ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ФОРШ
ПАВЕЛ АНАТОЛЬЕВИЧ

—

ХИМФАК МГУ

ХИМИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. Ломоносова

П.А. Форш

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ ДЛЯ ХИМИКОВ

Москва
2010

Оглавление

Предисловие

Содержание пособия составляют задачи, которые в течение ряда лет предлагались на лекциях и семинарских занятиях по теоретической механике студентам химического факультета МГУ. Несмотря на то, что к настоящему моменту имеется большое количество прекрасных задачников по теоретической механике, использование их вызывает определенные трудности у студентов нефизических специальностей. Это связано с тем, что имеющиеся задачники, как правило, ориентированы на физиков и поэтому содержат большой объем материала и часто изобилуют сложным математическим аппаратом. В данном учебном пособии собраны задачи, которые, не выходя за рамки программы по теоретической механике для студентов химических факультетов университетов, демонстрируют применение основных законов механики к исследованию конкретных систем.

Пособие состоит из пяти глав, в которых рассматриваются задачи по следующим разделам механики: уравнения Ньютона, уравнения Лагранжа, задача двух тел, линейные колебания, динамика твердого тела, уравнения Гамильтона, канонические преобразования, уравнения Гамильтона-Якоби и адиабатические инварианты. В начале каждого параграфа приводятся основные теоретические сведения, необходимые для решения задач. Затем представлены подробные решения типичных задач по изучаемой теме и в заключение даны задачи для самостоятельного решения. Начало и конец решений задач отмечены соответственно знаками □ и ■. При подборе задач использовались различные источники, список которых содержится в разделе “литература”. В приложении более подробно, чем в основном тексте, рассмотрены криволинейные системы координаты и, в частности, получены выражения для скорости и ускорения точки в ортогональных криволинейных координатах.

Автор выражает самую искреннюю благодарность доценту физического факультета МГУ К.А. Казакову за большую помощь в работе, важные указания, замечания и многие полезные советы, способствовавшие заметному улучшению данного пособия. Также автор считает приятным долгом поблагодарить за ряд ценных рекомендаций и помощь в подборе задач сотрудников физического факультета МГУ: доцентов Л.А. Головани, Г.Б. Демидовича, Е.А. Константинову и научного сотрудника Д.М. Жигунова.

Глава 1. Ньютоновская механика

§ 1. Уравнения Ньютона

Пусть $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор материальной точки массы m относительно какой-либо инерциальной системы отсчета, а $\boldsymbol{F}$ – равнодействующая всех сил, приложенных к данной точке. Тогда уравнения движения (уравнения Ньютона) материальной точки в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &\equiv m\ddot{x} = F_x, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &\equiv m\ddot{y} = F_y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &\equiv m\ddot{z} = F_z. \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

Основной задачей механики является определение закона движения материальной точки, т.е. зависимости $\boldsymbol{r}(t)$. Для нахождения закона движения точки в декартовых координатах необходимо проинтегрировать систему (1.1), являющуюся системой трех дифференциальных уравнений второго порядка. Из теории дифференциальных уравнений известно, что решение системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка содержит шесть произвольных постоянных. Для однозначного определения этих постоянных необходимо задать начальные условия, т.е. в какой-то определенный момент времени, например при $t=0$, задать координаты движущейся точки x_0, y_0, z_0 и проекции ее скорости $v_x^0,\ v_y^0,\ v_z^0$.

Задача 1.1. Материальная точка массы m брошена с поверхности Земли со скоростью $\boldsymbol{v}_0$ под углом α к горизонту. На точку действует сила сопротивления воздуха $\boldsymbol{F}_d$, направленная против скорости и пропорциональная скорости точки, т.е. $\boldsymbol{F}_d = -k\boldsymbol{v}$. Найдите закон движения точки.

□ Выберем прямоугольную декартову систему координат таким образом, чтобы ее начало находилось в точке бросания, а скорость $\boldsymbol{v}_0$ лежала в плоскости yz. Ось z направим по вертикали вверх. При сделанном выборе осей координат начальные условия будут иметь следующий вид:

$$x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0;\ v_x^0 = 0, v_y^0 = v_0\cos\alpha, v_z^0 = v_0\sin\alpha.$$

Помимо силы сопротивления воздуха на точку будет действовать сила тяжести $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$, где $\boldsymbol{g}$ – ускорение свободного падения, направленное по оси z вертикально вниз. Уравнения движения в проекциях на оси выбранной системы координат записываются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv_x}{dt} &= -kv_x, \\ m\frac{dv_y}{dt} &= -kv_y, \\ m\frac{dv_z}{dt} &= -mg - kv_z. \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Интегрируя каждое уравнение системы (1.2), получим выражения для проекций скорости точки в произвольный момент времени t:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= C_1 e^{-\frac{k}{m}t}, \\ v_y &= C_2 e^{-\frac{k}{m}t}, \\ v_z &= C_3 e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}. \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Полагая в уравнениях (1.3) $t=0$ и используя начальные условия, найдем:

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = v_0 \cos\alpha, \qquad C_3 = v_0 \sin\alpha + \frac{mg}{k}.$$

После подстановки постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3 в (1.3) и замены проекций скорости на оси координат производными от координат по времени получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0, \\ \frac{dy}{dt} &= v_0 \cos\alpha e^{-\frac{k}{m}t}, \\ \frac{dz}{dt} &= \left(v_0 \sin\alpha + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}. \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Интегрируя уравнения (1.4), имеем:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_4, \\ y &= -\frac{v_0 m}{k} \cos\alpha\, e^{-\frac{k}{m}t} + C_5, \\ z &= -\frac{m}{k}\left(v_0 \sin\alpha + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}t + C_6. \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

С помощью начальных условий определяем, что

$$C_4 = 0, \qquad C_5 = \frac{v_0 m}{k}\cos\alpha\,, \qquad C_6 = \frac{m}{k}(v_0 \sin\alpha + \frac{mg}{k}).$$

Подставляя найденные константы в (1.5), получим закон движения точки:

$$\left.\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= \frac{v_0 m}{k}\cos\alpha(1 - e^{-\frac{k}{m}t}), \\ z &= \frac{m}{k}\left(v_0 \sin\alpha + \frac{mg}{k}\right)(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - \frac{mg}{k}t. \end{aligned}\right\}$$

■

Задача 1.2. Гармонический осциллятор. На точку массы m действует сила, направленная к неподвижному центру O и пропорциональная расстоянию от точки до центра. В начальный момент времени *t=0* точка находилась на расстоянии $\boldsymbol{r}_0$ от центра и имела скорость $\boldsymbol{v}_0$. Найдите закон движения и уравнение траектории точки.

□ Выберем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ее начало совпадало с центром O, а векторы $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{v}_0$ лежали в плоскости xy. Силу, действующую на точку, можно записать в виде $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r}$, где k – коэффициент пропорциональности. Уравнения движения в проекциях на оси выбранной системы координат будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx, \\ m\ddot{y} &= -ky, \\ m\ddot{z} &= -kz. \end{aligned}\right\}$$

Перепишем эти уравнения в более привычной для гармонических колебаний форме:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= 0, \\ \ddot{y} + \omega^2 y &= 0, \\ \ddot{z} + \omega^2 z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

где $\omega^2 = {}^{k}\!/_{m}$. Решение системы (1.6) можно записать как

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t\,, \\ y &= C_3 \cos\omega t + C_4 \sin\omega t\,, \\ z &= C_5 \cos\omega t + C_6 \sin\omega t\,. \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Дифференцируя систему (1.7) по времени, найдем выражения для проекций скорости точки:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t\,, \\ \dot{y} &= -C_3\omega\sin\omega t + C_4\omega\cos\omega t\,, \\ \dot{z} &= -C_5\omega\sin\omega t + C_6\omega\cos\omega t\,. \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

Начальные условия для координат и проекций скорости точки имеют вид:

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0 = 0; \;\; \dot{x}(0) = \dot{x}_0,\; \dot{y}(0) = \dot{y}_0,\; \dot{z}(0) = \dot{z}_0 = 0.$$

Здесь x_0, y_0, z_0 и $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ - проекции векторов $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{v}_0$, соответственно, на оси координат. Используя начальные условия, из (1.7) и (1.8) находим:

$$C_1 = x_0, \qquad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega}, \qquad C_3 = y_0, \qquad C_4 = \frac{\dot{y}_0}{\omega}, \qquad C_5 = 0, \qquad C_6 = 0.$$

Таким образом, зависимости координат точки от времени определяются выражениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0\cos\omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t\,, \\ y &= y_0\cos\omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega}\sin\omega t\,, \\ z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

Используя тригонометрические формулы, первые два уравнения системы (1.9) можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= A_1\cos(\omega t + \alpha_1)\,, \\ y &= A_2\cos(\omega t + \alpha_1 + \varphi)\,, \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

где $A_1 = \sqrt{x_0^2 + {\dot{x}_0^2}/{\omega^2}}$, $A_2 = \sqrt{y_0^2 + {\dot{y}_0^2}/{\omega^2}}$, $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, $tg\alpha_1 = -{\dot{x}_0}/{\omega x_0}$,

$$tg\alpha_2 = -{\dot{y}_0}/{\omega y_0}.$$

Из первого выражения в (1.10) следует, что

$$\cos(\omega t + \alpha_1) = \frac{x}{A_1}. \tag{1.11}$$

Тогда

$$\sin(\omega t + \alpha_1) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}. \tag{1.12}$$

Второе выражение в (1.10) представим в форме

$$\frac{y}{A_2} = \cos(\omega t + \alpha_1 + \varphi) =$$

$$= \cos(\omega t + \alpha_1)\cos\varphi - \sin(\omega t + \alpha_1)\sin\varphi. \tag{1.13}$$

Учитывая (1.11) и (1.12), из (1.13) получаем

$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1}\cos\varphi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}\sin\varphi,$$

откуда

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos\varphi = \sin^2\varphi.$$

Это выражение и является уравнением траектории, которая представляет собой эллипс, произвольно ориентированный относительно осей x и y с центром в начале координат. ■

Задача 1.3. Найдите закон движения частицы массы m и заряда q в однородных и постоянных электрическом и магнитном полях с напряженностями $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, соответственно. Начальная скорость частицы $\boldsymbol{v}_0$.

□ Выберем систему координат так, чтобы ось z совпадала с направлением $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, вектор $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ лежал в плоскости xz, а начало отсчета было совмещено с положением точки в начальный момент времени. Уравнение движения точки, находящейся в электрическом и магнитном полях имеет вид:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = q\boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{q}{c}[\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{\mathcal{H}}]. \tag{1.14}$$

Правая часть данного уравнения представляет собой силу Лоренца, записанную в гауссовой системе единиц (c - скорость света).

