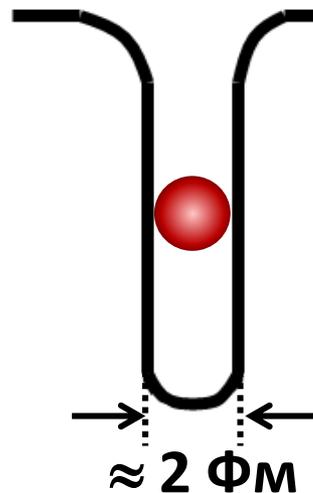
Данные этого и подобных опытов говорят о том, что нуклоны в ядре группируются по энергии, образуя нуклонные оболочки, аналогичные электронным оболочкам в атомах



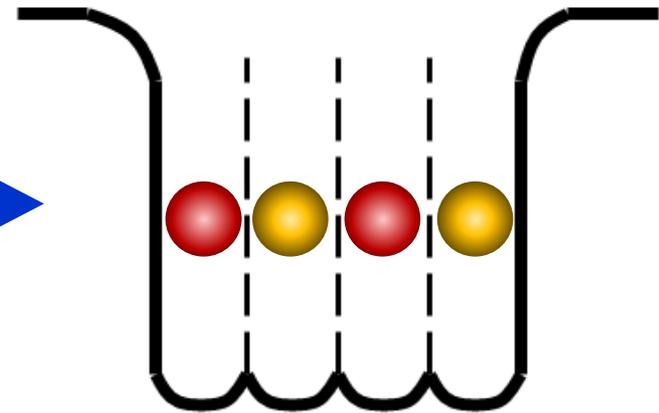
Возможность введения модели оболочек для ядра означает, что многочастичная ядерная задача допускает такую переформулировку, при которой **усреднение отдельных короткодействующих междуклонных потенциалов внутри ядра приводит к возникновению почти одинакового для всех нуклонов потенциала притяжения (яме), причём нуклоны в этой яме можно приближённо рассматривать как независимые частицы.**



**$NN$  – потенциал притяжения**



**Ядерный потенциал**



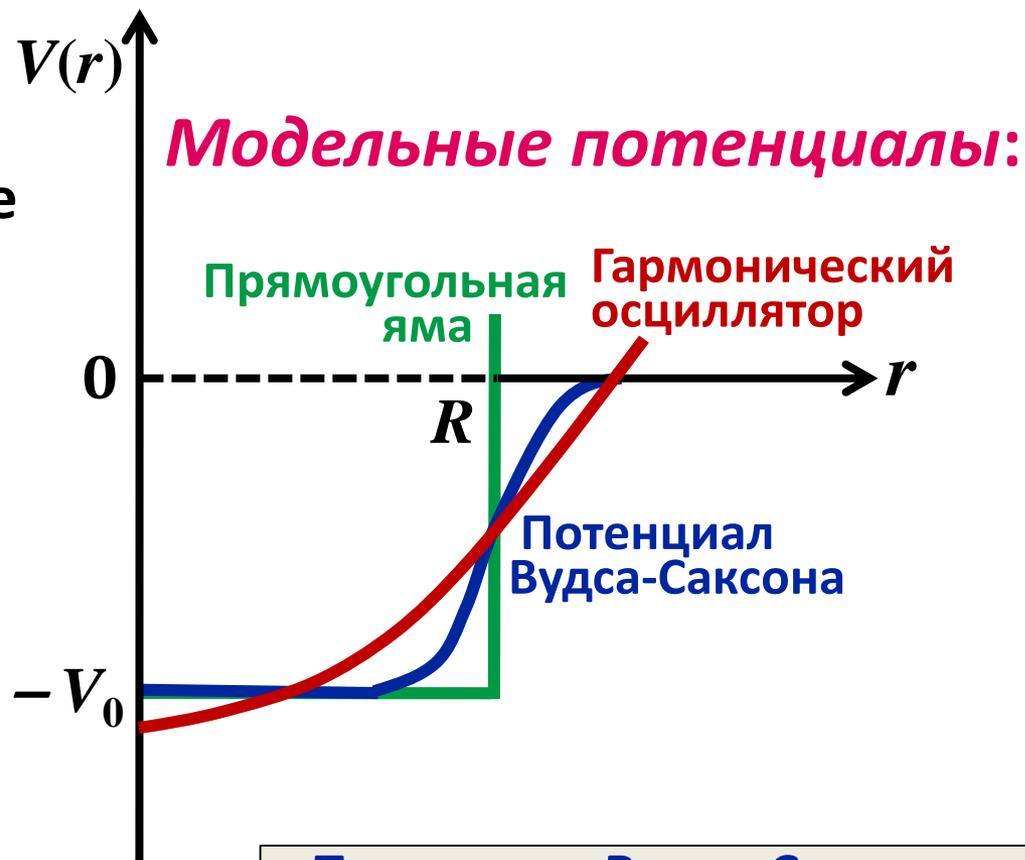
**Анимация на Лекции**

Нуклоны считаются независимыми в общем (одинаковом для всех нуклонов) сферическом потенциале и достаточно решить стационарное уравнение Шредингера для одного нуклона. Многочастичная задача превращается в одночастичную.

**Гармонический осциллятор:**

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2$$

$M$  — масса частицы,  
 $\omega$  — параметр, определяющий расстояние между уровнями

