

# Обработка астрометрических наблюдений

## 6. Характеристики объектов, выделенных в кадре

кто: Семенцов В.Н.

когда: 19 марта, 2021

дано список объектов и изображение  
предполагаем модели объектов разных типов  
надо оценить позиционные и фотометрические  
характеристики объектов  
надо **погрешности приборных координат и  
фотометрических оценок**

## Позиционные и фотометрические характеристики точечного источника

- Распределение энергии в изображении звезды на фотоприемнике в большинстве случаев статистически совпадает с законом Гаусса,

## Позиционные и фотометрические характеристики точечного источника

- Распределение энергии в изображении звезды на фотоприемнике в большинстве случаев статистически совпадает с законом Гаусса, поэтому алгоритм обработки центрирования изображения звезды может быть построен также по гауссовскому закону.

## Позиционные и фотометрические характеристики точечного источника

- Распределение энергии в изображении звезды на фотоприемнике в большинстве случаев статистически совпадает с законом Гаусса, поэтому алгоритм обработки центрирования изображения звезды может быть построен также по гауссовскому закону.
- Идеальные эталонные изображения получаются с помощью моделирования PSF.

## Позиционные и фотометрические характеристики точечного источника

- Распределение энергии в изображении звезды на фотоприемнике в большинстве случаев статистически совпадает с законом Гаусса, поэтому алгоритм обработки центрирования изображения звезды может быть построен также по гауссовскому закону.
- Идеальные эталонные изображения получаются с помощью моделирования PSF.
- Тесты точности и скорости для гауссовской аппроксимации показывают, что точность метода лучше, чем у других алгоритмов, когда параметр гауссианы невелик

## Позиционные и фотометрические характеристики точечного источника

- Распределение энергии в изображении звезды на фотоприемнике в большинстве случаев статистически совпадает с законом Гаусса, поэтому алгоритм обработки центрирования изображения звезды может быть построен также по гауссовскому закону.
- Идеальные эталонные изображения получаются с помощью моделирования PSF.
- Тесты точности и скорости для гауссовской аппроксимации показывают, что точность метода лучше, чем у других алгоритмов, когда параметр гауссианы невелик **не больше  $5 \times 5$  пикселей**

# Положение и блеск неподвижного точечного источника

центроид:

Каждый объект — набор ярких пикселей  
 $\{I_{ij}\}_{(i,j) \in \{M\}}$

инструментальные координаты

$$x_c = \frac{\sum I_{ij}i}{\sum I_{ij}}, \quad y_c = \frac{\sum I_{ij}j}{\sum I_{ij}} \quad (1)$$

инструментальная звездная величина

$$m = -2.5 \log_{10} \left( \sum I_{ij} \right) \quad (2)$$

эти параметры, после отождествления объектов,  
потребуют калибровки (перевода в «систему  
опорного каталога»)



## Положение и блеск неподвижного точечного источника-2

гауссиана:

ненормированная:

$$g(x, y; \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{S}) \equiv \mathcal{E} \frac{1}{2\pi\mathcal{S}^2} \exp \left[ -\frac{(x - \mathcal{X})^2 + (y - \mathcal{Y})^2}{2\mathcal{S}^2} \right], \quad (3)$$

инструментальные координаты:

$$\mathcal{X}, \mathcal{Y} \quad (4)$$

инструментальная звездная величина

$$m = -2.5 \log_{10} \iint_{-\infty}^{+\infty} g(x, y; \dots) dx dy = -2.5 \log_{10} (\mathcal{E}) \quad (5)$$

## Положение и блеск неподвижного точечного источника-2

гауссиана:

ненормированная:

$$g(x, y; \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{S}) \equiv \mathcal{E} \frac{1}{2\pi\mathcal{S}^2} \exp \left[ -\frac{(x - \mathcal{X})^2 + (y - \mathcal{Y})^2}{2\mathcal{S}^2} \right], \quad (3)$$

инструментальные координаты:

$$\mathcal{X}, \mathcal{Y} \quad (4)$$

инструментальная звездная величина

$$m = -2.5 \log_{10} \iint_{-\infty}^{+\infty} g(x, y; \dots) dx dy = -2.5 \log_{10} (\mathcal{E}) \quad (5)$$

Эти инструментальные величины после отождествления также потребуют калибровки.

## Положение и блеск неподвижного точечного источника-2а

МНК-подгонка гауссианы:

- Детально процесс будет рассмотрен позднее, пока считаем, что есть ПЗС-кадр с  $N$  пикселями и что  $z_i$  — это число электронов в  $i$ -м пикселе с координатами  $(x_i, y_i)$ , измеренное с погрешностью  $\sigma_i$ . Пусть  $m(x, y; p_1, \dots, p_M)$  — модель наблюдаемых значений, имеющая две координаты  $(x, y)$  и параметры  $M$ .

# Положение и блеск неподвижного точечного источника-2а

МНК-подгонка гауссианы:

- Детально процесс будет рассмотрен позднее, пока считаем, что есть ПЗС-кадр с  $N$  пикселями и что  $z_i$  — это число электронов в  $i$ -м пикселе с координатами  $(x_i, y_i)$ , измеренное с погрешностью  $\sigma_i$ . Пусть  $m(x, y; p_1, \dots, p_M)$  — модель наблюдаемых значений, имеющая две координаты  $(x, y)$  и параметры  $M$ .
- Пусть вектор  $\mathbf{r}_i$  представляет координаты  $(x_i, y_i)$  пикселя  $i^{\text{th}}$ , а вектор  $\mathbf{p}$  представляет все параметры модели  $[\mathbf{p} \equiv (p_1, \dots, p_M)]$ .
- Т.о., модель  $i$ -го пикселя может быть компактно записана следующим образом:  $m_i \equiv m(\mathbf{r}_i; \mathbf{p})$ .