Распишем векторное произведение в уравнении (1.14):

$$[\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{\mathcal{H}}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & \mathcal{H} \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_x \dot{y}\mathcal{H} - \boldsymbol{e}_y \dot{x}\mathcal{H}, \tag{1.15}$$

где $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ – орты осей x, y и z, соответственно.

Учитывая (1.15), запишем уравнение (1.14) в проекциях на оси координат. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= q\mathcal{E}_x + \frac{q\mathcal{H}}{c}\dot{y}, \\ m\ddot{y} &= -\frac{q\mathcal{H}}{c}\dot{x}, \\ m\ddot{z} &= q\mathcal{E}_z. \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

Интегрируя третье уравнение системы (1.16), находим:

$$\dot{z} = \frac{q\mathcal{E}_z}{m}t + C_1.$$

Константу C_1 определяем из условия: при $t = 0$, $\dot{z} = \dot{z}_0$ ($\dot{z}_0$ - проекция $\boldsymbol{v}_0$ на ось z). Тогда

$$\dot{z} = \frac{q\mathcal{E}_z}{m}t + \dot{z}_0\,,$$

откуда интегрируя, получаем:

$$z = \frac{q\mathcal{E}_z}{2m}t^2 + \dot{z}_0\,t + C_2.$$

Из начального условия $z(t = 0) = 0$ следует, что $C_2 = 0$. Таким образом,

$$z = \frac{q\mathcal{E}_z}{2m}t^2 + \dot{z}_0\,t, \tag{1.17}$$

т.е. по оси z частица движется с постоянным ускорением.

Для нахождения зависимостей *x(t)* и *y(t)* умножим первое уравнение системы (1.16) на мнимую единицу *i* и сложим со вторым:

$$\ddot{y} + i\ddot{x} = i\omega\dot{y} - \omega\dot{x} + i\frac{q}{m}\mathcal{E}_x, \tag{1.18}$$

где $\omega = {}^{q\mathcal{H}}/_{mc}$ есть так называемая циклотронная частота. Введем обозначение $u \equiv \dot{y} + i\dot{x}$. Тогда (1.18) запишется в виде

$$\frac{du}{dt} - i\omega u = i\frac{q}{m}\mathcal{E}_x. \tag{1.19}$$

Решение уравнения (1.19) можно записать в виде суммы общего решения однородного уравнения (без правой части) и частного решения неоднородного уравнения (с правой частью). Общее решение есть $u_0 =$ $= C_3 e^{i\omega t}$, а частное можно представить в виде

$$u_1 = -{}^{q\mathcal{E}_x}/_{m\omega} = -{}^{c\mathcal{E}_x}/_{\mathcal{H}}.$$

Таким образом

$$u = u_0 + u_1 = C_3 e^{i\omega t} - \frac{c\mathcal{E}_x}{\mathcal{H}}. \tag{1.20}$$

Константа C_3 – в общем случае комплексная. Ее можно записать как

$$C_3 = Ae^{i\alpha}, \tag{1.21}$$

где A и α – действительные числа. Подставляя (1.21) в (1.20) и пользуясь формулой Эйлера, получим:

$$u = \dot{y} + i\dot{x} = A\cos(\omega t + \alpha) + iA\sin(\omega t + \alpha) - \frac{c\mathcal{E}_x}{\mathcal{H}}.$$

Отделяя мнимую и действительную части, находим:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= A\sin(\omega t + \alpha)\,, \\ \dot{y} &= A\cos(\omega t + \alpha) - \frac{c\mathcal{E}_x}{\mathcal{H}}. \end{aligned}\right\} \tag{1.22}$$

Воспользуемся тем, что при $t = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, $\dot{y} = \dot{y}_0$. Здесь $\dot{x}_0$ и $\dot{y}_0$ проекции скорости $\boldsymbol{v}_0$ на оси x и y, соответственно. Подставляя в (1.22) $t =$ 0, имеем:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_0 &= A\sin\alpha\,, \\ \dot{y}_0 &= A\cos\alpha - \frac{c\mathcal{E}_x}{\mathcal{H}}. \end{aligned}\right\} \tag{1.23}$$

Отсюда

$$A = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \left(\dot{y}_0 + \frac{c\mathcal{E}_x}{\mathcal{H}}\right)^2},$$

$$tg\alpha = \frac{\dot{x}_0}{\dot{y}_0 + \frac{c\mathcal{E}_x}{\mathcal{H}}}.$$

Интегрируя (1.22), приходим к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{A}{\omega}\cos(\omega t + \alpha) + C_4, \\ y &= \frac{A}{\omega}\sin(\omega t + \alpha) - \frac{c\mathcal{E}_x}{\mathcal{H}}t + C_5. \end{aligned}\right\} \qquad (1.24)$$

Для нахождения констант C_4 и C_5 используем начальные условия: в начальный момент времени $x = 0$, $y = 0$. Положив $t = 0$, перепишем систему (1.24):

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -\frac{A}{\omega}\cos\alpha + C_4, \\ 0 &= \frac{A}{\omega}\sin\alpha + C_5. \end{aligned}\right\} \qquad (1.25)$$

Из системы (1.23) следует, что $\sin\alpha = {\dot{x}_0}/{A}$, $\cos\alpha = {(\dot{y}_0 + \frac{c\mathcal{E}_x}{\mathcal{H}})}/{A}$.

Подставляя эти выражения в (1.25), определяем константы C_4 и C_5:

$$C_4 = \frac{\dot{y}_0 + \frac{c\mathcal{E}_x}{\mathcal{H}}}{\omega}, \qquad C_5 = -\frac{\dot{x}_0}{\omega}.$$

В итоге

$$x = \frac{\dot{y}_0 + \frac{c\mathcal{E}_x}{\mathcal{H}}}{\omega} - \frac{A}{\omega}\cos(\omega t + \alpha), \qquad (1.26)$$

$$y = -\frac{\dot{x}_0}{\omega} + \frac{A}{\omega}\sin(\omega t + \alpha) - \frac{c\mathcal{E}_x}{\mathcal{H}}t. \qquad (1.27)$$

Формулы (1.17), (1.26) и (1.27) определяют закон движения частицы. ■

Задачи для самостоятельного решения

1. Точка массы m падает вертикально вниз без начальной скорости под действием силы тяжести, испытывая силу сопротивления воздуха $\boldsymbol{F}_d$, значение которой пропорционально квадрату скорости, то есть $\boldsymbol{F}_d = -k\boldsymbol{v}^2$ $(k = const)$. Найдите закон движения точки.

2. Частица массы m и заряда q движется в переменном электрическом поле с напряженностью $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_0 \cos \omega t$, где $\boldsymbol{\mathcal{E}}_0$ и ω - постоянные величины. В начальный момент времени скорость частицы $\boldsymbol{v}_0$. Найдите закон движения частицы.

3. Частица массы m и заряда q движется в однородных постоянных взаимно перпендикулярных полях: электрическом, магнитном и гравитационном. В начальный момент частица покоилась. Найдите величину максимальной скорости, приобретенной частицей.

4. Найдите закон движения заряженного гармонического осциллятора (частицы массы m и заряда q, движущейся под действием упругой силы $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r}$, $k = const$), находящегося в однородном стационарном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$. В начальный момент времени смещение частицы $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}_0$, а ее скорость $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0$.

Глава 2. Уравнения Лагранжа

§ 2. Обобщенные координаты

Для однозначного определения положения материальной точки в пространстве необходимо задать три декартовы координаты *x, y, z*. В случае описания механической системы, состоящей из *N* свободных материальных точек, необходимо, очевидно, задать *3N* декартовых координат. Однако использование именно декартовых координат не является обязательным. В зависимости от условий задачи может оказаться целесообразным использование каких-либо других координат. Любые *s* независимых величин, однозначно определяющих положение механической системы, называются ее *обобщенными координатами*. Число обобщенных координат называется *числом степеней свободы* системы. Обобщенные координаты будем обозначать буквами $q_1, q_2, \dots, q_s$. Производные от обобщенных координат по времени $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ называются *обобщенными скоростями*.

Механическая система может представлять собой не только совокупность свободных материальных точек. На материальные точки системы могут быть наложены связи. Под *связями* будем понимать любые условия, ограничивающие свободу перемещения точек механической системы. Математически связи могут быть выражены уравнениями или неравенствами, в которые входят время, координаты всех или части точек системы и их производные по времени. В дальнейшем мы будем рассматривать *голономные* или *интегрируемые связи*, аналитическую запись которых можно свести к виду

$$f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N, t) = 0,$$

где $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N$ – радиусы-векторы точек системы. Для системы *N* материальных точек, на которую наложено *n* голономных связей, число степеней свободы равно

$$s = 3N - n.$$

Задача 2.1. Найдите число степеней свободы материальной точки, движущейся по поверхности сферы радиуса R (сферический маятник).

□ На точку наложена одна голономная связь, которую можно записать в виде

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Число степеней свободы

$$s = 3N - n = 3 - 1 = 2. \quad ■$$

Задача 2.2. Найдите число степеней свободы твердого тела.

□ Под твердым телом в механике понимается система материальных точек, расстояние между которыми не изменяется. Очевидно, что положение твердого тела в пространстве определяется заданием любых трех его точек, не лежащих на одной прямой. Поскольку расстояние между точками должно оставаться неизменным, то на выбранные точки наложено *n*=3 связей. Таким образом, число степеней свободы

$$s = 3N - n = 3\cdot 3 - 3 = 6. \blacksquare$$

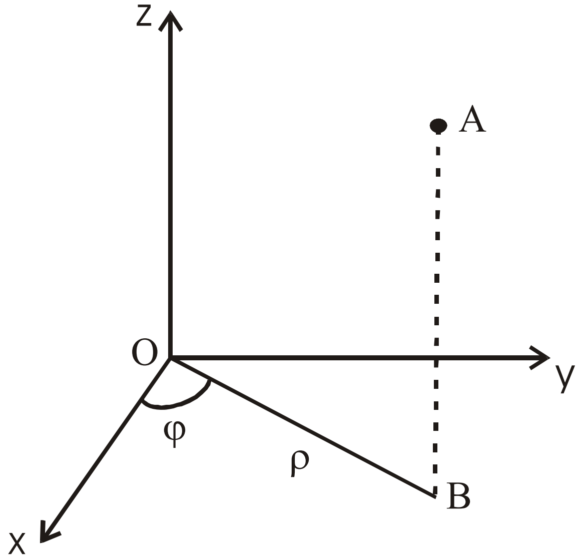

Рис. 2.1

Рассмотрим *цилиндрическую*, *сферическую* и *полярную* системы координат, которыми будем часто пользоваться в дальнейшем*.

