

# Обработка астрометрических наблюдений

## 8. Редукция I: Модели

кто: Семенцов В.Н.

когда: 2 апреля, 2021

дано два взаимно отождествленных набора точек  
знаем (примерно) достижимую точность наблюдений  
надо построение системы уравнений для вычисления  
кинематических параметров наблюдаемых  
объектов в системе опорного каталога

## Общая схема редукции

- $\mathbf{x}_i$  – вектор измеряемых величин (приборных координат) в точке  $i$ ,  $\varepsilon_{\mathbf{x}_i}$  – вектор погрешностей измеряемых величин в точке  $i$ ,
- $\xi_i$  – вектор идеальных координат в точке  $i$ ,
- $\mathbf{p}$  – вектор параметров модели («параметров пластинки»),
- $\mathbf{A}(\dots; \dots)$  – нелинейная зависимость:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{A}_i(\xi_i; \mathbf{p}). \quad (1)$$

## Общая схема редукции

- $\mathbf{x}_i$  – вектор измеряемых величин (приборных координат) в точке  $i$ ,  $\varepsilon_{\mathbf{x}_i}$  – вектор погрешностей измеряемых величин в точке  $i$ ,
- $\xi_i$  – вектор идеальных координат в точке  $i$ ,
- $\mathbf{p}$  – вектор параметров модели («параметров пластинки»),
- $\mathbf{A}(\dots; \dots)$  – нелинейная зависимость:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{A}_i(\xi_i; \mathbf{p}). \quad (1)$$

система условных уравнений (1) решается приближенными методами, обычно — ищется решение, минимизирующее норму вектора невязок; в случае нелинейной  $\mathbf{A}$  полезно добавить условие минимальной нормы вектора решения.

# Выбор нелинейных зависимостей

- Полная система полиномов

# Выбор нелинейных зависимостей

- Полная система полиномов

примеры:

GSC, [astrometrica.at](http://astrometrica.at)

# Выбор нелинейных зависимостей

■ Полная система полиномов

примеры: GSC, [astrometrica.at](http://astrometrica.at)

■ Физически обоснованные зависимости

# Выбор нелинейных зависимостей

- Полная система полиномов

примеры: GSC, [astrometrica.at](http://astrometrica.at)

- Физически обоснованные зависимости

примеры: Астрографический каталог (AC2000, AC SAI)



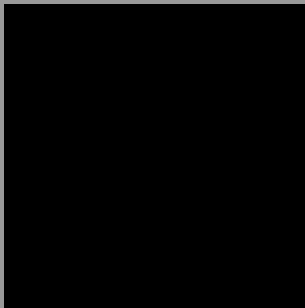
# Выбор нелинейных зависимостей

- Полная система полиномов

примеры: GSC, [astrometrica.at](http://astrometrica.at)

- Физически обоснованные зависимости

примеры: Астрографический каталог (AC2000, AC SAI)



# Ортогонализация

- процесс Грама-Шмидта
- Пусть имеются линейно независимые векторы  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$
- $\text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$  — оператор проекции вектора  $\mathbf{a}$  на вектор  $\mathbf{b}$ , определённый как

$$\text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle} \mathbf{b},$$

где  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  — скалярное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

- скалярное произведение вычислять следует не по всей области определения набора функций, а по ее подмножеству конкретных точек

## Ортогонализация-2

- Классический процесс Грама – Шмидта выполняется следующим образом:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 \quad (2)$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \text{proj}_{\mathbf{b}_1} \mathbf{a}_2 \quad (3)$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \text{proj}_{\mathbf{b}_1} \mathbf{a}_3 - \text{proj}_{\mathbf{b}_2} \mathbf{a}_3 \quad (4)$$

$$\dots \quad (5)$$

$$\mathbf{b}_n = \mathbf{a}_n - \text{proj}_{\mathbf{b}_1} \mathbf{a}_n - \text{proj}_{\mathbf{b}_2} \mathbf{a}_n - \dots - \text{proj}_{\mathbf{b}_{n-1}} \mathbf{a}_n \quad (6)$$

На основе каждого вектора  $\mathbf{b}_j$  ( $j = 1 \dots n$ ) может быть получен нормированный вектор  $\mathbf{e}_j$  единичной длины,

определённый как  $\mathbf{e}_j = \frac{\mathbf{b}_j}{\|\mathbf{b}_j\|}$

## Ортогонализация-3

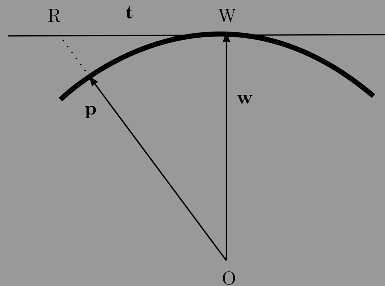
- Результаты процесса Грама-Шмидта:  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  — система ортогональных векторов либо  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  — система ортонормированных векторов.