# Положение и блеск неподвижного точечного источника-2а

МНК-подгонка гауссианы:

- Детально процесс будет рассмотрен позднее, пока считаем, что есть ПЗС-кадр с  $N$  пикселями и что  $z_i$  — это число электронов в  $i$ -м пикселе с координатами  $(x_i, y_i)$ , измеренное с погрешностью  $\sigma_i$ . Пусть  $m(x, y; p_1, \dots, p_M)$  — модель наблюдаемых значений, имеющая две координаты  $(x, y)$  и параметры  $M$ .
- Пусть вектор  $\mathbf{r}_i$  представляет координаты  $(x_i, y_i)$  пикселя  $i^{\text{th}}$ , а вектор  $\mathbf{p}$  представляет все параметры модели  $[\mathbf{p} \equiv (p_1, \dots, p_M)]$ .
- Т.о., модель  $i$ -го пикселя может быть компактно записана следующим образом:  $m_i \equiv m(\mathbf{r}_i; \mathbf{p})$ .
- Качество подгонки модели под наблюдения будем оценивать по критерию хи-квадрат:

$$\chi^2(\mathbf{p}) \equiv \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} (z_i - m_i)^2 . \quad (6)$$

По теории МНК оптимальное значение  $\mathbf{p}$  получается, когда  $\chi^2(\mathbf{p})$  минимизируется по всем параметрам одновременно.

# Положение и блеск неподвижного точечного источника-2b

МНК-подгонка гауссианы:

- Если  $\mathbf{p}_0$ -оптимальный вектор параметров, то  $\chi^2(\mathbf{p}_0)$  — абсолютный минимум  $M$ -мерного многообразия  $\chi^2(\mathbf{p})$ .
- Для коррекции вектора параметров  $\delta$  можно аппроксимировать  $\chi^2(\mathbf{p} + \delta)$  его разложением в ряд Тейлора
- .....

## Положение и блеск неподвижного точечного источника-2b

МНК-подгонка гауссианы:

- Если  $\mathbf{p}_0$ -оптимальный вектор параметров, то  $\chi^2(\mathbf{p}_0)$  — абсолютный минимум  $M$ -мерного многообразия  $\chi^2(\mathbf{p})$ .
- Для коррекции вектора параметров  $\delta$  можно аппроксимировать  $\chi^2(\mathbf{p} + \delta)$  его разложением в ряд Тейлора
- .....
- После определения оптимального вектора параметров ковариационная матрица  $\mathbf{C}$  может быть вычислена путем инвертирования матрицы Гессе  $\mathbf{H}$ , вычисленной в точке оптимума. Стандартные ошибки найденных параметров могут быть оценены:

$$\sigma_j \approx \sqrt{[\mathbf{C}]_{jj}} = \left[ \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \left( \frac{\partial m_i}{\partial p_j} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (7)$$

где  $\sigma_j$  — стандартная ошибка параметра  $j^{\text{th}}$  ( $p_j$ ).

# Достижимые точности

## фотометрия

- простейшая модель: PRF + постоянный фон неба
- для отдельной звезды будет 2 параметра: поток от звезды  $\mathcal{E}$  и фон неба  $\mathcal{B}$ , оба в электронах
- наблюдательная модель для  $i$ -го пикселя будет иметь вид:

$$m_i \equiv \mathcal{B} + \mathcal{E} \cdot V \cdot \tilde{\Psi}_i, \quad (8)$$

где  $V$  — интеграл PRF, а  $\tilde{\Psi}_i$  — значение  $i$ -го нормализованного пикселя PRF.



# Достижимые точности

## фотометрия

- простейшая модель: PRF + постоянный фон неба
- для отдельной звезды будет 2 параметра: поток от звезды  $\mathcal{E}$  и фон неба  $\mathcal{B}$ , оба в электронах
- наблюдательная модель для  $i$ -го пикселя будет иметь вид:

$$m_i \equiv \mathcal{B} + \mathcal{E} \cdot V \cdot \tilde{\Psi}_i, \quad (8)$$

где  $V$  – интеграл PRF, а  $\tilde{\Psi}_i$  – значение  $i$ -го нормализованного пикселя PRF.

яркая звезда число электронов в  $i$ -м пикселе будет описываться распределением Пуассона со средним значением и дисперсией  $m_i$ . Тогда погрешность измерения (одно стандартное отклонение) для  $i$ -го пикселя будет равна

$$\sigma_i = \sqrt{m_i} \approx \sqrt{\mathcal{E}V\tilde{\Psi}_i} \quad (9)$$

# Достижимые точности

фотометрия (2)

яркая звезда Все другие источники шума (фон неба, шум считывания, ошибки калибровки плоского поля и т. д.) будут ничтожно малы.

# Достижимые точности

фотометрия (2)

яркая звезда Все другие источники шума (фон неба, шум считывания, ошибки калибровки плоского поля и т. д.) будут ничтожно малы.