В *цилиндрической системе* координат положение точки A задается ее аппликатой $z = AB$ и полярными координатами $\rho = OB$, $\varphi = \angle\, xOB$ (рис. 2.1). Координаты ρ, φ, z могут изменяться в пределах: $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Прямоугольные и цилиндрические координаты связаны соотношениями

$$x = \rho cos\varphi, \;\; y = \rho sin\varphi, \;\; z = z. \quad (2.1)$$

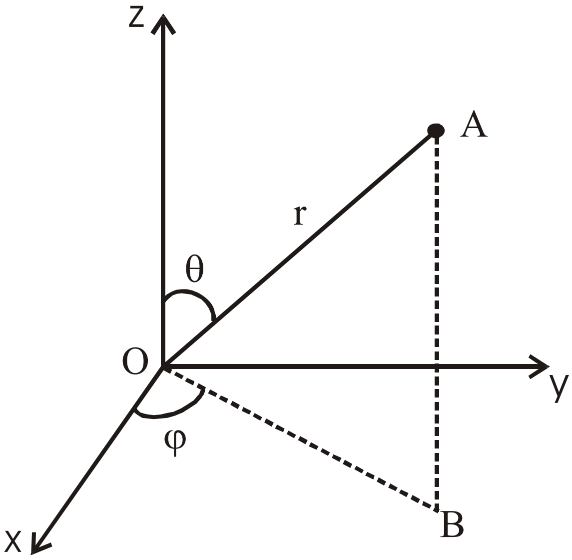

Рис. 2.2

В *сферической системе* координат положение точки A можно определить следующими тремя величинами (рис. 2.2): расстоянием $r = OA$, углом $\theta = \angle\, zOA$ между лучами Oz и OA, углом $\varphi = \angle\, xOB$ (B – проекция точки A на плоскость xy). При этом

$0 \le r < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$. Ось z будем называть полярной осью сферической системы координат. Прямоугольные и сферические координаты связаны равенствами

* Более подробно криволинейные системы координат описаны в приложении.

$$x = r sin\theta cos\varphi, \;\; y = r sin\theta sin\varphi, \qquad z = r cos\theta. \qquad (2.2)$$

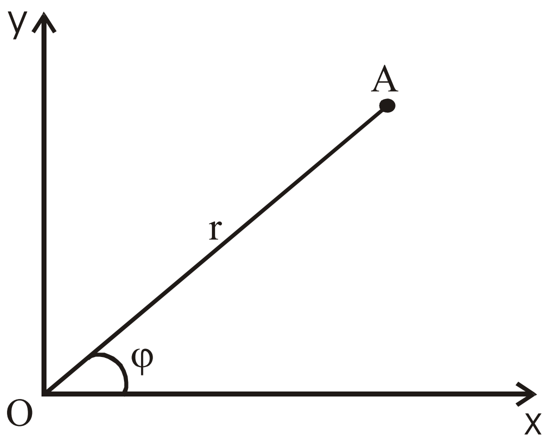

Рис. 2.3

В случае движения точки по плоскости бывает удобным использовать *полярную систему* координат. В этой системе координат положение точки A определяется полярным радиусом $r = OA$ и полярным углом $\varphi = \angle xOA$ (рис. 2.3). Полярные координаты изменяются в пределах: $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Связь координат x, y с координатами r, φ задается соотношениями

$$x = r cos\varphi, \;\; y = r sin\varphi. \qquad (2.3)$$

Задача 2.3. Найдите выражение для квадрата скорости материальной точки в сферической системе координат.

□ Продифференцируем соотношение (2.2), связывающие прямоугольные и сферические координаты, по времени. Получим:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} sin\theta cos\varphi + r\dot{\theta} cos\theta cos\varphi - r\dot{\varphi} sin\theta sin\varphi, \\ \dot{y} &= \dot{r} sin\theta sin\varphi + r\dot{\theta} cos\theta sin\varphi + r\dot{\varphi} sin\theta cos\varphi, \\ \dot{z} &= \dot{r} cos\theta - r\dot{\theta} sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

Квадрат скорости точки

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2. \qquad (2.5)$$

Возводя соотношения (2.4) в квадрат и подставляя полученные выражения в (2.5), находим:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 sin^2\theta \dot{\varphi}^2. \;\blacksquare$$

<u>*Задачи для самостоятельного решения*</u>

5. Найдите число степеней свободы тонкого массивного стержня.

6. Найдите число степеней свободы трехатомной молекулы.

7. Найдите число степеней свободы твердого тела с неподвижной осью.

8. Найдите число степеней свободы твердого тела с одной закрепленной точкой.

9. Найдите число степеней свободы деформируемого тела или жидкости.

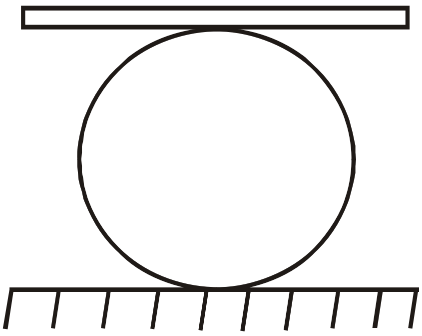

Рис. 2.4

10. На цилиндр, который может двигаться без проскальзывания по горизонтальной плоскости, положен прямоугольный брусок (рис. 2.4). Считая, что проскальзывание между бруском и цилиндром отсутствует, определите количество степеней свободы системы.

11. Запишите выражение для квадрата скорости материальной точки в а) полярной и б) цилиндрической системах координат.

§ 3. Уравнения Лагранжа в независимых координатах

Пусть на механическую систему с s степенями свободы наложены голономные идеальные связи. Под *идеальными связями* будем понимать связи без трения. Кроме того будем считать, что на точки системы действуют только потенциальные силы. Потенциальную силу F_i, действующую на i-ую точку системы, можно представить в виде

$$\boldsymbol{F}_i = -grad_{\boldsymbol{r}_i} U \equiv -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i}.$$

Функция U называется *потенциалом сил* или *потенциальной энергией*. Она может зависеть только от обобщенных координат и времени, т.е.

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_s, t).$$

Движение рассматриваемой механической системы описывается уравнениями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1,2, \dots, s, \tag{3.1}$$

в которых функция

$$L = T - U, \tag{3.2}$$

где T есть кинетическая энергия системы.

Уравнения (3.1) называются *уравнениями Лагранжа в независимых координатах* (в дальнейшем просто уравнениями Лагранжа)*, а функция L - *функцией Лагранжа.* В (3.2) кинетическая энергия

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2},$$

где m_i - масса i-ой частицы, v_i - ее скорость, выраженная через обобщенные координаты q_α и обобщенные скорости $\dot{q}_\alpha$, а суммирование ведется по всем частицам системы. Часто, для краткости, совокупность обобщенных координат $\{q_1, q_2, \dots, q_s\}$ мы будем обозначать посредством q, а совокупность обобщенных скоростей $\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s\}$ посредством $\dot{q}$.

Уравнения (3.1) представляют собой уравнения движения, которые в качестве неизвестных содержат обобщенные координаты. Нахождение закона движения механической системы с помощью уравнений (3.1) по сравнению с законами Ньютона имеет два существенных преимущества.

1) Вид уравнений Лагранжа не зависит от конкретного выбора обобщенных координат. При другом их выборе изменяется только функция Лагранжа, а форма уравнений (3.1) остается такой же. В связи с этим говорят, что уравнения Лагранжа обладают свойством *ковариантности*.
2) Если на систему наложены связи, то в уравнениях Ньютона появляются реакции связей, под которыми понимаются силы, действующие на точки системы со стороны тел, осуществляющих связи. В уравнения Лагранжа реакции связей не входят в явном виде, хотя, конечно, уравнения Лагранжа полностью учитывают влияние связей на систему.

Задача 3.1. Напишите функцию Лагранжа свободной материальной точки в а) декартовых и б) сферических координатах.

□ Поскольку точка свободная, т.е. на нее не действуют никакие силы, то потенциальная энергия $U = 0$. Поэтому функции Лагранжа будет совпадать с кинетической энергией точки.

а) В декартовых координатах кинетическая энергия

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

* Уравнения Лагранжа в независимых координатах называют также уравнениями Лагранжа второго рода.

а функция Лагранжа

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

б) Кинетическая энергия (см. задачу 2.3)

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right).$$

Функция Лагранжа

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right).$$

■

Задача 3.2. Напишите функцию Лагранжа механической системы в виде функции от обобщенных координат q, обобщенных скоростей $\dot{q}$ и времени t. На систему наложены голономные идеальные связи, а внешние силы являются потенциальными.

□ Найдем сначала выражение для кинетической энергии в виде функции от $q, \dot{q}, t$. Пусть $\boldsymbol{r}_i$ – радиус-вектор i-ой частицы, а m_i – ее масса. Радиус-вектор $\boldsymbol{r}_i$ в случае голономных связей является функцией обобщенных координат и времени, т.е. $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$, где s - число степеней свободы системы. Дифференцируя $\boldsymbol{r}_i$ по времени, получим:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}. \quad (3.3)$$

С учетом (3.3) кинетическая энергия системы будет равна

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} m_{\alpha\beta}(q)\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta + \sum_{\alpha=1}^{s} m_\alpha(q)\dot{q}_\alpha + m_0(q), \quad (3.4)$$

где N - количество точек системы, а функции $m_{\alpha\beta}(q)$, $m_\alpha(q)$, $m_0(q)$ в (3.4) определяются выражениями

$$m_{\alpha\beta}(q) = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}, \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\beta}\right) \quad (\alpha, \beta = 1,2, \dots, s),$$

$$m_{\alpha}(q) = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}, \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right) \quad (\alpha = 1,2, \dots, s),$$

$$m_0(q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)^2.$$

Функция Лагранжа

$$L = T - U = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} m_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta + \sum_{\alpha=1}^{s} m_\alpha\,\dot{q}_\alpha + m_0 - U(q_1, q_2, \dots, q_s, t).$$

Если радиусы-векторы точек системы не зависят явно от времени (это имеет место в случае стационарных голономных связей), то

$$m_\alpha(q) = 0, \quad m_0(q) = 0,$$

следовательно,

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} m_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta - U(q_1, q_2, \dots, q_s, t).$$

■

Задача 3.3. Сферический маятник. Найдите функцию и уравнения Лагранжа для точки, движущейся по абсолютно гладкой поверхности сферы радиуса R в однородном поле тяжести.

