ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

ENTANGLED

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Занятие 4

Гайер Алексей Вячеславович

Дифференциальные уравнения. Занятие 4. Функция и матрица Коши. Теория устойчивости

- Функция и матрица Коши
- Теория устойчивости
- Практика

1. Функция и матрица Коши.

Эта тема является, по сути, продолжением 2го семинара, где мы учились выписывать общее решение дифференциальных уравнений и систем линейных дифференциальных уравнений.

Давайте ещё раз вспомним, что общее решение любого уравнения (и систем уравнений) выписывается в виде суммы общего решения однородного уравнений и частного решения неоднородного:

$$y(x) = y_0(x) + y_r(x)$$

где $y(x), y_0(x), y_r(x)$ – общее решение уравнения, общее решение однородного уравнения и частное решение неоднородного уравнения соответственно.

Там же мы выяснили, как получать общее решение однородного уравнения, а также познакомились с двумя методами построения частного решения неоднородного уравнения – метод вариации постоянной (универсальный метод; его мы рассматривали и для систем уравнений) и метод подбора частного решения – вспоминаем таблицу из 2го занятия - на основе особого вида неоднородности (не универсальный метод, мы его не рассматривали для систем – хотя для них данный метод также может применяться).

Под словом «универсальный» здесь подразумевается полностью идентичный алгоритм действий для любого вида правой части уравнения $f(x)$.

В данной же теме мы познакомимся с ещё одним универсальным методом построения $y_r(x)$ – при помощи функции Коши (для систем уравнений – матрица Коши).

Давайте познакомимся с методом построения функции Коши на примере №67-68, затем убедимся на примере №69, что метод построения матрицы Коши аналогичен методу построения функции Коши – и перейдём к теории устойчивости.

Мы с вами, как и ранее, будем рассматривать линейное уравнение с постоянными коэффициентами вида:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots a_1 y' + a_0 y_0 = f(x)$$

Итак, функция Коши – это функция $K(t)$, с помощью которой для <u>любой</u> неоднородности $f(x)$ частное решение неоднородного уравнения запишется в виде:

$$y_r(x) = \int_{x_0}^{x} K(x-s)f(s)ds$$

Где x_0 – <u>произвольное</u> число. И это очень похоже на функцию Грина. Так и есть - функция Коши это некий аналог функции Грина.

А функция $K(t)$ удовлетворяет двум условиям:

1) $K(t)$ – решение однородного уравнения

2) $K(0) = K'(0) = \cdots = K^{(n-2)}(0) = 0; \quad K^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_n}$

Из этих условий появляется алгоритм построения функции Коши – выписываем общее решение однородного уравнения, а затем подставляем в условия 2) и находим подходящие значения констант C_i.

Однако возникает вопрос – чему брать равным x_0?

На самом деле, его можно брать любым числом – для разных x_0 мы будем лишь получать разные частные решения – в чём мы убедимся на примере.

Также обратите внимание: такое определение подходит только для уравнений с постоянными коэффициентами – в случае непостоянных коэффициентов (функции a_i зависят от x), функция Коши является функцией двух переменных $K(x, s)$.

Давайте попробуем ознакомиться с построением функции Коши на примере, а также с её помощью выпишем общее решение уравнения:

№67. $\mathbf{y^{(IV)} + y'' = x}$

В первую очередь, решаем однородное уравнение.

Выпишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + \lambda^2 = 0 \to \lambda_{1,2} = 0; \lambda_{3,4} = \pm i$$

Тогда общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$$y_0(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

Теперь чтобы получить общее решение уравнения, нам надо построить частное решение неоднородного уравнения – мы можем это делать как методом вариации постоянной, как и подбором вида неоднородности, однако в данном случае мы построим функцию Коши. Давайте искать её в виде:

$$K(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

Так как в таком виде эта функция – решение однородного уравнения (условие 1). Значения C_i определим из условий (условия 2):

$$\begin{cases} K(0) = C_1 + C_3 = 0 \\ K'(0) = C_2 + C_4 = 0 \\ K''(0) = -C_3 = 0. \\ K'''(0) = -C_4 = 1. \end{cases}$$

Откуда $C_1 = C_3 = 0;\ \ C_2 = 1; C_4 = -1$, то есть

$$K(x) = x - \sin x$$

А значит, теперь мы можем получить частное решение в виде:

$$y_r(x) = \int_{x_0}^{x} K(x-s)f(s)ds$$

Как говорилось ранее, x_0 – произвольное число. Убедимся, что мы получим лишь различные частные решения. Возьмём $x_0 = 0$:

$$y_r(x) = \int_0^x K(x-s)f(s)ds = \int_0^x \big((x-s) - \sin(x-s)\big)sds = \frac{1}{6}x(x^2-6) + \sin x$$

Легко убедиться, что $y_r^{(IV)} + y_r'' = x$, то есть $y_r(x)$ – частное решение. Если бы мы взяли $x_0 = 1$:

$$y_r^{(1)}(x) = \int_1^x \big((x-s) - \sin(x-s)\big)sds = \frac{1}{6}(x^3 - 9x - 6\sin(1-x) + 6\cos(1-x) + 2)$$

Также легко убедиться, что ${y^{(1)}}_r^{(IV)} + {y^{(1)}}_r'' = x$, то есть $y_r^{(1)}(x)$ – другое частное решение, однако выражение чуть усложнилось. Итак, мы получили общее решение и функцию Коши:

Ответ: $K(t) = t - \sin t$, $y(x) = C_1 + C_2 x + C_3\cos x + C_4 \sin x + \frac{1}{6}x(x^2-6) + \sin x$, $C_1, C_2, C_3, C_4 \in R$

Замечание: обратите внимание, что в решении мы можем перегруппировать слагаемые и переобозначив $\widetilde{C_2} = C_2 - 1;\ \widetilde{C_4} = C_4 + 1$, ответ может быть записан в виде:

$$y(x) = C_1 + \widetilde{C_2}x + C_3 \cos x + \widetilde{C_4} \sin x + \frac{x^3}{6}$$

К такому же результату мы пришли, если бы сразу искали бы неоднородное решение в виде (первая строчка таблицы из семинара 2, так как мы имеем нулевой корень характеристического уравнения кратности $s = 2$):

$$y_r(x) = x^s P_1(x) = x^2(Ax + B)$$

где $P_n(x)$ – полином степени n.

