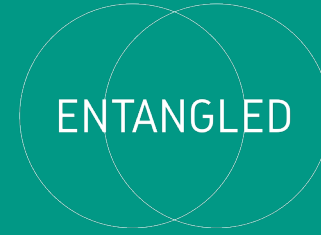




ФИЗИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА



*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

## Занятие 3

---

Гайер Алексей Вячеславович

# Дифференциальные уравнения.

## Занятие 3. Краевые задачи и уравнения в частных производных

- Функция Грина.
- Задача Штурма-Лиувилля.
- Уравнения в частных производных
- Практика



# 1. Функция Грина.

В данном разделе познакомимся, во-первых, с понятием краевой задачи, а во-вторых, выясним, зачем необходимо строить функции Грина для этих задач. Итак, краевой задачей мы будем называть задачу вида:

$$\begin{cases} L[y] = f(x), & a < x < b \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

где  $L[y]$  - некий дифференциальный оператор 2го порядка.

Нас будут интересовать операторы вида  $L[y] = a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y$ .

Однако нас не будут интересовать сложные операторы – мы будем рассматривать уравнения с постоянными коэффициентами (максимум – уравнения Эйлера).

Неоднородность -  $f(x)$  - нас не будет особо интересовать, так как нашей целью будет построение функции Грина.



Что это за функция? По сути, знание этой функции позволит записать решение краевой задачи для любой неоднородности в следующем интегральном виде:

$$y(x) = \int_a^b f(s)G(x, s)ds$$

где  $G(x,s)$  – функция Грина. Таким образом, зная данную функцию, мы можем записать решение задачи для любой неоднородности! (удобно, не правда ли?).

С физической точки зрения такая постановка задачи – найти решение краевой задачи для любой неоднородности – весьма востребована: если представить, что дифференциальный оператор описывает эволюцию нашей физической системы (например, закрепленная с двух сторон струна, совершающая колебания под действием внешней силы), то правая часть  $f(x)$  – это наше воздействие на систему. И тогда такое универсальное с точки зрения неоднородности решение позволит нам ответить на вопрос – как нам необходимо воздействовать на систему, чтобы добиться желаемого отклика.



Однако есть нюанс – такая функция существует только для таких задач, решение которых при  $f(x) \equiv 0$  тривиально, то есть  $f(x) \equiv 0 \rightarrow y(x) \equiv 0$ . Сразу отметим, что это условие всегда стоит проверять перед решением задачи! Нам же предстоит познакомиться с методом построения функции Грина. По определению, функция Грина – это функция двух переменных  $G(x, s)$ , определенная в квадрате  $[a, b] \times [a, b]$ , удовлетворяющая следующим условиям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 G(a, s) + \beta_1 G_x(a, s) = 0 \\ \alpha_2 G(b, s) + \beta_2 G_x(b, s) = 0 \\ G(s, s) \Big|_{x=s+0} = G(s, s) \Big|_{x=s-0} \\ G_x(s, s) \Big|_{x=s+0} - G_x(s, s) \Big|_{x=s-0} = \frac{1}{a_2(s)} \end{array} \right. \quad (1)$$



То есть функция Грина удовлетворяет граничным условиям по переменной  $x$ , а также непрерывна при  $x = s$  и терпит разрыв производной по переменной  $x$  при  $x = s$ . Ещё раз напоминаем, что  $a_2(x)$  – коэффициент при второй производной. Алгоритм нахождения функции Грина может быть следующим:

Находим общее решение однородного уравнения  $L[y] = 0$  в виде  $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ , где  $y_1(x), y_2(x)$  – любые независимые решения уравнения.

Ищем функцию Грина в виде:

$$G(x, s) = \begin{cases} a(s)y_1(x) + b(s)y_2(x), & a < x < s \\ c(s)y_1(x) + d(s)y_2(x), & s < x < b \end{cases}$$

Чтобы найти коэффициенты  $a, b, c, d$  подставляем вид функции Грина в систему (1).

Давайте попробуем разобраться на примере:



$$\text{№79. } \begin{cases} y'' = f(x), & 0 < x < 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Давайте убедимся, что функция Грина действительно существует – попробуем решить задачу при  $f(x) \equiv 0$ .

$$\begin{cases} y'' = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Общее решение однородного уравнения -  $y(x) = C_1x + C_2$ . Подставляем в граничные условия:

$$y(0) = C_2 = 0; y(1) = C_1 + C_2 = 0 \rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

То есть  $y(x) \equiv 0$ , а значит, функция Грина существует. (Конечно, странно было бы ожидать другого от задания с формулировкой «Построить функцию Грина», но тем не менее, такую процедуру стоит проводить).



Функция Грина ищется в виде:

$$G(x, s) = \begin{cases} a(s)x + b(s), & 0 < x < s \\ c(s)x + d(s), & s < x < 1 \end{cases}$$

В данном случае  $y_1(x) = x$ ,  $y_2(x) = 1$ . Для определения коэффициентов необходимо решить систему (ещё раз взгляните на определение функции Грина!):

$$\begin{cases} b = 0 \\ cl + d = 0 \\ as + b = cs + d \\ c - a = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ d = -s \\ c = \frac{s}{l} \\ a = \frac{s-1}{l} \end{cases}$$





Заметим, что у нас при таком построении будет система из 4 уравнений для определения 4 функций -  $a(s), b(s), c(s), d(s)$ . Подставим эти значения в вид функции Грина:

$$G(x, s) = \frac{1}{l} \begin{cases} (s - l)x, & 0 < x < s \\ (x - l)s, & s < x < l \end{cases}$$

Обратите внимание – мы получили симметричную функцию (обычно так и бывает).

Ответ:  $G(x, s) = \frac{1}{l} \begin{cases} (s - l)x, & 0 < x < s \\ (x - l)s, & s < x < l \end{cases}$

Замечание: решение для произвольной неоднородности  $f(x)$  будет записываться в виде:

$$y(x) = \int_0^1 f(s)G(x, s)ds = \frac{x-l}{l} \int_0^x f(s)sds + \frac{x}{l} \int_x^1 f(s)(s-l)ds$$

Не перепутайте, что в первом интеграле берется вторая строчка из функции Грина. Давайте тренироваться ещё!



$$\text{№81. } \begin{cases} y'' = f(x), & 0 < x < 1 \\ y(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

Убедитесь самостоятельно, что функция Грина существует. Функцию Грина ищем в виде (ведь левая часть уравнения такая же, как и в предыдущей задаче):

$$G(x, s) = \begin{cases} a(s)x + b(s), & 0 < x < s \\ c(s)x + d(s), & s < x < 1 \end{cases}$$

Для определения коэффициентов необходимо решить систему:

$$\begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ as + b = cs + d \\ c - a = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ a = -1 \\ d = -s \end{cases}$$

И записываем ответ!

$$\text{Ответ: } G(x, s) = - \begin{cases} x, & 0 < x < s \\ s, & s < x < 1 \end{cases}$$

Замечание: решение для произвольной неоднородности  $f(x)$  будет записываться в виде:

$$y(x) = \int_0^1 f(s)G(x, s)ds = - \int_0^x sf(s)ds - x \int_x^1 f(s)ds$$



$$\text{№82. } \begin{cases} y'' + y = 1, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 1; y(1) = -1 \end{cases}$$

Сразу, что может смутить – ненулевая правая часть в граничных условиях. Чтобы строить функцию Грина (или проверить, что она существует) нужно, чтобы граничные условия были 0.