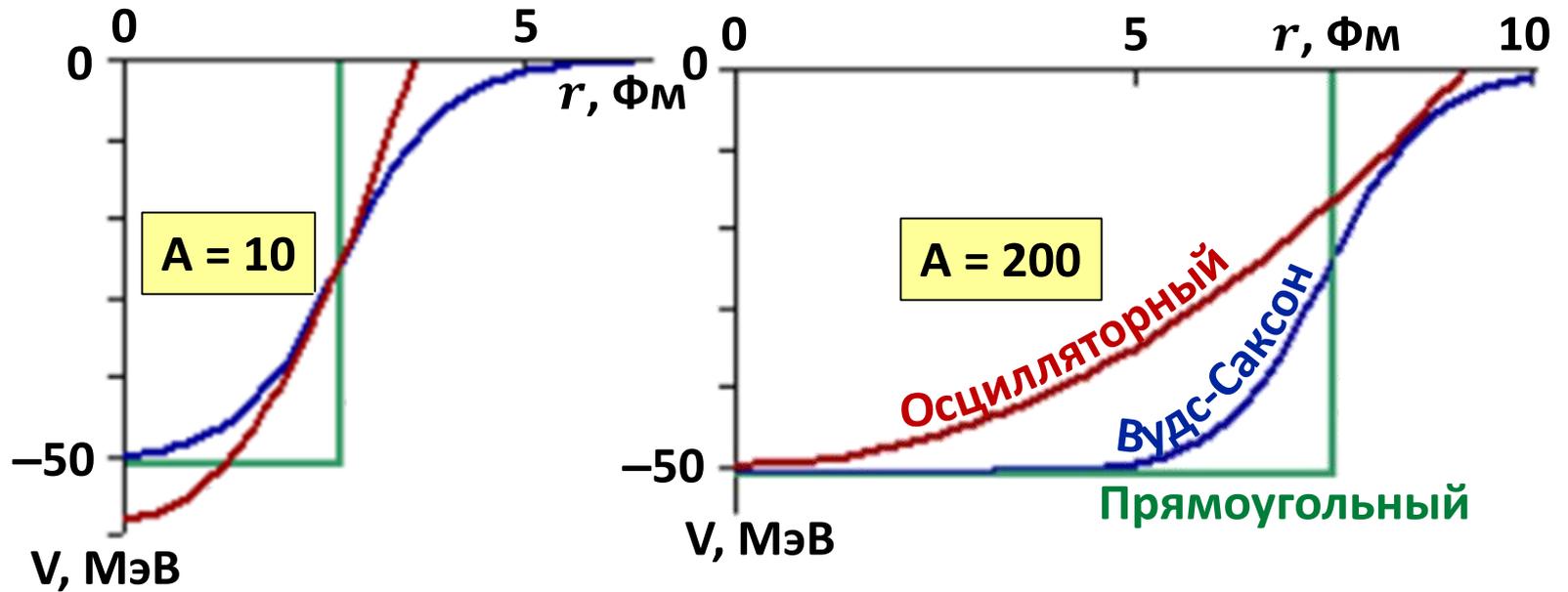


**Потенциал Вудса-Саксона:**

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$

$V_0 \approx 50$  МэВ,  $a \approx 0,55$  Фм

# Ядерные потенциальные ямы



Типы потенциалов:

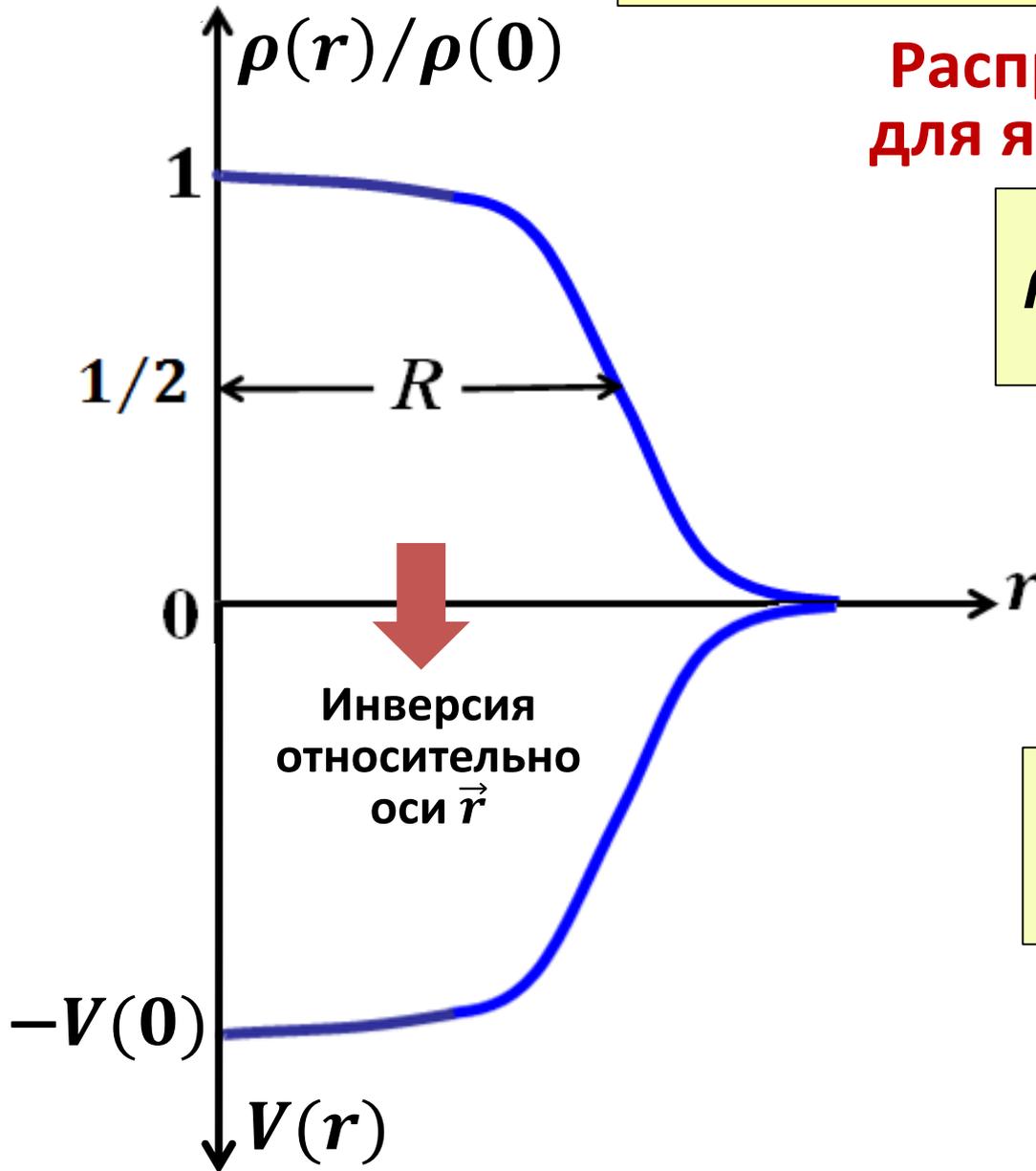
- Осцилляторный
- Вудса - Саксона
- Прямоугольный

← Наиболее реалистичен

## **Как возникает потенциал Вудса – Саксона?**

**В силу короткодействия  
нуклон-нуклонного потенциала  
глубина ядерной потенциальной ямы  
в некотором месте ядра  
в 1-ом приближении пропорциональна  
плотности нуклонов в этом месте.**