Давайте закрепим №68:

№68. $\mathbf{y^{(IV)} - y'' = x^2}$

Для этого уравнения общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$$y_0(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-x}$$

Функцию Коши ищем в виде:

$$K(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-x}$$

А коэффициенты C_i определим из условий:

$$\begin{cases} K(0) = C_1 + C_3 + C_4 = 0 \\ K'(0) = C_2 + C_3 - C_4 = 0 \\ K''(0) = C_3 + C_4 = 0. \\ K'''(0) = C_3 - C_4 = 1. \end{cases}$$

Откуда $C_3 = \frac{1}{2}; C_4 = -\frac{1}{2}; C_1 = 0; C_2 = -1$ и записываем функцию Коши:

$$K(x) = -x + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x - x$$

И теперь мы готовы выписать выражение для частного решения (возьмём $x_0 = 0$):

$$y_r(x) = \int_0^x K(x-s)f(s)ds = \int_0^x (\sinh(x-s) - (x-s))s^2 ds = -\frac{x^4}{12} - x^2 + e^x + e^{-x} - 2$$

Итак, мы получили общее решение и функцию Коши:

Ответ: $K(t) = \sinh t - t$, $y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-x} - \frac{x^4}{12} - x^2 + e^x + e^{-x} - 2$,
$C_1, C_2, C_3, C_4 \in R$

<u>Замечание:</u> вновь, мы могли бы записать общее решение более лаконично, переобозначив:

$$\widetilde{C_1} = C_1 - 2;\ \ \widetilde{C_3} = C_3 + 1, \widetilde{C_4} = C_4 + 1$$

И тогда ответ получится в виде:

$$y(x) = \widetilde{C_1} + C_2 x + \widetilde{C_3} e^x + \widetilde{C_4} e^{-x} - \frac{x^4}{12} - x^2$$

Давайте теперь посмотрим, что будет в системах уравнений. Сейчас нам будет проще воспользоваться матричным представлением системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + f_1(t) \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + f_2(t) \end{cases} \leftrightarrow \dot{X} = AX + F$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}.$

Общее решение такой системы будет иметь вид:

$$X(t) = X_0(t) + X_r(t)$$

где $X(t), X_0(t), X_r(t)$ – общее решение системы, общее решение однородной системы и частное решение неоднородной системы соответственно.

С методами построения $X_0(t)$ мы с вами познакомились в семинаре 2, а также познакомились с методом построения $X_r(t)$ методом вариации постоянной – теперь же давайте познакомимся с методом построения $X_r(t)$ при помощи матрицы Коши.

Также, как и в случае с уравнениями, одно из частных решения системы будет иметь вид:

$$X_r(t) = \int_{t_0}^{t} K(t-s)F(s)ds$$

где $K(t-s)$ – матрица Коши размера $n \times n$ (n – число уравнений в системе), удовлетворяющая условиям:

1) $\dot{K} = AK$ 2) $K(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Откуда вытекает алгоритм нахождения матрицы Коши сначала мы находим общее решение однородной системы:

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} x_0(t, C_1, C_2) \\ y_0(t, C_1, C_2) \end{pmatrix}$$

здесь для удобства явным образом выписана зависимость решения однородной системы от констант C_1, C_2. А далее ищем матрицу Коши в виде (так как каждый столбец вида X_0 с произвольными константами – есть решение однородной системы, а значит такой вид матрицы Коши удовлетворит первому условию):

$$K(t) = \begin{pmatrix} x_0(t, C_1, C_2) & x_0(t, C_3, C_4) \\ y_0(t, C_1, C_2) & y_0(t, C_3, C_4) \end{pmatrix}$$

И далее из условия $K(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ находим C_1, C_2, C_3, C_4.

В качестве замечания лишь остаётся отметить, что если же перед нами будет стоять задача Коши:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + F \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

то её решение запишется в виде:

$$X(t) = K(t - t_0)X_0 + \int_{t_0}^{t} K(t - s)F(s)ds$$

Давайте отработаем на примере №69!

№69. $\begin{cases} \mathbf{\dot{x} = x - 2y + 1}, & \mathbf{x(0) = 0} \\ \mathbf{\dot{y} = x - y}, & \mathbf{y(0) = 1} \end{cases}$

В первую очередь разберемся с обозначениями в матричном виде:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t_0 = 0$$

Убедитесь самостоятельно (используя материалы семинара 2), что решение однородной системы можно записать в виде:

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1(\cos t + \sin t) + C_2(\cos t - \sin t) \\ C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{pmatrix}$$

А значит, матрицу Коши ищем в виде:

$$K(t) = \begin{pmatrix} C_1(\cos t + \sin t) + C_2(\cos t - \sin t) & C_3(\cos t + \sin t) + C_4(\cos t - \sin t) \\ C_1 \sin t + C_2 \cos t & C_3 \sin t + C_4 \cos t \end{pmatrix}$$