Давайте попробуем их занулить введением функции  $z(x) = y(x) - 1 + 2x \rightarrow z'' = y''$ :

$$\begin{cases} z'' + z = 2x, & 0 < x < 1 \\ z(0) = 0; z(1) = 0 \end{cases}$$

Теперь легко убедиться, что решение однородной задачи – только тривиальное.

Общее решение однородного уравнения:  $z(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ .

Функцию Грина ищем в виде:

$$G(x, s) = \begin{cases} a(s) \cos x + b(s) \sin x, & 0 < x < s \\ c(s) \cos x + d(s) \sin x, & s < x < 1 \end{cases}$$



Запишем систему для определения коэффициентов:

$$\begin{cases} a = 0 \\ c \cos 1 + d \sin 1 = 0 \\ a \cos s + b \sin s = c \cos s + d \sin s \\ -a \sin s + b \cos s + c \sin s - d \cos s = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -\cos s + \frac{\sin s}{\tan 1} \\ c = -\sin s \\ d = \frac{\sin s}{\tan 1} \end{cases}$$

Запишем функцию Грина:

$$G(x, s) = \begin{cases} \left( \frac{\sin s}{\tan 1} - \cos s \right) \sin x, & 0 < x < s \\ \left( \frac{\sin x}{\tan 1} - \cos x \right) \sin s, & s < x < 1 \end{cases}$$



И запишем решение для нашей неоднородности ( $f(x) = 2x$ ):

$$y(x) = z(x) + 1 - 2x = \int_0^1 f(s)G(x, s)ds + 1 - 2x$$

$$= \left( \frac{\sin x}{\tan 1} - \cos x \right) \int_0^x 2s \sin s ds - \sin x \int_x^1 2s \left( \cos s - \frac{\sin s}{\tan 1} \right) ds + 1 - 2x$$

$$= 2 \left( \frac{\sin x}{\tan 1} - \cos x \right) (\sin x - x \cos x) + \frac{2 \sin x}{\sin 1} (\sin(1 - x) + x \cos(1 - x) - 1) + 1 - 2x$$

$$= 1 - \frac{2 \sin x}{\sin 1}$$



№83 решается полностью аналогично.

Замечание: в задании было указано о необходимости построения функции Грина – без этого мы могли бы просто выписать общее решение уравнения и вычислить коэффициенты из граничных условий, так как в данной задаче это было бы быстрее (зато есть способ самопроверки!).

№84 решается абсолютно аналогично тому, как разобран №85:



$$\text{№85. } \begin{cases} y'' + y' = f(x), & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0; y'(1) = 0 \end{cases}$$

Убедитесь самостоятельно, что решение однородной задачи – только тривиальное. Общее решение однородного уравнения  $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x}$ . Строим функцию Грина в виде:

$$G(x, s) = \begin{cases} a(s) + b(s)e^{-x}, & 0 < x < s \\ c(s) + d(s)e^{-x}, & s < x < 1 \end{cases}$$

Запишем систему для определения коэффициентов:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ c - de^{-1} = 0 \\ a + be^{-s} = c + de^{-s} \\ -de^{-s} + be^{-s} = 1 \end{cases}$$



Очевидно, что арифметически такую систему довольно сложно искать. Поэтому в таких случаях (и в любом другом) систему можно попробовать сразу упростить.

Для этого, используя решение однородной задачи  $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x}$  найдём частные решения уравнения  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ , чтобы они удовлетворяли первому и второму граничному условиям соответственно и не удовлетворяли другому!

Иначе они могут получиться линейно зависимыми:

$$y_1(0) = C_1 + C_2 e^0 = 0 \rightarrow C_1 = -C_2 \rightarrow y_1(x) = C_1(1 - e^{-x})$$

$$y_2'(1) = -C_2 e^{-1} = 0 \rightarrow C_2 = 0 \rightarrow y_2(x) = C_1$$





Итак, мы получили 2 линейно независимых решения однородного уравнения.

Причем первое решение удовлетворяет левому граничному условию, второе – правому. Нас интересуют частные решения, а значит значения констант можем выбрать произвольным образом – например, равными 1.

Теперь, зная данные функции, функцию Грина будем искать в виде:

$$G(x, s) = \begin{cases} a(s)y_1(x), & 0 < x < s \\ b(s)y_2(x), & s < x < 1 \end{cases} = \begin{cases} a(s)(1 - e^{-x}), & 0 < x < s \\ b(s), & s < x < 1 \end{cases}$$

Заметим, что при таком построении функция Грина уже удовлетворяет граничным условиям. Функции  $a(s)$  и  $b(s)$  найдем из непрерывности функции Грина и из разрыва первой производной функции Грина, то есть оставшихся условий из определения функции Грина.



Заметим, что у нас 2 условия для определения двух функций:

$$\begin{cases} G(s, s) \Big|_{x=s+0} = G(s, s) \Big|_{x=s-0} \\ G_x(s, s) \Big|_{x=s+0} - G_x(s, s) \Big|_{x=s-0} = \frac{1}{a_2(s)} \end{cases}$$

По факту, мы просто произвели вычисления коэффициентов в функции Грина в два этапа. Цель такого приёма – вместо решения сложной системы для 4х неизвестных решить систему для 2х неизвестных. Применим это к нашей задаче:

$$\begin{cases} a(1 - e^{-s}) - b = 0 \\ -ae^{-s} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -e^s \\ b = -e^s + 1 \end{cases}$$



Запишем функцию Грина:

$$G(x, s) = - \begin{cases} e^s(1 - e^{-x}), & 0 < x < s \\ e^s - 1, & s < x < 1 \end{cases}$$

А решение задачи запишется в виде:

$$y(x) = \int_0^1 f(s)G(x, s)ds = \int_0^x f(s)(1 - e^s)ds - (1 - e^{-x}) \int_x^1 f(s)e^s ds$$

№86 будет решаться абсолютно аналогично №87:



$$\text{№87. } \begin{cases} x^2 y'' - 6y = f(x), & 0 < x < 1. \\ |y(0)| < \infty; & y'(1) + 2y(1) = 0 \end{cases}$$

В данном номере, во-первых, может смущать уравнение – уравнение Эйлера (вспоминаем второе занятие), а во-вторых, первое граничное условие. Запишем общее решение однородного уравнения (если не помним, как решать – смотрим 2е занятие):  $y(x) = \frac{C_1}{x^2} + C_2 x^3$ .