# Анимация на Лекции



Распределение Ферми  
для ядерной плотности:

$$\rho(r) = \frac{\rho(0)}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$

$$a \approx 0,55 \text{ ФМ}$$

Потенциал  
Вудса-Саксона:

$$V(r) = -\frac{V(0)}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$

$$V(0) \approx 50 \text{ МэВ,}$$
$$a \approx 0,55 \text{ ФМ}$$

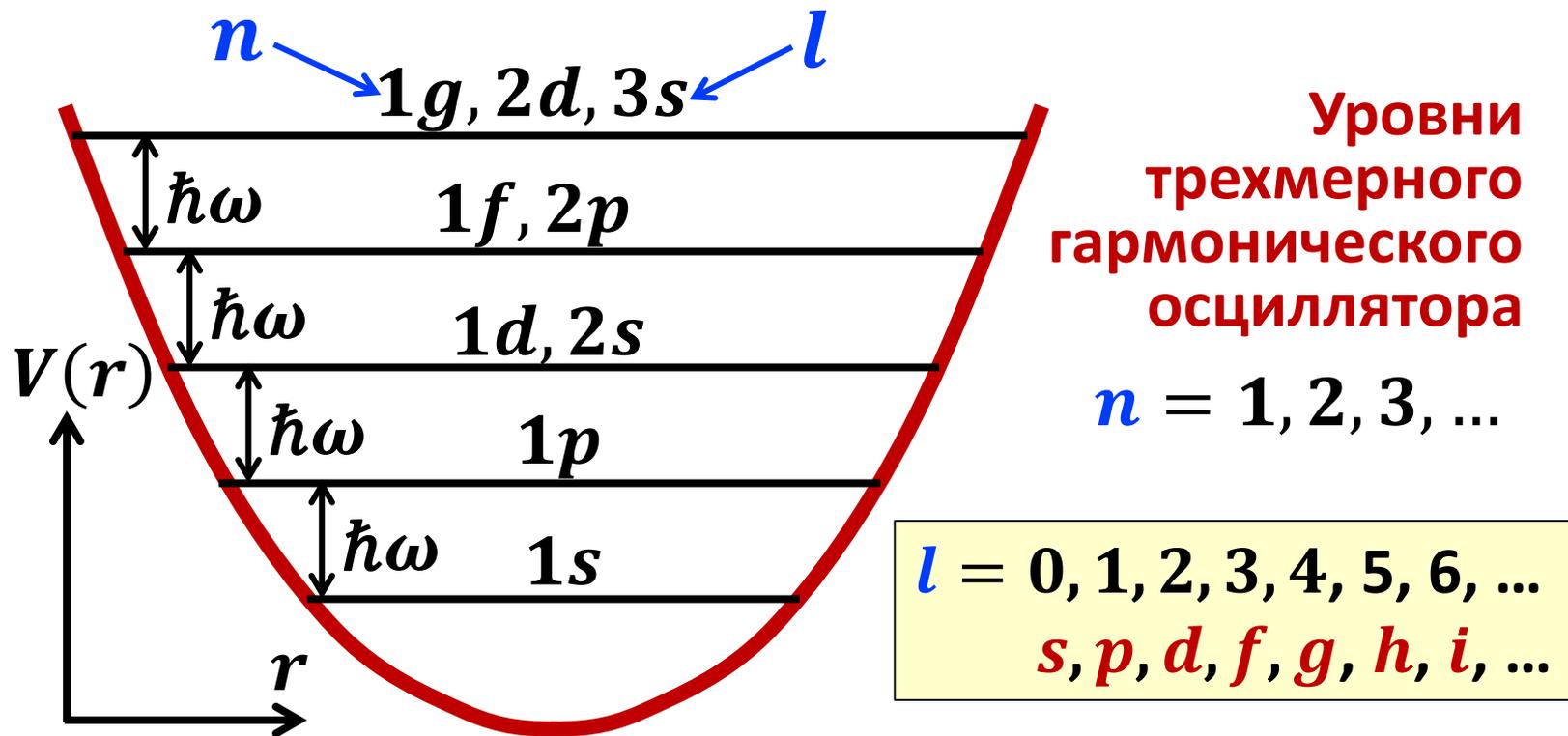
Стационарное уравнение Шредингера для одного нуклона в сферическом потенциале  $V(r)$ :

$$\hat{H}\psi(r) = \left[ \frac{\hat{p}^2}{2M} + V(r) \right] \psi(r) = E \cdot \psi(r),$$

где  $\hat{p}^2 = -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$  – оператор квадрата импульса нуклона,  $M$  – его масса, а  $E$  – энергия.

В сферическом потенциале состояние частицы (нуклона) характеризуется определённым орбитальным моментом – сохраняющимся квантовым числом  $l$ . С ростом энергии частицы одно и то же значение  $l$  встречается у неё вновь и вновь. Порядковый номер появления у частицы состояния с одним и тем же  $l$  с ростом энергии называют **радиальным квантовым числом  $n$** .

Таким образом, любое состояние частицы (и её волновая функция  $\psi$  в сферическом поле) характеризуется двумя целыми числами  $n$  и  $l$ :  $\psi \equiv \psi_{nl}$ .



Уровни гармонического осциллятора эквидистантны. Расстояние между ними для частицы с массой  $M$ , равной массе нуклона, при  $V_0 = 30 \text{ МэВ}$  даётся выражением:

$$\hbar\omega = \left( \frac{2V_0\hbar^2}{MR^2} \right)^{1/2} \approx (41 \div 42) A^{-1/3} \text{ МэВ}$$

Заполнение нуклонами  
одночастичных уровней (подоболочек)  
происходит в соответствии с принципом Паули.

В основном состоянии заняты  
самые нижние уровни.

При этом одночастичные уровни  
для протонов и нейтронов  
заселяются независимо.

