Обработка астрометрических наблюдений

4. Построение изображений на фотоприемнике. Представления функции рассеяния точки.

кто: Семенцов В.Н.

когда: 5 марта, 2021

дано	неэвклидова (проективная) геометрия
дано	полные ортогональные системы функций на компактном носителе
имеем	оптическую систему с известными свойствами
надо	изображение и места объектов на фотоприемнике

Построение изображения на фотоприемнике

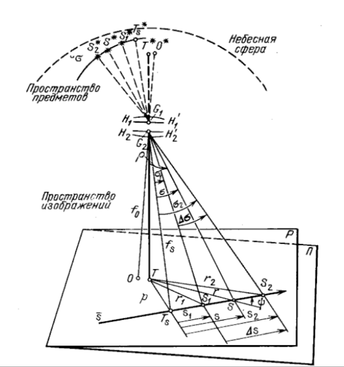


Рис. 1: G_1, G_2 – главные или Гауссовы точки объектива идеального телескопа, П – картинная плоскость центральной проекции, P – плоскость реальной пластинки, T – оптический центр пластинки, O – осевая точка, f_0 – заднее главное фокусное расстояние, f_S – фокусное расстояние точки T_S, $G_1S_1^*$, G_1S^*, $G_1S_2^*$ – направления на реальные звезды, S_1, S, S_2 – изображения звезд в плоскости P, H_1H_1' – передняя, и H_2H_2' – задняя главные плоскости объектива

Решим следующую задачу. Пусть на небесной сфере некоторый большой круг $\smile\sigma$, проходящий через звезду S^*, пересекает другой большой круг $\smile T^* S^* = \smile\rho$ под позиционным углом ψ. Надо найти соответствующий позиционный угол ψ' в картинной плоскости. Решение этой задачи найдем исходя из основного свойства эллипса искажений, который построим вокруг точки S (изображение звезды S^*). Согласно этому свойству имеем

$$\operatorname{tg}\psi' = \frac{n}{m}\operatorname{tg}\psi = \cos\rho\operatorname{tg}\psi, \qquad (1.15)$$

где m и n – большая и малая полуоси эллипса искажений.

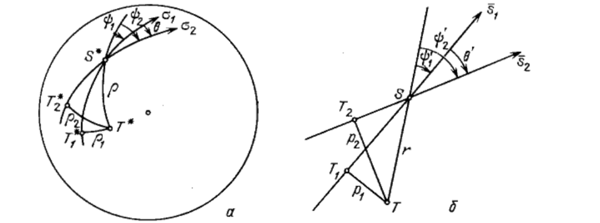


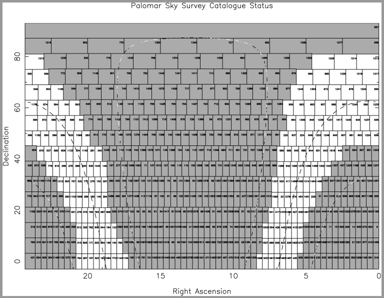
Рис. 2. Центральная проекция сферических углов:
а – расположение дуг больших кругов и углов на небесной сфере; *б* – изображения больших кругов и углов в картинной плоскости

сферических расстояний дуг больших кругов $\smile\sigma_1$ и $\smile\sigma_2$ от точки T^*, получим после несложных преобразований

$$\operatorname{tg}\theta' = \operatorname{tg}\theta\,\frac{\cos\rho}{1 - \sin\rho_1\sin\rho_2\sec\theta}\,, \qquad (1.17)$$

причем $\sin\rho_1 = \pm\sin\rho\sin\psi_1$; $\sin\rho_2 = \pm\sin\rho\sin\psi_2$. Двойной знак в правых частях связан с тем обстоятельством, что в условиях нашей задачи ρ, ρ_1, ρ_2 всегда меньше 90°, а позиционные углы ψ могут изменяться от 0 до 360°.

Последствия «тригонометрических» расчетов



Примеры сложных проекций

Haumea on HST　　　К.Петров-Водкин, «1919»

Проективная геометрия

библиография

Александров глл. XXI–XXIII, с.570–709

Ильин-Позняк гл. 3, с. 92-93

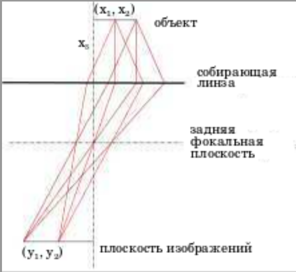
Четверухин Проективная геометрия, 4е изд. М: 1961. 360 с.

Шафаревич по 3-му изданию 2007г.: 55–83, 141–166, 268–284, 377–388, 518–...

Таблица 1: Wiki-присутствие термина «однородные координаты»

Язык	Р-р файла, кБ	Стр.	Рис.	Ф-л
Deutsch	1131	6	5	17
English	1082	8	1	7
Espagñol	580	2	0	3
Français	881	7	2	16
Italiano	718	4	0	10
Magyar	620	5	8	4
Polski	582	2	0	2
Русский	524	2	0	0
Українська	696	4	0	7

Абстракция оптической системы



$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{f}{x_3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Появление проективной геометрии

- Жерар Дезарг и Иоганн Кеплер (XVII век) — первые (независимые) идеи относительно математики центральных проекций

Появление проективной геометрии

- Жерар Дезарг и Иоганн Кеплер (XVII век) — первые (независимые) идеи относительно математики центральных проекций
- Август Мебиус (первая треть XIX века) — предложил однородные координаты (не зависящие от общего множителя)

Появление проективной геометрии

- Жерар Дезарг и Иоганн Кеплер (XVII век) — первые (независимые) идеи относительно математики центральных проекций
- Август Мебиус (первая треть XIX века) — предложил однородные координаты (не зависящие от общего множителя)
- Жан-Виктор Понселе, Мишель Шаль, Карл фон Штаудт (середина XIX века) — развили аксиоматическую проективную геометрию, где все плоскости, параллельные данной плоскости, пересекаются на ∞ по одной прямой

Появление проективной геометрии

- Жерар Дезарг и Иоганн Кеплер (XVII век) — первые (независимые) идеи относительно математики центральных проекций
- Август Мебиус (первая треть XIX века) — предложил однородные координаты (не зависящие от общего множителя)
- Жан-Виктор Понселе, Мишель Шаль, Карл фон Штаудт (середина XIX века) — развили аксиоматическую проективную геометрию, где все плоскости, параллельные данной плоскости, пересекаются на ∞ по одной прямой
- Феликс Клейн (конец XIX века) разъясняет связь между проективной геометрией и евклидовой геометрией, вводит в первую однородные координаты. Геометрия из науки о фигурах становится изучением преобразований фигур: состава, структуры, инвариантах того или иного семейства преобразований, минимальных аксиомах, допускающих заданные свойства преобразований.

