ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

ENTANGLED

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Занятие 1

Гайер Алексей Вячеславович

Дифференциальные уравнения. Занятие 1. Уравнения первой степени

- Уравнения, сводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными.
- Однородные уравнения.
- Дробно-линейные уравнения
- Линейные уравнения
- Уравнения Бернулли
- Интегрирующий множитель
- Замена y=z^m
- Уравнения, не разрешённые относительно старшей производной
- Исследование особенностей семейства решений уравнений.
- Практика

Уравнения первой степени

В первой части видео мы займёмся уравнениями, в которых максимальный порядок производной равен единице.

Это, на самом деле, почти самые сложные уравнения из курса, хотя бы по причине того, что разновидностей уравнений довольно много.

Но обо всём по порядку!

1. Уравнения, сводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными.

Уж совсем простых уравнений, где переменные просто делятся, мы разбирать не будем – и двинемся уже к более сложным задачам. Самый первый вид уравнений – это уравнения, сводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными.

Например, №1

№1. $\mathbf{y' = cos(y - x)} \quad (1)$

Здесь явно бросается аргумент косинуса – его и заменим новой функцией $z(x) = y(x) - x$. Тогда $z'(x) = y'(x) - 1 \rightarrow y' = z' + 1$. Выполним подстановку этих выражений в исходное уравнение (1):

$$z' + 1 = \cos z$$

В этом уравнении переменные легко делятся:

$$\frac{dz}{\cos z - 1} = dx \quad (2)$$

Однако! Каждый раз, когда происходит деление, необходимо проверять корректность деления (на нуль делить всё ещё нельзя) – в противном случае, мы можем потерять решения исходного уравнения:

$$\cos z = 1 \rightarrow z_k = 2\pi k \rightarrow y_k(x) = x + 2\pi k; k \in Z$$

№1. $\mathbf{y}' = \mathbf{cos}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad (1)$

Очевидно, что каждая из этих функций является решением уравнения (1), в чём легко убедиться прямой подстановкой:

$$(x + 2\pi k)' = \cos\big(y - (x + 2\pi k)\big)$$
$$1 = \cos 2\pi k$$

Что является верным равенством. То есть $y_k(x) = x + 2\pi k$ – решения уравнения, которые не стоит терять!

<u>Важно!</u> Проверка осуществляется подстановкой в исходное уравнение, никак не преобразованное.

Проинтегрируем уравнение (2):

$$\int \frac{dz}{\cos z - 1} = x + C_1; C_1 \in R$$

№1. $\mathbf{y' = cos(y - x)} \quad (1)$

Возьмём интеграл в правой части:

$$\int \frac{\mathrm{dz}}{\cos \mathrm{z} - 1} = \int \frac{\mathrm{dz}}{-2\sin^2 \frac{\mathrm{z}}{2}} = \cot \frac{\mathrm{z}}{2} + \mathrm{C}_0; \mathrm{C}_0 \in \mathrm{R}$$

Откуда, переобозначая разность $\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_0 \equiv \mathrm{C}$ и выполняя обратную подстановку $\mathrm{z} = \mathrm{y} - \mathrm{x}$:

$$\cot \frac{\mathrm{y} - \mathrm{x}}{2} = \mathrm{x} + \mathrm{C}; \mathrm{C} \in \mathrm{R}$$

Ответ: $\boldsymbol{cot \frac{y-x}{2}} = \mathbf{x + C; C \in R}$ $\boldsymbol{y_k(x)} = \mathbf{x + 2\pi k; k \in Z}$

№2. $\mathbf{y' = \sqrt{4x + 2y - 1}}$

Также давайте взглянем на №2.

Опять-таки, здесь бросается в глаза аргумент корня, поэтому его и заменим на новую неизвестную функцию $z(x) = 4x + 2y(x) - 1 \to z' = 4 + 2y' \to y' = \frac{z'}{2} - 2$

Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$\frac{z'}{2} - 2 = \sqrt{z}$$

Преобразовываем и делим переменные!

$$\frac{dz}{2(\sqrt{z} + 2)} = dx$$

Заметим, что в этот раз знаменатель в нуль обратиться не может – корень всегда неотрицательный.

№2. $\mathbf{y}' = \sqrt{\mathbf{4x + 2y - 1}}$

Интегрируем правую часть:

$$\int \frac{dz}{2(\sqrt{z}+2)} = \{u = \sqrt{z}; z = u^2; dz = 2udu\} = \int \frac{u}{u+2}du = \int \left(1 - \frac{2}{u+2}\right)du$$
$$= u - 2\ln(u+2) + C_1 = \sqrt{z} - 2\ln(\sqrt{z}+2) + C_1$$

То есть не так страшно! Поэтому теперь просто записываем ответ, учитывая замену $z(x) = 4x + 2y(x) - 1$:

Ответ: $\sqrt{\mathbf{4x} + \mathbf{2}\boldsymbol{y} - \mathbf{1}} - \mathbf{2}\,\boldsymbol{ln}\left(\sqrt{\mathbf{4x} + \mathbf{2}\boldsymbol{y} - \mathbf{1}} + \mathbf{2}\right) = \mathbf{x} + \mathbf{C};\ \mathbf{C} \in \mathbf{R}$

Итак, мы познакомились с простейшим видом уравнений (не считая уравнения, в которых исходно делятся переменные): их отличительной особенностью является вид $y' = f(ax + by + c)$, где в качестве функции f в первом номере выступал косинус, а во втором номере - корень. Но давайте двигаться дальше!

2. Однородные уравнения..

Конечно, всегда стоит проверить, имеет ли уравнение вид $y' = f(ax + by + c)$ с последующей заменой $z(x) = ax + by + c$. Однако, когда такая замена не упрощает уравнение – можно проверить, не является ли уравнение однородным. Это следующий вид уравнений, с которым мы будем иметь дело.

Давайте сразу разберём пример - №3!

№3. $\mathbf{y^2 + x^2 y' = xyy'}$

Что в этом уравнении примечательного? Давайте попробуем сделать замену переменных $\tilde{x} = kx, \tilde{y} = ky$:

$$k^2\tilde{y}^2 + k^2\tilde{x}^2\tilde{y}' = k^2\tilde{x}\tilde{y}\tilde{y}'$$

Если теперь сократим на $k \neq 0$, получим, что уравнение не изменило своего вида - уравнения, *инвариантные* относительно такого преобразования, называются однородными. Обратите внимание, что производная при такой замене не меняется:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{k}{k} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \tilde{y}'$$

Обычно наиболее простым способом решения таких уравнений является замена $y(x) = t(x) \cdot x$.

Попробуем сделать такую замену, учтя, что $y' = t'x + t$:

$$t^2x^2 + x^2(t'x + t) = tx^2(t'x + t)$$
$$\cancel{t^2x^2} + x^2(t'x + t) = tx^2(t'x \cancel{+ t})$$
$$x^2(t'x + t) = tt'x^3$$

Сократим на $x^2 \neq 0$:

$$t'x + t = tt'x$$

Сразу проверим, не потеряли ли мы решение – функция $x = 0$ не является решением исходного уравнения ($y^2 + 0 \cdot y' \neq 0 \cdot y \cdot y'$). Теперь переменные делятся:

$$xt'(t-1) = -t$$

$$\frac{(1-t)dt}{t} = \frac{dx}{x} \quad (3)$$

Функцию $x = 0$ мы уже проверяли – она решением не является. Случай $t = 0$ эквивалентен случаю $y = 0$ – а эта функция уже является решением исходного уравнения ($0^2 + x^2 \cdot 0 = x \cdot 0 \cdot 0$).

