

Обработка астрометрических наблюдений

11. Метод перекрывающихся пластинок

кто: Семенцов В.Н.

когда: 23 апреля, 2021

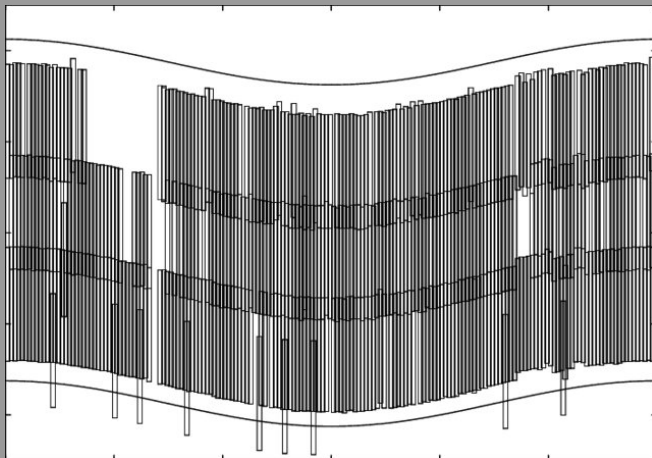
- дано много(-много) частично перекрывающихся изображений звездного неба
- предполагаем стабильность инструмента
- надо повысить точность определения инструментальных параметров
- надо уменьшить систематические погрешности координат наблюдаемых объектов

Постановка задачи определения α , δ , μ_α и μ_δ по совокупности наблюдений

- Чем точнее известна σ_μ отдельной звезды, тем лучше оценка внутренней дисперсии собственных движений
- **Вообще**, информативность случайных данных тем выше, чем точнее известна их дисперсия
- набор $\{\sigma_{\alpha_i}, \sigma_{\delta_i}\}$ **лучше**, чем $\langle\sigma_\alpha\rangle, \langle\sigma_\delta\rangle$
- часто необходимо знать
 - 1 **сколько** потребуется опорных звезд, чтобы систематические ошибки определения $\alpha, \delta, \mu_\alpha, \mu_\delta$ не превышали заданного предела
 - 2 **какая** из эмпирических моделей соотношения между ξ, η и x_i, y_i даст наиболее точный в систематическом отношении результат
- оценки систематических погрешностей положений и собственных движений обычно определяются с использованием матрицы ковариаций постоянных пластины.

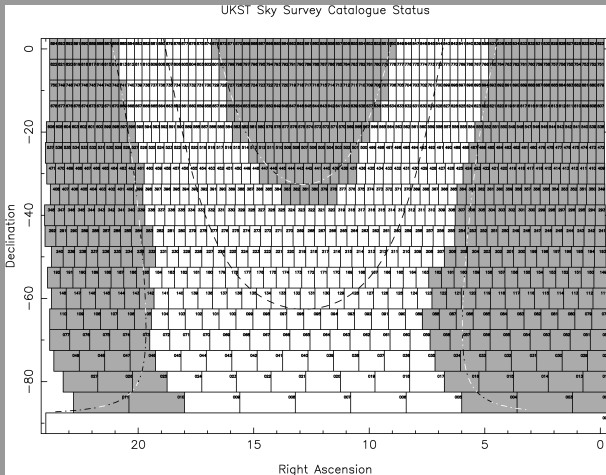
Требования к расположению центров кадров

АС, Bordeaux



Требования к расположению центров кадров

POSS, UKST



Требования к расположению центров кадров

Eichhorn

- Показано, что значительное повышение систематической точности может быть получено для фотографической астрометрии за счет устранения систематических ошибок, возникающих между координатами одних и тех же звезд, полученных из перекрывающихся кадров с разными центрами.
- Технически строгое решение этой задачи методом наименьших квадратов потребует решения системы, в которой число неизвестных координат равно общему числу звезд плюс число звезд, умноженное на число постоянных пластинки. Этот метод особенно хорошо подходит для редукции фотографических каталогов.
- Строгое решение этой системы может быть легко и практично получено итерациями, которые всегда будут сходиться. Теоретические исследования показывают, что точность, ожидаемая от решения такого рода, может быть предсказана в предположении гладкого распределения звезд. Применение этого принципа (практическое применение которого требует электронной вычислительной машины) к определению параллаксов не только увеличивает точность полученных таким образом параллаксов, но и дает точные положения и движение звезд сравнения, которые очень часто срочно необходимы для определения соотношений в серии массовых наблюдений на разных инструментах, которые должны быть объединены в одном решении.