Найдём функцию Грина также, как искали её в №85:

$$|y_1(0)| < \infty \rightarrow C_1 = 0 \rightarrow y_1(x) = x^3$$

$$y_2'(1) + 2y_2(1) = 0 \rightarrow -2C_1 + 3C_2 + 2C_1 + 2C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0 \rightarrow y_2(x) = \frac{1}{x^2}$$

Функцию Грина будем искать в виде:

$$G(x, s) = \begin{cases} a(s)x^3, & 0 < x < s \\ \frac{b(s)}{x^2}, & s < x < 1 \end{cases}$$



Используем непрерывность функции Грина и разрыв её первой производной:

$$\begin{cases} as^3 - \frac{b}{s^2} = 0 \\ -\frac{2b}{s^3} - 3as^2 = \frac{1}{s^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5s^4} \\ b = -\frac{1}{5}s \end{cases}$$

Запишем функцию Грина:

$$G(x, s) = -\frac{1}{5} \begin{cases} \frac{x^3}{s^4}, & 0 < x < s \\ \frac{s}{x^2}, & s < x < 1 \end{cases}$$



А решение задачи запишется в виде:

$$y(x) = \int_0^1 f(s)G(x, s)ds = -\frac{1}{5} \left( \frac{1}{x^2} \int_0^x f(s)sds + x^3 \int_x^1 \frac{f(s)}{s^4} ds \right)$$

На этом мы завершим с функцией Грина и двинемся к ещё одной задаче – задаче Штурма-Лиувилля.



## 2. Задача Штурма-Лиувилля.

Задача формулируется следующим образом для такой задачи:

$$\begin{cases} L[y] = -\lambda\rho(x)y, & 0 < x < 1. \\ \alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = \alpha_2 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0 \end{cases}$$

Необходимо найти такие значения параметра  $\lambda$  (такие значения называются собственными значениями - СЗ), при которых данная задача имеет нетривиальное решение (такие решения называются собственными функциями - СФ).

Опять-таки, в физике такие задачи очень востребованы.

Например, стационарное уравнение Шрёдингера  $\hat{H}\psi = E\psi$  – есть ни что иное, как задача Штурма-Лиувилля.



Например, уравнение Шрёдингера в потенциале «квантового ящика»

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, a) \\ +\infty, & x \notin (0, a) \end{cases}$$

Записывается следующим образом в области  $x \in (0, a)$  с граничными условиями:

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' = E\psi. \\ \psi(0) = \psi(a) = 0 \end{cases}$$

Таким образом, чтобы изучать квантовую физику, необходимо уметь решать задачу Штурма-Лиувилля!

Так давайте попробуем решить такие задачи!





$$\text{№88. } \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1. \\ y(0) = 0; & y'(1) = 0 \end{cases}$$

Так как при разных значениях параметра  $\lambda$  мы будем получать разные решения уравнения, рассмотрим различные варианты:

$$\lambda = -\delta^2 < 0:$$

В этом случае общее решение уравнения:  $y(x) = A \cosh \delta x + B \sinh \delta x$ .  
Подставляем в граничные условия:

$$y(0) = A = 0; \quad y'(1) = \delta B \cosh \delta = 0 \rightarrow B = 0$$

То есть мы имеем только тривиальное решение.

$$\lambda = 0:$$

В этом случае общее решение уравнения:  $y(x) = Ax + B$ . Подставляем в граничные условия:

$$y(0) = B = 0; \quad y'(1) = A = 0$$

То есть вновь только тривиальные решения. И, наконец, третий случай:

$$\lambda = \delta^2 > 0:$$



В этом случае общее решение уравнения:  $y(x) = A \cos \delta x + B \sin \delta x$  .  
Подставляем в граничные условия:

$$y(0) = A = 0; \quad y'(1) = \delta B \cos \delta = 0 \rightarrow \cos \delta = 0 \rightarrow \delta_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

Так мы нашли собственные значения (СЗ):  $\lambda_n = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2$ ,  $n = 0, 1, 2 \dots$  и соответствующие им собственные функции (СФ):  $y_n(x) = B \sin \delta_n x = B \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) x$

$$\text{Ответ: } \lambda_n = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2, \quad y_n(x) = B \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) x, \quad n = 0, 1, 2 \dots, \forall B \neq 0$$

Замечание: обратите внимание на условие  $B \neq 0$  – в случае  $B = 0$  получим тривиальное решение, что по определению не является решением задачи Штурма-Лиувилля.



$$\text{№90. } \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 2 < x < 4. \\ y(2) = 0; & y(4) = 0 \end{cases}$$

Рассматриваем вновь 3 случая:

$$1) \lambda = -\delta^2 < 0:$$

В этом случае общее решение уравнения:  $y(x) = A \cosh \delta x + B \sinh \delta x$ .

Подставляем в граничные условия:

$$\begin{cases} y(2) = A \cosh 2\delta + B \sinh 2\delta = 0 \\ y(4) = A \cosh 4\delta + B \sinh 4\delta = 0 \end{cases}$$

Для того, чтобы эта система имела нетривиальное решение относительно  $A, B$  необходимо равенство нулю определителя:

$$D(\delta) = \begin{vmatrix} \cosh 2\delta & \sinh 2\delta \\ \cosh 4\delta & \sinh 4\delta \end{vmatrix} = \cosh 2\delta \sinh 4\delta - \cosh 4\delta \sinh 2\delta = \sinh(2\delta) \neq 0 \quad \forall \delta \neq 0$$

То есть данный определитель не обращается в нуль ни при каких  $\delta$  – а значит, мы имеем только тривиальное решение.



2)  $\lambda = 0$ :

В этом случае общее решение уравнения:  $y(x) = Ax + B$ . Подставляем в граничные условия:

$$\begin{cases} y(2) = 2A + B = 0 \\ y(4) = 4A + B = 0 \end{cases}$$

Данная система вновь имеет только тривиальное решение.