Осталось только проинтегрировать (3):

$$\ln|t| - t = \ln|x| + C$$

Осталось только записать ответ.

Ответ: $\ln\left|\frac{y}{x}\right| - \frac{y}{x} = \ln|x| + C;\ C \in R;\quad y = 0$

Так мы увидели, что достаточно быстро можно определить тип уравнения – сделав в уме замену $\tilde{x} = kx, \tilde{y} = ky$.

Давайте проверим, что уравнения из №4-5 также являются однородными:

№4. $xy' - y = x\tan\frac{y}{x}$

Быстро проверяем замену $\tilde{x} = kx, \tilde{y} = ky$:

$$k\tilde{x}\tilde{y}' - k\tilde{y} = k\tilde{x}\tan\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}$$

И $k \neq 0$ благополучно сокращается – а значит, уравнение благополучно решится заменой $y = t(x) \cdot x$. Попробуем:

$$x(t'x + t) - tx = x\tan t$$
$$x(t'x\cancel{+t})\cancel{-tx} = x\tan t$$

Смело сокращаем на $x \neq 0$ – функция $x = 0$ не является решением уравнения. Получаем:

$$t'x = \tan t$$

Где переменные благополучно делятся!

Делим переменные:

$$\frac{dt}{\tan t} = \frac{dx}{x} \quad (4)$$

Вновь немного деталей – проверяем решение $\tan t = 0 \rightarrow t_k = \pi k \rightarrow y_k = x \cdot \pi k$. (Функцию $x = 0$ мы уже проверяли). Подставим в уравнение:

$$x \cdot \pi k - x \cdot \pi k = x \tan(\pi k)$$

Что является тождеством – функции $y_k = x \cdot \pi k$ являются решением исходного уравнения. Интегрируем (4):

$$\int \frac{\cos t \, dt}{\sin t} = \int \frac{d(\sin t)}{\sin t} = \ln|\sin t| + C$$

И в итоге смело записываем ответ.

Ответ: $\ln\left|\sin\frac{y}{x}\right| = \ln x + C;\ C \in R;\quad y_k = x \cdot \pi k;\ k \in Z$

№5. $(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{dx}+(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathbf{dy}=\mathbf{0}$

Данное уравнение также, очевидно, является однородным уравнением – а значит пробуем замену $y = t \cdot x$:

$$x - tx + (x + tx)(t'x + t) = 0$$
$$x - tx + t'x^2 + tx + tt'x^2 + t^2x = 0$$
$$x \cancel{- tx} + t'x^2 \cancel{+ tx} + tt'x^2 + t^2x = 0$$
$$x(1 + t'x + tt'x + t^2) = 0$$

Проверяем, является ли $x = 0$ решением:

$(0 - y) + (0 + y) \cdot y' \neq 0$ - $x = 0$ не решение.

Раз так, сокращаем на него и делим переменные:

$$t'x(1+t) = -t^2 - 1$$
$$\frac{dt(1+t)}{t^2+1} = -\frac{dx}{x}$$

Дополнительных проверок на деление не делаем: $t^2 + 1 \neq 0$ ни при каких t.

$$\int \frac{dt(1+t)}{t^2+1} = \int \frac{dt}{t^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} = \arctan t + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C$$

Ответ: $\arctan\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) = -\ln|x| + C;\ C \in R$

Итак, мы научились решать уже два вида уравнений – приводимые к разделяющимся переменным и однородные! Двигаемся дальше.

3. Дробно-линейные уравнения.

В задачах общего зачёта всего одно такое уравнение – давайте попробуем с ними познакомиться.

№7. $\mathbf{2x - 4y + 6 + (x + y - 3)y' = 0}$

Хорошо видно, что это не однородное уравнение, однако уравнение имеет структуру

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_0x + b_0y + c_0}\right)$$

Казалось бы, что №6 имеет похожий вид – однако это уравнение другого вида (см. раздел 6).

Решается такое уравнение заменой: $u = x - x_0; v = y - y_0$, где (x_0, y_0) вычисляются из системы уравнений:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_0x + b_0y + c_0 = 0 \end{cases}$$

В нашем случае:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 6 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases}$$

Тогда замена переменных: $u = x - 1 \rightarrow x = u + 1; v = y - 2 \rightarrow y = v + 2$:

$$2(u + 1) - 4(v + 2) + 6 + (u + 1 + v + 2 - 3)v' = 0$$

$$2(u \cancel{+ 1}) - 4(v \cancel{+ 2}) \cancel{+ 6} + (u \cancel{+ 1} + v \cancel{+ 2 - 3})v' = 0$$

$$2u - 4v + (u + v)v' = 0$$

И мы получили уже <u>однородное</u> уравнение, очень похожее на то, что мы решали в №5 –

$$v(u) = t(u) \cdot u$$

$$2u - 4tu + (u + tu)(t'u + t) = 0$$

$$2u - 4tu + tu + t'u^2 + tt'u^2 + t^2u = 0$$

$$u(2 - 3t + t'u + tt'u + t^2) = 0$$

Быстро проверяем, что $u = 0$ не является решением уравнения (оно же $x = 1$). И делим переменные:

$$t'u(1+t) = 3t - 2 - t^2$$
$$\frac{dt(1+t)}{t^2 - 3t + 2} = -\frac{du}{u}$$

Проверяем решения $t = 1$ и $t = 2$ - они же $y = x + 1$ и $y = 2x$ – обе эти функции решения.

Интегрируем:

$$\int \frac{dt(1+t)}{t^2 - 3t + 2} = \int \frac{dt(t+1)}{(t-1)(t-2)} = \int \frac{3dt}{(t-2)} - \int \frac{2dt}{(t-1)} = 3\ln|t-2| - 2\ln|t-1| + C$$

И тогда ответ (осторожно – громоздко!):

Ответ: $3\ln\left|\frac{y-2}{x-1} - 2\right| - 2\ln\left|\frac{y-2}{x-1} - 1\right| = -\ln|x-1| + C;\ C \in R;\ y = x + 1;\ y = 2x$

№6. $(\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{1}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x} + \mathbf{2})\mathbf{y}' = \mathbf{0}$

Однако, казалось бы - №6 очень похож на №7, так почему же он не решается

таким же способом?

Давайте попробуем применить этот метод:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y - x + 2 = 0 \end{cases}$$

Но данная система не имеет решения! (складывая уравнения, получим, что $1 = 0$ - противоречие).

А значит, данный метод здесь просто не работает – мы ещё вернёмся к этому заданию.

4. Линейные уравнения.

Мы движемся к, наверное, наиболее приятным дифференциальным уравнениям – линейным уравнениям. Как обычно - начнём с примера:

№8. $\mathbf{xy' - 2y = 2x^4}$

Это уравнение выделяется тем, что у него и производная y', и сама функция y стоят в первой степени – потому оно и линейное.

Метод решения – метод вариации постоянной – наиболее распространённый и известный метод решения дифференциальных уравнений 1го порядка.