Требования к материалу

Это не есть условия применимости метода перекрывающихся пластинок, это скорее стандарт в большинстве практических случаев обработки наблюдений. Аналогично можно учесть собственные движения, ввести системы весов и т.п.

- для каждой звезды влияние собственного движения на промежутке времени от средней эпохи наблюдений до эпохи данной пластинки пренебрежимо мало,
- погрешности собственного движения опорных звезд пренебрежимо малы на интервале времени от эпохи наблюдений опорных звезд до средней эпохи пластинки,
- положения опорных звезд даны в одной фундаментальной системе (не обязательно J2000!).
- модель формирования изображения (т.е. соотношение между измеренными и стандартными координатами) дается в виде: \implies

Модель формирования изображения

$$R = MP + E, \quad (1)$$

где $R^T = [x, y]$ — вектор измеренных координат x и y , матрица параметров модели:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \dots \end{bmatrix},$$

$P^T = [p_1, p_2, \dots]$ — вектор постоянных пластинки, а $E = [e_x, e_y]$ — вектор ошибок. Величины ξ и η — стандартные координаты звезды относительно центра исследуемой пластинки. Матрица параметров модели M может содержать помимо приведенных линейных членов, более высокие степени ξ и η , а также величины, зависящие от звездной величины и показателя цвета звезды.

Модель формирования изображения - 2

Например, рассмотрим

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 & m\xi \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & m\eta \end{bmatrix},$$

(где m — соответствующая оценка блеска).

Появление $m\xi$ и $m\eta$ в седьмой колонке матрицы означает, что воздействие на координаты эффекта комы произойдет с теми же коэффициентами, т.к. кома зависит только от расстояния от центра пластинки (где, предполагается $x = y = 0$).

Соотношение между (α, δ) опорной звезды и ее наблюдаемым положением (α_0, δ_0) суть

$$\begin{aligned} \alpha_0 \cos \delta &= \alpha \cos \delta + e_\alpha, \\ \delta_0 &= \delta + e_\delta, \end{aligned} \tag{2}$$

где e_α, e_δ — погрешности.

Модель формирования изображения - 3

- Случайные величины с нулевым средним e_x, e_y, e_α и e_δ предполагаются независимыми, а их стандартные отклонения — равными $\sigma, \sigma, \sigma/w$ и σ/w соответственно.
- Предполагается, что вес w координат опорной звезды известен.
- Следствием таких предположений будет независимость величин погрешностей от положения звезд на пластинке, их блеска и других характеристик.
- и отсутствие корреляции между погрешностями координат разных звезд

Все это подразумевает, что модель должна быть достаточно гибкой, чтобы исключить остаточные систематические эффекты.

Система нормальных уравнений для постоянных пластинки

Предполагается, что имеются достаточно точные оценки для всех неизвестных (сферические координаты всех звезд и параметры редукции для всех пластинок).

Линеаризованные уравнения измерений на пластинке имеют вид:

$$\Delta R = U \Delta S + M \Delta P, \quad (3)$$

где $\Delta R^T = [x_0 - x_c, y_0 - y_c]$, x_0, y_0 — измеренные координаты, а

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = M (\xi(\alpha_a, \delta_a), \eta(\alpha_a, \delta_a),) P_a,$$

Система нормальных уравнений для постоянных пластинки - 2

- Рассмотрим набор из N пластинок, на которых суммарно M звезд с измеренными координатами (u_{ij}, v_{ij}) для i -й звезды на j -й пластинке. Пластинки промеряются (не обязательно измерять каждую звезду в каждом кадре) .
- Каждой паре (u_{ij}, v_{ij}) соответствует пара (x_{ij}, y_{ij}) координат проекции каждой пластинки на общую плоскость.
- Этого не требуется делать точно, поскольку этого и нельзя сделать, а в условные уравнения можно ввести дифференциальные поправки, чтобы учесть ошибки, возникающие в результате такой проекции.