## Ортогонализация-3

- Результаты процесса Грама-Шмидта:  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  — система ортогональных векторов либо  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  — система ортонормированных векторов.
- Если исходные вектора (в конкретном подпространстве) линейно зависимы, то процесс ортогонализации на каком-то шаге  $j$  может дать нулевой вектор  $\mathbf{b}_j$ . Его следует отбросить и продолжить процесс ортогонализации. Количество векторов, выдаваемых алгоритмом, будет равно размерности исходного подпространства (то есть количеству линейно независимых векторов, которые можно выделить среди исходных векторов).

# Классическая редукция

Проектирование небесной сферы на касательную плоскость



$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{w}^T \mathbf{p}} - \mathbf{w}, \quad (7)$$

значит:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\mathbf{w}^T \mathbf{p}} \mathbf{w} \times \mathbf{p} \times \mathbf{w} \quad (8)$$

## Проектирование небесной сферы на касательную плоскость-2

Вектор  $\mathbf{t}$  называется тангенциальным координатным вектором направления  $\mathbf{p}$  относительно  $\mathbf{w}$ . Введя единичные ортогональные вектора  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{w}$ , можно представить тангенциальные координаты точки  $R$  относительно  $W$  в виде:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{t} = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{p}}{\mathbf{w}^T \mathbf{p}}, \quad \mathbf{v}^T \mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{p}}{\mathbf{w}^T \mathbf{p}}. \quad (9)$$

## Проектирование небесной сферы на касательную плоскость-3

Если центр проекции  $O$  совпадает с первой главной точкой объектива, то создаваемое в тангенциальной плоскости изображение является центральной проекцией с центром во второй главной точке  $O_l$ . Для расчета компонент вектора  $\mathbf{t}$  надо будет примерно знать еще и фокусное расстояние  $f$ , определяющее масштаб.

Небольшие повороты координатной триады приводят к

$$d\mathbf{W} = \varepsilon \times \mathbf{W}, \quad (10)$$

например,  $d\mathbf{w} = \varepsilon \times \mathbf{w}$ , тогда изменения тангенциальных координат будут:

$$d(\mathbf{W}^T \mathbf{t}) = \mathbf{W}^T d\mathbf{t} + \mathbf{t}^T d\mathbf{W} \quad (11)$$

и если все расписать:



## Проектирование небесной сферы на касательную плоскость-4

$$\begin{bmatrix} d(\mathbf{u}^T \mathbf{t}) \\ d(\mathbf{v}^T \mathbf{t}) \\ d(\mathbf{w}^T \mathbf{t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{v}^T \varepsilon + \mathbf{t}^T \mathbf{v} \mathbf{w}^T \varepsilon - \mathbf{t}^T \mathbf{u} (\mathbf{t}^T \mathbf{u} \mathbf{v}^T \varepsilon - \mathbf{t}^T \mathbf{v} \mathbf{u}^T \varepsilon) \\ \mathbf{u}^T \varepsilon - \mathbf{t}^T \mathbf{u} \mathbf{w}^T \varepsilon - \mathbf{t}^T \mathbf{v} (\mathbf{t}^T \mathbf{u} \mathbf{v}^T \varepsilon - \mathbf{t}^T \mathbf{v} \mathbf{u}^T \varepsilon) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Первые слагаемые в правой части — смещение начала тангенциальных координат, вторые — результат небольшого поворота осей, квадратичные члены связаны с наклоном.

# Формулы Тёрнера

Оригинальные выглядят не очень хорошо:

4. The appropriateness of using rectilinear co-ordinates is thus suggested : for the transformation from any rectilinear co-ordinates on one plate to any rectilinear on another takes a simple form. Let  $(x, y)$ ,  $(\xi, \eta)$  be any rectilinear co-ordinates of the same point on the two plates ; then the following general relations hold :

$$\xi = \frac{Ax + By + C}{Kx + Ly + M}, \quad \eta = \frac{Dx + Ey + F}{Kx + Ly + M}.$$

It is readily seen that the denominator must be the same in the two cases, for the equation

$$\lambda\xi + \mu\eta + \nu = 0$$

Это дробно-линейное преобразование, вызванное наклоном плоскости фотопластинки к картинной плоскости и переходящее в общепринятый вид при очень малых значениях угла наклона.

$$\begin{aligned} x &= A + B\xi + C\eta \\ y &= D + E\xi + F\eta \end{aligned} \tag{13}$$

Сейчас (13) чаще называют просто аффинным преобразованием, не помяная Тёрнера вообще.