Находим C_1, C_2, C_3, C_4 из условия 2:

$$K(0) = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 & C_3 + C_4 \\ C_2 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_2 = 0 \\ C_3 + C_4 = 0 \\ C_4 = 1 \end{cases} \to \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = -1 \\ C_4 = 1 \end{cases}$$

И записываем матрицу Коши:

$$K(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & -2\sin t \\ \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

И теперь мы готовы записать ответ задачи:

$$X(t) = K(t - t_0)X_0 + \int_{t_0}^{t} K(t - s)F(s)ds$$

Выполним вычисления, входящие в эту формулу:

$$\mathrm{K}(\mathrm{t}-\mathrm{t}_0)\mathrm{X}_0=\mathrm{K}(\mathrm{t})\mathrm{X}_0=\begin{pmatrix}\cos\mathrm{t}+\sin\mathrm{t} & -2\sin\mathrm{t}\\ \sin\mathrm{t} & \cos\mathrm{t}-\sin\mathrm{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\sin\mathrm{t}\\ \cos\mathrm{t}-\sin\mathrm{t}\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{K}(\mathrm{t}-\mathrm{s})\mathrm{F}(\mathrm{s})=\begin{pmatrix}\cos(\mathrm{t}-\mathrm{s})+\sin(\mathrm{t}-\mathrm{s}) & -2\sin(\mathrm{t}-\mathrm{s})\\ \sin(\mathrm{t}-\mathrm{s}) & \cos(\mathrm{t}-\mathrm{s})-\sin(\mathrm{t}-\mathrm{s})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(\mathrm{t}-\mathrm{s})+\sin(\mathrm{t}-\mathrm{s})\\ \sin(\mathrm{t}-\mathrm{s})\end{pmatrix}$$

Теперь выполним интегрирование – просто интегрируем верхнюю и нижнюю строки отдельно:

$$\int_{t_0}^{t} K(t-s)F(s)ds = \int_{0}^{t} \begin{pmatrix} \cos(t-s) + \sin(t-s) \\ \sin(t-s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \sin t - \cos t + 1 \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$$

И записываем ответ:

$$X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t - \cos t + 1 \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$$

Ответ: $K(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & -2\sin t \\ \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}$, $\begin{cases} x(t) = 1 - \sin t - \cos t \\ y(t) = 1 - \sin t \end{cases}$

Замечание: методы решения задач при помощи построения функции/матрицы Коши относятся к универсальным методам – это означает, что при помощи этих методов принципиально возможно решить любое уравнение.

Однако в каждом конкретном случае тот или иной метод может существенно упростить решение задачи, так как хоть метод и является универсальным, простоту вычислений нам никто не гарантирует.

А мы с вами переходим ко второй части!

2. Теория устойчивости

Начнём с рассмотрения автономных (то есть таких уравнений, в которых аргумент не входит явным образом – например, $y' = \sin y$) уравнений 1го порядка:

$$y' = f(y)$$

Понятно, что если же мы найдем точки y_0, где $f(y_0) = 0$ (решений этого уравнения может быть несколько, как, например, в случае $f(y) = \sin y$), то функции вида $y(x) = y_0 = \mathrm{const}$ – решения исходного уравнения (такие решения будем называть положениями равновесия).

Давайте сформулируем следующее определение относительно таких решений – положений равновесия:

Определение. Положение равновесия y_0 будем называть устойчивым, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что для любого другого решения уравнения $y(x)$ такого, что $|y(0) - y_0| < \delta$ следует, что $\forall x$: $|y(x) - y_0| < \varepsilon$.

Попробуем осознать такое определение с физической точки зрения.

Если представить, что уравнение описывает эволюцию нашей системы во времени, то проиллюстрировать устойчивое положение равновесия можно следующим образом: представим себе мячик, который может перемещаться под действием силы тяжести около дна ямы.

Очевидно, что если же в начальный момент времени он находится на дне ямы, то и далее он будет находиться на дне ямы – положение равновесия $y(t) = y_0$.

Если же мы в начальный момент времени положим мяч не на дно ямы, а немного отклонив $y(0) = y_0 + \delta$ – то мячик будет колебаться у положения равновесия, и мы сможем найти такое ε, что во все последующие моменты времени мяч будет находиться в ε-окрестности положения равновесия: $|y(t) - y_0| < \varepsilon$.

То есть дно ямы – устойчивое положение равновесия.

Напротив, если же мы рассмотрим самую высокую точки горки – то да, если же мы положим мяч на вершину горки, то он будет оставаться там сколь угодно долго.

Однако, если же мы положим мяч чуть в отдалении вершину горки – то мяч укатится очень далеко от горки – а значит, вершина горки – неустойчивое положение равновесия.

Даже из такого простого примера становится очевидной необходимость анализа физических систем на характер их положения равновесия.

Широкое применение получил анализ устойчивости по первому приближению. Суть его в следующем - рассмотрим уравнение:

$$y' = f(y)$$

Пусть мы нашли y_0 (как решение уравнения $f(y) = 0$) – положение равновесия, и далее мы хотим проанализировать устойчивость положения равновесия. Рассмотрим задачу с дополнительным начальным условием: нам задано $y(0)$. Пусть $f(y)$ дифференцируема в точке y_0.