Первым шагом в данном методе мы зануляем слагаемое, не содержащее y, y':

$$xy' = 2y$$
$$\frac{dy}{2y} = \frac{dx}{x}$$

($y = 0$ и $x = 0$ не являются решениями исходного уравнения)

$$\frac{1}{2}\ln|y| = \ln|x| + \ln C \rightarrow \sqrt{y} = C|x| \rightarrow y = Cx^2$$

А далее, чтобы учесть слагаемое, которое в исходном уравнении было занулено – предполагаем, что $C = C(x)$ – иначе говоря, предполагаем, что $C(x)$ является некоторой функцией только от x - и подставляем $y(x) = C(x) \cdot x^2$ в исходное уравнение:

$$xC'x^2 + 2xCx - 2Cx^2 = 2x^4$$
$$xC'x^2 \cancel{+ 2xCx - 2Cx^2} = 2x^4$$
$$C' = 2x \rightarrow C(x) = x^2 + C_0$$

Заметьте - мы получили алгебраическое уравнение для нахождения $C'(x)$, а не дифференциальное - в этом основной смысл метода вариации постоянной. Так должно быть всегда. Можно было бы придумать замену, тогда мы получим просто другое дифференциальное уравнение.

Отсюда получаем итоговый ответ:

Ответ: $y(x) = (x^2 + C_0)x^2;\ C_0 \in R$

№9. $\begin{cases} \mathbf{y' + y \cdot \tan(x) = \sec(x)} \\ \mathbf{y(0) = 1} \end{cases}$

В этой задаче, помимо решения уравнения, также присутствует начальное условие, которым мы воспользуемся в конце, чтобы определить константу C – то есть мы из всех решений уравнения сможем выбрать одно конкретное.

А решаем уравнение всё так же – методом вариации постоянной, так как это вновь линейное уравнение.

$$y' + y \cdot \tan(x) = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -\tan(x)\,dx$$

Функция $y = 0$ не является решением исходного уравнения

$$\ln|y| = \ln|\cos x| + \ln C$$

Похожий интеграл мы брали в №4 $\to y(x) = C\cos x$

Далее, как и в прошлый раз, объявляем $C = C(x)$ и подставляем в исходное уравнение:

$$C'\cos x - C\sin x + C\cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ – возможно, самая неочевидная часть решения.

$$C'\cos x \cancel{- C\sin x + C\cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\cos x}$$

$$C' = \frac{1}{\cos^2 x} \to C(x) = \tan(x) + C_0$$

И теперь осталось найти C_0, зная $y(0) = 1$:

$$y(x) = (\tan(x) + C_0)\cos x$$
$$y(0) = C_0 = 1 \to C_0 = 1$$

Ответ: $y(x) = (\tan(x) + 1)\cos x = \sin x + \cos x$

Итак, общий вид линейных уравнений:

$$y' + p(x)y = f(x)$$

И все такие уравнения решаются методом вариации постоянной, который мы рассмотрели выше.

Так, например, в рассмотренном уравнении $y' + y \cdot \tan(x) = \sec(x)$ $p(x) = \tan(x); f(x) = \sec(x)$.

№10. $\begin{cases} \mathbf{y = x\left(y' - x \cdot \cos(x)\right)} \\ \mathbf{y(1) = 0} \end{cases}$

Вновь быстро анализируем данное уравнение – и видим, что оно является линейным. А значит метод решения всё тот же – метод вариации постоянной.

$$y = xy'$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Функции $y = 0$ и $x = 0$ не являются решениями исходного уравнения.

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C \to y = Cx$$

Далее вновь рассматриваем $C = C(x)$ и подставляем в исходное уравнение:

$$Cx = x(C'x + C - x \cdot \cos x)$$
$$\cancel{Cx} = x(C'x \cancel{+ C} - x \cdot \cos x)$$
$$C' = \cos x \to C(x) = \sin x + C_0$$

То есть общее решение уравнения есть $y(x) = (\sin x + C_0)x$. Найдем C_0:

$$y(1) = \sin 1 + C_0 = 0 \to C_0 = -\sin 1$$

Ответ: $y(x) = (\sin(x) - \sin 1)x$

Итак, на текущий момент мы познакомились уже с четырьмя видами уравнений: <u>сводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными</u>, <u>однородными</u>, <u>дробно-линейными</u> и <u>линейными</u>.

На самом деле, чтобы добиться успеха в решении задачи, необходимо правильно понять вид уравнения – чтобы применить правильный метод решения.

И как видно, применяя правильный метод, решение не должно вызывать затруднений.

5. Уравнения Бернулли.

Эти уравнения чуть посложнее линейных уравнений – и их также необходимо уметь определять, чтобы правильно решить уравнение. Общий вид очень похож на линейные уравнения:

$$y' + p(x)y = f(x)y^{\alpha}$$

Можно показать, что замена $z(x) = \frac{1}{y^{\alpha-1}}$ сведёт такое уравнение к уже рассмотренному выше линейному уравнению. Стоит отметить, что никакая другая замена не приведет к решению - в этом основная сложность.

Давайте посмотрим на примерах!

№13. $\mathbf{y' + 2y = e^x y^2}$

В данном примере $p(x) = 2; f(x) = e^x; \alpha = 2$.

Попробуем сделать ту самую замену:

$$z(x) = \frac{1}{y^{\alpha-1}} = \frac{1}{y(x)}$$

$$z'(x) = -\frac{y'}{y^2}$$

Теперь, если мы поделим уравнение на y^2 (кстати, убедитесь, что в данном случае решение $y = 0$ является решением!), получим:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2}{y} = e^x$$

$$-z' + 2z = e^x$$

А данное уравнение, действительно, линейное!

Метод решения: метод вариации постоянной:

$$z' = 2z \to \frac{dz}{z} = 2dx \to \ln|z| = 2x + \ln C \to z = Ce^{2x}$$

Далее $C = C(x)$ и подставляем в уравнение:

$$-C'e^{2x} - 2Ce^{2x} + 2Ce^{2x} = e^{x}$$
$$C' = -e^{-x} \to C(x) = e^{-x} + C_0$$
$$z(x) = e^{2x}(e^{-x} + C_0) = e^{x} + C_0e^{2x}$$

И отсюда получаем итоговый ответ $y(x) = \frac{1}{z(x)}$:

Ответ: $y(x) = \frac{1}{e^{x}+C_0e^{2x}}$; $y = 0$; $C_0 \in R$.

№18. $\mathbf{xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y}$

Ещё пример – в данном случае можем поделить уравнение на x (отметим, что функция $x = 0$ не является решением уравнения) и получим:

$$y' - \frac{4}{x}y = 2x\sqrt{y}$$

То есть это уравнение Бернулли с $p(x) = -\frac{4}{x}; f(x) = 2x; \alpha = \frac{1}{2}$.

Делаем замену:

$$z(x) = \frac{1}{y^{\alpha-1}} = \sqrt{y(x)}$$
$$z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$$

Делим уравнение на $\sqrt{y}$ (решение $y = 0$ вновь является решением):

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = 2x$$

$$2z' - \frac{4}{x}z = 2x \to z' - \frac{2}{x}z = x$$

То есть свели уравнение Бернулли к линейному уравнению – решаем методом вариации постоянной:

$$z' = \frac{2}{x}z \to \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x}$$

($z = 0$ не является решением).

Отсюда $\ln|z| = 2\ln|x| + \ln C \to z = Cx^2$.