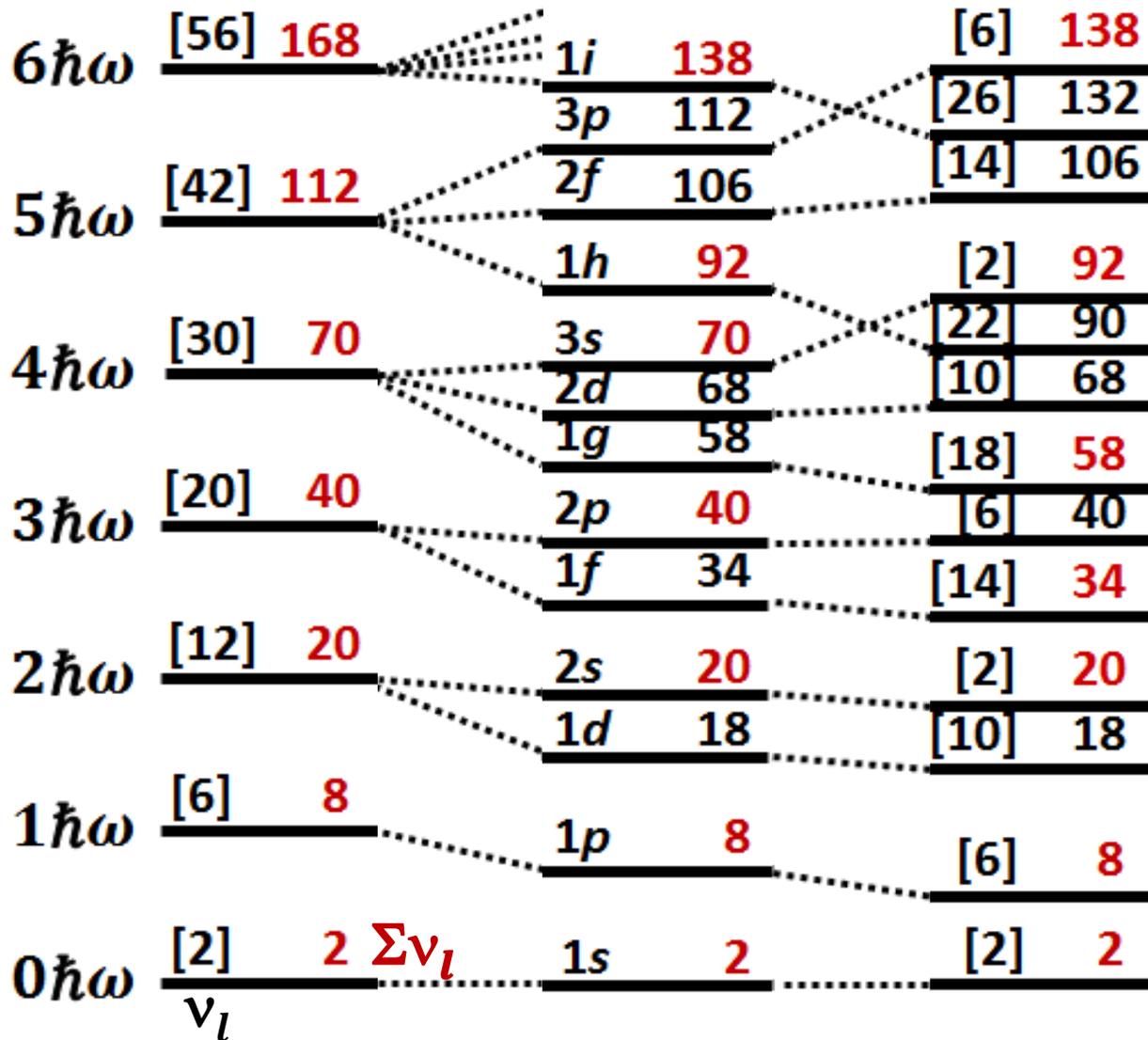
Число нуклонов одного типа на подоболочке  
даётся формулой

$$v_l = 2(2l + 1),$$

где  $(2l + 1)$  – число ориентаций вектора  $\vec{l}$ ,

а  $2$  – число ориентаций спина нуклона  $\vec{s} = \frac{1}{2}$ .

Гармонический Потенциал Прямоугольная  
осциллятор Вудса-Саксона яма



Число нуклонов одного типа на подоболочке:

$$v_l = 2(2l + 1)$$

Число спиновых состояний  $\left(\pm \frac{1}{2}\right)$

Число проекций орбитального момента

## Роль спин-орбитальных сил в формировании ядерной модели оболочек

Для объяснения магических чисел  
необходимо учитывать  
спин-орбитальную составляющую  
нуклон-нуклонных сил.

Нуклон сильнее взаимодействует с другими  
нуклонами, если его спин  $\vec{s}$  и орбитальный  
момент  $\vec{l}$  направлены в одну сторону.

С учётом  $ls$ -составляющей потенциал, в котором  
находится ядерный нуклон, имеет вид:

$$U(r) = V(r) + a \cdot \vec{l} \cdot \vec{s}.$$

Здесь  $V(r)$  – ядерный потенциал притяжения –  
потенциальная яма глубиной  $\approx 50$  МэВ,  
а  $a < 0$  – константа,  
величина которой единицы МэВ.

Потенциальная яма без  $ls$ -сил

Потенциальная яма с  $ls$ -силами

Уровень с полным угловым моментом нуклона:

$nl$   $j_{1,2} = l \pm 1/2$

$j_2 = l - 1/2$

$nl_{j_2}$

Спин-орбитальное расщепление

$j_1 = l + 1/2$

$nl_{j_1}$

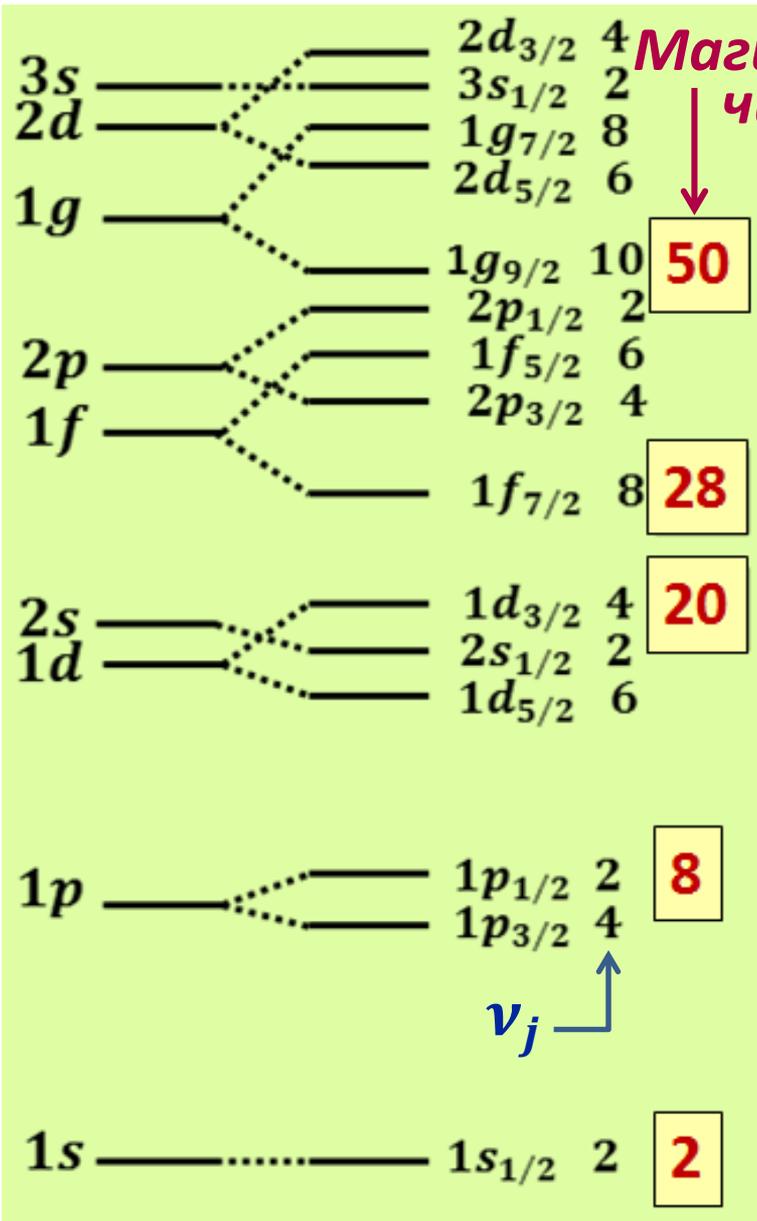
Простейший пример

$1p$   $1p_{1/2}$   $1p_{3/2}$

$j = 1 \pm 1/2 = 1/2, 3/2$

$l$   $s$   $\uparrow\downarrow$   $\uparrow\uparrow$



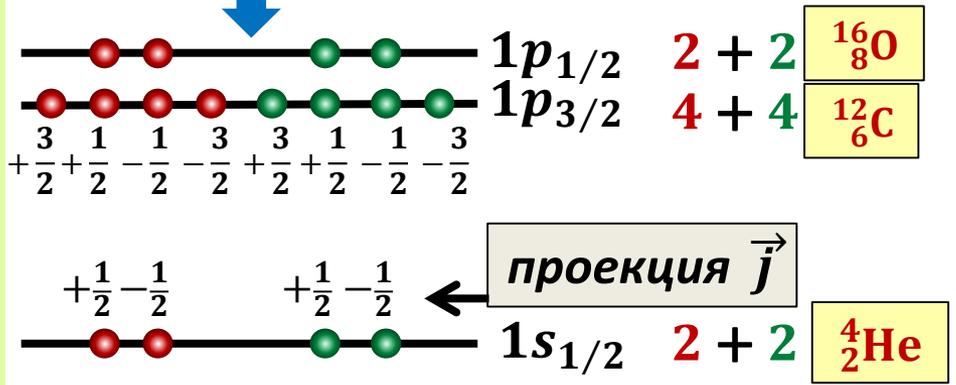


# Диаграмма нижних нуклонных уровней (подоболочек) с учётом спин-орбитальных сил

Число нуклонов одного типа на подоболочке равно числу проекций вектора полного момента нуклона  $\vec{j}$ :

$$v_j = 2j + 1$$

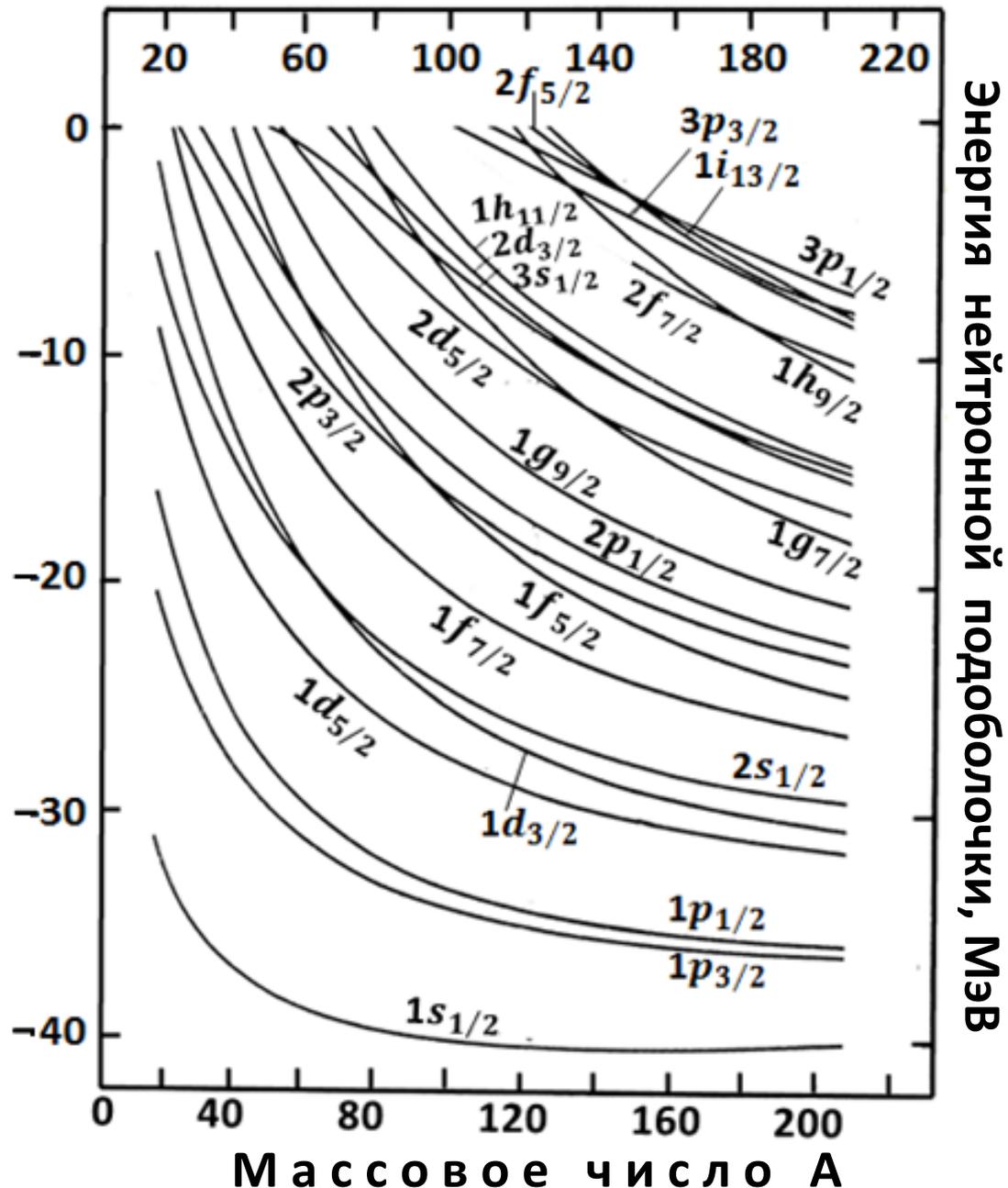
Простейший пример – ядро  $^{16}_8\text{O}$  в основном состоянии