Тогда:

$$f(y) = f(y_0) + f'(y_0)u + o(u)$$

И из определения y_0: $f(y_0) = 0$, $u' = (y - y_0)' = y'$, переобозначим $f'(y_0) = \lambda$.
Тогда подставим в исходное уравнение:

$$u' = \lambda u + o(u) \to u(x) = u(0)e^{\lambda x} \to y(x) = y_0 + (y(0) - y_0)e^{\lambda x}$$

Где мы пренебрегли малым членом $o(u)$. Теперь очевидно, что положение равновесия будет устойчивым, если $\lambda < 0$:

Для $\forall\varepsilon$ возьмём $\delta = \varepsilon$; тогда для $\forall y(0)$ такого, что $|y(0) - y_0| < \delta = \varepsilon$ следует, что:

$$|y(x) - y_0| = \left|(y(0) - y_0)e^{\lambda x}\right| \le |y(0) - y_0| < \varepsilon$$

То есть решение является устойчивым по определению. Отсюда же понятно, что для $\lambda > 0$ – положение равновесия является неустойчивым. При $\lambda = 0$ мы ничего не можем сказать про характер устойчивости – разложение функции $f(y)$ в ряд Тейлора нужно продолжать до членов более высокого порядка малости.

Таким образом, алгоритм поиска положения равновесия и анализа их устойчивости может быть следующим:

Ищем положения равновесия $f(y_0) = 0$ – их может быть несколько.

Смотрим знак $f'(y_0)$ – если $f'(y_0) > 0$, то положение равновесия неустойчиво, если $f'(y_0) < 0$ – устойчиво.

То есть всё довольно просто!

Попробуем на примере:

№70. $\mathbf{y' = \sin y}$

Ищем положения равновесия:

$$\sin y = 0 \to y_n = \pi n$$

Смотрим знак производной:

$$f'(y_n) = \cos \pi n = (-1)^n$$

То есть, для чётных n имеем $f(y'_{2k}) = 1 \to y_k = 2\pi k$ – положения равновесия неустойчивы.

Для нечётных: $f(y'_{2k+1}) = 1$ $y_k = 2\pi k + \pi$ – положения равновесия устойчивы.

И это всё!

Однако рассмотренный пример поможет нам понять порядок действий для систем автономных дифференциальных уравнений 1го порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

Чтобы найти положения равновесия (x_0, y_0), нам необходимо решить систему

$$\begin{cases} f(x_0, y_0) = 0 \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases}.$$

Абсолютно аналогично формулируется определение устойчивости положения равновесия (см. лекции), но суть определения остаётся той же (вспоминаем пример с горкой, но теперь неодномерный, а многомерный).

Рассмотрим систему в окрестности положения равновесия и введём отклонения от положения равновесия

$u = x - x_0; v = y - y_0$:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)u + f_y(x_0, y_0)v + o\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)$$

$$g(x, y) = g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)u + g_y(x_0, y_0)v + o\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)$$

Пренебрегая малым членом $o\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)$ и учтя, что $\dot{x} = \dot{u}, \dot{y} = \dot{v}$, а также $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$, и переобозначив $f_x(x_0, y_0) = a_{11}, f_y(x_0, y_0) = a_{12}, g_x(x_0, y_0) = a_{21}, a_{22} = g_y(x_0, y_0)$:

$$\begin{cases} \dot{u} = a_{11}u + a_{12}v \\ \dot{v} = a_{21}u + a_{22}v \end{cases}$$

Ещё эту процедуру – перехода от системы с функциями f, g к системе с матрицей A – называют <u>линеаризацией</u> системы в окрестности положения равновесия.

А далее решения будут являться суперпозицией $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ – где $\lambda_{1,2}$ – собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

И вновь, если же оба $\lambda_{1,2} < 0$ – то положение равновесия устойчиво.

В противном случае (если хотя бы одна из $\lambda_{1,2} > 0$) – то положение равновесия неустойчиво.

Однако в случае систем уравнений положения равновесия также ещё и классифицируют по следующему:

1) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ – устойчивый узел

2) $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ – неустойчивый узел

3) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ – седло (или наоборот, главное собственные значения действительные и разных знаков)

4) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta, \alpha < 0$ – устойчивый фокус

5) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta, \alpha > 0$ – неустойчивый фокус

6) $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\beta$ – центр.

Данное положение равновесия устойчиво, но не асимптотически (остальные были устойчивы ещё и асимптотически!).

Определение. Положение равновесия y_0 будем называть асимптотически устойчивым, если оно устойчиво, то есть если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ такое, что для любого другого решения уравнения $y(x)$ такого, что $|y(0) - y_0| < \delta$ следует, что $\forall x \colon |y(x) - y_0| < \varepsilon$, а также справедливо соотношение: $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = y_0$.

Замечание: в данной работе мы рассматриваем только автономные системы (то есть правые части не зависят от аргумента x), поэтому положения равновесия у нас константы $y_0 = \text{const}$.

В случае, если же правые части зависели от аргумента x, то и y_0 может зависеть от x – однако в задачах общего зачёта нам представлены только автономные системы.

Аналогично даётся определение асимптотической устойчивости и для случая системы уравнений.

Давайте потренируемся в определении типа положений равновесия!

№71. $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x^2 - y} \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{\ln\left(3x^2 - 1\right) - \ln 2} \end{cases}$

Ищем точки покоя:

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ \ln(3x^2 - 1) - \ln 2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_0 = \pm 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

То есть в нашем случае мы имеем два положения равновесия системы.

Ещё раз подчеркнём: важно искать точки покоя в исходной системе, а не в линеаризованной!

Проанализируем первое из них $x_0 = 1, y_0 = 1$.

Переобозначим $u = x - 1, v = y - 1$ и раскладываем правые части по формулам:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)u + f_y(x_0,y_0)v + o\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)$$
$$g(x,y) = g(x_0,y_0) + g_x(x_0,y_0)u + g_y(x_0,y_0)v + o\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)$$

Тогда получим:

$$x^2 - y = 2u - v + o\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)$$
$$\ln(3x^2 - 1) - \ln 2 = 3u + o\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)$$

И ищем собственные значения для линеаризованной системы (пренебрегая членами «о-малое»):

$$\begin{cases} \dot{u} = 2u - v \\ \dot{v} = 3u \end{cases}$$

Собственные значения: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \to \lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{2}$.