- Дисперсия погрешности измерения блеска ярких звезд может быть оценена с помощью уравнений (7), (8) и (9):

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathcal{E}: \text{bright}}^2 &\approx \left[ \sum_{i=1}^N \frac{1}{\mathcal{E} V \tilde{\Psi}_i} \left( \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \mathcal{E} V \tilde{\Psi}_i \right)^2 \right]^{-1} \\ &\approx \frac{\mathcal{E}}{V} \left[ \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi} \, dx \, dy \right]^{-1} \\ &= \frac{\mathcal{E}}{V},\end{aligned}\tag{10}$$

# Достижимые точности

фотометрия (2)

яркая звезда Все другие источники шума (фон неба, шум считывания, ошибки калибровки плоского поля и т. д.) будут ничтожно малы.

- Дисперсия погрешности измерения блеска ярких звезд может быть оценена с помощью уравнений (7), (8) и (9):

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathcal{E}: \text{bright}}^2 &\approx \left[ \sum_{i=1}^N \frac{1}{\mathcal{E} V \tilde{\Psi}_i} \left( \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \mathcal{E} V \tilde{\Psi}_i \right)^2 \right]^{-1} \\ &\approx \frac{\mathcal{E}}{V} \left[ \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi} dx dy \right]^{-1} \\ &= \frac{\mathcal{E}}{V},\end{aligned}\tag{10}$$

как и ожидалось из статистики фотонов.

# Достижимые точности

## фотометрия (3)

- Одиночная яркая звезда с потоком  $10^6$  фотонов, наблюдаемая с помощью идеального ПЗС-приемника, даст звездное изображение с  $10^6 e^- (= \mathcal{E})$  и ошибкой измерения блеска  $\sigma_{\mathcal{E}} \approx \sqrt{\mathcal{E}/(V \equiv 1)} = 10^3 e^-$ .

# Достижимые точности

## фотометрия (3)

- Одиночная яркая звезда с потоком  $10^6$  фотонов, наблюдаемая с помощью идеального ПЗС-приемника, даст звездное изображение с  $10^6 e^- (= \mathcal{E})$  и ошибкой измерения блеска  $\sigma_{\mathcal{E}} \approx \sqrt{\mathcal{E}/(V \equiv 1)} = 10^3 e^-$ .
- Та же звезда с неэффективным ПЗС-приемником (с квантовой эффективностью 25%,  $V = 1/4$ ), даст звездное изображение в  $\sim 250000 e^-$  с Пуассоновской ошибкой  $\sim 500 e^-$ .

# Достижимые точности

## фотометрия (3)

- Одиночная яркая звезда с потоком  $10^6$  фотонов, наблюдаемая с помощью идеального ПЗС-приемника, даст звездное изображение с  $10^6 e^- (= \mathcal{E})$  и ошибкой измерения блеска  $\sigma_{\mathcal{E}} \approx \sqrt{\mathcal{E}/(V \equiv 1)} = 10^3 e^-$ .
- Та же звезда с неэффективным ПЗС-приемником (с квантовой эффективностью 25%,  $V = 1/4$ ), даст звездное изображение в  $\sim 250000 e^-$  с Пуассоновской ошибкой  $\sim 500 e^-$ . *Измеренный блеск* будет  $\mathcal{E} \approx 10^6 e^-$  с среднеквадратичной погрешностью измерения  $\sigma_{\mathcal{E}} \approx \sqrt{\mathcal{E}/V} = 2000 e^-$  что в два раза больше, чем было бы при идеальном детекторе, и в четыре раза больше, чем ошибка пуассоновского шума числа электронов.

# Достижимые точности

## фотометрия (3)

- Одиночная яркая звезда с потоком  $10^6$  фотонов, наблюдаемая с помощью идеального ПЗС-приемника, даст звездное изображение с  $10^6 e^- (= \mathcal{E})$  и ошибкой измерения блеска  $\sigma_{\mathcal{E}} \approx \sqrt{\mathcal{E}/(V \equiv 1)} = 10^3 e^-$ .
- Та же звезда с неэффективным ПЗС-приемником (с квантовой эффективностью 25%,  $V = 1/4$ ), даст звездное изображение в  $\sim 250000 e^-$  с Пуассоновской ошибкой  $\sim 500 e^-$ . *Измеренный блеск* будет  $\mathcal{E} \approx 10^6 e^-$  с среднеквадратичной погрешностью измерения  $\sigma_{\mathcal{E}} \approx \sqrt{\mathcal{E}/V} = 2000 e^-$  что в два раза больше, чем было бы при идеальном детекторе, и в четыре раза больше, чем ошибка пуассоновского шума числа электронов.
- Решение для *измеренного* блеска ( $\equiv \mathcal{E}$ ) вместо *наблюдаемого* блеска ( $\equiv \mathcal{E}V$ ) позволяет создавать программы звездной фотометрической редукции, способные справляться с внутрипиксельными вариациями QE путем точного моделирования процесса формирования изображения внутри фотоприемника.