3)  $\lambda = \delta^2 > 0$ :

В этом случае общее решение уравнения:  $y(x) = A \cos \delta x + B \sin \delta x$ . Подставляем в граничные условия:

$$\begin{cases} y(2) = A \cos 2\delta + B \sin 2\delta = 0 \\ y(4) = A \cos 4\delta + B \sin 4\delta = 0 \end{cases}$$



Вновь вспоминаем, что для того, чтобы эта система имела нетривиальное решение относительно  $A, B$  необходимо равенство нулю определителя:

$$D(\delta) = \begin{vmatrix} \cos 2\delta & \sin 2\delta \\ \cos 4\delta & \sin 4\delta \end{vmatrix} = \cos 2\delta \sin 4\delta - \cos 4\delta \sin 2\delta = \sin(2\delta) = 0 \rightarrow \delta_n = \frac{\pi n}{2}, n = 1, 2, \dots$$

Найдём коэффициенты  $A, B$ , подставив во второе уравнение:

$$A \cos 4\delta_n + B \sin 4\delta_n = 0 \rightarrow A \cos 2\pi n + B \sin 2\pi n = 0 \rightarrow A = 0$$

Так мы нашли собственные значения (СЗ):  $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2, n = 1, 2, \dots$  и соответствующие им собственные функции (СФ):  $y_n(x) = B \sin \delta_n x = B \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) x$

Ответ:  $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2, y_n(x) = B \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) x, n = 1, 2, \dots, \forall B \neq 0$

Замечание: в данном случае  $n \neq 0$ , так как иначе мы получим тривиальное решение  $y_0 \equiv 0$ .



$$\text{№92. } \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi. \\ y(0) = 0; & y'(\pi) + y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Вновь рассматриваем 3 случая.

$$1) \lambda = -\delta^2 < 0:$$

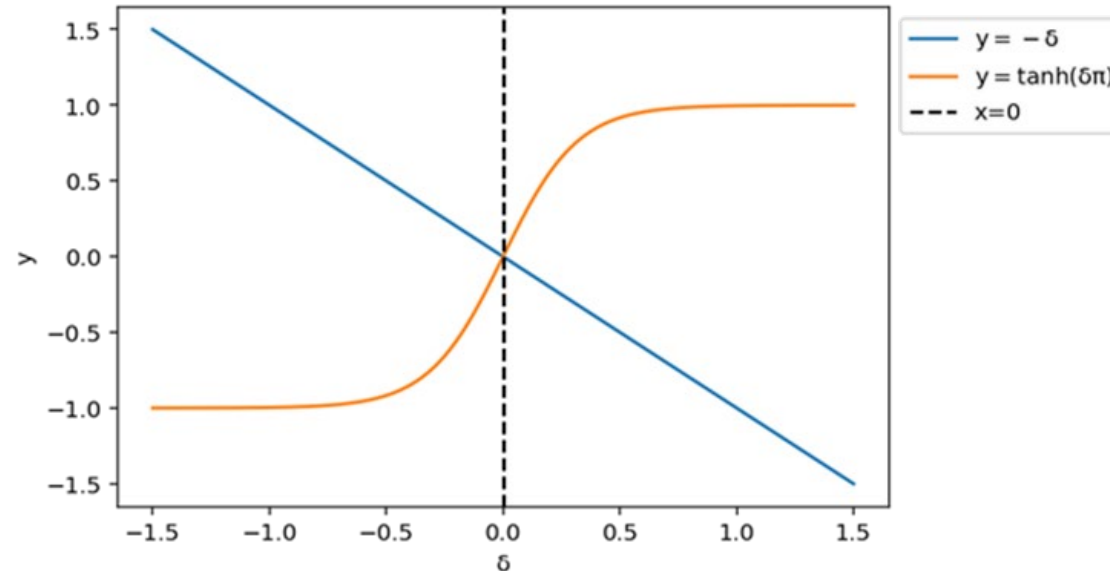
В этом случае общее решение уравнения:  $y(x) = A \cosh \delta x + B \sinh \delta x$ .

Подставляем в граничные условия:

$$y(0) = A = 0; \quad y'(\pi) + y(\pi) = \delta B \cosh \delta \pi + B \sinh \delta \pi = 0 \rightarrow B = 0$$



Так как такое уравнение не имеет решения для ненулевых  $\delta$ , в чём легко убедиться графически (поделив обе части на косинус гиперболический:  $-\delta = \tanh \delta\pi$ ):



То есть мы имеем только тривиальное решение, так как решение  $\delta = 0$  (откуда и  $\lambda = 0$ , а мы рассматриваем только отрицательные  $\lambda$ ) нас не устраивает в этом пункте.



2)  $\lambda = 0$ :

В этом случае общее решение уравнения:  $y(x) = Ax + B$ .

Подставляем в граничные условия:

$$y(0) = B = 0; \quad y'(\pi) + y(\pi) = A + A\pi = 0 \rightarrow A = 0$$

То есть вновь только тривиальные решения.





И, наконец, третий случай:

3)  $\lambda = \delta^2 > 0$ :

В этом случае общее решение уравнения:  $y(x) = A \cos \delta x + B \sin \delta x$ .

Подставляем в граничные условия:

$$y(0) = A = 0; \quad y'(\pi) + y(\pi) = \delta B \cos \delta\pi + B \sin \delta\pi = 0 \rightarrow \delta \cos \delta\pi + \sin \delta\pi = 0$$

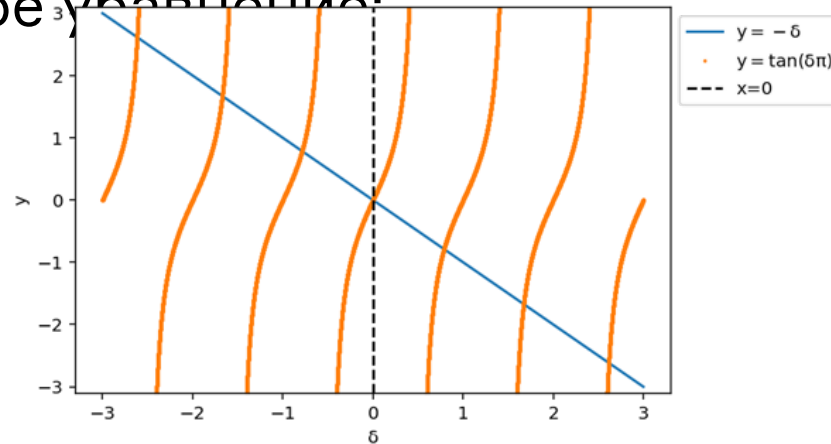
Перед нами так называемое трансцендентное уравнение.



Однако, графически легко убедиться, что у такого уравнения много решений. Для этого поделим всё на косинус (косинус и синус одновременно в нуль не обращаются):

$$-\delta = \tan \delta \pi$$

Графически такое уравнение:



То есть видно, что мы имеем большое количество решений – точек пересечения. Однако аналитически мы их выписать не можем. Тем не менее, перенумеруем решения уравнения  $-\delta = \tan \delta \pi$  индексом  $n$ , и тогда мы получим набор СЗ  $\lambda_n = \delta_n^2$ , где  $\delta_n$  – решения уравнения  $-\delta = \tan \delta \pi$ .

Ответ:  $\lambda_n = (\delta_n)^2$ ,  $y_n(x) = B \sin \delta_n x$ ,  $n = 1, 2, \dots, \forall B \neq 0$



$$\text{№94. } \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 2\pi. \\ y(0) = y(2\pi); & y'(0) = y'(2\pi) \end{cases}$$

Начинаем всё также – рассматриваем 3 случая!