То есть точка $(1,1)$ является неустойчивым фокусом.

Рассматриваем вторую точку: $x_0 = -1, y_0 = 1$.

Переобозначим $u = x + 1, v = y - 1$:

$$x^2 - y = -2u - v + o\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)$$
$$\ln(3x^2 - 1) - \ln 2 = -3u + o\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)$$

И ищем собственные значения для следующей системы:

$$\begin{cases} \dot{u} = -2u - v \\ \dot{v} = -3u \end{cases}$$

Собственные значения: $\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda_1 = -3, ; \lambda_2 = 1$.

То есть точка $(-1,1)$ является седлом (неустойчивое положение равновесия, так как одно из собственных значений положительно).

Ответ: $(x_0, y_0) = (1,1)$ – неустойчивый фокус, $(x_0, y_0) = (-1,1)$ – седло (неустойчивое положение равновесия).

Закрепим!

№74. $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{ln}(\mathbf{2} - \mathbf{y}^{\mathbf{2}}) \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{e}^{\mathbf{x}} - \mathbf{1}. \end{cases}$

Ищем точки покоя:

$$\begin{cases} \ln(2 - y^2) = 0 \\ e^x - 1 = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = \pm 1 \end{cases}$$

То есть в нашем случае мы имеем две точки покоя системы. Проанализируем первую из них $x_0 = 0, y_0 = 1$.

Переобозначим $u = x, v = y - 1$:

$$\ln(2 - y^2) = -2v + o\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)$$
$$e^x - 1 = u + o\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)$$

И ищем собственные значения для следующей системы:

$$\begin{cases} \dot{u} = -2v \\ \dot{v} = u \end{cases}$$

Собственные значения: $\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$.

То есть точка $(0,1)$ является центром – устойчивое положение равновесия, но не асимптотически.

Рассматриваем вторую точку: $x_0 = 0, y_0 = -1$.

Переобозначим $u = x, v = y + 1$:

$$\ln(2 - y^2) = 2v + o\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)$$

$$e^x - 1 = u + o\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)$$

И ищем собственные значения для следующей системы:

$$\begin{cases} \dot{u} = 2v \\ \dot{v} = u \end{cases}$$

Собственные значения: $\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. То есть точка $(0,-1)$ является седлом (неустойчивое положение равновесия).

Ответ: $(x_0, y_0) = (0,1)$ – центр, $(x_0, y_0) = (0,-1)$ – седло.

В качестве замечания нужно сказать, что дифференциальное уравнение любого порядка можно свести к системе уравнений с соответствующим количеством уравнений.

Например, уравнение $y'' + \sin y = 0$ можно свести к системе путём замены $z(x) = y'(x)$:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -\sin y \end{cases}$$

А значит, уравнение любого порядка можно анализировать теми же методами, что были изложены выше.

И в завершении мы с вами познакомимся с анализом решения систем на фазовой плоскости. Такой анализ получил широкое распространение во многих областях физики – теории колебаний, нелинейной динамике и так далее.

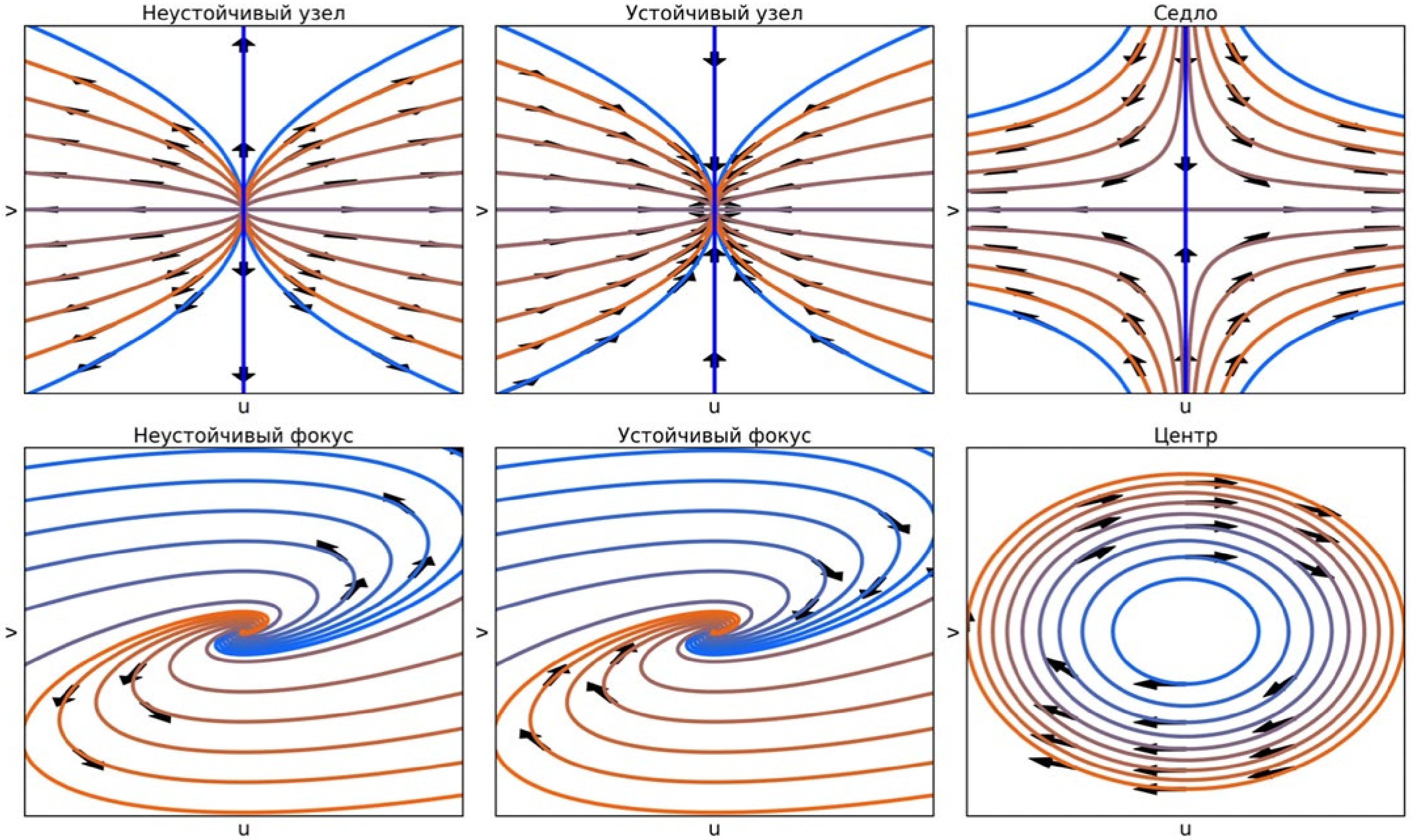
Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