# Достижимые точности

## фотометрия (3)

- Одиночная яркая звезда с потоком  $10^6$  фотонов, наблюдаемая с помощью идеального ПЗС-приемника, даст звездное изображение с  $10^6 e^- (= \mathcal{E})$  и ошибкой измерения блеска  $\sigma_{\mathcal{E}} \approx \sqrt{\mathcal{E}/(V \equiv 1)} = 10^3 e^-$ .
- Та же звезда с неэффективным ПЗС-приемником (с квантовой эффективностью 25%,  $V = 1/4$ ), даст звездное изображение в  $\sim 250000 e^-$  с Пуассоновской ошибкой  $\sim 500 e^-$ . *Измеренный блеск* будет  $\mathcal{E} \approx 10^6 e^-$  с среднеквадратичной погрешностью измерения  $\sigma_{\mathcal{E}} \approx \sqrt{\mathcal{E}/V} = 2000 e^-$  что в два раза больше, чем было бы при идеальном детекторе, и в четыре раза больше, чем ошибка пуассоновского шума числа электронов.
- Решение для *измеренного* блеска ( $\equiv \mathcal{E}$ ) вместо *наблюдаемого* блеска ( $\equiv \mathcal{E}V$ ) позволяет создавать программы звездной фотометрической редукции, способные справляться с внутрипиксельными вариациями QE путем точного моделирования процесса формирования изображения внутри фотоприемника.
- Хотя, конечно, удобно предполагать, что чей-то детектор имеет незначительную внутрипиксельную вариацию QE, в реальном мире даже лучшие ПЗС-приемники типа WFPC2, могут иметь пиковую внутрипиксельную вариацию QE, превышающие  $0,02^m$  ( $> 2\%$ ).

## Достижимые точности

фотометрия (4)

слабая звезда Большинство электронов в  $i$ -м пикселе при наблюдении одиночной слабой звезды на плоском фоне неба будут исходить от неба, а не от звезды.

# Достижимые точности

фотометрия (4)

слабая звезда Большинство электронов в  $i$ -м пикселе при наблюдении одиночной слабой звезды на плоском фоне неба будут исходить от неба, а не от звезды.

- В этом случае погрешность измерения, связанная с  $i$ -м пикселом, — это по порядку эффективный уровень шума фона:

$$\sigma_i \approx \sigma_{\text{rms}}, \quad (11)$$

где

$$\sigma_{\text{rms}} \equiv \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2} \approx \sqrt{\mathcal{B} + \sigma_{\text{ш.с.}}^2}, \quad (12)$$

где  $\mathcal{B}$  — постоянный фон неба, который предполагается распределенным по Пуассону со средним значением  $\mathcal{B}$  фотоэлектронов, а  $\sigma_{\text{ш.с.}}$  — среднеквадратичный шум считывания.

# Достижимые точности

## фотометрия (5)

- погрешность измерения блеска слабых звезд может быть оценена с помощью уравнений (7), (8), (11), (12) и нормировки PRF:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathcal{E}: \text{faint}}^2 &\approx \left[ \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{\text{rms}}^2} \left( \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \mathcal{E} V \tilde{\Psi}_i \right)^2 \right]^{-1} \\ &\approx \frac{\sigma_{\text{rms}}^2}{V^2} \left[ \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}^2 dx dy \right]^{-1} = \beta \sigma_{\text{rms}}^2\end{aligned}\quad (13)$$

$$\approx \beta \left[ \mathcal{B} + \sigma_{\text{ш.с.}}^2 \right], \quad (14)$$

# Достижимые точности

## фотометрия (5)

- погрешность измерения блеска слабых звезд может быть оценена с помощью уравнений (7), (8), (11), (12) и нормировки PRF:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathcal{E}: \text{faint}}^2 &\approx \left[ \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{\text{rms}}^2} \left( \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \mathcal{E} V \tilde{\Psi}_i \right)^2 \right]^{-1} \\ &\approx \frac{\sigma_{\text{rms}}^2}{V^2} \left[ \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}^2 dx dy \right]^{-1} = \beta \sigma_{\text{rms}}^2\end{aligned}\quad (13)$$

$$\approx \beta [B + \sigma_{\text{ш.с.}}^2] , \quad (14)$$

- Результирующая фотометрическая погрешность приблизительно равна

$$\Delta m \approx \frac{1.0857}{S/N} , \quad (15)$$

где константа 1.0857 является аппроксимацией отношения Погсона  $a \equiv 5 / \ln(100) = 2.5 \log(e)$

## Достижимые точности (2)

Неравенство Крамера-Рао

(CRLB) — это нижняя граница любой несмещенной ( $\mathbf{M} \{ \hat{\lambda}(x) \} = \lambda$ ) оценки дисперсии.

$$\mathbf{D} \{ \hat{\lambda} - \lambda \} \geq \frac{1}{\mathbf{M} \left\{ \left( \frac{d}{d\lambda} \ln(p(x|\lambda)) \right)^2 \right\}}, \quad (16)$$

где  $\lambda(x)$ ,  $\hat{\lambda}$  — случайная величина и ее оценка по выборке;  
 $p(x|\lambda)$  — функция правдоподобия ( $p(\dots) = f(x_1) \cdot \dots \cdot f(x_N)$ ).

## Достижимые точности (2)

Неравенство Крамера-Рао

(CRLB) — это нижняя граница любой несмещенной ( $\mathbf{M} \{ \hat{\lambda}(x) \} = \lambda$ ) оценки дисперсии.

$$\mathbf{D} \{ \hat{\lambda} - \lambda \} \geq \frac{1}{\mathbf{M} \left\{ \left( \frac{d}{d\lambda} \ln(p(x|\lambda)) \right)^2 \right\}}, \quad (16)$$

где  $\lambda(x)$ ,  $\hat{\lambda}$  — случайная величина и ее оценка по выборке;  
 $p(x|\lambda)$  — функция правдоподобия ( $p(\dots) = f(x_1) \cdot \dots \cdot f(x_N)$ ).