Элементарный обзор

- Проективная геометрия отличается от обычной евклидовой геометрии тем, что изучает инварианты при проектировании, в то время как евклидова геометрия — это изучение того, что остается инвариантным после сдвига и поворота;

Элементарный обзор

- Проективная геометрия отличается от обычной евклидовой геометрии тем, что изучает инварианты при проектировании, в то время как евклидова геометрия — это изучение того, что остается инвариантным после сдвига и поворота;
- в проективной геометрии меньше аксиом, чем в евклидовой, и поэтому она более общая.

Элементарный обзор

- Проективная геометрия отличается от обычной евклидовой геометрии тем, что изучает инварианты при проектировании, в то время как евклидова геометрия — это изучение того, что остается инвариантным после сдвига и поворота;
- в проективной геометрии меньше аксиом, чем в евклидовой, и поэтому она более общая.
- Проективная геометрия игнорирует параллельные и перпендикулярные прямые, изометрию, окружности, прямоугольные, равнобедренные и равносторонние треугольники и т. д.

Элементарный обзор

- Проективная геометрия отличается от обычной евклидовой геометрии тем, что изучает инварианты при проектировании, в то время как евклидова геометрия — это изучение того, что остается инвариантным после сдвига и поворота;
- в проективной геометрии меньше аксиом, чем в евклидовой, и поэтому она более общая.
- Проективная геометрия игнорирует параллельные и перпендикулярные прямые, изометрию, окружности, прямоугольные, равнобедренные и равносторонние треугольники и т. д.
- Можно также сказать, например, что для нее круги, эллипсы и гиперболы составляют только одну фигуру.

Элементарный обзор

- Проективная геометрия отличается от обычной евклидовой геометрии тем, что изучает инварианты при проектировании, в то время как евклидова геометрия — это изучение того, что остается инвариантным после сдвига и поворота;
- в проективной геометрии меньше аксиом, чем в евклидовой, и поэтому она более общая.
- Проективная геометрия игнорирует параллельные и перпендикулярные прямые, изометрию, окружности, прямоугольные, равнобедренные и равносторонние треугольники и т. д.
- Можно также сказать, например, что для нее круги, эллипсы и гиперболы составляют только одну фигуру.
- С помощью некоторых соглашений о названиях (например, называя параллельными две прямые, пересекающихся на выбранной прямой в плоскости) можно вывести результаты аффинной геометрии из проективной геометрии,

Элементарный обзор

- Проективная геометрия отличается от обычной евклидовой геометрии тем, что изучает инварианты при проектировании, в то время как евклидова геометрия — это изучение того, что остается инвариантным после сдвига и поворота;
- в проективной геометрии меньше аксиом, чем в евклидовой, и поэтому она более общая.
- Проективная геометрия игнорирует параллельные и перпендикулярные прямые, изометрию, окружности, прямоугольные, равнобедренные и равносторонние треугольники и т. д.
- Можно также сказать, например, что для нее круги, эллипсы и гиперболы составляют только одну фигуру.
- С помощью некоторых соглашений о названиях (например, называя параллельными две прямые, пересекающихся на выбранной прямой в плоскости) можно вывести результаты аффинной геометрии из проективной геометрии,
- а введя комплексные числа, получить результаты евклидовой геометрии.

Элементарный обзор

- Проективная геометрия отличается от обычной евклидовой геометрии тем, что изучает инварианты при проектировании, в то время как евклидова геометрия — это изучение того, что остается инвариантным после сдвига и поворота;
- в проективной геометрии меньше аксиом, чем в евклидовой, и поэтому она более общая.
- Проективная геометрия игнорирует параллельные и перпендикулярные прямые, изометрию, окружности, прямоугольные, равнобедренные и равносторонние треугольники и т. д.
- Можно также сказать, например, что для нее круги, эллипсы и гиперболы составляют только одну фигуру.
- С помощью некоторых соглашений о названиях (например, называя параллельными две прямые, пересекающихся на выбранной прямой в плоскости) можно вывести результаты аффинной геометрии из проективной геометрии,
- а введя комплексные числа, получить результаты евклидовой геометрии.

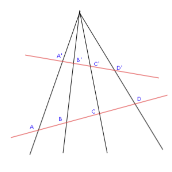
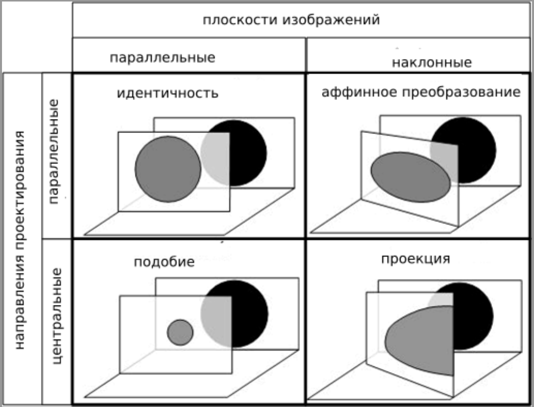


Рис. 2: Двойное отношение (или сложное отношение или (устаревшее) ангармоническое отношение): $(ab, cd) = \dfrac{c-a}{c-b} : \dfrac{d-a}{d-b}$, инвариантное по центральной проекции, является понятием проективной геометрии.

Illusztráció egy elemi felülvizsgálathoz

Иллюстрация к элементарному обзору



Аксиомы проективной геометрии

Основные элементы — это точки.
Прямые и плоскости — это определенные наборы точек.
Существует тройная связь, так называемая
циклическая (*ordre cyclique*),

- между точками, принадлежащими одной и той же прямой,

Аксиомы проективной геометрии

Основные элементы — это точки.
Прямые и плоскости — это определенные наборы точек.
Существует тройная связь, так называемая циклическая (*ordre cyclique*),

- между точками, принадлежащими одной и той же прямой,
- или между плоскостями, проходящими через одну и ту же прямую,

Аксиомы проективной геометрии

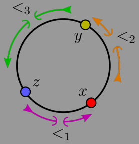
Основные элементы — это точки.
Прямые и плоскости — это определенные наборы точек.
Существует тройная связь, так называемая циклическая (*ordre cyclique*),

- между точками, принадлежащими одной и той же прямой,
- или между плоскостями, проходящими через одну и ту же прямую,
- или между прямыми, принадлежащими одной и той же плоскости и проходящими через одну и ту же точку.

Аксиомы проективной геометрии

Основные элементы — это точки.
Прямые и плоскости — это определенные наборы точек.
Существует тройная связь, так называемая циклическая (*ordre cyclique*),

- между точками, принадлежащими одной и той же прямой,
- или между плоскостями, проходящими через одну и ту же прямую,
- или между прямыми, принадлежащими одной и той же плоскости и проходящими через одну и ту же точку.