Каждое решение $x(t), y(t)$ задаёт некую кривую $y(x)$, заданную параметрически. Совокупность всех таких кривых, являющихся решениями системы, называют фазовым портретом.

В любой точке фазовой плоскости (плоскости Oxy) мы можем изобразить вектор $\{\dot{x}, \dot{y}\}$, физический смысл которого – вектор скорости. Этот вектор также указывает, в каком направлении будет эволюционировать система в дальнейший момент времени, если в текущий момент времени она находится в точке (x, y).

У каждой из 6ти типов точек покоя, указанных выше, есть свой характерный фазовый портрет (в линеаризованных координатах u, v), который указан на рисунке ниже:



Обратите внимание – устойчивый фокус/узел отличается от неустойчивого направлением стрелок – векторов $\{\dot{u}, \dot{v}\}$!

Такой анализ позволяет предсказать качественно поведение системы в зависимости от начальных условий – стрелки показывают, в каком направлении будет эволюционировать система в последующие моменты времени.

Так, например, ставшим известным «эффект бабочки» назван так ровно потому, что фазовый портрет одной из систем напоминает расправленные крылья бабочки.

Здесь мы должны отвлечься от ставшим научно-популярным эффекта бабочки и вернуться к анализу задач из списка задач к общему зачёту – однако заинтересовавшиеся могут посмотреть, например видео по ссылкам: https://youtu.be/fDek6cYijxI, https://youtu.be/ovJcsL7vyrk.

Давайте попробуем проанализировать фазовый портрет на примере №76:

№76. $\mathbf{y'' + \sin y = 0}$

Как уже писали выше, сведём это уравнение к системе:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -\sin y \end{cases}$$

И попробуем её проанализировать. Точки покоя $z_0 = 0, y_0 = \pi n$. Выясним их характер – выполним линеаризацию системы в окрестности положения равновесия. Вводя $u = y - \pi n, v = z$:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = (-1)^{n-1} u \end{cases}$$

Собственные значения: $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ (-1)^{n-1} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \to \lambda_{1,2} = \begin{cases} \pm i, & n = 2k. \\ \pm 1, & n = 2k+1 \end{cases}$

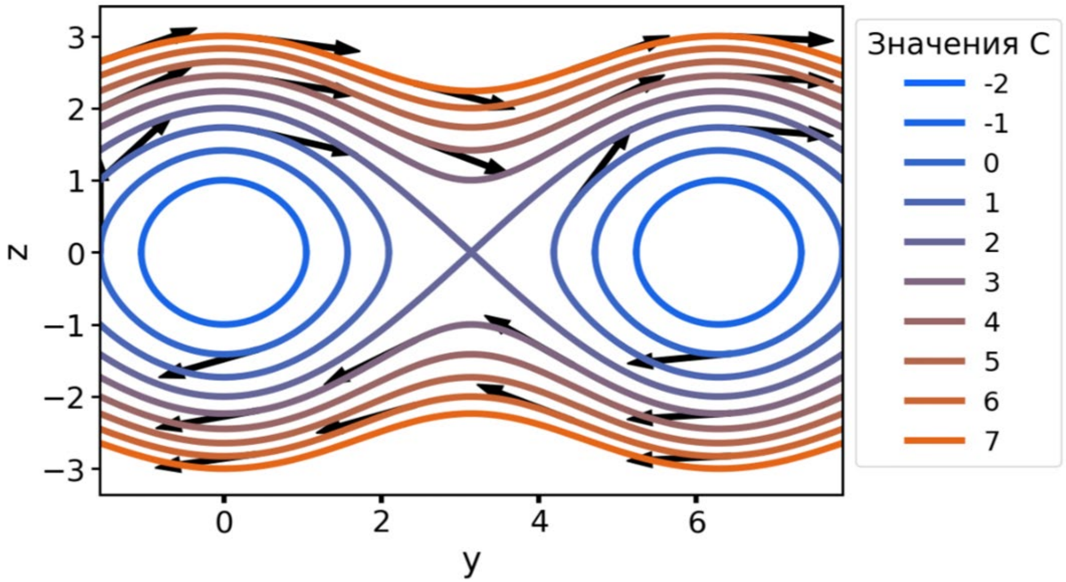
А значит, мы будем иметь череду центров (устойчивых положений) и сёдел (неустойчивое положение) с периодом 2π. Давайте изобразим фазовый портрет на промежутке $[-\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}]$.