□ В качестве обобщенных координат удобно выбрать углы θ и φ сферической системы координат. Полярную ось сферической системы координат направим вертикально вниз, а начало отсчета системы совместим с центром сферы. Связь в этом случае имеет вид $r = R$, откуда $\dot{r} = 0$. Используя результат задачи 3.1 (б), находим кинетическую энергию точки:

$$T = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\theta}^2 + R^2 sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right).$$

Начало отсчета потенциальной энергии выберем в центре сферы. Тогда

$$U = -mgRcos\theta.$$

Теперь составим функцию Лагранжа:

$$L = T - U = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) + mgRcos\theta.$$

Поскольку в данной задаче имеются две обобщенные координаты, то уравнений Лагранжа также будет два:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = mR^2\left(\ddot{\theta} - sin\theta cos\theta\dot{\varphi}^2\right) + mgRsin\theta = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = \frac{d}{dt}\left(mR^2 sin^2\theta\dot{\varphi}\right) = mR^2\left(sin^2\theta\ddot{\varphi} + \sin{(2\theta)}\dot{\theta}\dot{\varphi}\right) = 0.$$

■

Задача 3.4. <u>Двойной плоский математический маятник.</u> Шарик массы m_1 прикреплен к точке подвеса с помощью нерастяжимой нити длиной l_1 . К этому шарику прикреплена невесомая нить длиной l_2, на конце которой находится шарик массы m_2 (рис. 3.1). Найдите функцию и уравнения Лагранжа системы для случая ее движения в вертикальной плоскости.

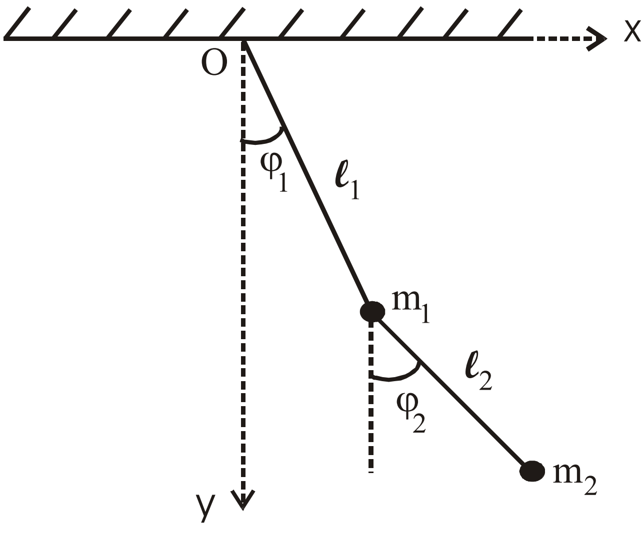

Рис. 3.1

□ Данная система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем углы φ_1 и φ_2 отклонения нитей l_1 и l_2, соответственно, от вертикали. Оси x и y направим так, как показано на рисунке, а начало отсчета системы координат выберем в точке крепления нити l_1. От этого же уровня будем отсчитывать потенциальную энергию.

Координаты x_1 и y_1 точки m_1 можно представить в виде:

$$x_1 = l_1 sin\varphi_1,\ \ y_1 = l_1 cos\varphi_1,$$

откуда

$$\dot{x}_1 = l_1\dot{\varphi}_1 cos\varphi_1,\ \ \dot{y}_1 = -l_1\dot{\varphi}_1 sin\varphi_1.$$

Кинетическая энергия точки m_1 есть

$$T_1 = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{m_1 l_1^2 \dot{\varphi_1}^2}{2},$$

а ее потенциальная энергия $U_1 = -m_1 g y_1 = -m_1 g l_1 cos\varphi_1$.

Координаты x_2 и y_2 точки m_2 запишутся следующим образом:

$$x_2 = l_1 sin\varphi_1 + l_2 sin\varphi_2, \;\; y_2 = l_1 cos\varphi_1 + l_2 cos\varphi_2.$$

Отсюда следует, что

$$\dot{x}_2 = l_1\dot{\varphi}_1 cos\varphi_1 + l_2\dot{\varphi}_2 cos\varphi_2, \;\; \dot{y}_1 = -l_1\dot{\varphi}_1 sin\varphi_1 - l_2\dot{\varphi}_2 sin\varphi_2.$$

Кинетическая и потенциальная энергии точки m_2 равны

$$T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2}(l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \cos{(\varphi_1 - \varphi_2)}\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2),$$

$$U_2 = -m_2 g y_2 = -m_2 g(l_1 cos\varphi_1 + l_2 cos\varphi_2).$$

Функция Лагранжа всей системы

$$L = T_1 + T_2 - (U_1 + U_2) = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2\dot{\varphi_1}^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2\dot{\varphi_2}^2 +$$

$$+ m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 cos\varphi_1 + m_2 g l_2 cos\varphi_2.$$

Уравнений Лагранжа в данной задаче будет два:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi_1}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi_2}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 0.$$

Производя дифференцирование, находим:

$$\left.\begin{aligned} (m_1 + m_2)(l_1\ddot{\varphi}_1 + g sin\varphi_1) + m_2 l_2 \cos{(\varphi_1 - \varphi_2)}\ddot{\varphi}_2 + m_2 l_2 \sin{(\varphi_1 - \varphi_2)}\dot{\varphi}_2^2 = 0, \\ l_1\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\,\ddot{\varphi}_1 + l_2\ddot{\varphi}_2 - l_1 \sin{(\varphi_1 - \varphi_2)}\dot{\varphi}_1^2 + g sin\varphi_2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

■

Задача 3.5. Составьте уравнения движения частицы, движущейся по абсолютно гладкой поверхности вертикального цилиндра радиуса R в однородном поле тяжести.

□ Данную задачу удобно решать в цилиндрической системе координат. Начало отсчета системы выберем в центре нижнего основания цилиндра, а ось z направим вертикально вверх. За ноль потенциальной энергии примем нижнее основание цилиндра. В качестве обобщенных координат возьмем координаты φ и z.

Кинетическая и потенциальная энергии точки запишутся в виде:

$$T = \frac{m}{2}(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2), \qquad U = mgz.$$

Функция Лагранжа

$$L = T - U = \frac{m}{2}(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz,$$

а уравнения Лагранжа по переменным φ и z есть:

$$mR^2\ddot{\varphi} = 0, \; m\ddot{z} + mg = 0. \; ■$$

Задача 3.6. Покажите, что уравнения Лагранжа (3.1) не изменяются, если вместо функции $L(q, \dot{q}, t)$ взять функцию

$$L_1(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q,t)}{dt},$$

где $f(q, t)$ – произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция координат и времени.

□ Запишем выражение для полной производной функции $f(q, t)$ по времени:

$$\frac{df(q,t)}{dt} = \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Из этого равенства можно получить два соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{df}{dt}\right) = \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial^2 f}{\partial q_\beta \partial q_\alpha}\dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_\alpha}, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}. \tag{3.6}$$

Используя равенство (3.6), находим:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{df}{dt}\right) = \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial^2 f}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 f}{\partial q_\alpha \partial t}. \tag{3.7}$$

В силу того, что функция $f(q,t)$ дважды непрерывно дифференцируемая, можно изменить порядок ее дифференцирования по переменным q_α, q_β, t и записать соотношение (3.7) в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{df}{dt}\right) = \sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial^2 f}{\partial q_\beta \partial q_\alpha}\dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_\alpha}. \tag{3.8}$$

Подставляя функцию $L_1(q,\dot{q},t)$ в (3.1) и учитывая (3.5) и (3.8), получим:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L_1}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \left(\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial^2 f}{\partial q_\beta \partial q_\alpha}\dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_\alpha}\right) -$$

$$-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \left(\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial^2 f}{\partial q_\beta \partial q_\alpha}\dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_\alpha}\right) = 0.$$

Отсюда имеем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0,$$

что совпадает с уравнением Лагранжа для функции L. ■

Задачи для самостоятельного решения

12. Напишите функцию Лагранжа свободной материальной точки массы m в цилиндрических координатах.

13. Длина математического маятника изменяется по закону $l(t)$. Найдите функцию Лагранжа и уравнение движения маятника.

14. Два математических маятника одинаковой длины l и массы m связаны между собой пружиной жесткости k, закрепленной на расстоянии a от точки подвеса (рис. 3.2). Найдите функцию и уравнения Лагранжа для данной системы, считая углы отклонения маятников от положения равновесия малыми.

15. Две точки с массами m_1 и m_2 соединены невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через гладкий неподвижный блок (рис. 3.3). Найдите функцию Лагранжа и уравнение движения грузов.

16. Через гладкий неподвижный блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к одному из концов которой привязан груз массы m_1. На другом конце повис человек массы m_2, который, выбирая веревку, поднимает груз, оставаясь при этом на одном и том же расстоянии от Земли. Найдите функцию Лагранжа системы и уравнение движения груза m_1.

17. Точка подвеса математического маятника движется в вертикальном направлении по закону $s = {at^2}/{2}$ $(a = const)$. Найдите функцию Лагранжа и уравнение движения маятника.

18. Точка подвеса математического маятника движется по горизонтали по закону $s(t)$. Найдите функцию Лагранжа и уравнение движения маятника.

19. Точка подвеса математического маятника равномерно движется в вертикальной плоскости по окружности радиуса R с угловой скоростью ω. Найдите функцию Лагранжа и уравнение движения маятника.