# Слагаемые в редуционную формулу

наклон рассмотрен ранее

дисторсия  $x \cdot (x^2 + y^2)$

кома  $b \cdot x$

## Выбор редуцированной модели в зависимости от задачи исследования

Общие формулы редукции измерений для каждого объекта можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}x &= f(\alpha, \delta, m, CI, c_1, \dots, c_n) \\y &= g(\alpha, \delta, m, CI, c_1, \dots, c_n) \\b &= h(\alpha, \delta, m, CI, c_1, \dots, c_n)\end{aligned}\tag{14}$$

где

- $x, y, b$  — измеренные на пластинке координаты и оценка блеска звезды;
- $\alpha, \delta, m, CI$  — сферические координаты, звездная величина и показатель цвета звезды;
- $c_1, \dots, c_n$  — постоянные пластинки, набор которых может различаться для разных телескопов.

Индексы, соответствующие конкретной звезде, опущены.

## Выбор редуцированной модели в зависимости от задачи исследования. 2

При создании АС2000 применялась редукция в систему опорного каталога с использованием формул Тёрнера (коэффициенты  $a...f$ ) с поправкой низкого порядка за наклон фотопластинки (коэффициенты  $p, q$ ):

$$\begin{aligned}\xi &= ax + by + c + ex + fy + px^2 + qxy, \\ \eta &= ay - bx + d - ey + fx + pxu + qy^2.\end{aligned}\tag{15}$$

## Выбор редуccionной модели в зависимости от задачи исследования. 3

При составлении АС SAI применялась дробно-линейная модель ( $c_1 \dots c_8$ , дающая строгий учет наклона пластинки) с добавлением слагаемых, учитывающих дисторсию объектива ( $c_9$ ), ошибки координатной сетки ( $c_{10} \dots c_{13}$ ), а также кому и уравнение блеска ( $c_{14} \dots c_{17}$ ):

$$\begin{aligned} f(x, y, b, \xi, \eta, c_1, \dots, c_{17}) &= \frac{c_1 \xi_1 + c_2 \eta_1 + c_3}{1 + c_7 \xi_1 + c_8 \eta_1} + \\ &+ c_{10} x_1 + c_{11} y_1 + c_{14} b x + c_{15} b \\ g(x, y, b, \xi, \eta, c_1, \dots, c_{17}) &= \frac{c_4 \xi_1 + c_5 \eta_1 + c_6}{1 + c_7 \xi_1 + c_8 \eta_1} + \\ &+ c_{12} x_1 + c_{13} y_1 + c_{16} b y + c_{17} b \\ \xi_1 &= \xi + c_9 \xi (\xi^2 + \eta^2), \\ \eta_1 &= \eta + c_9 \eta (\xi^2 + \eta^2) \\ x_1 &= \text{mod}(x + 70, p), \\ y_1 &= \text{mod}(y + 70, p) \end{aligned} \tag{16}$$

## Выбор редуccionной модели в зависимости от задачи исследования. 4

- где  $x, y, b$  — измеренные координаты и оценка блеска;
- $\xi, \eta$  — тангенциальные (идеальные) координаты;
- $\xi_1, \eta_1$  — идеальные координаты с учетом дисторсии объектива;
- $x_1, y_1$  — измеренные координаты с учетом “ошибки рена” (периодической ошибки, связанной со впечатанной на фотопластинки сеткой, шаг которой  $p = 5$  мм для большинства обсерваторий).

Исходные и отредуцированные пластинки в каждой широтной зоне исследовались аналогично АС2000 и при необходимости принималось решение об изменении формул редуccionии для данной зоны.

# Пример: погрешности редуцирования пластинок “Карты Неба”

a).

b).

c).

d).

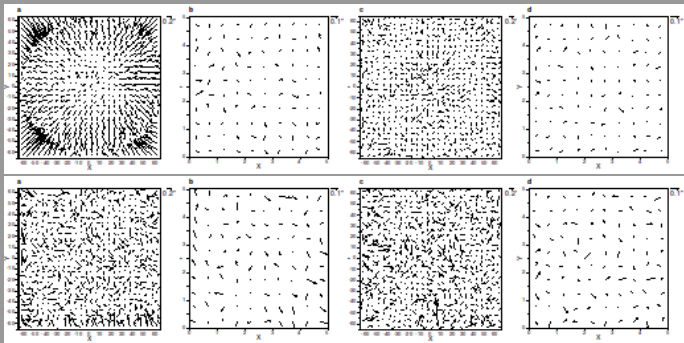


Рис. 1: Остаточные ошибки на сводных пластинках Пертской (вверху) и более качественной Потсдамской зон “Карты неба”. а) и с): уклонения осреднены внутри квадратов размером  $5 \times 5$  мм. б) и d): уклонения осреднены внутри квадратов  $0.5 \times 0.5$  мм. Слева (а, б): после этапа редукиции с каталогом ACRS. Справа (с, d): после заключительного этапа редукиции с каталогом HIPPARCOS.