1)  $\lambda = -\delta^2 < 0$ :

В этом случае общее решение уравнения:  $y(x) = A \cosh \delta x + B \sinh \delta x$ .

Подставляем в граничные условия:

$$\begin{cases} y(0) = y(2\pi) : & A = A \cosh 2\pi\delta + B \sinh 2\pi\delta \\ y'(0) = y'(2\pi) : & \delta B = \delta A \sinh 2\pi\delta + \delta B \cosh 2\pi\delta \end{cases}$$

Во втором уравнении можно смело сократить на  $\delta$ , так как нас не интересуют в этом пункте нулевые СЗ.



Для того, чтобы эта система имела нетривиальное решение относительно  $A, B$  необходимо равенство нулю определителя (все слагаемые переносим в правую часть уравнений):

$$D(\delta) = \begin{vmatrix} \cosh 2\pi\delta - 1 & \sinh 2\pi\delta \\ \sinh 2\pi\delta & \cosh 2\pi\delta - 1 \end{vmatrix} = (\cosh 2\pi\delta - 1)^2 - \sinh^2 2\pi\delta \\ = \cosh^2 2\pi\delta - 2 \cosh 2\pi\delta + 1 - \sinh^2 2\pi\delta = 0$$

По основному тождеству для гиперболических функций  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$  получаем:

$$\cosh 2\pi\delta = 1$$

Однако это уравнение имеет только решение при  $\delta = 0$ . То есть данная система имеет только тривиальное решение



2)  $\lambda = 0$ :

В этом случае общее решение уравнения:  $y(x) = Ax + B$ . Подставляем в граничные условия:

$$\begin{cases} y(0) = y(2\pi) : B = 2\pi A + B \\ y'(0) = y'(2\pi) : A = A \end{cases}$$

Откуда  $A = 0$ ,  $B$  – любое число. То есть мы имеем нетривиальное решение для  $C_3=0$ .



3)  $\lambda = \delta^2 > 0$ :

В этом случае общее решение уравнения:  $y(x) = A \cos \delta x + B \sin \delta x$ .  
Подставляем в граничные условия:

$$\begin{cases} y(0) = y(2\pi) : A = A \cos 2\pi\delta + B \sin 2\pi\delta \\ y'(0) = y'(2\pi) : \delta B = -\delta A \sin 2\pi\delta + \delta B \cos 2\pi\delta \end{cases}$$

Вновь во втором уравнении мы можем сократить  $\delta$ , и далее запишем определитель матрицы:

$$\begin{aligned} D(\delta) &= \begin{vmatrix} \cos 2\pi\delta - 1 & \sin 2\pi\delta \\ -\sin 2\pi\delta & \cos 2\pi\delta - 1 \end{vmatrix} = (\cos 2\pi\delta - 1)^2 + \sin^2 2\pi\delta \\ &= \cos^2 2\pi\delta - 2 \cos 2\pi\delta + 1 + \sin^2 2\pi\delta = 0 \end{aligned}$$

Уже по основному тригонометрическому тождеству  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  получаем:

$$\cos 2\pi\delta = 1$$

Откуда  $\delta_n = n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Однако если теперь мы подставим это значение в нашу систему, мы получим не очень внятную систему уравнений:

$$\begin{cases} A = A \\ B = B \end{cases}$$

Что, в целом-то, и так понятно. На самом деле, каждое из наших СЗ обладает двумя линейно независимыми решения (геометрическая кратность=2, вспоминаем линейную алгебру!). Более того, мы можем включить в это множество решений решение из пункта 2) таким образом:

Ответ:  $\lambda_n = n^2$ ,  $y_n(x) = A \cos nx + B \sin nx$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $A^2 + B^2 \neq 0$

И на этом мы закончим с задачей Штурма-Лиувилля и перейдём к следующей теме.



## 2. Уравнения в частных производных

Нас будут интересовать относительно простые уравнения – линейные уравнения в частных производных первого порядка для функций двух или трёх переменных.

Такие уравнение часто встречаются в реальных физических задачах (уравнения переноса, например).

Более того, в будущем у вас будет даже отдельный курс, посвященный более сложным уравнениям в частных производных – методы математической физики (ММФ).

Однако вернёмся к нашим, более простым линейным уравнениям в частных производных первого порядка. Далее выкладки мы напишем для функции 2х переменных, и посмотрим, как эти методы обобщаются для функций трёх и более аргументов.





Итак, вид уравнения:

$$z_x X(x, y) + z_y Y(x, y) = F(x, y)$$

В данном разделе задачи мы будем решать методом характеристик, и для такой задачи уравнение характеристик записывается следующим образом:

$$\frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)} = \frac{dz}{F(x, y)}$$

Чтобы получить общее решение уравнения, необходимо:

Из уравнения характеристик находим интегралы  $\Psi_1(x, y, z) = C_1$ ,  $\Psi_2(x, y, z) = C_2$ .

Решение записывается в виде некоторой функции  $\Phi(C_1, C_2) = 0$ , где  $\Phi(C_1, C_2)$  – произвольная дифференцируемая функция.

Заметим, что решением является произвольная дифференцируемая функция, а наша задача явно найти ее аргументы. Это и есть общее решение уравнения.

Посмотрим пример:



$$\text{№96. } \begin{cases} yz_x - xz_y = 0 \\ z_{x=1} = y^2 \end{cases}$$

Для того, чтобы найти функцию  $z(x, y)$  выписываем уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0}$$

(Не теряйте знак “-“).

Деление на нуль в последнем равенстве не стоит воспринимать как деление на нуль в смысле арифметической операции – это скорее просто удобная запись уравнения характеристик. А воспринимать такую запись можно следующим образом - возьмём из этой цепочки уравнений следующие (можно взять два любых уравнения):

$$-x dx = y dy; \quad dz = 0$$

где второе уравнение получилось из правила пропорции  $\frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0} \rightarrow -x dz = 0 dy \rightarrow dz = 0$ .



Проинтегрируем получившиеся выражения:

$$x^2 + y^2 = C_1; \quad z = C_2$$

Перед нами так называемые интегралы данного уравнения – величины, сохраняющиеся на характеристиках. Если совсем упрощать – то на каждой окружности  $x^2 + y^2 = C_1$  функция  $z(x, y)$  сохраняет постоянное значение  $C_2$ . Зная данные интегралы, можно показать, что решение уравнения записывается в виде некоторой неявной функции:

$$\Phi(C_1, C_2) = 0 \rightarrow \Phi(x^2 + y^2, z) = 0$$

Где  $\Phi$  – произвольная дифференцируемая функция.

Однако, как нам известно из второго семестра математического анализа, такая конструкция задаёт неявную функцию

$$C_2 = f(C_1) \rightarrow z = f(x^2 + y^2) \text{ – это и есть решение нашего уравнения!}$$

Опять-таки,  $f(t)$  пока остается произвольной дифференцируемой функцией.