Неравенство Крамера-Рао при фотометрировании одиночной яркой звезды дает оценку

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2: \text{bright-CRLB} = \mathcal{E}, \quad (17)$$

которое совпадает с соотношением (10) для идеального фотоприемника,

## Достижимые точности (2)

Неравенство Крамера-Рао

(CRLB) — это нижняя граница любой несмещенной ( $\mathbf{M} \{ \hat{\lambda}(x) \} = \lambda$ ) оценки дисперсии.

$$\mathbf{D} \{ \hat{\lambda} - \lambda \} \geq \frac{1}{\mathbf{M} \left\{ \left( \frac{d}{d\lambda} \ln(p(x|\lambda)) \right)^2 \right\}}, \quad (16)$$

где  $\lambda(x)$ ,  $\hat{\lambda}$  — случайная величина и ее оценка по выборке;  
 $p(x|\lambda)$  — функция правдоподобия ( $p(\dots) = f(x_1) \cdot \dots \cdot f(x_N)$ ).

Неравенство Крамера-Рао при фотометрировании одиночной яркой звезды дает оценку

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2: \text{bright-CRLB} = \mathcal{E}, \quad (17)$$

которое совпадает с соотношением (10) для идеального фотоприемника, а одиночной слабой —

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2: \text{faint-CRLB} = \beta \mathcal{B}, \quad (18)$$

совпадающую с (14) для фотоприемника без шума считывания и при нулевой погрешности определения фона ( $N \rightarrow \infty$ ).



## Достижимые точности (3)

координаты

- Расписывая аналогично фотометрическим оценкам, источники погрешностей в координатах, получим:
- Если PRF был избыточно дискретизован (oversampled), то значение  $i$ -го пикселя PRF приблизительно равно произведению объема PRF (интеграла) и значения PSF в центре  $i$ -го пикселя:

$$G_i \approx V g_i, \quad \text{где} \quad g_i \equiv g(x_i, y_i; \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{S}). \quad (19)$$

## Достижимые точности (3)

координаты

- Расписывая аналогично фотометрическим оценкам, источники погрешностей в координатах, получим:
- Если PRF был избыточно дискретизован (oversampled), то значение  $i$ -го пикселя PRF приблизительно равно произведению объема PRF (интеграла) и значения PSF в центре  $i$ -го пикселя:

$$G_i \approx V g_i, \quad \text{где} \quad g_i \equiv g(x_i, y_i; \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{S}). \quad (19)$$

- Аналогично (8) получим уравнение для накопленного сигнала в  $i$ -м пикселе:

$$m_i \equiv \mathcal{B} + \mathcal{E} V \tilde{G}_i, \quad (20)$$

где  $V$  – интеграл PRF по объему, а  $\tilde{G}_i$  – величина *нормализованной* PRF в  $i$ -й точке: ( $\tilde{G}_i \equiv G_i/V \approx g_i$ ).

## Достижимые точности (3)

координаты-2

яркая звезда бóльшая часть электронов в  $i$ -м пикселе кадра наблюдения будет исходить от звезды, а не от неба:

$$m_i \approx \mathcal{E}V\tilde{G}_i. \quad (21)$$

Фактическое число фотоэлектронов в  $i$ -м пикселе будет описываться распределением Пуассона со средним значением и дисперсией  $m_i$ . Таким образом, погрешность измерения (одно стандартное отклонение) для  $i$ -го пикселя будет

$$\sigma_i = \sqrt{m_i} \approx \sqrt{\mathcal{E}V\tilde{G}_i}. \quad (22)$$

## Достижимые точности (3)

координаты-2

яркая звезда бóльшая часть электронов в  $i$ -м пикселе кадра наблюдения будет исходить от звезды, а не от неба:

$$m_i \approx \mathcal{E}V\tilde{G}_i. \quad (21)$$

Фактическое число фотоэлектронов в  $i$ -м пикселе будет описываться распределением Пуассона со средним значением и дисперсией  $m_i$ . Таким образом, погрешность измерения (одно стандартное отклонение) для  $i$ -го пикселя будет

$$\sigma_i = \sqrt{m_i} \approx \sqrt{\mathcal{E}V\tilde{G}_i}. \quad (22)$$

- Остальными источниками шумов (фон неба, шум считывания, ошибки коррекции плоского поля и т.д.) пренебрегаем.