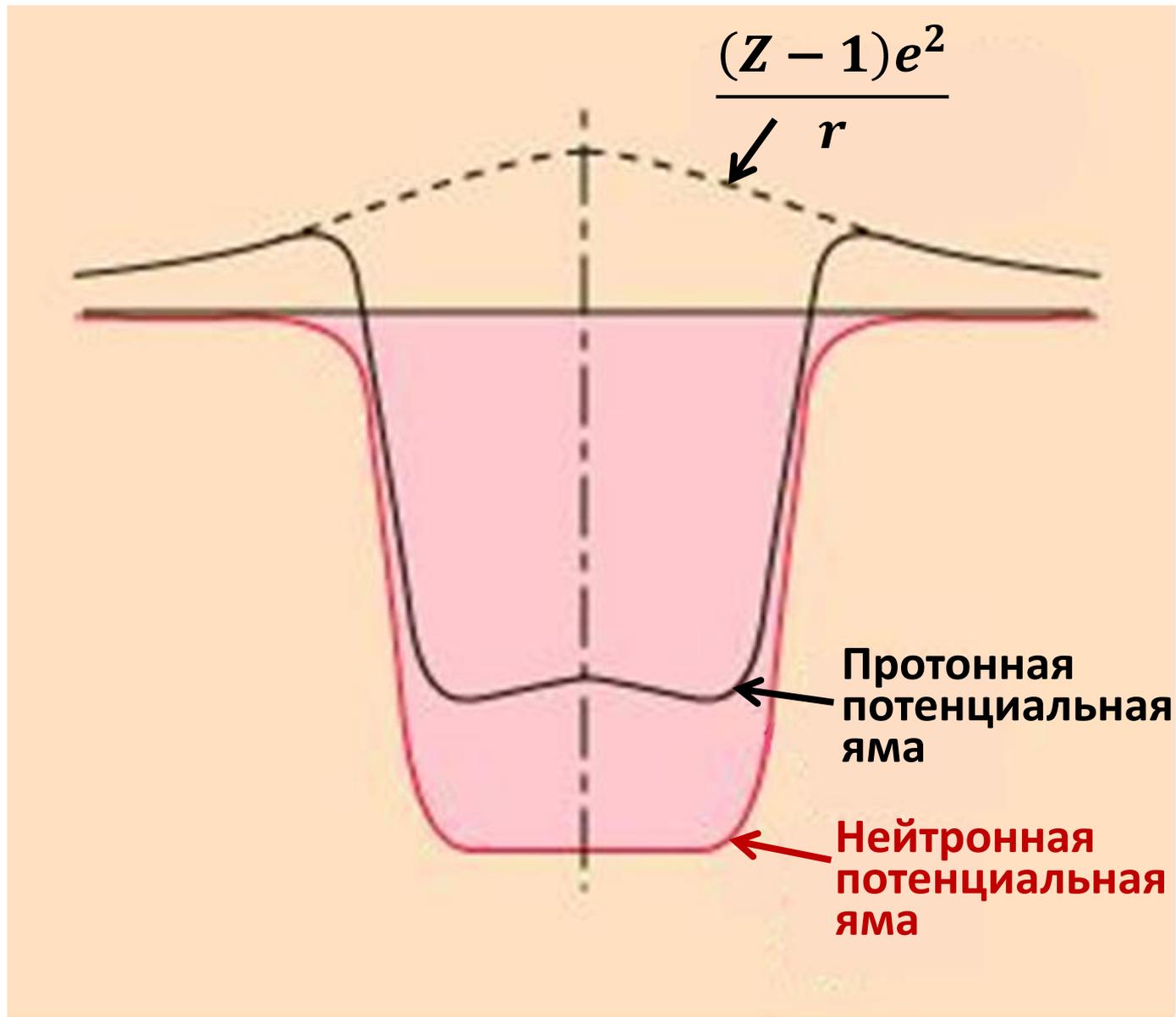
**Зависимость  
энергии  
ядерных  
нейтронных  
подоболочек  
от числа нуклонов  
в потенциале  
Вудса-Саксона  
(C.J. Veja)**

**Расстояние между  
оболочками  
в потенциале  
гармонического  
осциллятора**

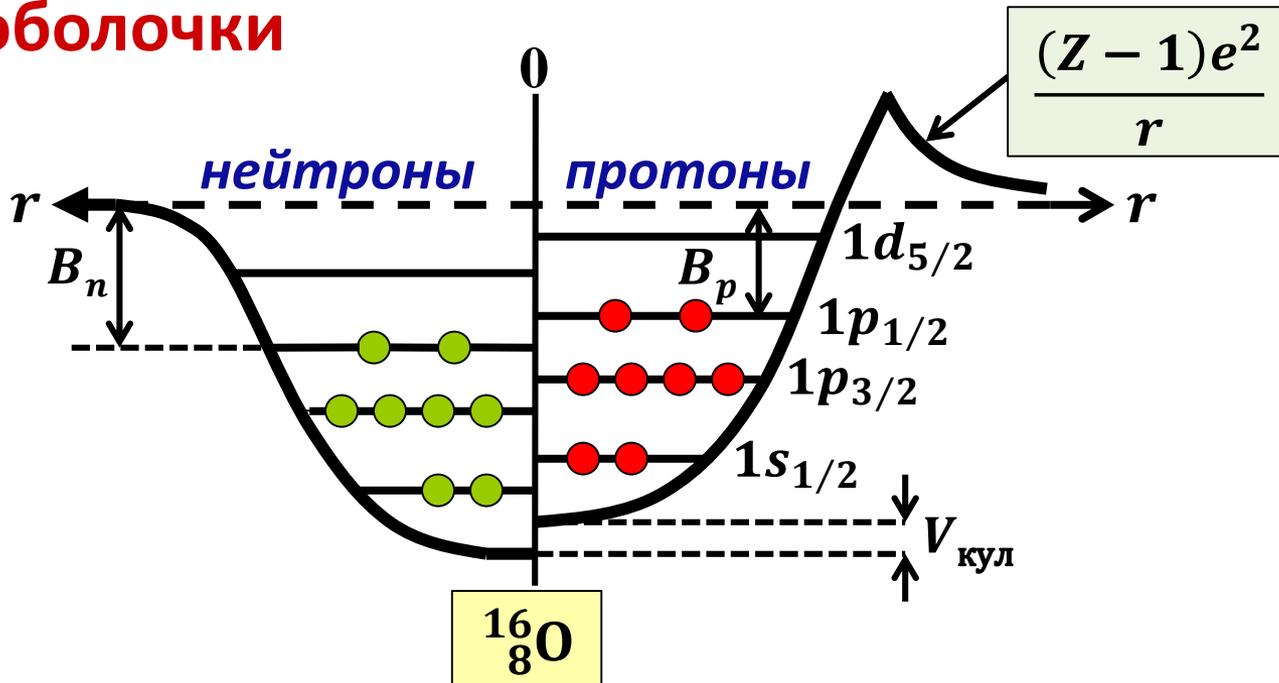
$$\hbar\omega \approx 41 \cdot A^{-1/3} \text{ МэВ}$$