Система нормальных уравнений для постоянных пластинки - 3

Кроме того, пусть определены величины:

- t_j — эпоха j -й пластинки;
- a_j, b_j, \dots — константы j -й пластинки;
- ξ_i — стандартная координата в i -й звезды;
- μ_i — собственное движение в i -й звезды;
- $t_k^{(c)}$ — эпоха k -го каталога, и
- $\xi_{ik}^{(c)}$ — стандартная координата в i -й звезды в k -м каталоге.

Тогда условные уравнения будут

$$a_j x_{ij} + b_j y_{ij} + c_j + d_j x_{ij}^2 + e_j x_{ij} y_{ij} + f_j y_{ij}^2 + \dots = \xi_i + \mu_i t_j, \quad (4)$$

где учитываются слагаемые, достаточные для представления наблюдений с удовлетворительной точностью. Здесь i и j пробегают все измеренные звезды и пластинки.

Система нормальных уравнений для постоянных пластинки - 4

К тому же,

$$\xi_i + \mu_i t_k^{(c)} = \xi_{ik}^{(c)}, \quad (5)$$

где i и k пробегает значения для всех положений звезд во всех используемых каталогах. Условные уравнения 4 и 5 могут быть преобразованы в набор нормальных уравнений обычным способом.

Матрица системы нормальных уравнений будет положительно определенной только если система имеет единственное решение. Кроме того, решение должно быть нетривиальным, чтобы иметь смысл.

Система нормальных уравнений для постоянных пластинки - 5

Поэтому должны быть выполнены условия:

- 1 Каждая звезда должна появляться по крайней мере в двух кадрах, так что соответствующие члены $\xi_i + \mu_i t_j$ будут линейно независимы (т.е. эпохи пластинок должны быть разными).
- 2 На каждой пластинке с n числовыми константами должно быть измерено по крайней мере n звезд, так что соответствующие слагаемые

$$a_j x_{ij} + b_j y_{ij} + c_j + d_j x_{ij}^2 + e_j x_{ij} y_{ij} + f_j y_{ij}^2 + \dots$$

должны быть линейно независимыми и

- 3 Должно быть обеспечено необходимое минимальное количество опорных звезд.

В общем случае эти условия означают, что должно быть достаточное число условных уравнений соответствующего типа.

Система нормальных уравнений для постоянных пластинки - 6

- Ясно, что во многих случаях, например в зонах Астрографического каталога, полученная система нормальных уравнений будет действительно очень большой.
- Однако при разумном упорядочении коэффициентов $a_j, b_j, \dots, \xi_i, \mu_i$ можно расположить матрицу нормальных уравнений так, чтобы ненулевые члены сгруппировались вокруг главной диагонали (например, коэффициенты можно было бы упорядочить следующим образом: $a_1, b_1, \dots, a_2, b_2, \dots, \xi_1, \mu_1, \xi_2, \dots, \mu_M$).

Решение системы нормальных уравнений

Число нормальных уравнений в такой системе, вообще говоря, было бы настолько велико, что прямое решение их было бы затруднительно даже с большой ЭВМ, значит необходим подходящий неявный метод.

Раньше всего было предложено обобщение метода Гаусса-Зейделя, который особенно подходит для решения нормальных уравнений, возникающих в задачах такого рода. Можно показать, что для нормальных уравнений метод сходится.

Рассмотрим набор линейных уравнений

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (6)$$

где \mathbf{A} — квадратная и невырожденная. Разбиение \mathbf{A} на ряд подматриц \mathbf{A}_{ij} таким образом, что подматрицы \mathbf{A}_{ij} вдоль главной диагонали квадратные и несингулярные. Соответственно разделим на подвекторы параметры \mathbf{x} и правые части \mathbf{b} .