КАК ЭТО? не раз-два-три, а **час-два-три**

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы инцидентности (incidence)

i1: существует по крайней мере одна прямая и точка, не принадлежащая этой прямой

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы инцидентности (incidence)

i1: существует по крайней мере одна прямая и точка, не принадлежащая этой прямой

i2: каждой прямой принадлежат по крайней мере три точки

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы инцидентности (incidence)

i1: существует по крайней мере одна прямая и точка, не принадлежащая этой прямой

i2: каждой прямой принадлежат по крайней мере три точки

i3: если даны две отдельные точки, то существует одна и только одна прямая, которой они принадлежат

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы инцидентности (incidence)

i1: существует по крайней мере одна прямая и точка, не принадлежащая этой прямой

i2: каждой прямой принадлежат по крайней мере три точки

i3: если даны две отдельные точки, то существует одна и только одна прямая, которой они принадлежат

i4: если A, B, C и D – четыре отдельные точки такие, что прямые AB и CD содержат общую точку, то прямые AC и BD содержат общую точку.

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы инцидентности (incidence)

i1: существует по крайней мере одна прямая и точка, не принадлежащая этой прямой

i2: каждой прямой принадлежат по крайней мере три точки

i3: если даны две отдельные точки, то существует одна и только одна прямая, которой они принадлежат

i4: если A, B, C и D – четыре отдельные точки такие, что прямые AB и CD содержат общую точку, то прямые AC и BD содержат общую точку.

Определение: Пусть даны три точки A, B и C, тогда **плоскостью** ABC называется множество точек, принадлежащих прямым, содержащим точку C и точку, общую с прямой AB.

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы инцидентности (incidence)

- i1: существует по крайней мере одна прямая и точка, не принадлежащая этой прямой
- i2: каждой прямой принадлежат по крайней мере три точки
- i3: если даны две отдельные точки, то существует одна и только одна прямая, которой они принадлежат
- i4: если A, B, C и D – четыре отдельные точки такие, что прямые AB и CD содержат общую точку, то прямые AC и BD содержат общую точку.
- Определение: Пусть даны три точки A, B и C, тогда **плоскостью** ABC называется множество точек, принадлежащих прямым, содержащим точку C и точку, общую с прямой AB.
- i5: для любой плоскости ABC существует по крайней мере одна точка, ей не принадлежащая

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы инцидентности (incidence)

i1: существует по крайней мере одна прямая и точка, не принадлежащая этой прямой

i2: каждой прямой принадлежат по крайней мере три точки

i3: если даны две отдельные точки, то существует одна и только одна прямая, которой они принадлежат

i4: если A, B, C и D – четыре отдельные точки такие, что прямые AB и CD содержат общую точку, то прямые AC и BD содержат общую точку.

Определение: Пусть даны три точки A, B и C, тогда **плоскостью** ABC называется множество точек, принадлежащих прямым, содержащим точку C и точку, общую с прямой AB.

i5: для любой плоскости ABC существует по крайней мере одна точка, ей не принадлежащая

i6: любые две различные плоскости содержат по крайней мере две разные общие точки

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы инцидентности (incidence)

i1: существует по крайней мере одна прямая и точка, не принадлежащая этой прямой

i2: каждой прямой принадлежат по крайней мере три точки

i3: если даны две отдельные точки, то существует одна и только одна прямая, которой они принадлежат

i4: если A, B, C и D – четыре отдельные точки такие, что прямые AB и CD содержат общую точку, то прямые AC и BD содержат общую точку.

Определение: Пусть даны три точки A, B и C, тогда **плоскостью** ABC называется множество точек, принадлежащих прямым, содержащим точку C и точку, общую с прямой AB.

i5: для любой плоскости ABC существует по крайней мере одна точка, ей не принадлежащая

i6: любые две различные плоскости содержат по крайней мере две разные общие точки

ЗАЧЕМ Инцидентность, например, точек и прямых (на плоскости) позволяет согласно **принципу двойственности** переносить результаты, доказанные для точек на плоскости — на прямые. И наоборот.

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы порядка (ordre)

Определение: **формами первого вида** называют

- набор всех точек, принадлежащих одной и той же прямой (**точечная прямая**);

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы порядка (ordre)

Определение: **формами первого вида** называют

- набор всех точек, принадлежащих одной и той же прямой (**точечная прямая**);
- набор всех плоскостей, содержащих одну и ту же прямую (**пучок плоскостей**);

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы порядка (ordre)

Определение: **формами первого вида** называют

- набор всех точек, принадлежащих одной и той же прямой (**точечная прямая**);
- набор всех плоскостей, содержащих одну и ту же прямую (**пучок плоскостей**);
- набор всех прямых, принадлежащих одной и той же плоскости и проходящих через одну и ту же точку этой плоскости (**пучок прямых**).

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы порядка (ordre)

Определение: **формами первого вида** называют

- набор всех точек, принадлежащих одной и той же прямой (**точечная прямая**);
- набор всех плоскостей, содержащих одну и ту же прямую (**пучок плоскостей**);
- набор всех прямых, принадлежащих одной и той же плоскости и проходящих через одну и ту же точку этой плоскости (**пучок прямых**). В

некоторых книгах по аналитической геометрии вместо **пучка** используют термин **связка**.

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы порядка (ordre)

Определение: **формами первого вида** называют

- набор всех точек, принадлежащих одной и той же прямой (**точечная прямая**);
- набор всех плоскостей, содержащих одну и ту же прямую (**пучок плоскостей**);
- набор всех прямых, принадлежащих одной и той же плоскости и проходящих через одну и ту же точку этой плоскости (**пучок прямых**). В

  некоторых книгах по аналитической геометрии вместо **пучка** используют термин **связка**.

o1 на любой форме первого вида существуют два обратных тройных отношения, такие, что, независимо от элементов A, B и C, триплет (A, B, C) проверяет одно и только одно из этих двух отношений, так называемый порядок ABC.

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы порядка (ordre)

Определение: **формами первого вида** называют

- набор всех точек, принадлежащих одной и той же прямой (**точечная прямая**);
- набор всех плоскостей, содержащих одну и ту же прямую (**пучок плоскостей**);
- набор всех прямых, принадлежащих одной и той же плоскости и проходящих через одну и ту же точку этой плоскости (**пучок прямых**). В

  некоторых книгах по аналитической геометрии вместо **пучка** используют термин **связка**.

o1 на любой форме первого вида существуют два обратных тройных отношения, такие, что, независимо от элементов A, B и C, триплет (A, B, C) проверяет одно и только одно из этих двух отношений, так называемый порядок ABC.

o2 независимо от значений трех элементов формы A, B и C, порядок ABC является отношением **циклического порядка**, удовлетворяющим следующим условиям:

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы порядка (ordre)

Определение: **формами первого вида** называют

- набор всех точек, принадлежащих одной и той же прямой (**точечная прямая**);
- набор всех плоскостей, содержащих одну и ту же прямую (**пучок плоскостей**);
- набор всех прямых, принадлежащих одной и той же плоскости и проходящих через одну и ту же точку этой плоскости (**пучок прямых**). В