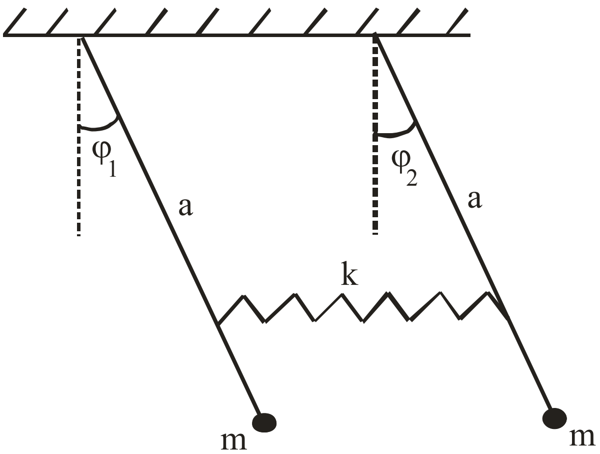

Рис. 3.2

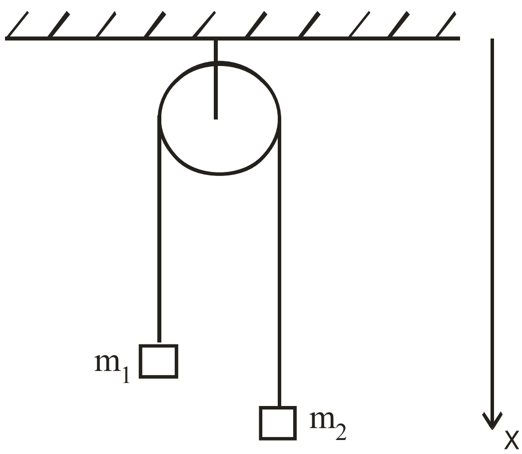

Рис. 3.3

§ 4. Уравнения Лагранжа при наличии диссипативных и электромагнитных сил

До сих пор мы рассматривали механические системы с голономными идеальными связями при наличии потенциальных сил. Для таких систем функция Лагранжа $L = T - U$. Запишем теперь функцию Лагранжа при наличии:

1) диссипативных сил, а именно сил сопротивления, пропорциональных скорости частицы;
2) электромагнитных сил.

<u>*1) Диссипативные силы.*</u> В случае если на частицу массы m действует сила сопротивления вида $\boldsymbol{F}_d = -k\dot{\boldsymbol{r}}$ (k - коэффициент пропорциональности) функцию Лагранжа можно представить в виде

$$L = e^{\frac{k}{m}t}\left(\frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - U(\boldsymbol{r},t)\right), \tag{4.1}$$

где $U(\boldsymbol{r},t)$ - потенциальная энергия, действующих на частицу потенциальных сил.

Задача 4.1. Покажите, что уравнения Лагранжа с функцией L вида (4.1) приводят к уравнению $m\ddot{\boldsymbol{r}} = -k\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F}$, описывающему движение материальной точки при наличии диссипативной силы $\boldsymbol{F}_d = -k\dot{\boldsymbol{r}}$ и потенциальной силы $\boldsymbol{F}$.

□ Сначала найдем, что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} \equiv grad_{\dot{\boldsymbol{r}}} U = e^{\frac{k}{m}t} m\dot{\boldsymbol{r}},$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = e^{\frac{k}{m}t}(m\ddot{\boldsymbol{r}} + k\dot{\boldsymbol{r}}).$$

Производная от функции (4.1) по $\boldsymbol{r}$ равна

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = e^{\frac{k}{m}t}\left(-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}\right).$$

Но $-{\partial U}/{\partial \boldsymbol{r}}$ есть по определению сила $\boldsymbol{F}$.

С учетом этого уравнение Лагранжа принимает вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = e^{\frac{k}{m}t}(m\ddot{\boldsymbol{r}} + k\dot{\boldsymbol{r}}) - e^{\frac{k}{m}t}\boldsymbol{F} = 0.$$

Сокращая обе части этого уравнения на $e^{\frac{k}{m}t}$ и перенося последние два члена вправо, получим искомое уравнение движения:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -k\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F}.$$

■

Задача 4.2. Материальная точка массы m движется по параболе, расположенной вертикально в поле тяжести. На точку действует сила сопротивления, пропорциональная ее скорости с коэффициентом пропорциональности k. Найдите функцию Лагранжа и уравнение движения точки.

□ Направим ось z вертикально вверх, и пусть уравнением параболы будет

$$z = \frac{ax^2}{2}, \;\; y = 0, \;\; a = const. \tag{4.2}$$

В качестве обобщенной координаты выберем x.

Квадрат скорости точки равен

$$\dot{\boldsymbol{r}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2. \tag{4.3}$$

Дифференцируя (4.2) по времени, находим:

$$\dot{z} = ax\dot{x}.$$

Подставляя это выражение в (4.3), получим:

$$\dot{\boldsymbol{r}}^2 = \dot{x}^2 + a^2x^2\dot{x}^2.$$

Кинетическая энергия точки

$$T = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + a^2x^2\dot{x}^2),$$

а ее потенциальная энергия определяется выражением:

$$U = mgz = mg\frac{ax^2}{2}.$$

В соответствии с формулой (4.1) составляем функцию Лагранжа:

$$L = \frac{m}{2}e^{\frac{k}{m}t}\big((1 + a^2x^2)\dot{x}^2 - gax^2\big).$$

Наконец, пользуясь формулой (3.1), запишем уравнение Лагранжа по переменной x:

$$(1 + a^2x^2)(m\ddot{x} + k\dot{x}) + max(g + a\dot{x}^2) = 0.$$

■

<u>2) Электромагнитные силы.</u> Пусть частица находится в электрическом поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и в магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$. Напряженности электрического и магнитного полей могут быть выражены через скалярный ϕ и векторный $\boldsymbol{A}$ потенциалы:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - grad\phi, \tag{4.4}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = rot\boldsymbol{A}, \tag{4.5}$$

где c - скорость света. В прямоугольной декартовой системе координат операции градиент и ротор записываются в виде:

$$grad\phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{r}} = \boldsymbol{e}_x\frac{\partial \phi}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial \phi}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial \phi}{\partial z}, \tag{4.6}$$

$$rot\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right), \tag{4.7}$$

где $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ – орты прямоугольной системы координат, а A_x, A_y, A_z - проекции вектора $\boldsymbol{A}$ на оси координат. С учетом (4.6) и (4.7) запишем уравнения (4.4) и (4.5) в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат:

$$\mathcal{E}_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x}, \qquad \mathcal{E}_y = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial y}, \qquad \mathcal{E}_z = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z}, \tag{4.8}$$

$$\mathcal{H}_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \qquad \mathcal{H}_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \qquad \mathcal{H}_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \tag{4.9}$$

С помощью скалярного и векторного потенциалов функцию Лагранжа частицы массы m и заряда q, находящейся в электромагнитном поле, можно записать следующим образом:

$$L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + \frac{q}{c}(\boldsymbol{A}, \dot{\boldsymbol{r}}) - q\phi. \tag{4.10}$$

Задача 4.3. Покажите, что уравнение движения

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = q\boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{q}{c}[\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{\mathcal{H}}] \tag{4.11}$$

частицы массы m и заряда q, находящейся в электромагнитном поле (см. задачу 1.3), получается из уравнений Лагранжа, в которых в качестве функции Лагранжа взята функция (4.10).

□ Составим уравнения Лагранжа для функции (4.10). Сначала найдем, что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{q}{c}A_x, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{q}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}\right) - q\frac{\partial \phi}{\partial x}. \tag{4.12}$$

Аналогичные соотношения имеют место для переменных y и z. Подстановка (4.12) в уравнение Лагранжа по переменной x, т.е. в уравнение

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

приводит к равенству

$$m\ddot{x} + \frac{q}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) - \frac{q}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}\right) +$$

$$+q\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0.$$

Перенося в этом уравнении все силы в правую часть и группируя слагаемые, получаем:

$$m\ddot{x} = -\frac{q}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - q\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{q}{c}\left\{\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\dot{y} - \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\dot{z}\right\}. \tag{4.13}$$

С учетом формул (4.8) и (4.9) замечаем, что первые два члена в правой части (4.13) есть умноженная на заряд q проекция $\mathcal{E}_x$ вектора напряженности электрического поля на ось x, а в круглых скобках стоят проекции $\mathcal{H}_z$ и $\mathcal{H}_y$ вектора напряженности магнитного поля на оси z и y, соответственно. Теперь уравнение (4.13) можно переписать в виде

$$m\ddot{x} = q\mathcal{E}_x + \frac{q}{c}\left(\mathcal{H}_z\dot{y} - \mathcal{H}_y\dot{z}\right). \tag{4.14}$$

Абсолютно аналогично можно получить уравнения Лагранжа для переменных y и z:

$$m\ddot{y} = q\mathcal{E}_y + \frac{q}{c}(\mathcal{H}_x\dot{z} - \mathcal{H}_z\dot{x}), \tag{4.15}$$

$$m\ddot{z} = q\mathcal{E}_z + \frac{q}{c}\left(\mathcal{H}_y\dot{x} - \mathcal{H}_x\dot{y}\right). \tag{4.16}$$

Вспоминая определение векторного произведения, видим, что в круглых скобках равенств (4.14)-(4.16) стоят проекции векторного произведения $[\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{\mathcal{H}}]$, и, следовательно, уравнения Лагранжа (4.14)-(4.16) эквивалентны уравнению (4.11). ■

Задача 4.4. Найдите в цилиндрических координатах функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массы m и заряда q, находящейся в однородном магнитном поле $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, если векторный потенциал задан в виде

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{r}].$$

□ Направим ось z цилиндрической системы координат вдоль вектора $\boldsymbol{\mathcal{H}}$. В цилиндрических координатах радиус-вектор

$$\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{e}_\rho + z\boldsymbol{e}_z.$$

Векторный потенциал

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{r}] = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z \\ 0 & 0 & \mathcal{H} \\ \rho & 0 & z \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_\varphi\left(\frac{1}{2}\mathcal{H}\rho\right). \tag{4.17}$$

Учитывая (4.17) и то, что в цилиндрической системе координат проекция скорости $v_\varphi = \rho\dot{\varphi}$ (см. приложение), находим функцию Лагранжа, в которой в качестве обобщенных координат выступают переменные ρ, φ, z:

$$L = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + \frac{q}{c}(\boldsymbol{A}, \dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q\mathcal{H}}{2c}\rho^2\dot{\varphi}.$$

Теперь составим уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial\rho} = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 - \frac{q\mathcal{H}}{mc}\rho\dot{\varphi} = 0, \tag{4.18}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = \frac{d}{dt}\left(m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{q\mathcal{H}}{2c}\rho^2\right) = 0, \tag{4.19}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = m\ddot{z} = 0. \qquad (4.20)$$

Уравнения (4.18)-(4.20) есть искомые уравнения движения точки. Отметим, что векторный потенциал однородного магнитного поля всегда можно представить в виде $\boldsymbol{A} = {}^1\!/_2\,[\boldsymbol{\mathcal{H}r}]$. Другой способ задания векторного потенциала однородного магнитного поля приведен в задаче 22. ■

Задача 4.5. Найдите функцию Лагранжа для частицы массы m и заряда q, находящейся в поле электрического диполя.