# Достижимые точности (3)

координаты-3

- Дисперсия ошибки измерения положения  $\mathcal{X}$  яркой изолированной звезды (при избыточной дискретизации) может быть оценена с помощью представления двумерной гауссианы (3), диагональных элементов матрицы ковариаций (7) и уравнений (20), (22):

яркая звезда

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathcal{X}: \text{bright}}^2 &\approx \left[ \sum_{i=1}^N \frac{1}{\mathcal{E}V\tilde{G}_i} \left( \frac{\partial \mathcal{E}V\tilde{G}_i}{\partial \mathcal{X}} \right)^2 \right]^{-1} \\ &\approx \frac{1}{\mathcal{E}V} \left[ \sum_{i=1}^N \frac{1}{g_i} \left( \frac{\partial g_i}{\partial \mathcal{X}} \right)^2 \right]^{-1} \\ &\approx \frac{\mathcal{S}^4}{\mathcal{E}V} \left[ \iint_{-\infty}^{+\infty} g(x, y; \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{S}) (x - \mathcal{X})^2 dx dy \right]^{-1} \\ &= \frac{\mathcal{S}^2}{\mathcal{E}V} \approx \frac{\mathcal{L}^2}{\mathcal{E}V},\end{aligned}\quad (23)$$

## Достижимые точности (3)

координаты-4

где

$$\mathcal{L} \equiv \sqrt{\frac{\beta V^2}{4\pi}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \textit{sharpness}}} \quad (24)$$

является *критическим масштабом выборки* PRF<sup>1</sup> в пиксельных единицах (px), которые, в отличие от  $\sigma_{\mathcal{E}}$ , определены для всех функций отклика.

---

<sup>1</sup>Из определения эффективной фоновой области излишне дискретизованного гауссовского PRF с  $V < 1$ ,  $\beta_G \equiv 4\pi \mathcal{S}^2 / V^2$ , видно, что критический масштаб выборки был разработан как представление  $\mathcal{S}$  для любого PRF.

## Достижимые точности (3)

координаты-4

где

$$\mathcal{L} \equiv \sqrt{\frac{\beta V^2}{4\pi}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \textit{sharpness}}} \quad (24)$$

является *критическим масштабом выборки* PRF<sup>1</sup> в пиксельных единицах (px), которые, в отличие от  $\sigma_{\mathcal{E}}$ , определены для всех функций отклика. По определению, критический масштаб выборки граничной PRF, полученной с помощью идеального приемника, составляет один пиксель;  $\mathcal{L} > 1$  указывает на то, что PRF является *излишне дискретизованной, oversampled*, в то время как  $\mathcal{L} < 1$  указывает на то, что PRF является *недостаточно дискретизованной*.

---

<sup>1</sup>Из определения эффективной фоновой области излишне дискретизованного гауссовского PRF с  $V < 1$ ,  $\beta_G \equiv 4\pi\mathcal{S}^2/V^2$ , видно, что критический масштаб выборки был разработан как представление  $\mathcal{S}$  для любого PRF.

## Достижимые точности (3)

координаты-5

- В частном случае критически дискретизованной яркой звезды, зарегистрированной идеальным приемником, оказывается, что предел астрометрической погрешности (в пикселях) равен обратной величине предела фотометрической ошибки:

$$\sigma_{\mathcal{X}: \text{bright}} \approx \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}} \approx \frac{1}{\sigma_{\mathcal{E}: \text{bright}}}. \quad (25)$$



## Достижимые точности (3)

координаты-5

- В частном случае критически дискретизованной яркой звезды, зарегистрированной идеальным приемником, оказывается, что предел астрометрической погрешности (в пикселях) равен обратной величине предела фотометрической ошибки:

$$\sigma_{\mathcal{X}: \text{bright}} \approx \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}} \approx \frac{1}{\sigma_{\mathcal{E}: \text{bright}}}. \quad (25)$$

слабые звезды

Предположим еще раз, что вклад шума от звезды пренебрежимо мал и что дисперсия погрешности измерения  $i$ -го пикселя может быть заменена средним постоянным среднеквадратичным значением. Дисперсия ошибки измерения положения одиночной слабой звезды  $\mathcal{X}$  с избыточной дискретизацией может быть оценена с помощью уравнений (7), (20), (11), (12), и (3):

# Достижимые точности (3)

координаты-6

слабые звезды

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathcal{X}: \text{faint}}^2 &\approx \left[ \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{\text{rms}}^2} \left( \frac{\partial}{\partial \mathcal{X}} \varepsilon V \tilde{G}_i \right)^2 \right]^{-1} \\ &\approx \frac{\sigma_{\text{rms}}^2}{\varepsilon^2 V^2} \left[ \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial}{\partial \mathcal{X}} g_i \right)^2 \right]^{-1} \\ &\approx \frac{\sigma_{\text{rms}}^2 \mathcal{S}^4}{\varepsilon^2 V^2} \left[ \iint_{-\infty}^{+\infty} g^2(x, y; \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{S}) (x - \mathcal{X})^2 dx dy \right]^{-1} \\ &= 8\pi \sigma_{\text{rms}}^2 \frac{\mathcal{S}^4}{\varepsilon^2 V^2} \\ &\approx 8\pi \sigma_{\text{rms}}^2 \left( \frac{\mathcal{L}^2}{\varepsilon V} \right)^2 \approx 8\pi \sigma_{\text{rms}}^2 \left( \sigma_{\mathcal{X}: \text{bright}}^2 \right)^2 \quad (26)\end{aligned}$$

$$\approx 8\pi (\mathcal{B} + \sigma_{\text{ш.с.}}^2) \left( \sigma_{\mathcal{X}: \text{bright}}^2 \right)^2. \quad (27)$$