Далее $C = C(x)$:

$$C'x^2 + 2xC - \frac{2}{x}Cx^2 = x$$

$$C'x^2 + \cancel{2xC - \frac{2}{x}Cx^2} = x$$

$$C' = \frac{1}{x} \to C(x) = \ln|x| + \ln C_0 \to C(x) = \ln C_0|x|$$

Итого:

$$y(x) = z^2 = (\ln(C_0|x|)\, x^2)^2 = \ln^2(C_0|x|) \cdot x^4$$

Ответ: $y(x) = \ln^2(C_0|x|) \cdot x^4;\ y = 0;\ C_0 > 0$

6. Интегрирующий множитель.

Нам осталось разобрать ещё три вида уравнений – и мы сейчас попробуем разобраться с, наверное, самым сложным видом уравнения. Как мы видим, большинство уравнений можно записать в виде:

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$$

Например, как в №6: $(x - y - 1) + (y - x + 2)y' = 0 \rightarrow (x - y - 1)dx + (y - x + 2)dy = 0$

В данном случае $f(x,y) = x - y - 1; g(x,y) = y - x + 2$. А что если данное уравнение есть ни что иное, как запись полного дифференциала некоторой функции $u(x,y)$:

$$du = u_x dx + u_y dy = f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$$

И тогда решение такого уравнения было бы очень простым – раз дифференциал функции равен нулю, то сама функция равна константе: $u = C$. Как мы можем понять, являются ли функции $f(x, y), g(x, y)$ частными производными некоторой функции u_x, u_y соответственно?

Вспомним курс матанализа и свойства вторых смешанных производных:

$$u_{xy} = u_{yx} \rightarrow f_y = g_x \left(f = u_x; g = u_y\right).$$

Данное условие есть признак того, что перед нами уравнение вида $du = 0$ (будем называть его уравнением в полных дифференциалах).

Проверим эти условия для нашего №6!

№6. $(\mathbf{x-y-1})+(\mathbf{y-x+2})\mathbf{y}'=\mathbf{0}$

В данном случае $f(x,y)=x-y-1;g(x,y)=y-x+2$.

$$f_y=-1;g_x=-1\rightarrow f_y=g_x$$

А раз так, давайте найдём вид функции u, зная её первые частные производные!

$$u_x=x-y-1\rightarrow u(x,y)=\frac{x^2}{2}-yx-x+c(y)$$

Далее берём производную этого выражения по y и приравняем к u_y из уравнения:

$$u_y=\ -x+c'=y-x+2\rightarrow c'(y)=y+2\rightarrow c(y)=\frac{y^2}{2}+2y+C_0$$

Здесь для самопроверки надо удостовериться, что справа нет x - если он есть, значит ошиблись, так как $C(y)$ не может зависеть от x.

Итого, наша искомая функция $u(x,y)=\frac{x^2}{2}-yx-x+\frac{y^2}{2}+2y+C_0$

А решение исходного уравнения есть уравнение $u = C$:

$$\frac{x^2}{2} - yx - x + \frac{y^2}{2} + 2y = C$$

(Здесь $C - C_0$ переобозначено через C).

Ответ: $\frac{x^2}{2} - yx - x + \frac{y^2}{2} + 2y = C; C \in R$.

№11. $(\mathbf{x}+\mathbf{y}^2)\mathbf{dy}=\mathbf{ydx}$

Попробуем применить наш метод!

В данном случае (не забываем перенести всё в правую сторону):

$f(x,y)=-y; g(x,y)=x+y^2.$

Проверяем наше условие:

$$f_y=-1; g_x=1$$

И теперь очевидно, что $f_y\neq g_x$! Неужели это означает, что всё вышеописанное имеет узкое применение?

Оказывается, что нет! Давайте попробуем домножить исходное уравнение на некоторую функцию $\mu(x,y)$ (которая называется интегрирующим множителем) так, чтобы для изменённых функций $\tilde{f}(x,y)=f(x,y)\mu(x,y), \tilde{g}(x,y)=g(x,y)\mu(x,y)$ условие $\widetilde{f_y}=\widetilde{g_x}$ выполнялось! (Далее крышка над $\tilde{f},\tilde{g}$ будет опускаться).

На самом деле, зачастую достаточно выбирать интегрирующий множитель в виде функции одного аргумента: $\mu(x)$ или $\mu(y)$.

Но как подобрать интегрирующий множитель? Давайте попробуем домножить уравнение на $\mu(y)$:

$$-y\mu(y)dx + (x + y^2)\mu(y)dy = 0$$

$$f_y = -\mu - y\mu' = \mu = g_x$$

А из этого уравнения определим вид $\mu(y)$! Обратите внимание, что уравнение обычно должно получаться простым – иначе данный подход теряет свой смысл.

$$y\mu' = -2\mu$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{y}$$

$$\mu(y) = \frac{1}{y^2}$$

Обратите внимание, что в данном случае не рассматривал решения в духе $\mu = 0$ или же $\mu(y) = \frac{C}{y^2}$, так как в данном случае нас не интересует общее решение этого, а хотя бы какое-то решение – например, $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$.

Итак, если мы домножим наше уравнение на $\frac{1}{y^2}$ мы получим уравнение в полных дифференциалах.

$$-\frac{1}{y}dx + \left(\frac{x}{y^2} + 1\right)dy = 0$$

На данном этапе мы фактически разделили исходное уравнение на y, хотя функция $y = 0$ является решением исходного уравнения – не потеряем её. Итак, теперь $f(x, y) = -\frac{1}{y}; g(x, y) = \frac{x}{y^2} + 1$. Следовательно:

$$f_y = \frac{1}{y^2} = \frac{1}{y^2} = g_x$$

То есть теперь условие выполнено! Решим уравнение:

$$\begin{cases} u_x = f = -\frac{1}{y} \\ u_y = g = \frac{x}{y^2} + 1 \end{cases}$$

$$u_x = -\frac{1}{y} \to u(x, y) = -\frac{x}{y} + c(y)$$

$$u_y = \frac{x}{y^2} + c' = \frac{x}{y^2} + 1 \to c'(y) = 1 \to c(y) = y + C_0$$

Итого, записываем нашу функцию $u(x, y) = -\frac{x}{y} + y + C_0$.

А решением исходного дифференциального уравнения является функция $u(x, y) = C$:

Ответ: $-\frac{x}{y} + y = C; C \in R;\ \ y = 0$.

Важное замечание: если же уравнение на интегрирующий множитель получается сложным – значит данный метод не поможет вам решить уравнение и стоит попробовать домножать не $\mu(y)$, а на $\mu(x)$. Если же и для $\mu(x)$ получается сложное уравнение – стоит попробовать другой метод. Вообще есть формула для проверки существования интегрирующего множителя, но это совсем сложно.

№12. $(2e^y - x)y' = 1$

Немного перепишем уравнение, используя $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$dx - (2e^y - x)dy = 0$$

Понятно, что $f_y \neq g_x$. Давайте попробуем найти интегрирующий множитель:

$$\mu(y)dx - \mu(y)(2e^y - x)dy = 0$$

$$f_y = \mu', g_x = \mu \rightarrow \ \mu' = \mu \rightarrow \mu(y) = e^y$$

Вновь здесь было выбрано какое-то частное решение уравнения $\mu' = \mu$.