некоторых книгах по аналитической геометрии вместо **пучка** используют термин **связка**.

o1 на любой форме первого вида существуют два обратных тройных отношения, такие, что, независимо от элементов A, B и C, триплет (A, B, C) проверяет одно и только одно из этих двух отношений, так называемый порядок ABC.

o2 независимо от значений трех элементов формы A, B и C, порядок ABC является отношением **циклического порядка**, удовлетворяющим следующим условиям:

Цикличность: $R(A, B, C) \Rightarrow R(C, A, B)$

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы порядка (ordre)

Определение: **формами первого вида** называют

- набор всех точек, принадлежащих одной и той же прямой (**точечная прямая**);
- набор всех плоскостей, содержащих одну и ту же прямую (**пучок плоскостей**);
- набор всех прямых, принадлежащих одной и той же плоскости и проходящих через одну и ту же точку этой плоскости (**пучок прямых**). В

некоторых книгах по аналитической геометрии вместо **пучка** используют термин **связка**.

o1 на любой форме первого вида существуют два обратных тройных отношения, такие, что, независимо от элементов A, B и C, триплет (A, B, C) проверяет одно и только одно из этих двух отношений, так называемый порядок ABC.

o2 независимо от значений трех элементов формы A, B и C, порядок ABC является отношением **циклического порядка**, удовлетворяющим следующим условиям:

Цикличность: $R(A, B, C) \Rightarrow R(C, A, B)$

Асимметрия: $R(A, B, C) \Rightarrow \neg R(A, C, B)$

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы порядка (ordre)

Определение: **формами первого вида** называют

- набор всех точек, принадлежащих одной и той же прямой (**точечная прямая**);
- набор всех плоскостей, содержащих одну и ту же прямую (**пучок плоскостей**);
- набор всех прямых, принадлежащих одной и той же плоскости и проходящих через одну и ту же точку этой плоскости (**пучок прямых**). В

  некоторых книгах по аналитической геометрии вместо **пучка** используют термин **связка**.

o1 на любой форме первого вида существуют два обратных тройных отношения, такие, что, независимо от элементов A, B и C, триплет (A, B, C) проверяет одно и только одно из этих двух отношений, так называемый порядок ABC.

o2 независимо от значений трех элементов формы A, B и C, порядок ABC является отношением **циклического порядка**, удовлетворяющим следующим условиям:

Цикличность: $R(A, B, C) \Rightarrow R(C, A, B)$

Асимметрия: $R(A, B, C) \Rightarrow \neg R(A, C, B)$

Транзитивность: $R(A, B, C) \wedge R(A, C, D) \Rightarrow R(B, C, D)$

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы порядка (ordre)

Определение: **формами первого вида** называют

- набор всех точек, принадлежащих одной и той же прямой (**точечная прямая**);
- набор всех плоскостей, содержащих одну и ту же прямую (**пучок плоскостей**);
- набор всех прямых, принадлежащих одной и той же плоскости и проходящих через одну и ту же точку этой плоскости (**пучок прямых**). В

некоторых книгах по аналитической геометрии вместо **пучка** используют термин **связка**.

o1 на любой форме первого вида существуют два обратных тройных отношения, такие, что, независимо от элементов A, B и C, триплет (A, B, C) проверяет одно и только одно из этих двух отношений, так называемый порядок ABC.

o2 независимо от значений трех элементов формы A, B и C, порядок ABC является отношением **циклического порядка**, удовлетворяющим следующим условиям:

Цикличность: $R(A,B,C) \Rightarrow R(C,A,B)$

Асимметрия: $R(A,B,C) \Rightarrow \neg R(A,C,B)$

Транзитивность: $R(A,B,C) \wedge R(A,C,D) \Rightarrow R(B,C,D)$

полнота: если A, B и C различны, то либо $R(A,B,C)$, либо $R(C,B,A)$.

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы порядка (ordre)-2

o3: Независимо от элементов A и B формы первого вида, существует по крайней мере один элемент C такой же формы,что $R(A, C, B)$.

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы порядка (ordre)-2

o3: Независимо от элементов A и B формы первого вида, существует по крайней мере один элемент C такой же формы,что $R(A, C, B)$.

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы порядка (ordre)-2

o3: Независимо от элементов A и B формы первого вида, существует по крайней мере один элемент C такой же формы,что $R(A, C, B)$.

Определения:

- Говорят, что пары элементов AB и CD одной формы первого вида являются **отдельными парами**, если порядки ABC и ADB одинаковы.

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы порядка (ordre)-2

o3: Независимо от элементов A и B формы первого вида, существует по крайней мере один элемент C такой же формы,что $R(A, C, B)$.

Определения:

- Говорят, что пары элементов AB и CD одной формы первого вида являются **отдельными парами**, если порядки ABC и ADB одинаковы.
- **Сечением** прямой пучка прямых с вершиной O называется соответствие, которое связывает с любой прямой пучка ее пересечение с данной прямой. Взаимное соответствие между точечной прямой и пучком называется **проекцией** точечной прямой из точки O.

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы порядка (ordre)-2

o3: Независимо от элементов A и B формы первого вида, существует по крайней мере один элемент C такой же формы,что $R(A, C, B)$.

Определения:

- Говорят, что пары элементов AB и CD одной формы первого вида являются **отдельными парами**, если порядки ABC и ADB одинаковы.
- **Сечением** прямой пучка прямых с вершиной O называется соответствие, которое связывает с любой прямой пучка ее пересечение с данной прямой. Взаимное соответствие между точечной прямой и пучком называется **проекцией** точечной прямой из точки O.
- **Сечением** прямой пучка плоскостей с общим ребром D называется соответствие, которое связывает с любой плоскостью пучка ее пересечение с прямой. Взаимное соответствие между точечной прямой и пучком называется **проекцией** точечной прямой в направлении ребра D.

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы порядка (ordre)-2

o3: Независимо от элементов A и B формы первого вида, существует по крайней мере один элемент C такой же формы,что $R(A, C, B)$.

Определения:

- Говорят, что пары элементов AB и CD одной формы первого вида являются **отдельными парами**, если порядки ABC и ADB одинаковы.
- **Сечением** прямой пучка прямых с вершиной O называется соответствие, которое связывает с любой прямой пучка ее пересечение с данной прямой. Взаимное соответствие между точечной прямой и пучком называется **проекцией** точечной прямой из точки O.
- **Сечением** прямой пучка плоскостей с общим ребром D называется соответствие, которое связывает с любой плоскостью пучка ее пересечение с прямой. Взаимное соответствие между точечной прямой и пучком называется **проекцией** точечной прямой в направлении ребра D.
- Взяв три элемента A, B и C, мы называем **отрезком** AB, внешним к C, множество элементов M таких, чтобы пары AB и CM были разделены.

