

```

1  #! python3.7
2  # -*- coding: utf-8 -*-
3  from numpy import zeros, linspace, sin, pi, complex64
4  from matplotlib.pyplot import style, figure, axes
5  from celluloid import Camera
6
7  # Набор команд, за счёт которых анимация строится в отдельном окне
8  from IPython import get_ipython
9  get_ipython().run_line_magic('matplotlib', 'qt')
10
11 # Определение функции, задающей начальное условие
12 def u_init(x) :
13     u_init = -100*sin(pi*x)**100 + 100*x**2
14     return u_init
15
16 # Функция f подготавливает массив, содержащий элементы вектор-функции,
17 # определяющей правую часть решаемой системы ОДУ
18 def f(y,h,N):
19     f = zeros(N-1)
20     f[0] = -1/2*y[0] - h/8*y[0]**2
21     f[1] = -(y[1] - 7/4*y[0]) - h/2*y[0]*(y[1] - 1/4*y[0])
22     for n in range(2,N-1) :
23         f[n] = -(y[n] - 2*y[n-1] + y[n-2]) - h/2*y[n-1]*(y[n] - y[n-2])
24     return f
25
26 # Функция подготавливает массивы, которые содержат
27 # элементы диагоналей трёхдиагональной матрицы
28 # [E - alpha*tau*f_y]
29 def DiagonalsPreparation(y,h,N,tau,alpha) :
30     # Входные данные:
31     # y - решение системы ОДУ в текущий момент времени
32     # h - шаг сетки
33     # N - число интервалов сетки
34     # tau - текущий шаг по времени
35     # alpha - коэффициент, определяющий численную схему
36
37     # Выходные параметры:
38     # a, b и c - диагонали трёхдиагональной матрицы:
39     #
40     # [ a(0) ]
41     # [ b(1) a(1) ]
42     # [ c(2) b(2) a(2) ]
43     # [ ... ... ... ]
44     # [ ... ... ... ]
45     # [ c(N-2) b(N-2) a(N-2) ]
46
47     # Выделение памяти под массивы,
48     # содержащие соответствующие диагонали
49     a = zeros(N-1,dtype=complex64)
50     b = zeros(N-1,dtype=complex64)
51     c = zeros(N-1,dtype=complex64)
52
53     a[0] = 1/4*(2 - h**2) - alpha*tau*(-1/2 - h/4*y[0])
54     a[1] = 1. - alpha*tau*(-1 - h/2*y[0])
55     b[1] = -(7/4 + h**2) - alpha*tau*(7/4 - h/2*(y[1] - 1/2*y[0]))
56     for n in range(2,N-1) :
57         a[n] = 1. - alpha*tau*(-1 - h/2*y[n-1])
58         b[n] = -(2 + h**2) - alpha*tau*(2 - h/2*(y[n] - y[n-2]))
59         c[n] = 1.- alpha*tau*(-1 + h/2*y[n-1])
60
61     return a, b, c
62
63 # Функция реализует экономичный алгоритм
64 # решения СЛАУ  $A X = B$  с трёхдиагональной матрицей
65 def SpecialMatrixAlgorithm(a,b,c,B) :
66     # Входные параметры:
67     # B - вектор правой части длины n
68     # a, b, c - вектора длины n, содержащие элементы диагоналей
69     # (b(0), c(0) и c(1) в алгоритме не используются)