Решение системы нормальных уравнений- 2

Определим последовательность векторов $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ следующим способом:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i^{(k)} &= \mathbf{A}_{ii}^{-1} \times \\ &\times \left(\mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^P \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j^{(k)} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Решение системы нормальных уравнений- 3

решение простыми итерациями.

Систематическая погрешность

Пусть величина $\xi(p_1, \dots, p_n)$ является функцией (случайных) величин p_1, \dots, p_n , матрица ковариаций которых — \mathbf{Q}^* . Тогда дисперсия ξ будет:

$$\text{Var}[\xi] = \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial \xi}{\partial p_{\nu}} \frac{\partial \xi}{\partial p_{\mu}} \text{Cov}[p_{\mu} p_{\nu}] \quad (8)$$

где $\text{Cov}[p_{\mu} p_{\nu}]$ — элемент матрицы ковариаций \mathbf{Q}^* . Пусть соотношение между измеренными координатами x, y , стандартными координатами ξ, η и постоянными пластинки a_{ik} и b_{ik} выглядит:

$$\xi = \sum_{i,k} a_{ik} x^i y^k, \eta = \sum_{i,k} b_{ik} x^i y^k \quad (9)$$

(без учета уравнений блеска и цвета).

Систематическая погрешность-2

Поскольку формулы для обеих координат аналогичны, далее будем выписывать только формулы для ξ . Особенно нас интересует дисперсия стандартной координаты, задаваемая соотношением:

$$\text{Var}\xi \equiv Q_{\xi\xi} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right)^T \bar{\mathbf{Q}} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right) \quad (10)$$

где

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right)^T = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \xi}{\partial a_{11}}, \dots, \frac{\partial \xi}{\partial a_{ik}}, \dots \right),$$

а $\bar{\mathbf{Q}}$ — матрица ковариаций переменных (x, y, a_{11}, \dots) .

Систематическая погрешность-3

Измеренные координаты x и y не коррелируют ни друг с другом, ни с какой-либо из постоянных пластины a_{ik} . Если Q_{xx} и Q_{yy} являются дисперсиями измеренных координат x и y , соответственно, то $\bar{\mathbf{Q}}$ можно записать

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & Q_{yy} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где \mathbf{Q} — ковариационная матрица постоянных пластины a_{ik} поэтому мы можем записать (10)

$$Q_{\xi\xi} = \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 Q_{xx} + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 Q_{yy} + \left(\frac{\partial\xi}{\partial V}\right)^T \mathbf{Q} \left(\frac{\partial\xi}{\partial V}\right), \quad (12)$$

$$\text{где } \left(\frac{\partial\xi}{\partial V}\right)^T = \left(\frac{\partial\xi}{\partial a_{11}}, \frac{\partial\xi}{\partial a_{12}}, \dots, \frac{\partial\xi}{\partial a_{ik}}, \dots\right).$$

Систематическая погрешность-4

Первые два слагаемых в (12) — это часть дисперсии ξ , зависящая от погрешностей измерения x и y . Аналитические выражения для Q_{xx} и Q_{yy} в зависимости от координат изображений звезд на пластинке, интенсивности изображений (величины почернения) и других параметров могут быть получены.

- будем считать, что изучаемая область небесной сферы многократно сфотографирована, а поля пластинок перекрываются таким образом, что изображения одной звезды имеются не менее чем на двух пластинках с разными центрами.
- что постоянные для каждой пластинки и соответствующие им матрицы ковариаций определены в процессе редукции отдельного кадра.
- Допустим, что стандартные координаты на разных пластинках отнесены к одной и той же тангенциальной точке, так что измерения и постоянные пластинки на всех кадрах, где появляется звезда, дадут в отсутствие погрешностей идентичные стандартные координаты звезды.
- Наблюдаемые расхождения стандартных координат звезд, рассчитанных по измерениям на разных пластинках, частично обусловлены неизвестными дисперсиями измерений Q_{xx} и Q_{yy} , а частично — погрешностями постоянных пластинки.