Аксиомы проективной геометрии

аксиомы порядка (ordre)-2

o3: Независимо от элементов A и B формы первого вида, существует по крайней мере один элемент C такой же формы,что $R(A, C, B)$.

Определения:

- Говорят, что пары элементов AB и CD одной формы первого вида являются **отдельными парами**, если порядки ABC и ADB одинаковы.
- **Сечением** прямой пучка прямых с вершиной O называется соответствие, которое связывает с любой прямой пучка ее пересечение с данной прямой. Взаимное соответствие между точечной прямой и пучком называется **проекцией** точечной прямой из точки O.
- **Сечением** прямой пучка плоскостей с общим ребром D называется соответствие, которое связывает с любой плоскостью пучка ее пересечение с прямой. Взаимное соответствие между точечной прямой и пучком называется **проекцией** точечной прямой в направлении ребра D.
- Взяв три элемента A, B и C, мы называем **отрезком** AB, внешним к C, множество элементов M таких, чтобы пары AB и CM были разделены.

o4: Проекция и сечение сохраняют отдельные пары.

Аксиомы проективной геометрии

аксиома непрерывности (continuité)

Определение: говорят, что элемент M отрезка AB предшествует элементу N в этом отрезке или что N следует за M, если пары AN и MB разделены.

Аксиомы проективной геометрии

аксиома непрерывности (continuité)

Определение: говорят, что элемент M отрезка AB предшествует элементу N в этом отрезке или что N следует за M, если пары AN и MB разделены.

c1: если элементы отрезка AB разделены на два класса, такие что:

Аксиомы проективной геометрии

аксиома непрерывности (continuité)

Определение: говорят, что элемент M отрезка AB предшествует элементу N в этом отрезке или что N следует за M, если пары AN и MB разделены.

c1: если элементы отрезка AB разделены на два класса, такие что:

- любой элемент отрезка AB относится к любому из двух классов;

Аксиомы проективной геометрии

аксиома непрерывности (continuité)

Определение: говорят, что элемент M отрезка AB предшествует элементу N в этом отрезке или что N следует за M, если пары AN и MB разделены.

c1: если элементы отрезка AB разделены на два класса, такие что:

- любой элемент отрезка AB относится к любому из двух классов;
- элемент A принадлежит к первому классу, а B принадлежит ко второму;

Аксиомы проективной геометрии

аксиома непрерывности (continuité)

Определение: говорят, что элемент M отрезка AB предшествует элементу N в этом отрезке или что N следует за M, если пары AN и MB разделены.

c1: если элементы отрезка AB разделены на два класса, такие что:

- любой элемент отрезка AB относится к любому из двух классов;
- элемент A принадлежит к первому классу, а B принадлежит ко второму;
- любой элемент первого класса предшествует любому элементу второго класса;

Аксиомы проективной геометрии

аксиома непрерывности (continuité)

Определение: говорят, что элемент M отрезка AB предшествует элементу N в этом отрезке или что N следует за M, если пары AN и MB разделены.

c1: если элементы отрезка AB разделены на два класса, такие что:

- любой элемент отрезка AB относится к любому из двух классов;
- элемент A принадлежит к первому классу, а B принадлежит ко второму;
- любой элемент первого класса предшествует любому элементу второго класса;

тогда существует элемент C отрезка AB (принадлежащий первому или второму классу), такой, что любой элемент, предшествующий C, принадлежит первому классу, а любой элемент, следующий за C, принадлежит второму классу.

Векторное определение

Пусть E — K-векторное пространство (K обозначает вещественное $\mathbb{R}$ или комплексное $\mathbb{C}$), не сводимое к $\{0\}$. На $E - \{0\}$ устанавливается следующее отношение эквивалентности:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in K^*, x = \lambda y.$$

Векторное определение

Пусть $E - K$-векторное пространство (K обозначает вещественное $\mathbb{R}$ или комплексное $\mathbb{C}$), не сводимое к $\{0\}$. На $E - \{0\}$ устанавливается следующее отношение эквивалентности:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in K^*, x = \lambda y.$$

Тогда, **проективным пространством** для подмножества E: $E - \{0\}$ отношение эквивалентности : $P(E) = (E - \{0\})/ \sim$.
Для каждого элемента $x \neq 0$ пространства E следует отметить, $\pi(x) \in P(E)$ его класс эквивалентности: $\pi(x) = \{\lambda x, \lambda \in K^*\}$. При этом $\pi(x) = \pi(y)$ если и только если x и y **коллинеарны**.

Векторное определение

Пусть $E-$ K-векторное пространство (K обозначает вещественное $\mathbb{R}$ или комплексное $\mathbb{C}$), не сводимое к $\{0\}$. На $E-\{0\}$ устанавливается следующее отношение эквивалентности:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in K^*, x = \lambda y.$$

Тогда, **проективным пространством** для подмножества E: $E-\{0\}$ отношение эквивалентности : $P(E) = (E-\{0\})/\sim$.
Для каждого элемента $x \neq 0$ пространства E следует отметить, $\pi(x) \in P(E)$ его класс эквивалентности: $\pi(x) = \{\lambda x, \lambda \in K^*\}$. При этом $\pi(x) = \pi(y)$ если и только если x и y **коллинеарны**.
Оператор $\pi : E\{0\} \to P(E)$ называется **канонической проекцией**.
Проще говоря, проекционное $P(E)$ — это набор прямых E, а элемент $\pi(x)$ проективного пространства — это прямая из E с направляющим вектором x.

Векторное определение

Пусть $E-$ K-векторное пространство (K обозначает вещественное $\mathbb{R}$ или комплексное $\mathbb{C}$), не сводимое к $\{0\}$. На $E-\{0\}$ устанавливается следующее отношение эквивалентности:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in K^*, x = \lambda y.$$

Тогда, **проективным пространством** для подмножества E: $E-\{0\}$ отношение эквивалентности : $P(E) = (E-\{0\})/\sim$.
Для каждого элемента $x \neq 0$ пространства E следует отметить, $\pi(x) \in P(E)$ его класс эквивалентности: $\pi(x) = \{\lambda x, \lambda \in K^*\}$. При этом $\pi(x) = \pi(y)$ если и только если x и y **коллинеарны**.
Оператор $\pi : E\{0\} \to P(E)$ называется **канонической проекцией**.
Проще говоря, проекционное $P(E)$ — это набор прямых E, а элемент $\pi(x)$ проективного пространства — это прямая из E с направляющим вектором x.
Если размерность E конечна и равна n, тогда размерность **проективного** пространства $P(E)$ также конечна и $n-1 = dim\, P(E)$. В частности :

Векторное определение

Пусть $E-$ K-векторное пространство (K обозначает вещественное $\mathbb{R}$ или комплексное $\mathbb{C}$), не сводимое к $\{0\}$. На $E-\{0\}$ устанавливается следующее отношение эквивалентности:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in K^{*}, x = \lambda y.$$