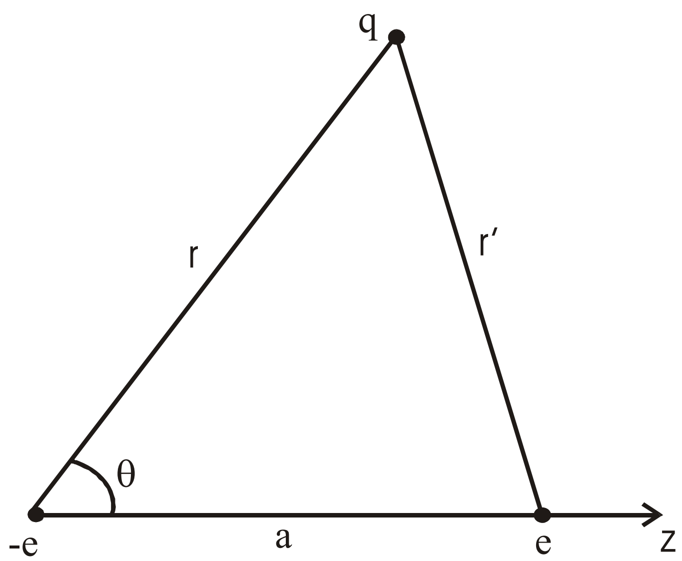

Рис. 4.1

□ Электрическим диполем называется система из двух равных по абсолютной величине и противоположных по знаку электрических зарядов $e > 0$ и $-e < 0$, расстояние a между которыми мало по сравнению с расстоянием до рассматриваемых точек поля (в которых находится частица). Схематично рассматриваемая система изображена на рис. 4.1.

Пусть r и r' – расстояния до частицы от зарядов $-e$ и e, соответственно. Направим полярную ось (ось z на рисунке) сферической системы координат вдоль диполя, а начало отсчета совместим с зарядом $-e$.

Потенциал диполя в точке нахождения заряда q равен

$$\phi = e\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right). \qquad (4.21)$$

Выразим с помощью теоремы косинусов r' через r и θ:

$$r' = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta} \approx \sqrt{r^2 - 2ar\cos\theta}. \qquad (4.22)$$

В равенстве (4.22) мы пренебрегли членом a^2, поскольку по условию $a \ll r$.

Подставляя (4.22) в (4.21), находим:

$$\phi = \frac{e}{r}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{a}{r}cos\theta}} - 1\right]. \tag{4.23}$$

Разлагая в выражении (4.23) второй член в скобках по $^a/_r$, имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{a}{r}cos\theta}} \approx 1 + \frac{a}{r}cos\theta,$$

и, следовательно,

$$\phi \approx \frac{ea}{r^2}cos\theta = \frac{p}{r^2}cos\theta,$$

где $p = ea$ есть дипольный момент.

В сферических координатах кинетическая энергия (см. задачу 3.1)

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right).$$

Полагая $\boldsymbol{A} = 0$ в выражении (4.10), получаем функцию Лагранжа:

$$L = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - q\phi = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - \frac{qp}{r^2}cos\theta.$$

■

Задачи для самостоятельного решения

20. Покажите, что уравнение движения одномерного гармонического осциллятора с вязким трением (сила сопротивления $F_d = -k\dot{x}$) можно записать как уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

используя функцию Лагранжа (4.1).

21. Два одинаковых груза массы m связаны между собой и с неподвижными стенками пружинами жесткости k_1, k_2 и k_3 (рис. 4.2). На каждый из грузов действует сила сопротивления $F_i = -k\dot{x}_i$ $(i = 1, 2)$. Найдите функцию

Лагранжа системы. Можно ли построить функцию Лагранжа, если массы грузов и коэффициенты трения различны?

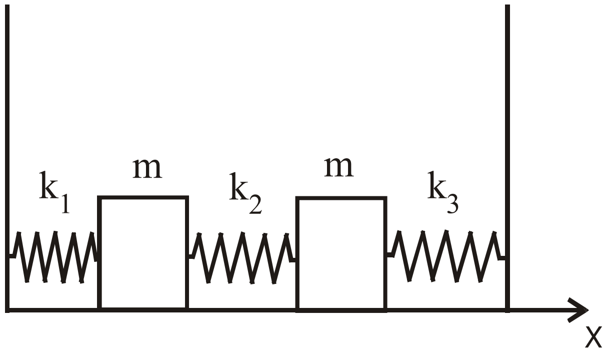

Рис. 4.2

22. Найдите в прямоугольных декартовых координатах функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массы m и заряда q, находящейся в однородном магнитном поле $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, если векторный потенциал задан в виде

$$A_x = A_z = 0, \ \ A_y = x\mathcal{H}.$$

Сравните полученный результат с результатом задачи 4.4.

23. Найдите в сферических координатах функцию Лагранжа частицы массы m и заряда q, движущейся в поле магнитного монополя

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{\gamma \boldsymbol{r}}{r^3}, \quad \gamma = const.$$

Указание: записать соотношение $\boldsymbol{\mathcal{H}} = rot\boldsymbol{A}$ в сферических координатах (см. приложение) и убедиться, что ему удовлетворяет векторный потенциал, выбранный в виде

$$A_r = A_\theta = 0, \ \ A_\varphi = -\frac{\gamma}{r} ctg\theta.$$

24. Частица массы m и заряда q движется в поле магнитного диполя, векторный потенциал которого

$$\boldsymbol{A} = \frac{[\boldsymbol{\mu r}]}{r^3}, \ \ \boldsymbol{\mu} = const.$$

Напишите функцию Лагранжа частицы в а) цилиндрической и б) сферической системах координат.

Глава 3. Интегрирование уравнений движения

§ 5. Законы сохранения

Интегралом движения называется функция времени, координат и скоростей точек, сохраняющая при движении механической системы постоянное значение. Таким образом, интеграл движения определяется соотношением вида

$$f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N, \dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2, \dots, \dot{\boldsymbol{r}}_N, t) = C,$$

где индексы у радиусов-векторов и скоростей нумеруют точки механической системы, а C является постоянной величиной, значение которой определяется начальными условиями. Среди интегралов движения есть такие, постоянство которых связано со свойствами пространства и времени, а именно их однородностью и изотропией. К таким интегралам движения относятся энергия, импульс и момент импульса механической системы. Называют эти интегралы движения *законами сохранения*. Рассмотрим их последовательно.

1) *Закон сохранения энергии.* Если время не входит явно в функцию Лагранжа, т.е. $\partial L / \partial t = 0$, то механические свойства этой системы не зависят от выбора начала отсчета времени. Это свойство, называемое однородностью времени, приводит к закону сохранения *обобщенной энергии*

$$E = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L, \tag{5.1}$$

где s - число степеней свободы системы. В простейшем случае, когда $L = T - U$, а радиусы-векторы точек системы как функции обобщенных координат явно от времени не зависят, обобщенная энергия совпадает с полной энергией системы, т. е.

$$E = T + U.$$

Задача 5.1. Найдите обобщенную энергию заряженной частицы, находящейся в электромагнитном поле.

□ Функция Лагранжа частицы в электромагнитном поле имеет вид (4.10). Найдем, что

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}, \dot{\boldsymbol{r}}\right) = m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{q}{c}(\boldsymbol{A}, \dot{\boldsymbol{r}}). \tag{5.2}$$

С учетом (5.2), пользуясь определением обобщенной энергии (5.1), имеем:

$$E = m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{q}{c}(\boldsymbol{A}, \dot{\boldsymbol{r}}) - \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - \frac{q}{c}(\boldsymbol{A}, \dot{\boldsymbol{r}}) + q\varphi = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + q\varphi.$$

Видно, что член ${}^{q}/_{c}\,(\boldsymbol{A}, \dot{\boldsymbol{r}})$, линейный по скорости частицы, не входит в выражение для обобщенной энергии, которая в данном случае совпадает с полной энергией системы. ■

2) *Закон сохранения импульса.* Пусть механические свойства системы не меняются при любом параллельном переносе системы как целого в пространстве. Это свойство, называемое однородностью пространства, приводит к закону сохранения *обобщенного (декартова) импульса* системы:

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} = const. \tag{5.3}$$

Здесь индекс i нумерует частицы механической системы. Обобщенный импульс отдельной частицы системы

$$\boldsymbol{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}.$$

Если функция Лагранжа имеет вид (3.2), т.е.

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2}{2} - U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N, t),$$

то обобщенный импульс (5.3) совпадает с механическим импульсом системы:

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i.$$

В случае, когда движение описывается обобщенными координатами, *обобщенный импульс, соответствующий обобщенной координате* q_α, определяется равенством:

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\,. \tag{5.4}$$

Обобщенный импульс p_α сохраняется, если функция Лагранжа не зависит явно от координаты q_α. Координата q_α, от которой функция Лагранжа явно не зависит, называется *циклической координатой.*

Задача 5.2. Докажите, что если q_α - циклическая координата, то соответствующий этой координате обобщенный импульс p_α сохраняется.

□ Уравнение Лагранжа по координате q_α имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0,$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}. \quad (5.5)$$

Поскольку функция Лагранжа не зависит явно от q_α, то $\partial L / \partial q_\alpha = 0$. Учитывая, что по определению $\partial L / \partial \dot{q}_\alpha = p_\alpha$, из (5.5) имеем

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = 0,$$

следовательно,

$$p_\alpha = const. \blacksquare$$

3) *Закон сохранения момента импульса.* Если механические свойства системы не изменяются при любом повороте системы как целого в пространстве (это свойство называется изотропией пространства), то следствием этого является сохранение момента импульса системы:

$$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{r}_i \boldsymbol{p}_i] = const. \quad (5.6)$$

Отметим, что в случае, когда обобщенный импульс $\boldsymbol{p}_i = m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i$, момент импульса, определяемый равенством (5.6), совпадает с обычным в механическом смысле моментом импульса

$$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{r}_i, m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i]. \quad (5.7)$$

В общем же случае момент импульса (5.6) может не совпадать с (5.7) (см. задачу 5.5).

Если в качестве обобщенной координаты выступает угол поворота системы φ вокруг какой-то оси, например оси z, то обобщенный импульс $p_\varphi = {}^{\partial L}/_{\partial \dot{\varphi}}$ совпадает с проекцией M_z момента импульса на ось z.

Задача 5.3. Найдите обобщенные импульсы свободной частицы в а) прямоугольной, б) цилиндрической и в) сферической системах координат.

□ а) Функция Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Обобщенные импульсы:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

б) $L = \dfrac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$;

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \qquad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} = M_z, \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

в) $L = \dfrac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)$;

$$p_r = m\dot{r}, \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \qquad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 sin^2\theta\dot{\varphi} = M_z.$$

■

Задача 5.4. Найдите, исходя из свойств однородности и изотропии пространства-времени, законы сохранения для частицы, движущейся в поле тяжести.