Систематическая погрешность-5

- Вклад погрешностей постоянных пластинки можно оценить по (12), поскольку матрица ковариаций для них известна из процедуры редукции.
- Таким образом, каждое сравнение дает выборку для разностей положений звезды на разных пластинках. Эти выборки затем можно использовать для подгонки параметров аналитических представлений, принятых для Q_{xx} и Q_{yy} .
- В реальности эту процедуру впервые осуществил в 1962 году Стэндиш в своей дипломной работе, оценив точность координат звезд Северной Хайдарабадской зоны Астрографического Каталога в зависимости от их положения на пластинке и измеренного диаметра.

Аппроксимация матрицы нормальных уравнений

- Назовем сумму

$$\Sigma^2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial V} \right)^T \mathbf{Q} \left(\frac{\partial \xi}{\partial V} \right), \quad (13)$$

появившуюся в (12) и являющуюся вкладом погрешностей постоянных пластины в дисперсию стандартной координаты ξ , — «дисперсией постоянной пластины».

- Это слагаемое, естественно зависит от координат изображения данной звезды на фотопластинке.
- Если постоянные пластины были получены в результате реальной процедуры редукции, то матрица \mathbf{Q} будет известна. Отдельные случаи, однако, не дадут ответа на следующий общий вопрос:

При заданном уравнениями типа (9) преобразовании измеренных координат в идеальные — какова будет дисперсия постоянной пластины во всех точках этой фотопластинки?

Аппроксимация матрицы нормальных уравнений-2

- Чтобы ответить на этот вопрос строго, требуется знать распределение изображений звезд на пластинке, но это опять будет частным случаем.
- Предположив, однако, что плотность распределения звезд в кадре $\rho(x, y)$ известна, мы сможем обеспечить теоретические выражения для \mathbf{Q} .
- Для дальнейших выкладок предположим, что распределения звезд непрерывные и гладкие. В природе, конечно, дело обстоит не так, но как будет показано чуть позже, непрерывное распределение очень удобно для наших целей оценки погрешностей. И вполне состоятельно, если число звезд не слишком малó.
- Из уравнений (9) следует, что элементы обратной матрицы \mathbf{Q} (матрицы нормальных уравнений для определения a_{ik}) будут иметь вид:

Аппроксимация матрицы нормальных уравнений-3

$$\sum_r^{\text{весь кадр}} x_r^i y_r^k, \quad (14)$$

где (x_r, y_r) — измеренные координаты r -й звезды на пластинке. Согласно определению интеграла Римана получаем

$$\lim \sum_r^{\text{весь кадр}} x_r^i y_r^k = \iint_{\text{весь кадр}} \rho(x, y) x^i y^k dx dy. \quad (15)$$

если размер кадра $a \times b$, то число звезд в кадре n будет

$$n = \int_0^a \int_0^b \rho dx dy.$$

Ограничившись далее равномерным распределением звезд в кадре, когда плотность

$$\rho = \frac{n}{ab}$$

и

Аппроксимация матрицы нормальных уравнений-4

$$\begin{aligned} \sum_r x_r^i y_r^k &\cong \frac{n}{ab} \int_{-\frac{a}{2}(1+\alpha)}^{\frac{a}{2}(1-\alpha)} \int_{-\frac{b}{2}(1+\beta)}^{\frac{b}{2}(1-\beta)} x^i y^k dx dy = \\ &= \frac{a^i b^k n}{2^{i+k+2}(i+1)(k+1)} [(1-\alpha)^{i+1} + (-1)^i (1+\alpha)^{i+1}] \times \\ &\quad \times [(1-\beta)^{k+1} + (-1)^k (1+\beta)^{k+1}], \end{aligned} \quad (16)$$

где α и β (в единицах $a/2$ и $b/2$) — координаты тангенциальной точки относительно геометрического центра кадра, относительно которой в свою очередь отсчитываются стандартные координаты.

При исследовании областей, покрытых перекрывающимися пластинками может потребоваться аппроксимация интегралами сумм произведений, заданных в непрямоугольных областях. Это можно сделать, взяв в (16) интеграл по прямоугольной области, обрезая исходную прямыми линиями.