Тогда попробуем решить уравнение, полученное из исходного домножением на e^y:

$$e^y dx - e^y(2e^y - x)dy = 0$$

Легко можно убедиться, что теперь $f_y = g_x$. Значит, решаем уравнение:

$$\begin{cases} u_x = f = e^y \\ u_y = g = -e^y(2e^y - x) \end{cases}$$

$$u_x = e^y \to u(x,y) = xe^y + c(y)$$

$$u_y = xe^y + c' = -e^y(2e^y - x)$$

$$\cancel{xe^y} + c' = -e^y(2e^y \cancel{- x})$$

$$c' = -2e^{2y} \to c(y) = -e^{2y} + C_0$$

И записываем ответ:

Ответ: $xe^y - e^{2y} = C; C \in R.$

7. Замена $y = z^m$

Рассмотрим ещё один метод решения уравнений, и рассмотрим его сразу на примере:

№14. $\mathbf{xydy = \left(y^2 + x\right)dx}$

Мы можем быстро убедиться, что данное уравнение не относится ни к какому из рассматриваемых выше видов – и даже, оказывается (попробуйте самостоятельно!), простого уравнения на интегрирующий множитель не получается. В таких случаях можно попробовать следующий приём: попробовать замену $\mathrm{y = z^m; y' = mz^{m-1}z'}$:

$$\mathrm{xyy' = y^2 + x}$$
$$\mathrm{mxz^m z^{m-1} z' = z^{2m} + x}$$

А теперь давайте предположим, что обе величины $\mathrm{x, z}$ измеряются в одной и той же величине (условно, в кг).

Тогда посчитаем суммарную степень кг во всех слагаемых:

$$1 + \mathrm{m} + \mathrm{m} - 1 = 2\mathrm{m} = 1 \rightarrow \mathrm{m} = \frac{1}{2}$$

То есть, используя $y = z^m = \sqrt{z}$ мы можем «обезразмерить» уравнение и попробовать его упростить:

$$\frac{\frac{1}{2} x\sqrt{z}}{\sqrt{z}} z' = z + x \rightarrow \frac{1}{2} x z' = z + x$$

И мы получили обычное линейное уравнение!

Замечание: все слова, указанные выше для объяснения метода, не являются объяснением сути метода, а скорее словами для лучшего запоминания самого метода.

Легко убедиться, что решение этого уравнения есть $z(x) = Cx^2 - 2x, C \in R$ (методом вариации постоянной!). Итак, итоговый ответ:

Ответ: $y = \sqrt{Cx^2 - 2x}; C \in R$.

Если m не находится, это не значит, что решения нет, это значит, что метод не подходит. Возможно, данный метод можно рассматривать как метод, который стоит попробовать, если уж совсем непонятно что делать – вдруг поможет (:

8. Уравнения, не разрешённые относительно старшей производной.

Нам остался последний вид уравнений – уравнений, не разрешенных относительно старшей производной.

№25. $\mathbf{x = y'^3 + y'}$

В данном примере уравнение записано не в виде $y' = f(x,y)$, а в виде $x = f(y,y')$. (Альтернативно может быть $y = f(x,y')$). Решение таких уравнений получается в параметрическом виде. Чтобы его получить, делается следующая замена:

$$y' = p$$

Тогда уравнение принимает вид:

$$x = p^3 + p \quad (4)$$

А далее дифференцируем данное уравнение по y: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{p}$

$$\frac{1}{p} = 3p^2\frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dy} = 3p^2\dot{p} + \dot{p}$$

Данное уравнение можно решить.

Домножим на p:

$$(3p^3 + p)\dot{p} = 1 \to (3p^3 + p)dp = dy$$

$$\frac{3}{4}p^4 + \frac{p^2}{2} + C = y \quad (5)$$

Выражения (4) и (5) задают функцию $y(x)$ в параметрическом виде: $x = x(p), y = y(p)$.

Ответ: $\begin{cases} x = p^3 + p \\ y = \frac{3}{4}p^4 + \frac{p^2}{2} + C \end{cases}$; $p, C \in R$.

Полностью аналогично решается №26.

№26. $y = y'^2 + 2y'^3$

Метод решения не меняется – вновь заменой $y' = p$.

$$y = p^2 + 2p^3$$

Дифференцируем по x:

$$\frac{dy}{dx} = y' = p = 2p\frac{dp}{dx} + 6p^2\frac{dp}{dx} = 2p\,\dot{p} + 6p^2\,\dot{p}$$

Решаем уравнение:

$$p = 2p\dot{p}(1 + 3p)$$

Решение $p = 0$ соответствует решению $y' = 0 \rightarrow y = C$. Как видно из исходного уравнения, $y = 0$ является решение исходного уравнения.

$$dx = 2dp(1 + 3p) \rightarrow x = 2p + 3p^2 + C$$

Ответ: $\begin{cases} x = 2p + 3p^2 + C \\ y = p^2 + 2p^3 \end{cases}$ $; p, C \in R$.

Итак, мы разобрали основные виды дифференциальных уравнений первого порядка – осталось только разобрать последний вид заданий по исследованию особенностей семейства решений уравнений.

А дальше – потренироваться на оставшихся задачах!

9. Исследование особенностей семейства решений уравнений.

Данная тема сопряжена с некоторыми особенностями решения дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной. Как мы видели из предыдущих примеров, решение записывается в параметрической форме – а как мы знаем из курса математического анализа, такие решения могут обладать особенностями (самопересечения и т.д.). Поэтому после решения уравнения необходим более подробный анализ – давайте разберемся на примере.

Исследовать особенности семейства решении˘ уравнении˘. Построить графики интегральных кривых (схематично):

№29. $\mathbf{y = xy' - y'^2}$

Как и в прошлых номерах, делаем замену $y' = p$:

$$y = xp - p^2$$

Дифференцируем по переменной x:

$$p = p + x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}(x - 2p) = 0$$

Откуда или $p = C$; или $p = \frac{x}{2}$

1) $p = C \rightarrow y = xC - C^2$

2) $p = \frac{x}{2} \rightarrow y = x\frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$

В данном случае удалось получить ответ в явной форме.

Что такое особенности семейства решений?

Оказывается, что существуют <u>особые решения</u> — это такие решения, на которых нарушается единственность решения уравнения. Чаще всего на таких решениях частная производная F по y' равна 0. Как их искать? Для этого необходимо представить уравнение в виде $F(x, y, y') = 0$ и решить такую систему, исключив параметр p:

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ F_p(x, y, p) = 0 \end{cases}$$