Тогда, **проективным пространством** для подмножества E: $E-\{0\}$ отношение эквивалентности : $P(E) = (E-\{0\})/\sim$.
Для каждого элемента $x \neq 0$ пространства E следует отметить, $\pi(x) \in P(E)$ его класс эквивалентности: $\pi(x) = \{\lambda x, \lambda \in K^{*}\}$. При этом $\pi(x) = \pi(y)$ если и только если x и y **коллинеарны**.
Оператор $\pi : E\{0\} \to P(E)$ называется **канонической проекцией**.
Проще говоря, проекционное $P(E)$ — это набор прямых E, а элемент $\pi(x)$ проективного пространства — это прямая из E с направляющим вектором x.
Если размерность E конечна и равна n, тогда размерность **проективного** пространства $P(E)$ также конечна и $n-1 = dim\, P(E)$. В частности :
Если $n=1$, то $P(E)$ содержит один элемент (нулевой размер);

Векторное определение

Пусть $E-$ K-векторное пространство (K обозначает вещественное $\mathbb{R}$ или комплексное $\mathbb{C}$), не сводимое к $\{0\}$. На $E-\{0\}$ устанавливается следующее отношение эквивалентности:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in K^*, x = \lambda y.$$

Тогда, **проективным пространством** для подмножества E: $E-\{0\}$ отношение эквивалентности : $P(E) = (E - \{0\})/\sim$.
Для каждого элемента $x \neq 0$ пространства E следует отметить, $\pi(x) \in P(E)$ его класс эквивалентности: $\pi(x) = \{\lambda x, \lambda \in K^*\}$. При этом $\pi(x) = \pi(y)$ если и только если x и y **коллинеарны**.
Оператор $\pi : E\{0\} \to P(E)$ называется **канонической проекцией**.
Проще говоря, проекционное $P(E)$ — это набор прямых E, а элемент $\pi(x)$ проективного пространства — это прямая из E с направляющим вектором x.
Если размерность E конечна и равна n, тогда размерность **проективного** пространства $P(E)$ также конечна и $n-1 = dim\, P(E)$. В частности :
Если $n=1$, то $P(E)$ содержит один элемент (нулевой размер); если $n=2$, то $E-$ это векторная плоскость, а $P(E)-$ проективная прямая.

Векторное определение

Пусть $E-$ K-векторное пространство (K обозначает вещественное $\mathbb{R}$ или комплексное $\mathbb{C}$), не сводимое к $\{0\}$. На $E-\{0\}$ устанавливается следующее отношение эквивалентности:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in K^*, x = \lambda y.$$

Тогда, **проективным пространством** для подмножества E: $E-\{0\}$ отношение эквивалентности : $P(E) = (E-\{0\})/\sim$.
Для каждого элемента $x \neq 0$ пространства E следует отметить, $\pi(x) \in P(E)$ его класс эквивалентности: $\pi(x) = \{\lambda x, \lambda \in K^*\}$. При этом $\pi(x) = \pi(y)$ если и только если x и y **коллинеарны**.
Оператор $\pi : E\{0\} \to P(E)$ называется **канонической проекцией**.
Проще говоря, проекционное $P(E)$ — это набор прямых E, а элемент $\pi(x)$ проективного пространства — это прямая из E с направляющим вектором x.
Если размерность E конечна и равна n, тогда размерность **проективного** пространства $P(E)$ также конечна и $n-1 = dim\, P(E)$. В частности :
Если $n=1$, то $P(E)$ содержит один элемент (нулевой размер); если $n=2$, то $E-$ это векторная плоскость, а $P(E)-$ проективная прямая. Если $n=3$, то $P(E)$ называется проективной плоскостью; это наиболее подходящий случай для создания геометрии.

Если $E-$ это типичное векторное пространство размерности n, K^n, то обозначением для проективного пространства берут $P^{n-1}(K)$ вместо $P(K^n)$.

Принцип двойственности

Принцип двойственности

- Принцип двойственности в проективной геометрии — набор утверждений, устанавливающих соответствия между различными объектами в проективных пространствах (например, подпространствами различных размерностей) и их свойствами.

Принцип двойственности

- Принцип двойственности в проективной геометрии — набор утверждений, устанавливающих соответствия между различными объектами в проективных пространствах (например, подпространствами различных размерностей) и их свойствами.
- Таким образом, если в проективной геометрии доказана теорема A, а утверждение B двойственно к A, то B также доказано.

Принцип двойственности

- Принцип двойственности в проективной геометрии — набор утверждений, устанавливающих соответствия между различными объектами в проективных пространствах (например, подпространствами различных размерностей) и их свойствами.
- Таким образом, если в проективной геометрии доказана теорема A, а утверждение B двойственно к A, то B также доказано.
- Например, на проективной плоскости двойственными объектами являются «точка» и «прямая», а свойству «точка лежит на прямой» соответствует двойственное свойство «прямая проходит через точку».

Принцип двойственности-2

В отличие от классической планиметрии, где прямые — это наборы точек, в проективной геометрии лучше рассматривать проекционную плоскость P как набор точек $\mathcal{P}(P)$, прямых, $\mathcal{D}(P)$ и отношений, указывающих, какие точки лежат на какой прямой (или какие прямые проходят через какую точку).

Принцип двойственности-2

В отличие от классической планиметрии, где прямые — это наборы точек, в проективной геометрии лучше рассматривать проекционную плоскость P как набор точек $\mathcal{P}(P)$, прямых, $\mathcal{D}(P)$ и отношений, указывающих, какие точки лежат на какой прямой (или какие прямые проходят через какую точку). Чтобы понять, что важно именно это соотношение, а не природа точек и прямых, математик Гильберт говорил: «всегда нужно уметь говорить “стол”, “стул” и “кружка пива” вместо “точка”, “прямая” и “плоскость”»!

Принцип двойственности-2

В отличие от классической планиметрии, где прямые — это наборы точек, в проективной геометрии лучше рассматривать проекционную плоскость P как набор точек $\mathcal{P}(P)$, прямых, $\mathcal{D}(P)$ и отношений, указывающих, какие точки лежат на какой прямой (или какие прямые проходят через какую точку). Чтобы понять, что важно именно это соотношение, а не природа точек и прямых, математик Гильберт говорил: «всегда нужно уметь говорить “стол”, “стул” и “кружка пива” вместо “точка”, “прямая” и “плоскость”»!

Считаем, что проективная плоскость P определена аксиоматически; тогда мы получаем другую проекционную плоскость, рассматривая объект, P^* где «точки» являются прямыми P, а «прямые» являются точками P, и соответственно «прямая» в P^* (которая была точкой M в P) проходит через «точку» в P^* (которая была прямой D в P), поскольку D проходит через M.