```

```

70
71 # Структура решаемой СЛАУ:
72
73 # [ a(0)                ] [ X(0) ] [ B(0) ]
74 # [ b(1) a(1)          ] [ X(1) ] [ B(1) ]
75 # [ c(2) b(2) a(2)    ] [       ] [       ]
76 # [      ...  ...  ... ] [ ... ] = [ ... ]
77 # [      ...  ...  ... ] [X(n-2)] [B(n-2)]
78 # [      c(n-1) b(n-1) a(n-1) ] [X(n-1)] [B(n-1)]
79
80 n = len(B); X = zeros(n,dtype=complex64)
81 B = B.astype(complex64)
82
83 for i in range(n-2) :
84     k = b[i+1]/a[i]
85     B[i+1] = B[i+1] - k*B[i]
86     k = c[i+2]/a[i]
87     B[i+2] = B[i+2] - k*B[i]
88 k = b[n-1]/a[n-2]
89 B[n-1] = B[n-1] - k*B[n-2]
90
91 for i in range(n) :
92     X[i] = B[i]/a[i]
93
94 return X
95
96 # Функция находит приближённое решение уравнения в частных производных (УрЧП/PDE)
97 def PDESolving(a,b,N,t_0,T,M,u_init,alpha) :
98     # Входные параметры:
99     # a, b - границы области по пространственной переменной x
100     # N_0 - число интервалов базовой сетки по пространству
101     # t_0, T - начальный и конечный моменты счёта
102     # M_0 - число интервалов базовой сетки по времени
103     # u_init - функция, определяющая начальное условие
104     # alpha - коэффициент, определяющий численную схему
105
106     # Выходной параметр:
107     # u - массив, содержащий сеточные значения решения УрЧП
108
109     # Формирование сетки :
110     # Определение сетки по пространству
111     h = (b - a)/N; x = linspace(a,b,N+1)
112     # Определение сетки по времени
113     tau = (T - t_0)/M; t = linspace(t_0,T,M+1)
114
115     # Выделение памяти под массив сеточных значений решения УрЧП,
116     u = zeros((M + 1,N + 1))
117     # Выделение памяти под вспомогательный массив y,
118     # в котором хранятся решения системы ОДУ в текущий момент времени t = t_m
119     y = zeros(N - 1)
120
121     # Задание начального условия (на начальном временном слое)
122     u[0] = u_init(x)
123
124     # Задание начального условия решаемой системы ОДУ
125     y = u_init(x[2:N+1])
126
127     # Реализация схемы из семейства ROS1
128     # (конкретная схема определяется коэффициентом alpha)
129     for m in range(M) :
130         diagonal,codiagonal_1,codiagonal_2 = DiagonalsPreparation(y,h,N,tau,alpha)
131         w_1 = SpecialMatrixAlgorithm(diagonal,codiagonal_1,codiagonal_2,f(y,h,N))
132         y = y + tau*w_1.real
133
134         u[m + 1,0] = 0
135         u[m + 1,1] = 1/4*y[0]
136         u[m + 1,2:N+1] = y
137
138     return u

```

```

139
140 # Определение входных данных задачи
141 a = 0.; b = 1.
142 t_0 = 0.; T = 0.8
143
144 # Определение параметра схемы (нужный раскомментировать)
145 alpha = (1 + 1j)/2 # CROS1 (схема Розенброка с комплексным коэффициентом)
146 # alpha = 1.      # DIRK1 (обратная схема Эйлера)
147
148 # Определение числа интервалов пространственно-временной сетки,
149 # на которой будет искомое приближённое решение
150 N = 200; M = 400
151
152 u = PDESolving(a,b,N,t_0,T,M,u_init,alpha)
153 # Анимация отрисовки решения
154 style.use('dark_background')
155 fig = figure()
156 camera = Camera(fig)
157 ax = axes(xlim=(a,b), ylim=(-130.,130.))
158 ax.set_xlabel('x'); ax.set_ylabel('u')
159 for m in range(M + 1) :
160     # Отрисовка решения в момент времени t_m
161     ax.plot(linspace(a,b,N+1),u[m], color='y', ls='-', lw=2)
162     camera.snap()
163 animation = camera.animate(interval=20, repeat=False, blit=True)
164
165 # Листинг программы, реализующей решение нелинейного уравнения
166 # типа Бенджамена-Бона-Махони-Бюргерса методом прямых

```