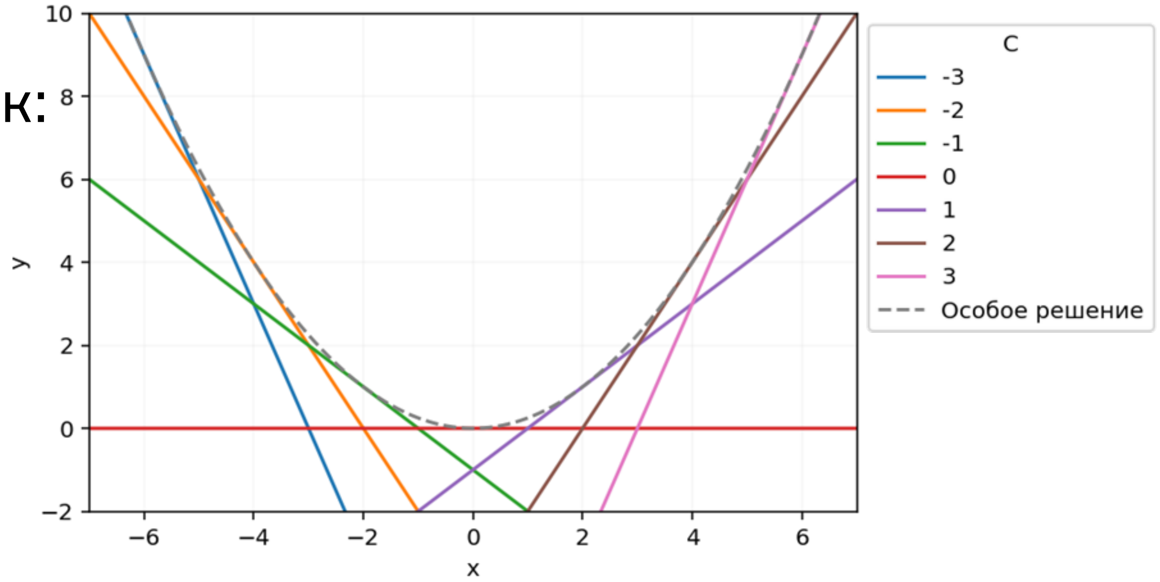
В нашем случае $F(x, y, y') = y - xy' + {y'}^2$:

$$\begin{cases} y - xp + p^2 = 0 \\ -x + 2p = 0 \end{cases} \rightarrow y = \frac{x^2}{4}$$

Так как $y = \frac{x^2}{4}$ является решением исходного уравнения, то эта кривая является особым решением.

То есть, особое решение не только удовлетворяет системе, но и должно являться решением исходного уравнения (всегда можно проверить простой подстановкой!).

Графически это выглядит так:



Ответ: $\begin{cases} y = xC - C^2 \\ y = \frac{x^2}{4} \end{cases}$; $C \in R$; $y = \frac{x^2}{4}$ – особое решение.

№27. $\mathbf{y'^2 = 4y^3(1 - y)}$

Давайте сразу найдем особое решение, решив систему:

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ F_p(x, y, p) = 0 \end{cases}$$

В данном случае $F(x, y, p) = 4y^3(1 - y) - p^2$

$$\begin{cases} 4y^3(1 - y) - p^2 = 0 \\ -2p = 0 \end{cases} \to 4y^3(1 - y) = 0 \to \begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Итак, с одной стороны, функции $y = 0, y = 1$ – решения исходного уравнения, с другой стороны – решения системы – а значит, они особые решения.

Интегральные кривые можно получить, вычленив корень:

$$y' = \pm 2y\sqrt{y - y^2}$$

$$\frac{dy}{2y\sqrt{y - y^2}} = \pm dx$$

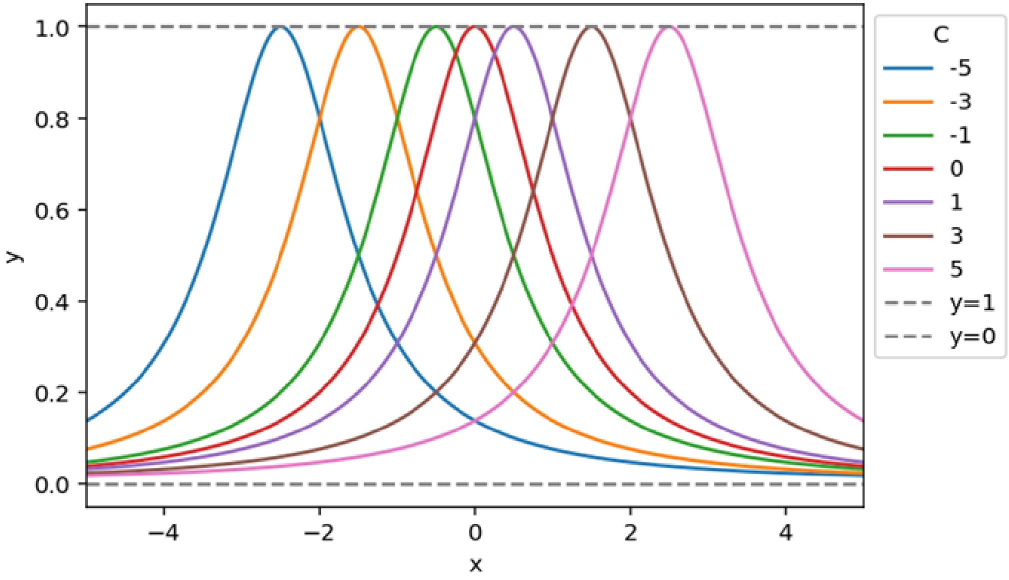
Интеграл в правой части можно вычислить:

$$\int \frac{dy}{2y\sqrt{y - y^2}} = \int \frac{dy}{2y\sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - y\right)^2}} = \left\{u = 2\left(\frac{1}{2} - y\right)\right\} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{(1 - u)\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}u^2}}$$

$$= -\int \frac{du}{(1 - u)\sqrt{1 - u^2}} = \frac{\sqrt{1 - u^2}}{u - 1} = \frac{\sqrt{1 - (1 - 2y)^2}}{2y}$$

$$\frac{\sqrt{1 - (1 - 2y)^2}}{2y} = \pm x + C$$

Графически:



То есть вновь кривые $y = 0,\ y = 1$ являются касательными к интегральным кривым.

Ответ: $\begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ – особые решения.

Ещё пример для закрепления!

№28. $\mathbf{y'^2 + xy = y^2 + xy'}$

Перегруппируем слагаемые:

$$y'^2 - y^2 = x(y' - y)$$
$$(y' - y)(y' + y) = x(y' - y)$$

Откуда: $y' = y \to y(x) = Ce^x$

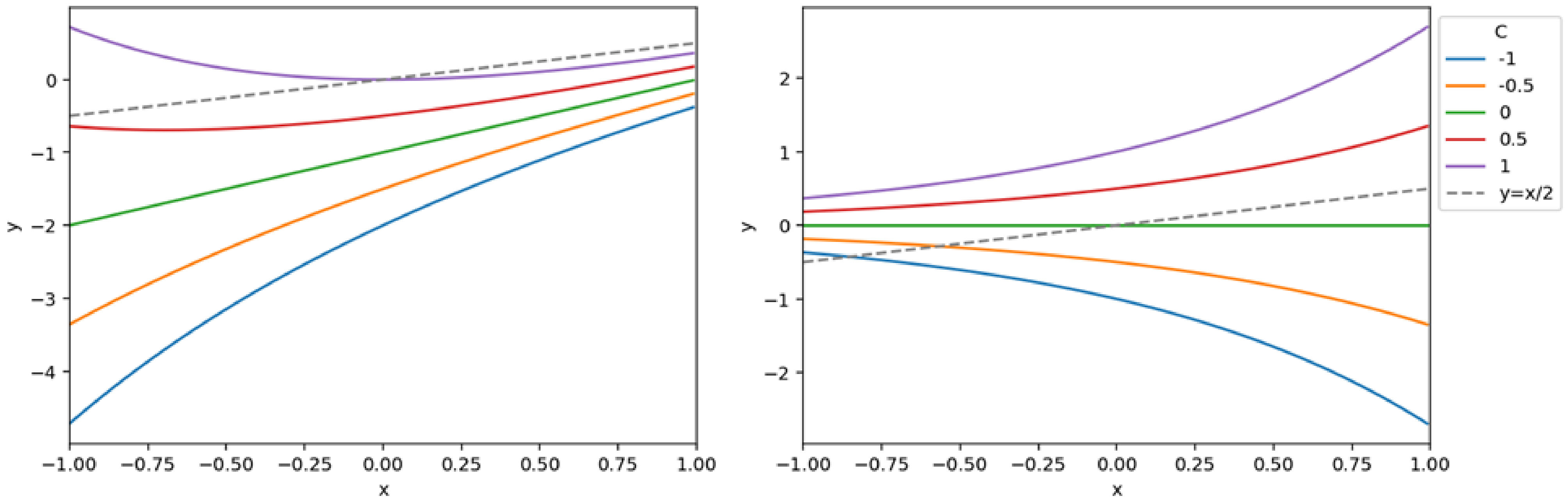
Либо $y' + y = x \to y(x) = Ce^{-x} + x - 1$