Для этого поделим второе уравнение исходной системы на первое (при этом делении мы теряем решения – положения равновесия, но мы их нашли ранее):

$$\frac{z'}{y'} = -\frac{\sin y}{z} \to \frac{dz}{dy} = -\frac{\sin y}{dz} \to z^2 = 2\cos y + C$$

Где первый переход был проделан при помощи формулы производной функции, заданной параметрически. Это и есть уравнение для определения фазовых траекторий.

Во-первых, очевидно, что если же $C < -2$ – то решений и вовсе нет; это означает. Попробуем изобразить решения при разных C:



Здесь как раз становится явно видно чередование центров и сёдел – центры при $y = 0, y = 2\pi$ и седла при $y = \pi$.

Ответ: $(y_0, z_0) = (2\pi k, 0)$ – центр (устойчивое положение равновесия); $(y_0, z_0) = (2\pi k + \pi, 0)$ – седло (неустойчивое положение), $k \in Z$.

Замечание: стрелки на графике были определены следующим образом: для данной точки (y, z) вычислялся вектор $\{y', z'\}$ и откладывался в виде стрелки.

№77. $\mathbf{y''=y(1-y)}$

Приводим уравнение к системе:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y(1-y) \end{cases}$$

И определяем положения равновесия: $\begin{cases} z_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}, \begin{cases} z_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases}.$

Рассмотрим первое из них. Линеаризованная система будет иметь вид – в данном случае можем даже не переобозначать на привычные u, v и оставить переменные так, как они есть (замена $u = y, v = z$ не имеет смысла):

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

И эта точка покоя, очевидно, седло ($\lambda_{1,2} = \pm 1$).

Рассмотрим вторую точку покоя – линеаризованная система ($u = y - 1, v = z$):

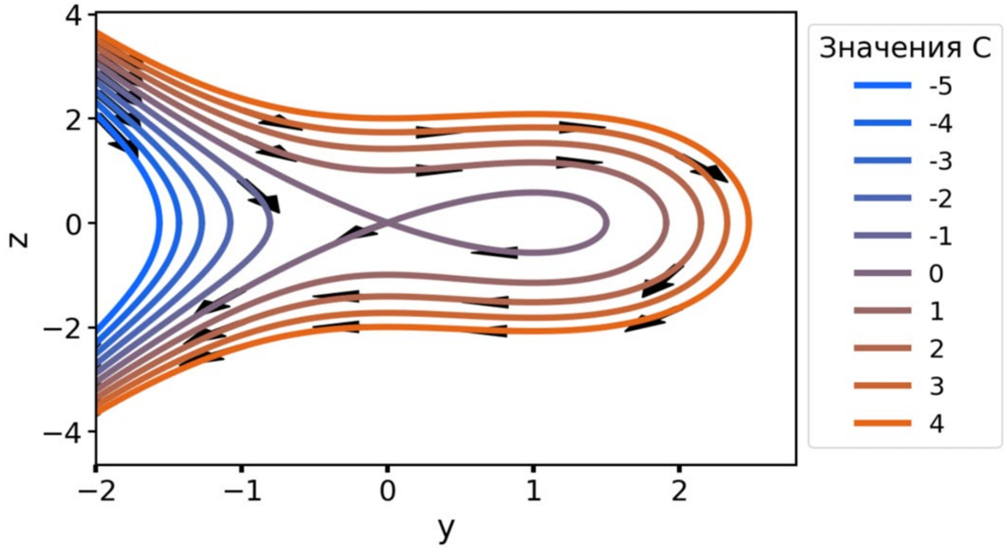
$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -u \end{cases}$$

А эта точка, очевидно, центр ($\lambda_{1,2} = \pm i$).

Получим уравнение для прорисовки фазового портрета:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y(1-y)}{z} \to z^2 = y^2 - \frac{2y^3}{3} + C$$

Рассмотрим эту функцию на отрезке, содержащем обе точки покоя – например, на отрезке $[-2, 3]$. Эта функция для разных C:



Ответ: $(y_0, z_0) = (0, 0)$ – седло (неустойчивое положение равновесия); $(y_0, z_0) = (1,0)$ – центр (устойчивое положение)

Используя фазовый портрет, можно установить примерный характер решения задачи в зависимости от начальных условий, не получая общее решение – достаточно лишь взглянуть на нужную точку на фазовой плоскости.

И закрепим финальным номером:

№78. $\mathbf{y''=y^3-y}$

Приводим уравнение к системе:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y^3 - y \end{cases}$$

И определяем положения равновесия: $\begin{cases} z_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}, \begin{cases} z_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases}, \begin{cases} z_0 = 0 \\ y_0 = -1 \end{cases}.$

Рассмотрим первое из них. Линеаризованная система будет иметь вид:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -y \end{cases}$$

И эта точка покоя, очевидно, центр $(\lambda_{1,2} = \pm i)$. Рассмотрим вторую и третью точку покоя (для третьей точки покоя вычисления полностью аналогичны) линеаризованная система $(u = y \pm 1, v = z)$:

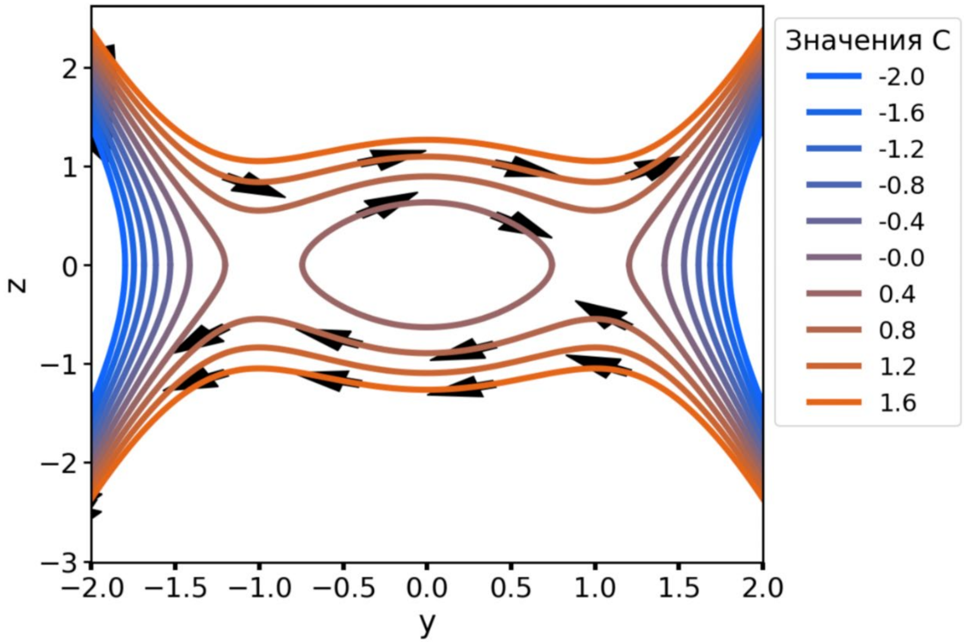
$$\begin{cases} u' = v \\ v' = 2u \end{cases}$$

И эти точки, очевидно, сёдла $(\lambda_{1,2} = \pm 1)$.

Получим функцию для фазового портрета:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y^3 - y}{z} \rightarrow z^2 = \frac{y^4}{2} - y^2 + C$$

Рассмотрим эту функцию на отрезке, содержащем все точки покоя – например, на отрезке $[-3, 3]$. Эта функция для разных C:



Ответ: $(y_0, z_0) = (\pm 1, 0)$ – седла (неустойчивые положения равновесия); $(y_0, z_0) = (0{,}0)$ – центр (устойчивое положение)

И на этом мы будем заканчивать наш обзор!

В приложении здесь останутся краткие решения оставшихся номеров: №72-73, 75.

Попробуйте решить самостоятельно!

А также напоминаем: если же появляется желание отработать тему большим количеством примеров – Вы всегда можете обратиться, например, к задачнику Филиппова (или к своим семинаристам ☺).

Успехов!

3. Практика

№72. $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{1 - 2x - y^2} \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{e^{-4x} - 1}. \end{cases}$

Ищем точки покоя:

$$\begin{cases} 1 - 2x - y^2 = 0 \\ e^{-4x} - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = \pm 1 \end{cases}$$

То есть в нашем случае мы имеем два положения равновесия системы. Проанализируем первое из них $x_0 = 0, y_0 = 1$.

Переобозначим $u = x, v = y - 1$ и получим линеаризованную систему:

$$\begin{cases} \dot{u} = -2u - 2v \\ \dot{v} = -4u \end{cases}$$

Собственные значения: $\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = 2$. То есть точка $(0,1)$ является седлом.

Анализируем второе положение равновесия:

$x_0 = 0, y_0 = -1.$

Переобозначим $u = x, v = y + 1$ и получим линеаризованную систему:

$$\begin{cases} \dot{u} = -2u + 2v \\ \dot{v} = -4u \end{cases}$$

Собственные значения: $\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \to \lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{7}.$

То есть точка $(0, -1)$ является устойчивым фокусом.

Ответ: $(x_0, y_0) = (0,1)$ – седло (неустойчивое положение равновесия),
$(x_0, y_0) = (0, -1)$ – устойчивый фокус.

№73. $\begin{cases} \dot{x} = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y} \\ \dot{y} = xy - 1 \end{cases}$

Ищем точки покоя:

$$\begin{cases} 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

То есть в нашем случае мы имеем лишь одно положение равновесия системы.

Проанализируем его -$x_0 = 1, y_0 = 1$. Переобозначим $u = x - 1, v = y - 1$ и получим линеаризованную систему:

$$\begin{cases} \dot{u} = u - v \\ \dot{v} = u + v \end{cases}$$

Собственные значения: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm i$.

То есть точка $(1,1)$ является неустойчивым фокусом.

Ответ: $(x_0, y_0) = (1,1)$ – неустойчивый фокус

№75. $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{e^x - e^{-y}} \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{x(y+2)} \end{cases}$

Ищем точки покоя:

$$\begin{cases} e^x - e^{-y} = 0 \\ x(y+2) \ = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -2 \end{cases}$$

То есть в нашем случае мы имеем два положения равновесия системы. Проанализируем первое из них $x_0 = 0, y_0 = 0$. Линеаризованная система:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 2x \end{cases}$$

Собственные значения: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1.$

То есть точка $(0,0)$ является седлом.

Анализируем второе положение равновесия: $x_0 = 2, y_0 = -2$. Переобозначим $u = x + 2, v = y + 2$ и получим линеаризованную систему:

$$\begin{cases} \dot{u} = e^2 u + e^2 v \\ \dot{v} = 2v \end{cases}$$

Собственные значения: $\begin{vmatrix} e^2 - \lambda & e^2 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \to \lambda_1 = 2, \lambda_2 = e^2$.

То есть точка $(2, -2)$ является неустойчивым узлом.

Ответ: $(x_0, y_0) = (0,0)$ – седло (неустойчивое положение равновесия), $(x_0, y_0) = (2, -2)$ – неустойчивый узел.