То есть решением уравнения в частных производных является целый класс функций, зависящих от аргументов  $x, y$  таким образом!

То есть  $z(x, y)$  – это любая функция, которая может быть выражена как  $z(x, y) = f(x^2 + y^2)$ .

Найдём решение, удовлетворяющее дополнительному условию:

$$z_{x=1} = y^2 \rightarrow f(1 + y^2) = y^2$$

Обозначим  $t = y^2 + 1 \rightarrow y^2 = t - 1$ . То есть  $f(t) = t - 1$ . Итого, ответ задачи:

Ответ:  $z(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

Закрепим!



$$\text{№97. } \begin{cases} xu_x + yu_y + zu_z = 0 \\ u_{z=0} = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Записываем уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy} = \frac{du}{0}$$

Из этой цепочки выберем следующие уравнения:

$$\begin{cases} du = 0 \\ \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \\ \frac{dx}{x} = \frac{dz}{xy} \end{cases}$$



Из первого уравнения имеем  $u = C_1$ .

Из второго:  $y = C_2x \rightarrow C_2 = \frac{y}{x}$ .

Из третьего:

$$dx = \frac{dz}{y} = \frac{dz}{C_2x} \rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{z}{C_2} = C_3 \rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{zx}{y} = C_3$$

Итого решение задачи записывается в виде:

$$\Phi(C_1, C_2, C_3) = 0 \rightarrow \Phi\left(u, \frac{y}{x}, \frac{x^2}{2} - \frac{zx}{y}\right) = 0$$

Эта функция неявно задаёт зависимость  $C_1 = f(C_2, C_3) \rightarrow u = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x^2}{2} - \frac{zx}{y}\right)$ .

Где  $f$  - произвольная дифференцируемая функция (далее эту фразу мы будем опускать во избежание повторений, однако при оформлении решения это стоит всегда прописывать!).

Это общее решение.



Подставляем дополнительное условие:

$$u_{z=0} = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x^2}{2}\right) = x^2 + y^2$$

Переобозначим  $t = \frac{y}{x}, v = \frac{x^2}{2}$ .

Тогда  $x^2 = 2v, y^2 = t^2x^2 = 2t^2v$ .

Итого:

$$f(t, v) = 2v + 2t^2v = 2v(1 + t^2)$$

Ответ:  $u(x, y, z) = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{zx}{y}\right)\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)$

Посмотрим, что изменится в случае неоднородных уравнений:



$$\text{№98. } \begin{cases} y^2 z_x + xyz_y = x \\ z_{x=0} = y^2 \end{cases}$$

Уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{dz}{x}$$

Из этой цепочки выберем следующие уравнения:

$$\begin{cases} \frac{dz}{x} = \frac{dy}{xy} \\ \frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z - \ln y = C_1 \\ y^2 - x^2 = C_2 \end{cases}$$

А значит ищем решение в виде  $\Phi(C_1, C_2) = 0 \rightarrow C_1 = f(C_2) \rightarrow z = \ln y + f(y^2 - x^2)$

$$z_{x=0} = \ln y + f(y^2) = y^2 \rightarrow f(y^2) = y^2 - \ln y$$

Обозначив  $t = y^2 \rightarrow f(t) = t - \frac{1}{2} \ln(t)$

Ответ:  $z(x, y) = \ln y + y^2 - x^2 - \frac{1}{2} \ln(y^2 - x^2)$

То есть – ничего сложного!





$$\text{№99.} \begin{cases} xz_x - 2yz_y = x^2 + y^2 \\ z_{y=1} = x^2 \end{cases}$$

Уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{2y} = \frac{dz}{x^2 + y^2}$$

Из уравнения  $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{2y}$  имеем первый интеграл:  $C_1 = x^2y$ .

Тогда используем равенство

$$-\frac{dy}{2y} = \frac{dz}{x^2 + y^2} = \frac{dz}{\frac{C_1}{y} + y^2} \rightarrow dz = -dy \left( \frac{C_1}{2y^2} + \frac{y}{2} \right) \rightarrow z + \frac{y^2}{4} - \frac{C_1}{2y} = C_2$$



Исключая  $C_1$ :  $z + \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} = C_2$ .

Отсюда получаем  $\Phi(C_1, C_2) = 0 \rightarrow C_2 = f(C_1)$ :

$$z + \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} = f(x^2y) \rightarrow z = f(x^2y) - \frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{2}$$

Находим функцию  $f$ :

$$z_{y=1} = f(x^2) - \frac{1}{4} + \frac{x^2}{2} = x^2 \rightarrow t = x^2 \rightarrow f(t) - \frac{1}{4} + \frac{t}{2} = t \rightarrow f(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}$$

Ответ:  $z(x, y) = -\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2y}{2} + \frac{1}{4}$

И на этом мы будем завершать! В качестве самопроверки усвоения материала попробуйте решить следующие номера – оставшиеся по данной теме из списка задач к подготовке к зачету. Успехов! Ниже, как и всегда, будут приложены решения.

№80, 83-84, 86, 89, 91, 93, 95, 100



## 4. Практика

$$\text{№80. } \begin{cases} y'' = f(x), & 0 < x < 1 \\ y'(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Убедитесь самостоятельно, что при  $f(x) \equiv 0$  задача имеет только тривиальное решение – а значит, функция Грина существует!

Функцию Грина ищем в виде:

$$G(x, s) = \begin{cases} a(s)x + b(s), & 0 < x < s \\ c(s)x + d(s), & s < x < 1 \end{cases}$$



Для определения коэффициентов необходимо решить систему:

$$\begin{cases} a = 0 \\ cl + d = 0 \\ as + b = cs + d \\ c - a = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = s - l \\ c = 1 \\ d = -l \end{cases}$$

Подставим эти значения в вид функции Грина:  $G(x, s) = \begin{cases} s - l, & 0 < x < s \\ x - l, & s < x < l \end{cases}$

А значит, используя эту функцию, мы сможем записать решение краевой задачи для любой неоднородности  $f(x)$ .

Ответ:  $G(x, s) = \begin{cases} s - l, & 0 < x < s \\ x - l, & s < x < l \end{cases}$

Решение задачи запишется в виде:

$$y(x) = \int_0^1 f(s)G(x, s)ds = (x - l) \int_0^x f(s)ds + \int_x^1 (s - l)f(s)ds$$



$$\text{№83. } \begin{cases} y'' - y = 1, & 0 < x < 1 \\ y'(0) = -1; y(1) = 1 \end{cases}$$

Необходимо избавиться от неоднородных граничных условий!