# Модель астрометрической эффективности

Реалистичная модель эффективности CCD для PSF-астрометрии строится путем объединения оценок для ярких и слабых звезд. Ожидаемый *нижний предел* среднеквадратичной погрешности измерения положения одиночной звезды  $\mathcal{X}$  без учета влияния ошибок плоского поля можно оценить следующим образом:

$$\sigma_{\mathcal{X}} \approx \sqrt{\sigma_{\mathcal{X}: \text{bright}}^2 + \sigma_{\mathcal{X}: \text{faint}}^2} \approx \sqrt{\frac{\mathcal{L}^2}{\mathcal{E}V} \left[ 1 + 8\pi \sigma_{\text{rms}}^2 \frac{\mathcal{L}^2}{\mathcal{E}V} \right]} \quad (28)$$

$$\approx \sqrt{\frac{\mathcal{L}^2}{\mathcal{E}V} \left[ 1 + 8\pi (\mathcal{B} + \sigma_{\text{ш.с.}}^2) \frac{\mathcal{L}^2}{\mathcal{E}V} \right]}. \quad (29)$$

# Модель астрометрической эффективности

Реалистичная модель эффективности CCD для PSF-астрометрии строится путем объединения оценок для ярких и слабых звезд. Ожидаемый *нижний предел* среднеквадратичной погрешности измерения положения одиночной звезды  $\mathcal{X}$  без учета влияния ошибок плоского поля можно оценить следующим образом:

$$\sigma_{\mathcal{X}} \approx \sqrt{\sigma_{\mathcal{X}: \text{bright}}^2 + \sigma_{\mathcal{X}: \text{faint}}^2} \approx \sqrt{\frac{\mathcal{L}^2}{\mathcal{E}V} \left[ 1 + 8\pi \sigma_{\text{rms}}^2 \frac{\mathcal{L}^2}{\mathcal{E}V} \right]} \quad (28)$$

$$\approx \sqrt{\frac{\mathcal{L}^2}{\mathcal{E}V} \left[ 1 + 8\pi (\mathcal{B} + \sigma_{\text{ш.с.}}^2) \frac{\mathcal{L}^2}{\mathcal{E}V} \right]}. \quad (29)$$

Среднеквадратичная ошибка измерения положения звезды  $\mathcal{Y}$  из соображений симметрии такая же, как и для  $\mathcal{X}$ :

$$\sigma_{\mathcal{Y}} = \sigma_{\mathcal{X}}. \quad (30)$$

# Достижимые точности позиционирования (датчика)

центроид

$$(x_c, y_c) = \left( \frac{\sum_{i,j} i \cdot m(i, j)}{\sum_{i,j} m(i, j)}, \frac{\sum_{i,j} j \cdot m(i, j)}{\sum_{i,j} m(i, j)} \right) \quad (31)$$

где  $m(i, j)$  – отсчет в пикселе  $(i, j)$

взвешенный ц.т.

$$(x_c, y_c) = \left( \frac{\sum_{i,j} i \cdot m^2(i, j)}{\sum_{i,j} m^2(i, j)}, \frac{\sum_{i,j} j \cdot m^2(i, j)}{\sum_{i,j} m^2(i, j)} \right) \quad (32)$$

одномерный Гаусс

$$G_i = \sum_{j=1}^{N_c} g(i, j), \quad f(i, M, \sigma_x, \sigma_c) = M \exp \left( -\frac{(i - x_c)^2}{2\sigma_x^2} \right) \quad (33)$$

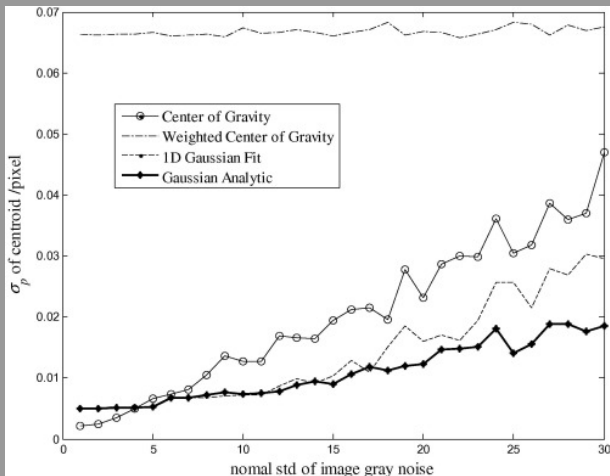
$$\sum_{i=1}^{N_r} [G_i - f(i, M, \sigma_x, x_c)]^2 \mapsto \min, \quad (34)$$

аналитический Гаусс

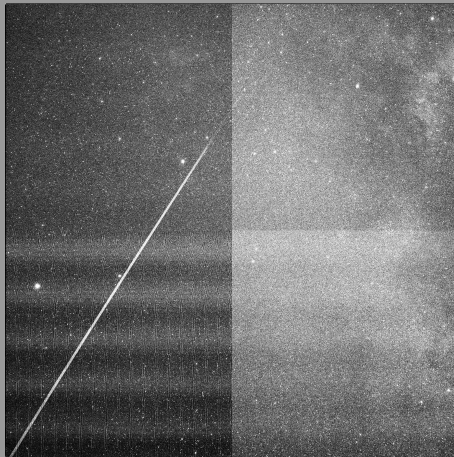
$$V_{ij} = a \exp \left( -\frac{(i - x_c)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(j - y_c)^2}{2\sigma_y^2} \right) \quad (35)$$

итерационное решение МНК ищется в логарифмах (аналитические формулы)