□ Поскольку на частицу не наложены переменные силовые поля, то сохраняется энергия частицы. Направим ось z прямоугольной декартовой системы координат вертикально вверх. Очевидно, что трансляции относительно осей x и y, а также поворот относительно оси z не изменяют механических свойств системы. Поэтому сохраняются проекции импульса p_x, p_y и проекция момента импульса M_z. Однако, из четырех интегралов движения (E, p_x, p_y, M_z) независимыми являются всего лишь три. Действительно, p_x, p_y, M_z связаны, по определению момента импульса, соотношением

$$M_z = xp_y - yp_x.$$

Учитывая, что $p_x \; и \; p_y = const$, находим:

$$\frac{dM_z}{dt} = \dot{x}p_y - \dot{y}p_x = \dot{x}m\dot{y} - \dot{y}m\dot{x} = 0.$$

Следовательно, $M_z = const$.

Законы сохранения для данной задачи можно найти и анализируя функцию Лагранжа. Записав функцию Лагранжа в прямоугольных декартовых координатах в виде

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz,$$

видим, что ${\partial L}/{\partial t} = 0$, ${\partial L}/{\partial x} = 0$, ${\partial L}/{\partial y} = 0$. Это означает, что сохраняется энергия

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz,$$

и обобщенные импульсы

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \;\; p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}.$$

■

Задача 5.5. Найдите законы сохранения для частицы массы m и заряда q, движущейся в однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, если векторный потенциал задан в виде

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{r}].$$

□ Функция Лагранжа частицы в цилиндрических координатах имеет вид (задача 4.4):

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q\mathcal{H}}{2c}\rho^2\dot{\varphi}.$$

Функция Лагранжа не зависит явно от времени, а координаты φ и z - циклические. Поэтому сохраняется энергия

$$E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2),$$

и обобщенные импульсы

$$p_\varphi \equiv M_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{q\rho^2}{2c}\mathcal{H},$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

Видно, что обобщенный импульс $p_\varphi \equiv M_z$ в данном случае отличается наличием слагаемого ${q\rho^2\mathcal{H}}/{2c}$ от проекции на ось z обычного механического момента импульса (равной в цилиндрических координатах $m\rho^2\dot{\varphi}$). ■

Задачи для самостоятельного решения

25. Математический маятник прикреплен к частице, способной двигаться вдоль гладкой горизонтальной прямой. Найдите интегралы движения системы, исходя из свойств однородности и изотропии пространства-времени.

26. Найдите обобщенные импульсы в сферической системе координат для пространственного осциллятора, функция Лагранжа которого

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - \frac{kr^2}{2} \quad (k = const).$$

Какие из обобщенных импульсов сохраняются?

27. Найдите компоненты импульса $\boldsymbol{p}$ и момента импульса $\boldsymbol{M}$, которые сохраняются при движении заряженной частицы в следующих полях:

а) поле электрического и магнитного диполя;

б) поле равномерно заряженной бесконечной плоскости;

в) поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра.

28. Найдите сохраняющиеся величины в случае движения частицы массы m и заряда q в однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, если векторный потенциал задан в виде

$$A_x = A_z = 0, \;\; A_y = x\mathcal{H}.$$

Сравните полученный результат с результатом задачи 5.5.

29. Частица с массой m и зарядом q движется в аксиально-симметричном магнитном поле. Запишите функцию Лагранжа частицы в цилиндрических координатах и найдите интегралы движения.

Указание: векторный потенциал удобно выбрать в виде

$$A_\rho = 0, \qquad A_\varphi = A(\rho, z), \qquad A_z = 0.$$

§ 6. Одномерное движение

Одномерным называют движение системы, имеющей одну степень свободы. Если на систему наложены стационарные идеальные голономные связи и потенциальные силы, независящие от времени, то функцию Лагранжа можно записать в виде:

$$L = \frac{m(q)\dot{q}^2}{2} - U(q), \tag{6.1}$$

где $m(q)$ - некоторая функция обобщенной координаты q (см. задачу 3.2). Поскольку функция Лагранжа (6.1) не зависит явно от времени, то для рассматриваемой системы сохраняется энергия

$$E = \frac{m(q)\dot{q}^2}{2} + U(q). \tag{6.2}$$

Преобразуя (6.2), имеем:

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m(q)}[E - U(q)]}, \tag{6.3}$$

откуда

$$t - t_0 = \pm\int_{q_0}^{q}\sqrt{\frac{m(q)}{2}}\frac{dq}{\sqrt{E - U(q)}}, \;\; q_0 = q(t_0). \tag{6.4}$$

Знак “+” (“-”) в выражениях (6.3) и (6.4) берется на участках траектории, где $\dot{q} > 0$ ($\dot{q} < 0$). Формула (6.4) позволяет найти закон движения системы. Из нее видно, что движение может происходить лишь в тех областях пространства, где $U(q) < E$. Пусть зависимость $U(q)$ имеет вид, изображенный на рис. 6.1. Если энергия системы E_1 или E_2, то движение будет инфинитным, т.е. частица может уйти на бесконечность. Если полная энергия системы E_3, то движение будет происходить в ограниченной области пространства между точками A и B. В этом случае движение является финитным. Точки A и B называются *точками остановки*, поскольку скорость частицы в них равна нулю. Координаты этих точек q_1 и q_2 определяются из условия:

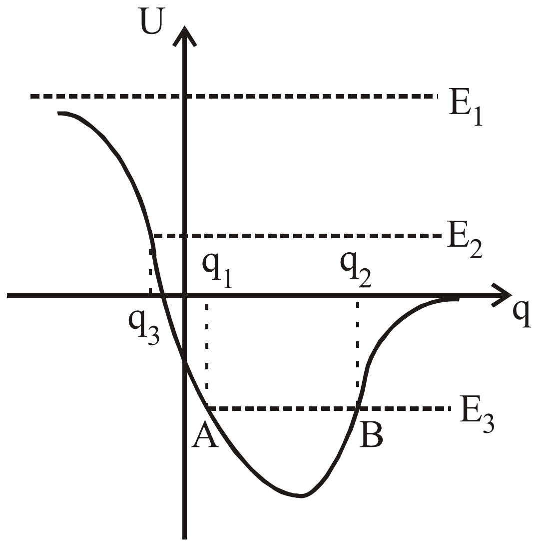

Рис. 6.1

$$U(q) = E. \qquad (6.5)$$

Одномерное финитное движение является колебательным – частица совершает периодически повторяющееся движение между двумя границами. Период этого колебательного движения определяется формулой:

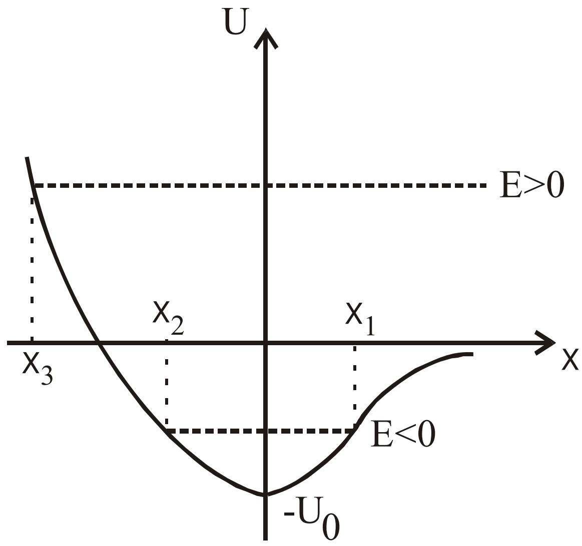

Рис. 6.2

$$T = \int_{q_1}^{q_2} \frac{\sqrt{2m(q)}dq}{\sqrt{E - U(q)}}. \qquad (6.6)$$

Точки поворота q_1 и q_2 в (6.6) задаются условием (6.5).

Задача 6.1. Потенциал Морза. Найдите закон движения частицы в поле $U(x) = U_0(e^{-2ax} - 2e^{-ax})$.

□ Схематично данный потенциал представлен на рис. 6.2. Видно, что в зависимости от энергии частицы E возможно два типа движения: 1) $E < 0$ - финитное движение; 2) $E \geq 0$ - инфинитное движение.

Рассмотрим эти случаи. Для определенности будем считать, что частица движется вправо и $t_0 = 0$.

1) $E < 0$. В этом случае движение колебательное и происходит между точками x_1 и x_2. Воспользовавшись формулой (6.4), находим:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{-|E| - U_0 e^{-2ax} + 2U_0 e^{-ax}}} =$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\left(arcsin\frac{|E|e^{ax} - U_0}{\sqrt{U_0(U_0 - |E|)}} - C_1\right), \qquad (6.7)$$

где

$$C_1 = \ arcsin\frac{|E|e^{ax_0} - U_0}{\sqrt{U_0(U_0 - |E|)}}.$$

Выражая x через t из соотношения (6.7), получаем:

$$x(t) = \frac{1}{a} ln\frac{U_0 + \sqrt{U_0(U_0 - |E|)}\, s\,in(\, a\sqrt{\frac{2|E|}{m}}t + C_1)}{|E|}. \qquad (6.8)$$

2) $E \geq 0$. В этом случае движение будет инфинитным, частица может уйти на бесконечность вправо. Рассмотрим сначала случай $E = 0$. Формула (6.4) при этом запишется в виде:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{U_0(2e^{-ax} - e^{-2ax})}}\,. \qquad (6.9)$$

Интегрирование (6.9) дает:

$$t = \frac{\sqrt{m}}{a\sqrt{2U_0}}\sqrt{2e^{ax} - 1} + C_2, \qquad \left(C_2 = \frac{\sqrt{m}}{a\sqrt{2U_0}}\sqrt{2e^{ax_0} - 1}\right).$$

Отсюда

$$x(t) = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{1}{2} + \frac{a^2U_0}{m}(t - C_2)^2\right). \qquad (6.10)$$

Перейдем к случаю $E > 0$. Интегрируя (6.4), имеем:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{E - U_0e^{-2ax} + 2U_0e^{-ax}}} =$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m}{2E}}\left(Arch\frac{Ee^{ax} + U_0}{\sqrt{U_0(U_0 + E)}} - C_3\right), \quad (6.11)$$

где

$$C_3 = Arch\frac{Ee^{ax_0} + U_0}{\sqrt{U_0(U_0 + E)}}.$$

Из (6.11) находим

$$x(t) = \frac{1}{a}ln\frac{\sqrt{U_0(U_0 + E)}\mathrm{ch}(\,a\sqrt{\frac{2E}{m}}t + C_3) - U_0}{E}. \qquad (6.12)$$

Формулы (6.8), (6.10) и (6.12) определяют закон движения частицы в зависимости от ее полной энергии. ■

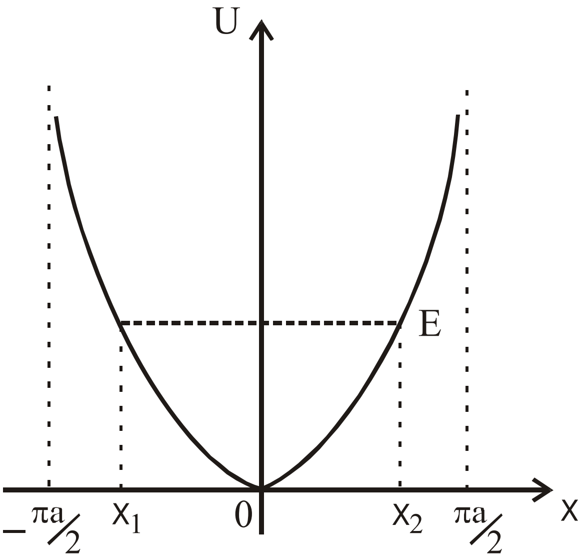

Рис. 6.3

Задача 6.2. Точка движется в поле с потенциалом $U(x) = U_0tg^2\, {}^x\!/_a$. Найдите закон движения точки и период колебаний.