Найдём особые решения. В данном случае $F(x, y, p) = p^2 + xy - y^2 + xp$.

$$\begin{cases} p^2 + xy - y^2 + xp = 0 \\ 2p + x = 0 \end{cases} \to xy - y^2 - \frac{x^2}{4} = 0 \to y = \frac{x}{2}$$

Однако видно, что данная кривая не является решением исходного уравнения – значит, это не особое решение.

Графически:



Как видно, действительно, $y = \frac{x}{2}$ не является огибающей ни одного из семейства решений.

10. Практика.

Давайте теперь попробуем, в первую очередь, отработать навык классификации уравнений. Рассмотрим оставшиеся номера:

№15. $\begin{cases} (\mathbf{x}-\mathbf{y}^2)\mathbf{y}' = \mathbf{1} \\ \mathbf{y}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \end{cases}$

№16. $\mathbf{x} - \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{y}'} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{y}}$

№17. $\mathbf{2}(\mathbf{x}-\mathbf{y}^2)\mathbf{dy} = \mathbf{ydx}$

№19. $\mathbf{2xydx} + (\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2)\mathbf{dy} = \mathbf{0}$

№20. $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}\mathbf{dx} + (\mathbf{y}^3 + \ln \mathbf{x})\mathbf{dy} = \mathbf{0}$

№21. $(\mathbf{1} + \mathbf{y}^2 \sin \mathbf{2x})\mathbf{dx} = \mathbf{2y} \cos^2 \mathbf{x}\, \mathbf{dy}$

№22. $(\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{x})\mathbf{dx} + \mathbf{ydy} = \mathbf{0}$

№23. $\mathbf{ydx} - \mathbf{xdy} = \mathbf{2x}^3 \tan \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}} \mathbf{dx}$

№24. $\mathbf{y}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathbf{dx} + (\mathbf{xy} + \mathbf{1})\mathbf{dy} = \mathbf{0}$

В первую очередь, давайте попробуем выяснить вид каждого уравнения и попробуем подобрать метод, которым удастся решить каждое из уравнений. Обратите внимание – нет общего принципа, как решать каждое конкретное уравнение – лучше всего попробовать разные методы и надеяться, что какой-нибудь да сработает. Ниже будут предложены варианты (но попробуйте сделать в первую очередь самостоятельно!):

№15. $\begin{cases}(x-y^2)y'=1\\ y(0)=0\end{cases}$ **– интегрирующий множитель (раздел 6)**

№16. $x-\frac{y}{y'}=\frac{2}{y}$ **– интегрирующий множитель (раздел 6)**

№17. $2(x-y^2)dy=ydx$ **– интегрирующий множитель (раздел 6)**

№19. $2xydx+(x^2-y^2)dy=0$ **– однородное уравнение (раздел 2)**

№20. $\frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$ **– уравнение в полных дифференциалах (раздел 6)**

№21. $(1+y^2\sin 2x)dx=2y\cos^2 x\,dy$ **– уравнение в полных дифференциалах (раздел 6)**

№22. $(x^2+y^2+x)dx+ydy=0$ **– уравнение Бернулли с** $\alpha=-1$ **(раздел 5)**

№23. $ydx-xdy=2x^3\tan\frac{y}{x}dx$ **– однородное уравнение (раздел 2)**

№24. $y(x+y)dx+(xy+1)dy=0$ **– интегрирующий множитель (раздел 6)**

Исследовать особенности семейства решений уравнений. Построить графики интегральных кривых (схематично):

№30. $\mathbf{y = 2xy' + y^2 y'^3}$

№31. $\mathbf{y^2 + {y'}^2 = 1}$

Уравнения из №30 и №31 являются уравнениями, не разрешенными относительно старшей производной.

Попробуйте теперь самостоятельно, воспользовавшись соответствующими разделами, справиться с этими номерами!

Ниже будут приложены подробные решения.

Успехов!

№15. $\begin{cases} \mathbf{(x - y^2)y' = 1} \\ \mathbf{y(0) = 0} \end{cases}$

Попробуем вычленить интегрирующий множитель – для этого перепишем уравнение:

$$dx + (y^2 - x)dy = 0$$

Домножаем на $\mu(y)$ и вычисляем производные:

$$f(x, y) = \mu(y) \to f_y = \mu'$$
$$g(x, y) = \mu(y)(y^2 - x) \to g_x = -\mu$$
$$\mu' = -\mu \to \mu(y) = e^{-y}$$

Напоминаем, что при поиске интегрирующего множителя достаточно лишь какого-то частного решения! Теперь попробуем определить функцию $u(x, y)$:

$$\begin{cases} u_x = f = e^{-y} \\ u_y = g = e^{-y}(y^2 - x) \end{cases}$$

$$u_x = e^{-y} \to u(x, y) = xe^{-y} + c(y)$$

$$u_y = -xe^{-y} = e^{-y}(y^2 - x)$$

$$\cancel{-xe^{-y}} + c' = e^{-y}(y^2 \cancel{-x})$$

$$c' = y^2 e^{-y} \to c(y) = -e^{-y}(y^2 + 2y + 2) + C$$

Ответ: $xe^{-y} - e^{-y}(y^2 + 2y + 2) = C; \;\; C \in R.$

№16. $\mathbf{x - \frac{y}{y'} = \frac{2}{y}}$

В первую очередь, приведём уравнение в «человеческий» вид:

$$y'yx - y^2 = 2y'$$
$$-y^2dx + (yx - 2)dy = 0$$

Домножаем на $\mu(y)$ и вычисляем производные:

$$f(x, y) = -y^2\mu(y) \to f_y = -y^2\mu' - 2y\mu$$
$$g(x, y) = \mu(y)(yx - 2) \to \ g_x = y\mu$$

$$-y^2\mu' = 3y\mu \to \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{3dy}{y} \to \mu(y) = \frac{1}{y^3}$$

Теперь попробуем определить функцию $u(x,y)$:

$$\begin{cases} u_x = f = -\dfrac{1}{y} \\ u_y = g = \dfrac{(yx-2)}{y^3} \end{cases}$$

$$u_x = -\frac{1}{y} \to u(x,y) = -\frac{x}{y} + c(y)$$

$$u_y = \frac{x}{y^2} + c' = \frac{x}{y^2} - \frac{2}{y^3}$$

$$\cancel{\frac{x}{y^2}} + c' = \cancel{\frac{x}{y^2}} - \frac{2}{y^3}$$

$$c(y) = \frac{1}{y^2} - C$$

Ответ: $-\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} = C; \;\; C \in R.$