Введём функцию  $z(x) = y(x) + x - 2$ :

$$\begin{cases} z'' - z = 3 - x, & 0 < x < 1 \\ z'(0) = 0; z(1) = 0 \end{cases}$$

Теперь легко убедиться, что решение однородной задачи – только тривиальное. Общее решение однородного уравнения:  $z(x) = C_1 \cosh x + C_2 \sinh x$ . Найдём функции  $z_1(x), z_2(x)$ , удовлетворяющие левому и правому граничному условию:

$$z'(0) = C_2 = 0 \rightarrow z_1(x) = \cosh x$$

$$z(1) = C_1 \cosh 1 + C_2 \sinh 1 = 0 \rightarrow z_2(x) = \sinh(x - 1)$$

И будем искать функцию Грина в виде:

$$G(x, s) = \begin{cases} a(s) \cosh x, & 0 < x < s \\ b(s) \sinh(x - 1), & s < x < 1 \end{cases}$$



Воспользуемся непрерывностью функции Грина и разрывом первой производной:

$$\begin{cases} a \cosh s = b \sinh(s - 1) \\ b \cosh(s - 1) - a \sinh s = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{2e \sinh(s - 1)}{1 + e^2} \\ b = \frac{2e \cosh s}{1 + e^2} \end{cases}$$

Итого, наша функция Грина:

$$G(x, s) = \frac{2e}{1 + e^2} \begin{cases} \sinh(s - 1) \cosh x, & 0 < x < s \\ \cosh s \sinh(x - 1), & s < x < 1 \end{cases}$$

•



И запишем решение для нашей неоднородности ( $f(x) = 3 - x$ ):

$$\begin{aligned}
 y(x) &= z(x) + 2 - x = \int_0^1 f(s)G(x, s)ds + 2 - x \\
 &= \frac{2e \sinh(x-1)}{1+e^2} \int_0^x \cosh s (3-s)ds + \frac{2e \cosh x}{1+e^2} \int_x^1 \sinh(s-1) (3-s)ds + 2 - x \\
 &= \frac{2e \sinh(x-1)}{1+e^2} ((3-x) \sinh x + \cosh x - 1) \\
 &\quad + \frac{2e \cosh x}{1+e^2} (\sinh(1-x) + (x-3) \cosh(1-x) + 2) + 2 - x \\
 &= \frac{e^2 + 4e - 1}{1+e^2} \cosh x - \sinh x - 1
 \end{aligned}$$

ОТВЕТ:  $G(x, s) = \frac{2e}{1+e^2} \begin{cases} \sinh(s-1) \cosh x, & 0 < x < s \\ \cosh s \sinh(x-1), & s < x < 1 \end{cases}$   $y(x) = \frac{e^2+4e-1}{1+e^2} \cosh x - \sinh x - 1$



$$\text{№84. } \begin{cases} y'' + y = f(x), & 0 < x < \pi \\ y'(0) = 0; & y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Убедитесь самостоятельно, что решение однородной задачи – только тривиальное. Решение однородного уравнения  $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ . Строим функцию Грина в виде:

И найдём частные решения уравнения  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ , чтобы они удовлетворяли первому и второму граничному условиям соответственно:

$$\begin{aligned} y'(0) = C_2 = 0 &\rightarrow y_1(x) = \cos x \\ y(\pi) = -C_1 = 0 &\rightarrow y_2(x) = \sin x \end{aligned}$$

Теперь, зная данные функции, функцию Грина будем искать в виде:

$$G(x, s) = \begin{cases} a(s) \cos x, & 0 < x < s \\ b(s) \sin x, & s < x < \pi \end{cases}$$





А функции  $a(s)$  и  $b(s)$  найдем из непрерывности функции Грина и из разрыва первой производной функции Грина:

$$\begin{cases} a \cos s = b \sin s \\ b \cos s + a \sin s = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \sin s \\ b = \cos s \end{cases}$$

Запишем функцию Грина:

$$G(x, s) = \begin{cases} \sin s \cos x, & 0 < x < s \\ \cos s \sin x, & s < x < \pi \end{cases}$$

А решение задачи запишется в виде:

$$y(x) = \int_0^{\pi} f(s)G(x, s)ds = \sin x \int_0^x f(s) \cos s ds + \cos x \int_x^{\pi} f(s) \sin s ds$$



$$\text{№86. } \begin{cases} x^2 y'' + 2xy' = f(x), & 0 < x < 3. \\ |y(0)| < \infty; & y'(3) = 0 \end{cases}$$

Запишем решение однородного уравнения (если не помним, как решать – смотрим 2е занятие):  $y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2$ . Проверим, является ли решение однородной задачи тривиальным:

$$\begin{aligned} |y(0)| < \infty &\rightarrow C_1 = 0 \rightarrow y(x) = C_2 \\ y'(3) = 0 & \end{aligned}$$

А значит,  $C_2$  может оставаться произвольной!

Действительно, для однородной задачи функция вида  $y(x) = C$  является решением – у данной задачи не существует функции Грина!

Также убедитесь, что при  $f(x) \equiv 1$  решений, удовлетворяющих обоим граничным условиям – не существует.



$$\text{№89. } \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1. \\ y'(0) = 0; & y'(1) = 0 \end{cases}$$

Так как при разных значениях параметра  $\lambda$  мы будем получать разные решения уравнения, рассмотрим различные варианты:

1)  $\lambda = -\delta^2 < 0$ :

В этом случае общее решение уравнения:  $y(x) = A \cosh \delta x + B \sinh \delta x$ .  
Подставляем в граничные условия:

$$y'(0) = \delta B = 0; \quad y'(1) = \delta A \sinh \delta = 0 \rightarrow A = 0$$

То есть мы имеем только тривиальное решение.

2)  $\lambda = 0$ :

В этом случае общее решение уравнения:  $y(x) = Ax + B$ . Подставляем в граничные условия:

$$y'(0) = A = 0; \quad y'(1) = A = 0$$

Так, мы имеем нулевое СЗ и соответствующую ему СФ:  $\lambda_0 = 0; y_0(x) = C$ .



3)  $\lambda = \delta^2 > 0$ :

В этом случае общее решение уравнения:  $y(x) = A \cos \delta x + B \sin \delta x$  .  
Подставляем в граничные условия:

$$y'(0) = \delta B = 0; \quad y'(1) = \delta A \sin \delta = 0 \rightarrow \sin \delta = 0 \rightarrow \delta_n = \pi n$$

Так мы нашли собственные значения (СЗ):  $\lambda_n = (\pi n)^2, n = 1, 2 \dots$  и соответствующие им собственные функции (СФ):  $y_n(x) = A \cos \delta_n x = A \cos(\pi n x)$ .

Можно объединить с нулевым СЗ:

Ответ:  $\lambda_n = (\pi n)^2, y_n(x) = A \cos(\pi n x), n = 0, 1, 2 \dots \forall A \neq 0$



$$\text{№91. } \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 3 \\ y'(0) = 0; & y(3) = 0 \end{cases}$$

Убедитесь самостоятельно, что задача не имеет СЗ, меньших нуля.