## Два общих подхода к построению моделей редукции

названия условные

американский

с использованием полного полинома максимальной степени от всех параметров

русско-немецкий

построение редукционного соотношения с минимальным числом параметров на основе использования физических моделей наблюдений (атмосферы, оптической системы, фотоприемника и т.д.)

- в обоих случаях полезно формальное изучение влияния включаемых в модель параметров на остаточную невязку
- для полиномиальных разложений и вообще разложений по полным системам функций следует проверить, насколько эти функции ортогональны друг другу на множестве, определяемом набором измерений

# Оценка точности редуционных вычислений

общая задача линейного МНК (LLSS)

$$A_{m \times n} \mathbf{x}_m \cong \mathbf{b}_n \quad (17)$$

$A$  – матрица плана,  $\mathbf{b}$  – вектор измерений,  $\mathbf{x}$  – вектор оцениваемых параметров (“параметров пластинки”)

$$C = (A^T A)^{-1}, \text{rank} A = n \quad (18)$$

ковариационная матрица решения  $\sigma^2 C$   
ошибку единицы веса обычно вычисляют

$$\sigma^2 = \frac{\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|}{m - n} \quad (19)$$

# Статистические критерии для выбора редукционной модели

погрешности по полю для фотопластинки  
Паломарского телескопа Шмидта и кубического  
(по координатам) редукционного полинома:

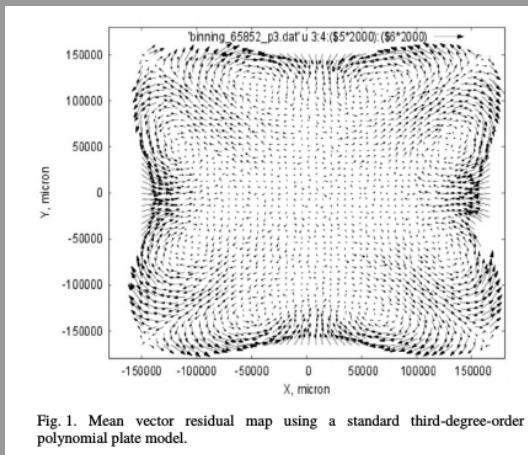


Fig. 1. Mean vector residual map using a standard third-degree-order polynomial plate model.

## Статистические критерии для выбора редуцированной модели-2

остаточные погрешности при редукации координат POSS полиномом 4-й степени (учтена основная деформация фотопластинки, но в качестве «бонуса» появились мелкомасштабные флуктуации в

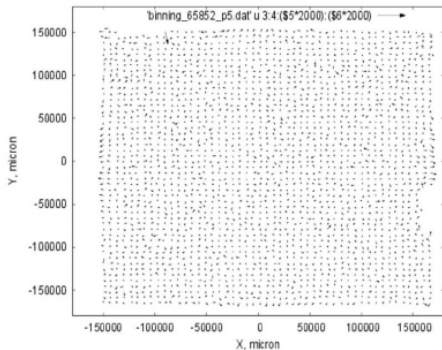


Fig. 2. Mean vector residual map using our method by the fifth-degree-order polynomial plate model.

# Математические задачи МНК

МНК с итерационным взвешиванием (IRLS)

Iteratively reweighted least squares:

Задача минимизации  $\ell_p$ -нормы

$$\arg \min_{\beta} \|\mathbf{y} - \mathbf{f}(\beta)\|_p = \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^n |y_i - f_i(\beta)|^p \quad (20)$$

решается итерациями взвешенного МНК

$$\beta^{(t+1)} = \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^n w_i(\beta^{(t)}) |y_i - f_i(\beta)|^2 \quad (21)$$

IRLS используется для получения оценок максимального правдоподобия в обобщенной линейной модели и для устойчивого (робастного) получения  $M$ -оценок, как способ смягчения влияния выбросов в «почти нормально»распределенном наборе данных.  $1 < p < 2$  ослабляет влияние выбросов на результат.