## Достижимые точности позиционирования (датчика)-2



# Положение и блеск движущегося точечного источника



$$G(i, j) = G_0 \cdot e^{(\mathbf{xy} - \mathbf{xy}_c)^T Q (\mathbf{xy} - \mathbf{xy}_c)} + b_0 \quad (36)$$

# Ошибки типа уравнения блеска

- Грамотное составление системы условных уравнений — половина успеха



# Ошибки типа уравнения блеска

- Грамотное составление системы условных уравнений — половина успеха
- Уравнивание результатов, назначение весов измерениям позволяет еще немного повысить точность

# Ошибки типа уравнения блеска

- Грамотное составление системы условных уравнений — половина успеха
- Уравнивание результатов, назначение весов измерениям позволяет еще немного повысить точность
- И выявить новые источники погрешностей

# Ошибки типа уравнения блеска

- Грамотное составление системы условных уравнений — половина успеха
- Уравнивание результатов, назначение весов измерениям позволяет еще немного повысить точность
- И выявить новые источники погрешностей

No. 5, 2004

SECOND USNO CCD ASTROGRAPH CATALOG

3045

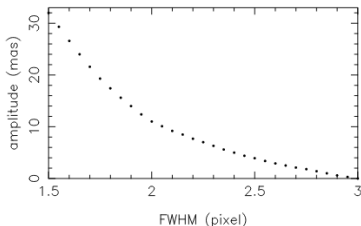


FIG. 1.—Amplitude as a function of image profile width (FWHM) for the position correction model as a function of pixel phase for CCD astrograph frames.

extended that model, which remains an empirical approach in correcting derived  $x, y$  positions.

The poor CTE leads to asymmetric images. The degree of asymmetry increases from nothing (near  $x = 0$ ) to the maximum effect near  $x = 4094$  pixel. The stellar image profiles are fitted with a symmetric, Gaussian function. This results in a

servations of calibration fields along these lines are in progress; however, results will not be included until the final UCAC release. As with UCAC1, corrections for UCAC2 positions derived from the flip observations are interpreted as magnitude times coordinate effects. Deriving such corrections from the  $x, y$  data has the advantage of a strong statistic, using thousands of stellar positions in a given frame. The much sparser reference-star residuals have been used as an external check showing only very small, pure magnitude-dependent systematic errors (see § 3.6), thus confirming our assumption.

For the UCAC2 data, a more sophisticated model than for UCAC1 has been derived from the flip observations of dense calibration fields. Position corrections ( $\Delta x, \Delta y$ ) for individual stellar image centroids ( $x, y = 0$  to 4094 pixels) were applied because of the low CTE as a function of  $x, y$ , and relative instrumental magnitude ( $m \approx -3$  to +3 mag) according to

$$\Delta x = c_1 m x + c_2 m^2 x + c_3 m^3 x + c_4 m x^2,$$

$$\Delta y = d_1 m y + d_2 m^2 y + d_3 m^3 y + d_4 m y^2.$$

The parameters  $c_1$  through  $d_4$  are found to be a function of exposure time ( $t$ ) and mean image profile width (FWHM) of a CCD frame. The mean parameters are summarized in Table 3,

# Резюме на будущее

- 1 Знание погрешности измерений исходных данных критически важно

# Резюме на будущее

- 1 Знание погрешности измерений исходных данных критически важно
- 2 Для косвенных измерений без этого и модель не построить

# Резюме на будущее

- 1 Знание погрешности измерений исходных данных критически важно
- 2 Для косвенных измерений без этого и модель не построить
- 3 Нелинейные редукции без знания погрешностей делаются **ПЛОХО**

# Резюме на будущее

- 1 Знание погрешности измерений исходных данных критически важно
- 2 Для косвенных измерений без этого и модель не построить
- 3 Нелинейные редукции без знания погрешностей делаются **ПЛОХО**
- 4 Откуда брать погрешности — тайна сия велика есть

# Резюме на будущее

- 1 Знание погрешности измерений исходных данных критически важно
- 2 Для косвенных измерений без этого и модель не построить
- 3 Нелинейные редукции без знания погрешностей делаются **ПЛОХО**
- 4 Откуда брать погрешности — тайна сия велика есть
- 5 Никакая автоматика (и математика) не заменит полностью здравый смысл наблюдателя



# Литература по спецкурсу

дополнительная 5

- Hroch, F., *The robust detection of stars on CCD images*, Experimental Astronomy, 1999, **9**, 251-259
- Haiyong Wang, Ershuai Xu, Zhifeng Li, Jingjin Li, Tianmu Qin, *Gaussian Analytic Centroiding method of star image of star tracker*, Advances in Space Research, **56**, Issue 10, 2015, pp. 2196-2205,
- I. R. King, *Accuracy of measurement of star images on a pixel array*, PASP, 1983, **95**, pp. 163–168,
- K. J. Mighell, *Stellar Photometry and Astrometry with Discrete Point Spread Functions*, 2005, MNRAS, **361**, pp. 861-878

## Задания к семинару

- 1 Оценить уравнение блеска в серии ПЗС-наблюдений переменной звезды очень большой амплитуды, например, повторной Новой.
- 2 Используя гауссовскую модель PRF в качестве эталона, оценить систематическую фотометрическую ошибку, появляющуюся при центрировании изображения с  $S/N = 3 \div 5$ .
- 3 Классические примеры функции рассеяния точки и области их применения.
- 4 Статистические моменты выделенного изображения объекта и их использование

Спасибо за внимание