А значит, рассматриваем случай  $\lambda = \delta^2 > 0$ :

В этом случае общее решение уравнения:  $y(x) = A \cos \delta x + B \sin \delta x$  .  
Подставляем в граничные условия:

$$y'(0) = \delta B = 0; \quad y(3) = A \cos 3\delta = 0 \rightarrow \cos 3\delta = 0 \rightarrow \delta_n = \frac{1}{3} \left( \frac{\pi}{2} + \pi n \right), \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

Так мы нашли собственные значения (СЗ):  $\lambda_n = \frac{1}{9} \left( \frac{\pi}{2} + \pi n \right)^2$ ,  $n = 0, 1, 2 \dots$  и соответствующие им собственные функции (СФ):  $y_n(x) = A \cos \delta_n x = A \cos \frac{1}{3} \left( \frac{\pi}{2} + \pi n \right) x$ .

Можно объединить с нулевым СЗ:

$$\text{Ответ: } \lambda_n = \frac{1}{9} \left( \frac{\pi}{2} + \pi n \right)^2, \quad y_n(x) = A \cos \frac{1}{3} \left( \frac{\pi}{2} + \pi n \right) x, \quad n = 0, 1, 2 \dots, \forall A \neq 0$$



$$\text{№93. } \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi. \\ y'(0) = y(0); & y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

Убедитесь самостоятельно, что задача не имеет СЗ, меньших нуля. А значит, рассматриваем случай  $\lambda = \delta^2 > 0$ .

В этом случае общее решение уравнения:  $y(x) = A \cos \delta x + B \sin \delta x$ .  
Подставляем в граничные условия:

$$\begin{cases} \delta B = A \\ -\delta A \sin \delta \pi + \delta B \cos \delta \pi = 0 \end{cases}$$

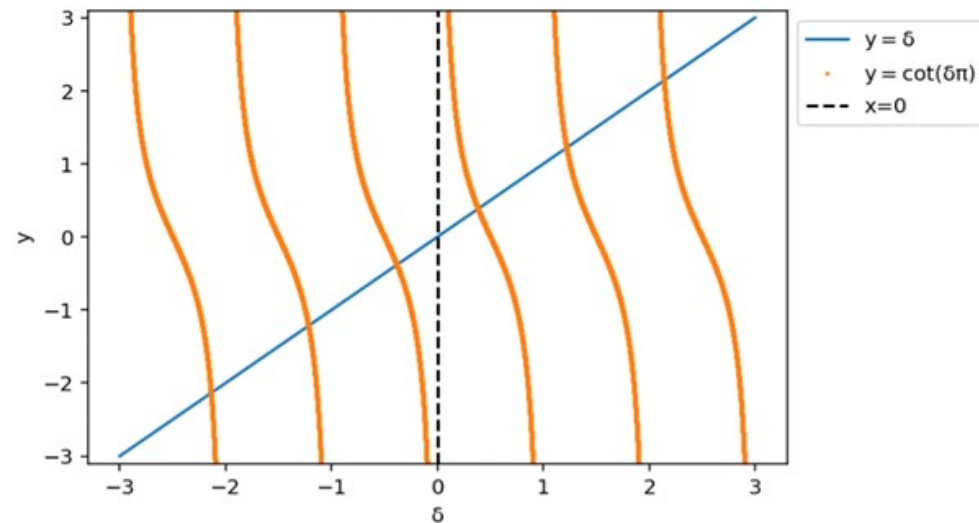
Находим определитель и приравниваем его к нулю:

$$D(\delta) = \begin{vmatrix} 1 & -\delta \\ -\delta \sin \delta \pi & \delta \cos \delta \pi \end{vmatrix} = \delta \cos \delta \pi - \delta^2 \sin \delta \pi = 0 \rightarrow \cot \delta \pi = \delta$$



Вновь перед нами трансцендентное уравнение!

Графически:



То есть видно, что мы имеем большое количество решений – точек пересечения двух графиков. Однако аналитически мы их выписать не можем. Тем не менее, перенумеруем решения уравнения  $\cot \delta\pi = \delta$  индексом  $n$ , и тогда мы получим набор СЗ  $\lambda_n = \delta_n^2$ , где  $\delta_n$  – решения уравнения  $\cot \delta\pi = \delta$ .

Подставим найденные  $\delta_n$  обратно в первое уравнение системы:

$$A = \delta_n B$$

И запишем ответ:

Ответ:  $\lambda_n = (\delta_n)^2$ ,  $y_n(x) = B(\delta_n \cos \delta_n x + \sin \delta_n x)$ ,  $n = 1, 2, \dots, \forall B \neq 0$



$$\text{№95. } \begin{cases} z_x + cz_y = 0 \\ z_{y=0} = \phi(x) \end{cases}$$

Уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{c} = \frac{dz}{0}$$

Из уравнения  $dx = \frac{dy}{c}$  имеем первый интеграл:  $C_1 = x - \frac{y}{c}$ .

Второй интеграл, очевидно:  $z = C_2$ .

Отсюда получаем  $\Phi(C_1, C_2) = 0 \rightarrow C_2 = f(C_1)$ :  
$$z = f\left(x - \frac{y}{c}\right)$$

где  $f$  – произвольная дифференцируемая функция.

Находим функцию  $f$ :  $z_{y=0} = f(x) = \phi(x)$

Ответ:  $z(x, y) = \phi\left(x - \frac{y}{c}\right)$





$$\text{№100. } \begin{cases} xz_x + zz_y = y \\ y = 2z, \quad x + 2y = z \end{cases}$$

Обратите внимание! Данное уравнение является квазилинейным, так как коэффициент при  $z_y$  зависит от решения  $z$ . Уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$$

Из уравнения  $\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$  имеем первый интеграл:  $C_1 = z^2 - y^2$ .

Для нахождения второго интеграла, воспользуемся свойством (см. Филиппов, §19):

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = t \rightarrow \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = t$$

Воспользуемся им  $\left( a_1 = dy, b_1 = z, a_2 = dz, b_2 = y, t = \frac{dx}{x} \right)$ :

$$\frac{dy + dz}{z + y} = \frac{dx}{x} \rightarrow \frac{d(z + y)}{z + y} = \frac{dx}{x} \rightarrow z + y - C_2 x = 0$$



Отсюда получаем  $\Phi(C_1, C_2) = 0 \rightarrow C_2 = f(C_1)$ :

$$\frac{z + y}{x} = f(z^2 - y^2)$$

Находим функцию  $f$ , выразив всё через  $z$ :

$$y = 2z, x + 2y = z \rightarrow x = -3z, y = 2z$$
$$\frac{3z}{-3z} = f(z^2 - 4z^2) \rightarrow f(t) \equiv -1$$

Ответ:  $z(x, y) = -x - y$