# Математические задачи МНК

МНК с итерационным взвешиванием (IRLS)-2

В линейной модели регрессии с нормой  $\ell_p$ , когда  $\mathbf{f}(\boldsymbol{\beta}) = X\boldsymbol{\beta}$ , итерации (21) приобретают вид:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}^{(t+1)} &= \arg \min_{\boldsymbol{\beta}} \sum_{i=1}^n w_i(\boldsymbol{\beta}^{(t)}) |y_i - X_i \boldsymbol{\beta}|^2 = \\ &= (X^T W^{(t)} X)^{-1} X^T W^{(t)} \mathbf{y}\end{aligned}\quad (22)$$

Где **диагональная** матрица весов вначале полагается единичной, а на каждой итерации пересчитывается:

$$w_i^{(t)} = \left| y_i - X_i \boldsymbol{\beta}^{(t)} \right|^{p-2} \quad (23)$$

В случае использования метода наименьших модулей ( $p = 1$ ) придется в (23) вводить регуляризацию. Проще и эффективнее решать задачу методами линейного программирования.

# Математические задачи МНК-2

обобщенные наименьшие квадраты (GLS)

Generalized Least Squares (Эйткен, 1935):

Известно, что симметрическую положительно определенную матрицу можно разложить как  $W = P^T P$ , где  $P$  — некоторая невырожденная квадратная матрица. Тогда обобщённая сумма квадратов может быть представлена как сумма квадратов преобразованных (с помощью  $P$ ) остатков  $(Pe)^T Pe$ . Для линейной регрессии  $y = Xb + \varepsilon$  это означает, что минимизируется величина:

$$\begin{aligned} & [P(y - Xb)]^T [P(y - Xb)] = \\ & = (Py - PXb)^T (Py - PXb) = \\ & = (y^* - X^*b)^T (y^* - X^*b), \end{aligned} \tag{24}$$

## Математические задачи МНК-2

обобщенные наименьшие квадраты -2

где  $y^* = Py$ ,  $X^* = PX$ , то есть фактически суть обобщённого МНК сводится к линейному преобразованию данных и применению к этим данным обычного МНК.

Если в качестве весовой матрицы  $W$  используется обратная ковариационная матрица  $V$  то оценки ОМНК являются наиболее эффективными в классе линейных несмещенных оценок:

$$\hat{b}_{GLS} = (X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} y \quad (25)$$

Ковариационная матрица этих оценок равна:

$$V(\hat{b}_{GLS}) = (X^T V^{-1} X)^{-1}$$



## Выбор редуцированной модели в зависимости от задачи исследования. 5

- 1 при увеличении числа параметров модели остаточная погрешность всегда уменьшается (за исключением клинических случаев)
- 2 следует проверять значимость такого уменьшения (предположив для остаточной погрешности распределение, например,  $\chi^2$  с соответствующим числом степеней свободы)
- 3 новые параметрические зависимости в модель редукации лучше выбирать «по-ортогональнее» (и корреляции все равно потом следует проверять)

## Выбор редуцированной модели в зависимости от задачи исследования. 6

- 4 чем больше параметров, тем ... (см. п.1), и тем менее надежно определяются величины параметров  
(процесс усложнения модели имеет естественный предел, почувствовать его можно, зная реальную точность данных и см. п.2)
- 5 использование вычисленных параметров для определения характеристик других объектов на изображении приведет к тому, что **случайная погрешность** параметров модели станет **систематической ошибкой** в координатах объектов
- 6 физические модели низкого порядка надежнее формальных моделей высокого порядка (а иногда и точнее)

## Литература по курсу

- 1 Eichhorn H., Williams C. A., 1963, AJ, **68**, 221.  
doi:10.1086/108943
- 2 Debehogne H., 1970, A&A, **8**, 189
- 3 Лоусон Ч., Хенсон Р., *Численное решение задач метода наименьших квадратов*, М.: Наука, 1986, 232 с.
- 4 Isobe, T., Feigelson, E.D., Akritas, M.G. & Babu, G.J., *Linear regression in astronomy.*, ApJ, 1990, **364**, pp. 104–113
- 5 Kopeikin, Sergei M. and Makarov, Valeri V., 2008, Phys. Rev. D, **75**, pp. 062002–062024

# Задания к семинару

- 1 Формулы Тернера.
- 2 Особенности применения для редукции «полного полинома» высокой степени.
- 3 Варианты линейной регрессии при разном соотношении ошибок
- 4 Анализ кода или поясняющих статей:

ESO  
Google  
IAP

<http://www.eso.org/sci/software/esomidass/>

<http://astrometry.net>

<http://www.astromatic.net/about>

- 4.1 Редукционные формулы
- 4.2 Взвешивание условных уравнений или отбраковка выбросов

спасибо за внимание