Принцип двойственности-3

В уравнении $\mathbf{x}^T\mathbf{g} = 0$ имеется два вектор-столбца. Вы можете при сохранении постоянным одного столбца менять другой. Если мы сохраняем точку x постоянной и меняем коэффициенты g, мы создаём новые прямые, проходящие через точку. Если мы сохраняем постоянными коэффициенты и меняем точки, удовлетворяющие уравнению, мы создаём прямую.

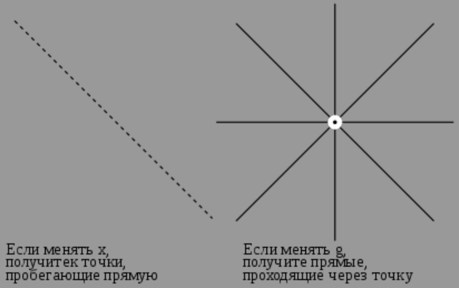
Принцип двойственности-3

В уравнении $\mathbf{x}^T\mathbf{g} = 0$ имеется два вектор-столбца. Вы можете при сохранении постоянным одного столбца менять другой. Если мы сохраняем точку x постоянной и меняем коэффициенты g, мы создаём новые прямые, проходящие через точку. Если мы сохраняем постоянными коэффициенты и меняем точки, удовлетворяющие уравнению, мы создаём прямую.
Мы рассматриваем x как точку, поскольку оси, которые мы используем — это x, y и z. Если мы вместо этого используем в качестве коэффициентов оси a, b, c, точки становятся прямыми, а прямые становятся точками. Если мы доказываем некоторый факт для графического представления данных при осях x, y и z, те же самые доводы можно использовать для осей a, b и c. Это называется двойственностью.

Принцип двойственности-3

В уравнении $\mathbf{x}^T\mathbf{g} = 0$ имеется два вектор-столбца. Вы можете при сохранении постоянным одного столбца менять другой. Если мы сохраняем точку x постоянной и меняем коэффициенты g, мы создаём новые прямые, проходящие через точку. Если мы сохраняем постоянными коэффициенты и меняем точки, удовлетворяющие уравнению, мы создаём прямую.

Мы рассматриваем x как точку, поскольку оси, которые мы используем — это x, y и z. Если мы вместо этого используем в качестве коэффициентов оси a, b, c, точки становятся прямыми, а прямые становятся точками. Если мы доказываем некоторый факт для графического представления данных при осях x, y и z, те же самые доводы можно использовать для осей a, b и c. Это называется двойственностью.



Однородные координаты

В проективном пространстве размерности n, связанном с векторным пространством размерности $n+1$, каждая точка m из $P(E)$ связана с семейством коллинеарных векторов в E. Если в E есть базис, то однородными координатами точки m называются координаты любого вектора x такие, что $\pi(x) = m$. Таким образом, точка имеет семейство координат, все пропорциональные друг другу. Другими словами, если $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ — однородные координаты m, то же самое относится к $(kx_1, kx_2, ..., kx_{N+1})$ для любого ненулевого k-элемента K.

Однородные координаты

В проективном пространстве размерности n, связанном с векторным пространством размерности $n+1$, каждая точка m из $P(E)$ связана с семейством коллинеарных векторов в E. Если в E есть базис, то однородными координатами точки m называются координаты любого вектора x такие, что $\pi(x) = m$. Таким образом, точка имеет семейство координат, все пропорциональные друг другу. Другими словами, если $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ — однородные координаты m, то же самое относится к $(kx_1, kx_2, ..., kx_{N+1})$ для любого ненулевого k-элемента K.

Из всех этих наборов координат часто предпочтение отдается одному, чтобы найти аффинное пространство размерности n. Среди всех элементов m предпочтение отдается, например, тому, чья последняя координата равна 1. Это означает, что пространство было спроецировано в гиперплоскость, заданную уравнением $x_{n+1} = 1$. Если $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ является системой координат m, то предпочтение отдается системе координат $(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \frac{x_2}{x_{n+1}}, ..., \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1)$. Это, очевидно, справедливо только в том случае, если m является точкой $P(E)$. Неправильные точки представлены однородными системами координат, последняя координата которых равна нулю.

Однородные координаты

В проективном пространстве размерности n, связанном с векторным пространством размерности $n+1$, каждая точка m из $P(E)$ связана с семейством коллинеарных векторов в E. Если в E есть базис, то однородными координатами точки m называются координаты любого вектора x такие, что $\pi(x) = m$. Таким образом, точка имеет семейство координат, все пропорциональные друг другу. Другими словами, если $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ — однородные координаты m, то же самое относится к $(kx_1, kx_2, \ldots, kx_{N+1})$ для любого ненулевого k-элемента K.

Из всех этих наборов координат часто предпочтение отдается одному, чтобы найти аффинное пространство размерности n. Среди всех элементов m предпочтение отдается, например, тому, чья последняя координата равна 1. Это означает, что пространство было спроецировано в гиперплоскость, заданную уравнением $x_{n+1} = 1$. Если $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ является системой координат m, то предпочтение отдается системе координат $(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \frac{x_2}{x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1)$. Это, очевидно, справедливо только в том случае, если m является точкой $P(E)$. Неправильные точки представлены однородными системами координат, последняя координата которых равна нулю.

Тогда мы замечаем, что между собой совпадают:

- собственные точки $P(E)$ и точки аффинного пространства размерности n;
- неправильные точки $P(E)$ и направления векторного пространства размерности n;

Однородные координаты

В проективном пространстве размерности n, связанном с векторным пространством размерности $n+1$, каждая точка m из $P(E)$ связана с семейством коллинеарных векторов в E. Если в E есть базис, то однородными координатами точки m называются координаты любого вектора x такие, что $\pi(x) = m$. Таким образом, точка имеет семейство координат, все пропорциональные друг другу. Другими словами, если $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ — однородные координаты m, то же самое относится к $(kx_1, kx_2, ..., kx_{N+1})$ для любого ненулевого k-элемента K.

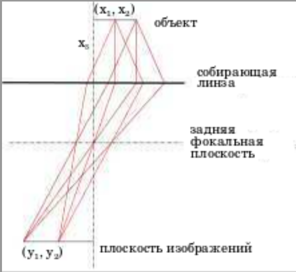
Из всех этих наборов координат часто предпочтение отдается одному, чтобы найти аффинное пространство размерности n. Среди всех элементов m предпочтение отдается, например, тому, чья последняя координата равна 1. Это означает, что пространство было спроецировано в гиперплоскость, заданную уравнением $x_{n+1} = 1$. Если $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ является системой координат m, то предпочтение отдается системе координат $(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \frac{x_2}{x_{n+1}}, ..., \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1)$. Это, очевидно, справедливо только в том случае, если m является точкой $P(E)$. Неправильные точки представлены однородными системами координат, последняя координата которых равна нулю.