№17. $2\left(x-y^2\right)dy = ydx$

Перепишем и вновь поищем интегрирующий множитель:

$$-ydx + 2(x-y^2)dy = 0$$

$$f(x,y) = -y\mu(y) \to f_y = -y\mu' - \mu$$

$$g(x,y) = -2\mu(y)(y^2-x) \to \ g_x = 2\mu$$

$$-y\mu' - \mu = 2\mu \to \ -y\mu' = 3\mu \to \mu = \frac{1}{y^3}$$

Теперь попробуем определить функцию $u(x,y)$:

$$\begin{cases} u_x = f = -\dfrac{1}{y^2} \\ u_y = g = -2\,\dfrac{(y^2-x)}{y^3} = -\dfrac{2}{y} + \dfrac{2x}{y^3} \end{cases}$$

$$u_x = -\frac{1}{y^2} \to u(x,y) = -\frac{x}{y^2} + c(y)$$

$$u_y = \frac{2x}{y^3} + c' = -\frac{2}{y} + \frac{2x}{y^3} \to c(y) = -2\ln|y| - C$$

Ответ: $-\dfrac{x}{y^2} - 2\ln|y| = C; \ \ C \in R.$

№19. $\mathbf{2xydx + \left(x^2 - y^2\right)dy = 0}$

Раз уравнение однородное – решаем при помощи замены $y(x) = t(x) \cdot x$:

$$2tx^2 + (x^2 - t^2x^2)(t'x + t) = 0$$

Функция $x = 0$ не является решением исходного уравнения. А значит, можем сократить на x^2:

$$2t + (1 - t^2)(t'x + t) = 0$$
$$2t + t'x + t - t^2t'x - t^3 = 0$$
$$xt'(1 - t^2) = t^3 - 3t$$

Как уже говорилось ранее, $= 0$ не является решением исходного уравнения.

Проверим функции $t = 0$ и $t = \pm\sqrt{3}$, подставляя эти решения в исходное уравнение:

$t = 0 \to y = 0$ – решение

$t = \pm\sqrt{3} \to y = \pm\sqrt{3}x$:

$\pm 2\sqrt{3}x^2 \pm (x^2 - 3x^2)\sqrt{3} = 0$ – верно, а значит $y = \pm\sqrt{3}x$ – решения.

$$\frac{dt(1-t^2)}{t^3 - 3t} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dt(1-t^2)}{t^3-3t} = \{u = t^3 - 3t; du = (3t^2 - 3)dt = -3(1-t^2)dt\} = -\frac{1}{3}\int \frac{du}{u}$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|t^3 - 3t| + \ln C$$

$$\ln \frac{C}{|t^3 - 3t|^{\frac{1}{3}}} = \ln|x|$$

Ответ: $\left|\frac{y^3}{x^3} - \frac{3y}{x}\right|^{\frac{1}{3}} = \frac{C}{|x|};\;\; C > 0; y = \pm\sqrt{3}x; y = 0$.

№20. $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$

Убедимся, что перед нами уравнение в полных дифференциалах:

$$f(x,y) = \frac{y}{x};\, g(x,y) = y^3 + \ln x$$

$$f_y = \frac{1}{x} = g_x$$

Отсюда получаем систему для определения функции $u(x,y)$:

$$\begin{cases} u_x = f = \frac{y}{x} \\ u_y = g = y^3 + \ln x \end{cases}$$

$$u_x = \frac{y}{x} \to u(x,y) = y\ln x + c(y)$$

$$u_y = \ln x + c'^{(y)} = y^3 + \ln x \to c(y) = \frac{y^4}{4} - C$$

Ответ: $y\ln x + \frac{y^4}{4} = C;\ \ C \in R$.

№21. $\left(1 + y^2 \sin 2x\right)dx = 2y\cos^2 x\,dy$

Вновь проверим, что перед нами уравнение в полных дифференциалах:

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y\cos^2 x\,dy = 0$$

$$f(x, y) = 1 + y^2 \sin 2x\,; g(x, y) = -2y\cos^2 x$$

$$f_y = 2y\sin 2x\,;\;\; g_x = -2y \cdot 2\cos x \cdot \sin x \to f_y = g_x$$

Отсюда получаем систему для определения функции $u(x, y)$:

$$\begin{cases} u_x = f = 1 + y^2 \sin 2x \\ u_y = g = -2y \cos^2 x \end{cases}$$

$$u_x = 1 + y^2 \sin 2x \to u(x, y) = x - \frac{y^2}{2} \cos 2x + c(y)$$

$$u_y = -y \cos 2x + c'(y) = -2y \cos^2 x = -y(1 + \cos 2x)$$

$$\cancel{-y \cos 2x} + c'(y) = -y(1 + \cancel{\cos 2x})$$

$$c'(y) = -y \to c(y) = -\frac{y^2}{2} - C$$

Ответ: $x - \frac{y^2}{2} \cos 2x - \frac{y^2}{2} = C; \;\; C \in R.$

№22. $\mathbf{(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0}$

Перепишем уравнение, чтобы узнать здесь уравнение Бернулли:

$$yy' + x^2 + y^2 + x = 0$$

Функция $y = 0$ не является решением уравнения – значит можем делить на y:

$$y' + y = -\frac{x}{y}(1 + x)$$

В данном случае $\alpha = -1$. Следовательно, требуемая замена:

$$z(x) = \frac{1}{y^{\alpha-1}} = \frac{1}{y^{-2}} = y^2; \quad z' = 2yy'$$

$$\frac{z'}{2} + z = -x - x^2$$

Данное уравнение можно решать методом вариации постоянной:

$$\frac{z'}{2} + z = 0 \to z(x) = Ce^{-2x}; \;\; C = C(x):$$

$$\frac{C'e^{-2x}}{2} - Ce^{-2x} + Ce^{-2x} = -x - x^2 \to C' = -2(x + x^2)e^{2x};$$

$$C(x) = -e^{2x}x^2 + C_0$$

Ответ: $y^2 = (-e^{2x}x^2 + C_0)e^{-2x}; \;\; C_0 \in R.$

№23. $\mathbf{y dx - x dy = 2x^3 \tan\frac{y}{x} dx}$

Перед нами однородное уравнение: решаем заменой $y(x) = t(x) \cdot x$:

$$y - xy' = 2x^3 \tan\frac{y}{x}$$
$$tx - x(t'x + t) = 2x^3 \tan t$$
$$-x^2 t' = 2x^3 \tan t$$

В точке $x = 0$ исходное уравнение не определено, поэтому можем поделить на $x = 0$:

$$-t' = 2x \tan t$$
$$\frac{dt}{\tan t} = -2x\, dx$$

Проверим решения $\tan t = 0 \to t = \pi k, k \in Z; y_k = \pi k x$ – решения исходного уравнения.

$$\ln|\sin t| = -x^2 - \ln C \to C\,|\sin t| = e^{-x^2}$$

Ответ: $C\,\left|\sin\frac{y}{x}\right| = e^{-x^2};\ \ C > 0;\ y_k = \pi k x; k \in Z$.