Обоснованность аппроксимации

- Аппроксимация интегралом (16) отличается от истинного элемента матрицы нормальных уравнений, поскольку опорные звезды расположены в кадре неравномерно, и не размазаны по полю зрения, а находятся в отдельных точках. Реальная погрешность непредсказуема, но ее величина может быть оценена в предположении случайного распределения опорных звезд.
- Погрешность, вызванную отличием суммы произведений от интеграла, можно рассчитать предположив, что звезды находятся в центрах ячеек прямоугольной сетки. Обозначим суммируемую функцию $f(x, y)$. Пусть 2ϕ и 2ψ — размеры ячейки по x и по y соответственно. Расположенная в центре (x_0, y_0) ячейки звезда обеспечит в результирующую сумму вклад $f(x_0, y_0)$. Аппроксимация этого слагаемого интегралом:

$$I(x_0, y_0) = \frac{1}{4\phi\psi} \int_{x_0-\phi}^{x_0+\phi} \int_{y_0-\psi}^{y_0+\psi} f(x, y) dx dy.$$

Для степенной функции $f(x, y) = x^i y^k$ получаем

$$I(x_0, y_0) = x_0^i y_0^k \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\nu+1} \binom{i}{2\nu} \left(\frac{\phi}{x_0}\right)^{2\nu} \right] \times \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\nu+1} \binom{k}{2\nu} \left(\frac{\psi}{y_0}\right)^{2\nu} \right] \quad (17)$$

Обоснованность аппроксимации-2

- Для целых i и k суммы в квадратных скобках конечны, первые слагаемые — единицы. Общее выражение для разности дискретной суммой и аппроксимирующим ее интегралом можно получить, вычтя $x_0^i y_0^k$ из $I(x_0, y_0)$ и проинтегрировав по x_0 и y_0 по всему кадру, используя n/ab для плотности и положив $\phi = \psi = 1/2(ab/n)$.
- По формуле (17) получается, что эта разность будет порядка квадрата среднего $\phi/2x_0$ и $\psi/2y_0$. Для пластинки 5 на 7 дюймов с изображением 35 звезд, первая величина = $1/7$, вторая = $1/5$, соответственно, квадраты их будут $1/49$ и $1/25$. В зависимости от i и k различие между суммой и интегралом не будет превышать 5 % величины. Отклонение распределения звезд от равномерного добавит ошибку примерно такого же порядка. Можно проверить это по реальным кадрам. При наличии 100 звезд отклонения будут менее 3%. Поэтому сумму можно заменить интегралом, не внося заметной ошибки.

Модели матрицы ковариаций

В формуле (12) дисперсия стандартной координаты $\text{Var}[\xi]$ выражается через дисперсии измеренных координат и через матрицу ковариаций постоянных пластинок. Далее рассмотрим матрицы ковариаций \mathbf{Q} , получающиеся для разных моделей (9) при предположениях, развитых в разделе 25. В любом случае элементы матрицы (сумма произведений, скобки Гаусса...), обратной к матрице ковариаций, рассчитываются по формулам (16). Обращение матрицы производится согласно очень удобной схеме, предложенной Василевским в 1940 году. Стандартные отклонения величин могут быть получены из элементов матрицы ковариаций по формуле:

$$\sigma_p = \sigma_1 \sqrt{Q_{pp}},$$

где σ_1 – ошибка единицы веса. Далее положим $\sigma_1 \triangleq 1$.

Модели матрицы ковариаций-2

Соотношение между измеренными и стандартными координатами на пластинке примем:

$$\begin{aligned}\xi &= Ax + By + C + px^2 + qxy + ry^2, \\ \eta &= A'x + B'y + C' + p'x^2 + q'xy + r'y^2.\end{aligned}$$

Пусть отсчет измеренных координат идет от начала $(\frac{1}{2}a\alpha, \frac{1}{2}b\beta)$, а n — число звезд на пластинке. Элементы матрицы ковариаций могут быть рассчитаны согласно (17), но выглядят достаточно громоздко (Эйхгорн, 1963). Рассмотрим несколько простейших случаев:

Четыре постоянные

$$\begin{aligned}\xi &= Ax + By + C, \\ \eta &= Ax - By + D.\end{aligned}$$

Элементы матрицы ковариаций для четырех неизвестных будут:

$$\begin{aligned}nQ_{AA} &= nQ_{BB} = \frac{12}{a^2 + b^2} \\ nQ_{CC} &= nQ_{DD} = 1.\end{aligned}$$

Модели матрицы ковариаций-3

Шесть постоянных и наклон пластинки

$$\begin{aligned}\xi &= Ax + By + C + px^2 + qxy, \\ \eta &= A'x + B'y + C' + pxy + qy^2.\end{aligned}$$

Ненулевые элементы матрицы ковариаций:

$$nQ_{AA} = nQ_{A'A'} = \frac{12}{a^2}, \quad nQ_{BB} = nQ_{B'B'} = \frac{12}{b^2} \quad (18)$$

как для «чистой» модели с шестью постоянными, плюс (из модели с четырьмя постоянными и наклоном):

$$nQ_{CC} = \frac{N}{K}, \quad nQ_{Cp} = -\frac{60}{K} \quad (19)$$

$$nQ_{pp} = \frac{720}{a^2K}, \quad nQ_{qq} = \frac{720}{b^2L}$$

а также:

$$nQ_{C'C'} = \frac{M}{L}, \quad nQ_{C'q} = -\frac{60}{L}, \quad (20)$$

где $K = 4a^2 + 5b^2$, $L = 5a^2 + 4b^2$, $M = 5a^2 + 9b^2$, $N = 9a^2 + 5b^2$.

Модели матрицы ковариаций-4

- Из анализа разных вариантов моделей очевидно, что когда ставится задача достижения нижнего предела ошибок постоянных пластины (т.е. максимально точное воспроизведение координат опорных звезд), лучшая в систематическом отношении точность может быть получена при исключении параметров дисторсии а также квадратичных членов из уравнений (9), даже когда их присутствие в (9) может значительно снизить случайные погрешности.
- Если квадрат остаточной невязки решения с проверяемым параметром модели и без него различается меньше, чем соответствующие дисперсии постоянных пластины, то такое слагаемое в модели следует отбросить и повторить редукцию без него.
- Видно, что соотношения получаются достаточно громоздкие. Поставим общий вопрос: когда следует вводить дополнительные параметры в редукционную формулу?
- Пусть $\xi = f(x, y, A', \dots, C')$ — результат редукции без, а $\xi = f(x, y, A, \dots, C, \alpha)$ — с использованием параметра α в модели. Также обозначим через σ_0^2 дисперсию единицы веса в модели без α , а σ_α^2 — дисперсию единицы веса в модели с α . Слагаемое должно быть оставлено в модели только если

Модели матрицы ковариаций-5

$$\frac{1}{ab} \iint_{\text{пластинка}}^{\text{вся}} [f(x, y, A, \dots, C, \alpha) - f(x, y, A, \dots, C)]^2 dx dy > \quad (21)$$
$$> n |\sigma_{\alpha}^2 \langle \Sigma_{\alpha}^2 \rangle - \sigma_0^2 \langle \Sigma^2 \rangle|,$$

где $\langle \Sigma^2 \rangle$ — осредненная по пластинке дисперсия постоянных.

- Критерий это легок в использовании и позволяет оценить, какое представление (9) наиболее адекватно. Он опирается на *осредненные* значения дисперсии постоянных пластинки.
- Критерий, основанный на *максимальном* значении дисперсии постоянных может быть разработан так же легко.
- Представленные модели не учитывали уравнений блеска и цвета. Обобщенные выражения должны в таких случаях включать функции распределения звездных величин и цветов.

Задания к семинару

- 1 Оценка обоснованности введения дополнительных параметров редуционной модели в методе перекрывающихся пластинок
- 2 Модели матрицы ковариаций оцениваемых параметров в простейших случаях
- 3 Стандартные требования к наблюдательному материалу

спасибо за внимание