# Кулоновское отталкивание добавляется к потенциальной яме для протонов



# Нейтронные и протонные подболочки



## Дважды магические ядра:

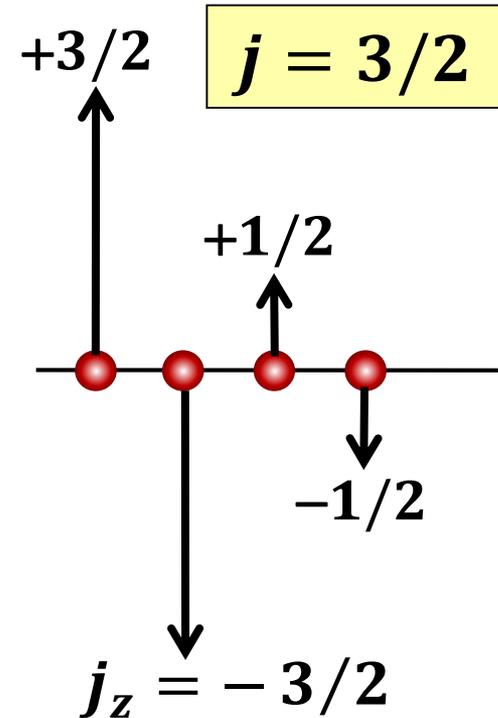
	${}^4_2\text{He}$	${}^{16}_8\text{O}$	${}^{40}_{20}\text{Ca}$	${}^{48}_{20}\text{Ca}$	${}^{208}_{82}\text{Pb}$
Число нейтронов	2	8	20	28	126
Число протонов	2	8	20	20	82

# Спин и чётность основных состояний ядер в одночастичной модели оболочек

## 1. Ядро с заполненными подоболочками:

На них нуклонами заняты состояния со всеми возможными проекциями полного момента  $j$  на выделенное направление (ось  $z$ ). Каждому нуклону с проекцией  $+j_z$  будет соответствовать нуклон с  $-j_z$  и суммарный момент нуклонов на каждой подоболочке  $\vec{j} = \vec{0}$ .

Чётность замкнутой подоболочки положительна, так как она содержит чётное число  $(2j+1)$  нуклонов одной чётности.



Итак, для ядер с замкнутыми подоболочками

$$J^P = 0^+$$

## 2.

### Один нуклон сверх заполненных подоболочек:

Остов заполненных подоболочек имеет спин-чётность  $0^+$ . Поэтому  $J^P$  такого ядра определяется полным моментом  $j$  и чётностью  $p = (-1)^l$  нуклона сверх замкнутых подоболочек, где  $l$  – орбитальный момент внешнего нуклона. Таким образом, в рассматриваемом случае :

$$J^P = j^p = j^{(-1)^l}$$

### 3. Не хватает одного нуклона до заполнения подоболочки:

Ядро с «дыркой» в заполненной подоболочке также имеет

$$J^P = j^p = j^{(-1)^l}$$

где  $j$ ,  $p$  и  $l$  относятся к отсутствующему нуклону.

### 3. Ядро с «дыркой» в заполненной подболочке

Пусть полный угловой момент нуклона на такой подболочке и его чётность соответственно  $j$  и  $p$ .

Обозначим момент и чётность подболочки с «дыркой»  $J$  и  $P$ . Так как добавление нуклона в подболочку замыкает её, имеем

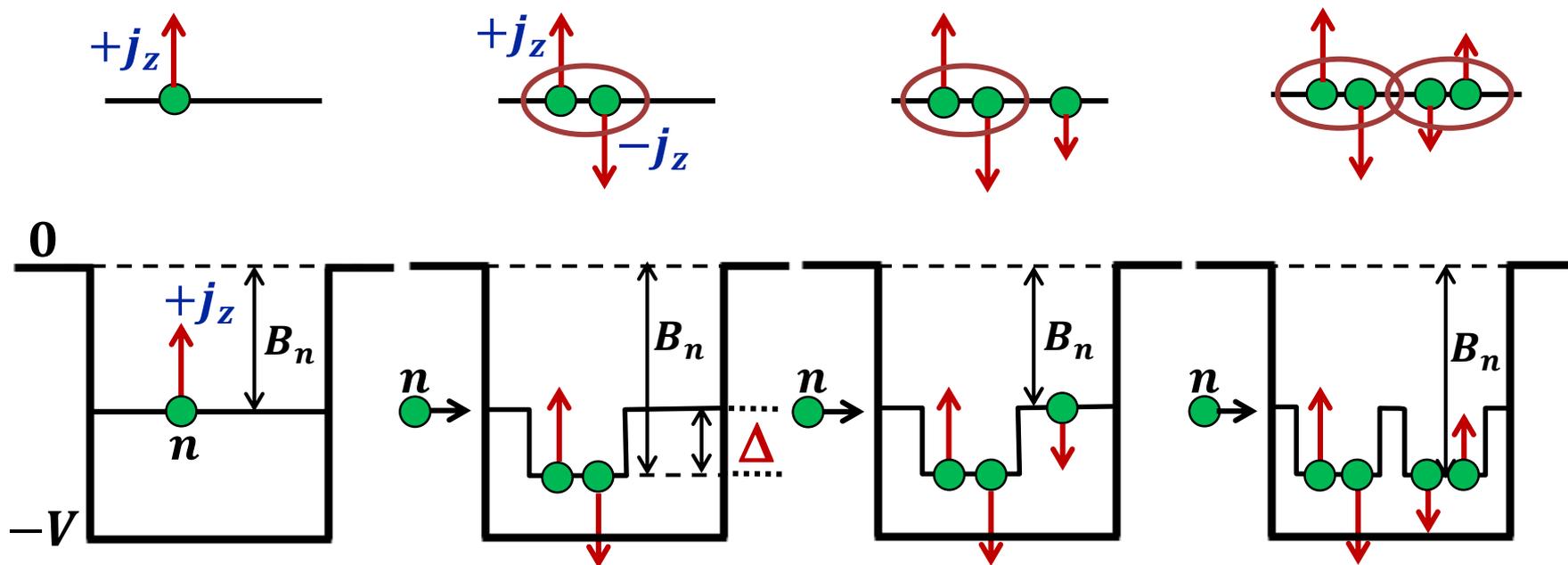
$$\begin{aligned} \vec{J} + \vec{j} &= \vec{0} & \text{и} & & J &= j, \\ P \cdot p &= +1 & \text{и} & & P &= p. \end{aligned}$$

То-есть, для ядра с «дыркой» имеем те же правила нахождения спина и чётности основного состояния, что и для ядра с одним нуклоном сверх замкнутых подболочек:

$$J^P = j^p = j^{(-1)^l}$$

# Учёт эффекта спаривания нуклонов в модели оболочек

Энергия спаривания  $\Delta \approx 1 \div 3$  МэВ.  
Глубина ядерного потенциала  $V \approx 50$  МэВ:



Анимация на Лекции

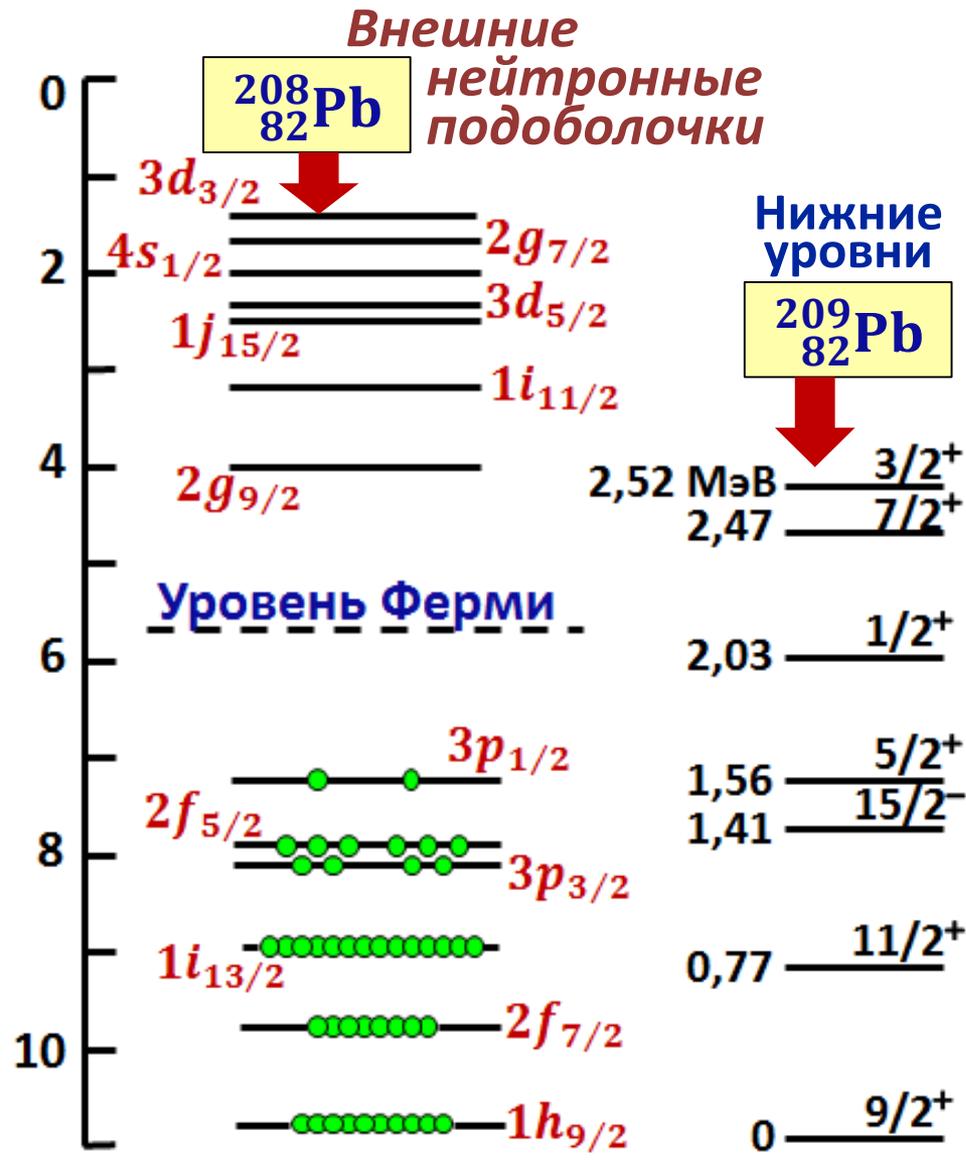
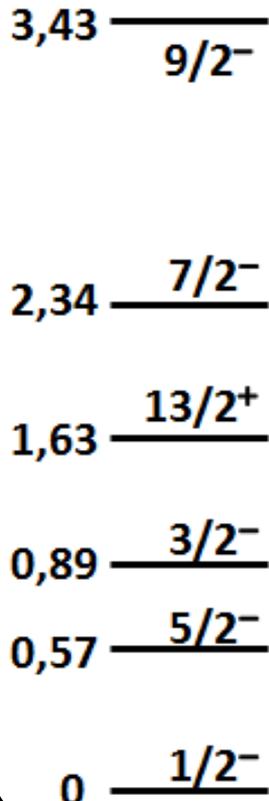
В основном (и низколежащих) состояниях ядра нуклоны одного типа на подоболочке объединяются в пары с противоположными по знаку  $j_z$ . Полный момент количества движения каждой такой пары протонов или нейтронов равен **0**. Поэтому, если на подоболочке  $nl_j$  находится чётное число нуклонов каждого сорта, то все они объединены в пары (спарены) и подоболочка имеет  $J = 0$ . Если на подоболочке нечётное число нуклонов одного типа, то один из них не связан в пару и  $J$  подоболочки равен  $j$  этого неспаренного нуклона, т. е.  $J = j$ . Итак, в основном состоянии ядра имеем:

- чётно-чётное ядро:  $J^P = 0^+$ ;
- нечётное ядро:  $J = j, P = (-1)^l$ ;
- нечётно-нечётное ядро:  $|j_p - j_n| \leq J \leq j_p + j_n$ ,  
 $P = (-1)^{l_p + l_n}$ .

Одночастичные  
и однодырочные  
нейтронные  
возбуждения  
ядер  $Pb-207$   
и  $Pb-209$

Нижние  
уровни

$^{207}_{82}Pb$



Анимация на Лекции

# Заключительные замечания о ядерной модели оболочек

1

Рассмотренный вариант ядерной модели оболочек называют **одночастичной моделью оболочек (ОМО)**. Это самый простой вариант модели оболочек. Он относится к сферическим ядрам (ядрам с заполненными оболочками и близкими к ним, в частности к магическим ядрам) и предполагает, что между нуклонами на подоболочках нет взаимодействий кроме сил спаривания. Всё взаимодействие между нуклонами в ядре сведено к их общей потенциальной яме.

## 2

Более сложный вариант модели оболочек, так называемая **многочастичная модель оболочек (ММО)**, учитывает, что межнуклонные силы в ядре не исчерпываются общей для всех нуклонов потенциальной ямой. Есть некая добавка к этой одинаковой для всех нуклонов потенциальной яме, которая не может быть учтена этой ямой. Т.е. существует некое **остаточное взаимодействие** между нуклонами, принципиально не сводимое к общей потенциальной яме. В **ММО** делается попытка учесть это остаточное взаимодействие.

### 3

**Большинство ядер несферические и к ним неприменима сферическая модель оболочек.**

**Для несферических ядер разработана модель оболочек, учитывающая, что нуклоны в таких ядрах движутся в несферической потенциальной яме.**