Тогда мы замечаем, что между собой совпадают:

- собственные точки $P(E)$ и точки аффинного пространства размерности n;
- неправильные точки $P(E)$ и направления векторного пространства размерности n;

Произвольный выбор, какую координату положить 1 в однородных координатах, позволяет определить разные локальные карты.

Абстракция оптической системы



$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{f}{x_3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Зачем нужны 3 координаты в пространстве предметов?

И когда?

- 1 mas = 2 метра на ☾
- суточный параллакс $\pi_{♂} \leqslant 24''$, $\pi_{♃} < 2.2''$
- нормальных звезд с $\pi > 1\text{mas}$ — $0.11 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 1000^3 \approx 5 \cdot 10^8$

Проективная геометрия и однородные координаты

- объект не меняется при умножении всех координат на 1 число
- точка на прямой — 2 координаты
- точка на плоскости — 3 координаты

матрица преобразования

$$T = \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ l & m & m & s \end{bmatrix}$$

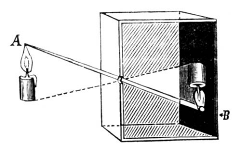
$$T = \begin{bmatrix} [3 \times 3] & [3 \times 1] \\ [1 \times 3] & [1 \times 1] \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Элементарные преобразования

Элементарные матрицы в (3):

- $[3 \times 3]$ — обычное линейное преобразование (масштабирование, сдвиг и вращение)
- $[1 \times 3]$ — перенос $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z & 1 \end{bmatrix}$
- $[3 \times 1]$ — перспектива
- $[1 \times 1]$ — общее изменение масштаба

Камера-обскура и однородные координаты



$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

или

$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$

в общем случае, чтобы определить полностью матрицу преобразования надо иметь 4 точки в пространстве и 4 их образа в проекции

Методы определения функции рассеяния точки оптической системы

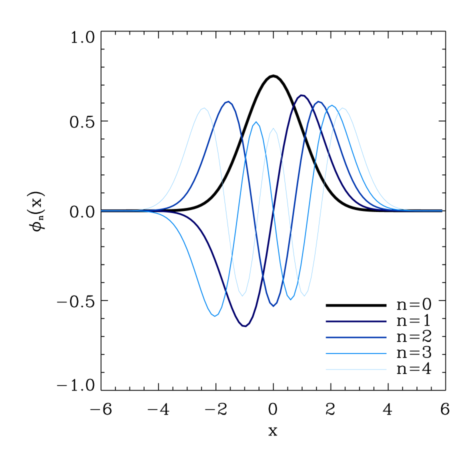
Разложение по безразмерным базисным функциям.

$$\varphi_n(x) \equiv \left[2^n \pi^{\frac{1}{2}} n!\right]^{-\frac{1}{2}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

где n натуральное число, а $H_n(x)$ — полином Эрмита соответствующего порядка. Эти функции ортогональны в смысле:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \varphi_n(x) \varphi_m(x) = \delta_{nm},$$

Разложение по шейплетам



для реального объекта практичнее ввести функции

$$B_n(x;\beta) \equiv \beta^{-\frac{1}{2}}\varphi_n(\beta^{-1}x), \tag{5}$$

где β характерный размер, обычно близок к размеру объекта.

Разложение по шейплетам-2

Такие функции также ортонормированы, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \ B_n(x;\beta) B_m(x;\beta) = \delta_{nm}. \tag{6}$$

Такой бесконечный набор функций образует базис в пространстве гладких функций. Тогда профиль объекта $f(x)$ можно разложить

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n B_n(x;\beta). \tag{7}$$

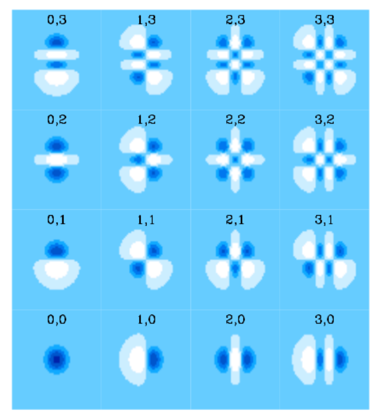
Разложение по шейплетам-3

Из условия (6), коэффициенты при базисных функциях (shapelet) определяются из уравнения

$$f_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x) B_n(x;\beta). \tag{8}$$

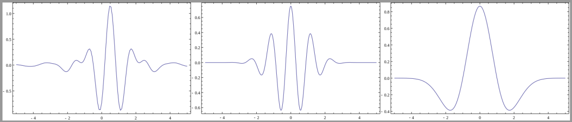
На практике ряд в уравнении (7) быстро сходится в том случае, если объект $f(x)$ локализован, а β и начало координат $x = 0$ не сильно отличаются от его размера и местоположения.
Это разложение в ряд обычно называют рядом Gram-Charlier, или разложением Edgeworth (эти разложения по т.н. полуинвариантам или кумулянтам совпадают, различаясь лишь упорядочением).

Аналогично строятся двумерные базисы:



после чего можно раскладывать реальные изображения.
Придуман этот формализм для выделения изображений галактик, но со звездами ситуация только проще.

Вейвлеты



Мейер Морле Мексиканская шляпа

Требования:

1. конечная энергия $\psi(t)$: $E = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 \, dt < \infty$

2. квадрат преобразования Фурье вейвлета $\hat{\psi}(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-i(2\pi f)t} \, dt$ д.б.

   конечен:$C_\psi = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(f)|^2}{f} \, df < \infty$

3. для комплексных вейвлетов Фурье-преобразование должно быть одновременно вещественным и убывать для отрицательных частот

4. вейвлет должен быть непрерывным, интегрируемым, иметь компактный носитель и быть локализованным как во времени (в пространстве), так и по частоте.

Высокоточная астрометрия требует коррекции PSF в разных частях кадра.
Разложение изображения по базисным функциям позволяет, найдя PSF по яркой звезде (и построив это разложение), вводить коррекцию просто решая уравнение типа свертки.

Литература по спецкурсу

дополнительная 3

- П.В. Щеглов. Проблемы оптической астрономии, М. Наука, 1980, 272с
- Шафаревич И.Р. Ремизов А.О., Линейная алгебра и геометрия, Физматлит, 2009, 512с
- Четверухин Н.Ф. Проективная геометрия, М.: Учпедгиз РСФСР, 1961, 360с
- Теребиж В.Ю., Современные оптические телескопы. М. Физматлит, 2005, 80с
- Киселев А.А. Теоретические основания фотографической астрометрии. СПб.: Наука, 1989, 264
- Juszkiewicz, R. et al. 1995, ApJ, 442, 39

Задания к семинару

1. Возможные виды прямоугольного треугольника при центральной проекции
2. Какие ошибки проектирования при фотографировании зданий можно исправить программно?
3. Какие ошибки проектирования при фотографировании природы можно исправить программно?
4. Разложить двумерную гауссиану по функциям Хаара.
5. Разложить треугольный импульс по вейвлетам Шеннона.

Спасибо за внимание