□ Схематично один период графика функции $U(x)$ представлен на рис. 6.3. Как видно из рис. 6.3, движение может происходить лишь в ограниченной области между точками поворота x_1 и x_2. Пусть $t_0 = 0$, а $\dot{x} > 0$. Тогда формула (6.4), будет иметь вид:

$$t = \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_0tg^2\frac{x}{a})}},$$

откуда

$$t = a\sqrt{\frac{m}{2(E+U_0)}}\left[arcsin\left(\sqrt{\frac{E+U_0}{E}}sin\left(\frac{x}{a}\right)\right) - C\right], \qquad (6.13)$$

где $C = \ arcsin\left(\sqrt{\frac{E+U_0}{E}}sin\left(\frac{x_0}{a}\right)\right)$.

Выражая x через t с помощью (6.13), получаем закон движения точки:

$$x(t) = a\ arcsin\left[\sqrt{\frac{E}{E+U_0}}sin\left(\sqrt{\frac{2(E+U_0)}{m}}\frac{t}{a} + C\right)\right].$$

По формуле (6.6) определяем период:

$$T = \sqrt{2m}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E - U_0 tg^2\frac{x}{a}}} = \frac{\sqrt{2m}a}{\sqrt{E+U_0}}\mathrm{arcsin}\left(\sqrt{\frac{E+U_0}{\mathrm{E}}}\ \sin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}. \quad (6.14)$$

Точки остановки x_1 $и$ x_2 находим из уравнения

$$E - U_0 tg^2\frac{x}{a} = 0,$$

решая которое, имеем:

$$sin\frac{x_1}{a} = -\sqrt{\frac{E}{E+U_0}}, \qquad sin\frac{x_2}{a} = \sqrt{\frac{E}{E+U_0}}\,. \qquad (6.15)$$

Подставляя (6.15) в (6.14), окончательно получаем:

$$T = \pi a\sqrt{\frac{2m}{E+U_0}}.$$

■

Задача 6.3. Определите период нелинейных колебаний плоского математического маятника, представляющего собой точку массы m на конце нити длиной l в поле тяжести.

□ В качестве обобщенной координаты выберем угол φ - отклонение нити от вертикали. За ноль потенциальной энергии примем точку подвеса маятника. Тогда потенциальная и кинетическая энергии маятника равны:

$$U = -mglcos\varphi, \qquad T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2},$$

а его полная энергия

$$E = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mglcos\varphi = -mglcos\varphi_0, \tag{6.16}$$

где φ_0 - максимальный угол отклонения нити от вертикали. Из (6.16) находим, что

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}(cos\varphi - cos\varphi_0)}.$$

Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ угол отклонения нити от вертикали равен нулю, т.е. $\varphi(0) = 0$. Тогда

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\pm\sqrt{cos\varphi - cos\varphi_0}}. \tag{6.17}$$

Знак “+” (“-”) перед радикалом берется в интервалах изменения угла φ от 0 до φ_0 и от $-\varphi_0$ до 0 (от φ_0 до 0 и от 0 до $-\varphi_0$). Используя (6.17), получаем выражение для периода колебаний:

$$T = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{cos\varphi - cos\varphi_0}} - \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\varphi_0}^{0}\frac{d\varphi}{\sqrt{cos\varphi - cos\varphi_0}} -$$

$$-\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{-\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{cos\varphi - cos\varphi_0}} + \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{-\varphi_0}^{0}\frac{d\varphi}{\sqrt{cos\varphi - cos\varphi_0}} =$$

$$= 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{cos\varphi - cos\varphi_0}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{sin^2\frac{\varphi_0}{2} - sin^2\frac{\varphi}{2}}}. \tag{6.18}$$

С помощью подстановки $sin\xi = {sin\frac{\varphi}{2}}\Big/{sin\frac{\varphi_0}{2}}$ запишем соотношение (6.18) следующим образом:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\xi}{\sqrt{1 - sin^2\frac{\varphi_0}{2}sin^2\xi}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2sin^2\xi}}, \qquad (6.19)$$

где $k^2 = sin^2{\varphi_0}/_2$.

Интеграл вида

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2sin^2\xi}}$$

называется эллиптическим интегралом первого рода. Разложим подынтегральное выражение в (6.19) в ряд, считая колебания малыми. Получим:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2sin^2\xi}} \approx 1 + \frac{1}{2}k^2sin^2\xi + \cdots. \qquad (6.20)$$

С учетом (6.20) представим равенство (6.19) в форме:

$$T \approx 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}k^2sin^2\xi\right)d\xi = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2} + k^2\frac{\pi}{8}\right).$$

При $\varphi_0 \ll 1$ имеем $k = sin\left({\varphi_0}/_2\right) \approx {\varphi_0}/_2$. Поэтому

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right). \qquad (6.21)$$

Видно, что колебания маятника не являются гармоническими, поскольку период зависит от амплитуды. Первый член в (6.21) дает хорошо знакомую формулу для периода линейных колебаний математического маятника. ■

30. Найдите, используя закон сохранения энергии, закон движения и период колебаний одномерного гармонического осциллятора (система с потенциальной энергией $U = {kx^2}/{2}, k = const$).

31. Найдите закон движения частицы в потенциальном поле

$$U(x) = -U_0 e^{x/a},$$

если ее полная энергия $E = 0$. В начальный момент времени $x_0 = 0$ и $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

32. Определите закон движения и период колебаний частицы в поле

$$U(x) = -\frac{U_0}{ch^2 ax},$$

если полная энергия $E < 0$.

33. Частица движется в потенциальной одномерной прямоугольной яме ширины a. Вычислите среднюю силу, с которой частица действует на стенку, если энергия частицы равна E.

§ 7. Движение частицы в полях. Задача двух тел

Рассмотрим движение материальной точки массы m во внешнем поле, в котором ее потенциальная энергия зависит только от расстояния до определенной неподвижной точки (центра поля). Если это расстояние обозначить посредством r, то $U = U(r)$. Такое поле называют *центральным*. Сила

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

действующая при этом на частицу, зависит тоже только от r и направлена в каждой точке вдоль радиуса-вектора. При движении в центральном поле сохраняются энергия и момент импульса, вычисленный относительно центра поля.

Задача 7.1. Покажите, что траектория частицы, движущейся в центральном поле, лежит в одной плоскости.

□ Момент импульса при движении в центральном поле сохраняется, т.е.

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{r}\boldsymbol{p}] = const.$$

Из определения векторного произведения следует, что $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{r}) = 0$, т.е. вектор $\boldsymbol{r}$ лежит в плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{M}$. А поскольку $\boldsymbol{M} = const$, то радиус-вектор частицы $\boldsymbol{r}$ все время лежит в одной плоскости. ■

Поскольку траектория частицы в центральном поле лежит целиком в одной плоскости, то для описания движения частицы необходимо выбрать две обобщенные координаты. Направим ось z вдоль сохраняющегося вектора $\boldsymbol{M}$, а на плоскости xy введем полярные координаты (r, φ), совместив начало отсчета полярной системы координат с центром поля. При этом функция Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r). \tag{7.1}$$

Координата φ в функции Лагранжа (7.1) является циклической. Соответствующий ей обобщенный импульс $p_\varphi = {\partial L}/{\partial \dot{\varphi}}$ сохраняется и совпадает с моментом импульса M, т.е.

$$M = p_\varphi = {\partial L}/{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = const. \tag{7.2}$$

Выражая с помощью (7.2) $\dot{\varphi}$ через M, запишем энергию частицы в виде:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r). \tag{7.3}$$

Из этого выражения следует, что

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2r^2}},$$

откуда, разделяя переменные и интегрируя,

$$t - t_0 = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2r^2}}}, \qquad r_0 = r(t_0). \tag{7.4}$$

Равенство (7.4) определяет в неявном виде расстояние r движущейся точки от центра поля как функцию времени. Знак “+” (“-”) перед радикалом берется на участках траектории, где $\dot{r} > 0$ ($\dot{r} < 0$).

Из (7.2) имеем

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt = \frac{M}{mr^2}\frac{dr}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2r^2}}}.$$

Отсюда находим зависимость $r(\varphi)$, определяющую траекторию частицы:

$$\varphi - \varphi_0 = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{M/_{r^2}\,dr}{\pm\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{M^2}{r^2}}}, \quad \varphi_0 = \varphi(t_0). \qquad (7.5)$$

Формулы (7.4) и (7.5) определяют в квадратурах закон движения частицы в центральном поле.

В центральном поле энергия частицы определяется выражением (7.3), из которого видно, что радиальную часть движения можно рассматривать как одномерное движение в поле с *“эффективной” потенциальной энергией*

$$U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + U(r).$$

Величину $M^2/_{2mr^2}$ называют *центробежной энергией.* Границы области движения по расстоянию от центра определяются равенством

$$U_{eff}(r) = E. \qquad (7.6)$$

Значения r, при которых выполняется равенство (7.6) называются *точками поворота*, поскольку в этом случае радиальная скорость $\dot{r} = 0$, а угловая скорость $\dot{\varphi}$ не обращается в нуль, т.е. $r(t)$ переходит от увеличения к уменьшению или наоборот.

Задача 7.2. Найдите уравнение траектории частицы массы m в центральном поле с потенциалом

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}, \qquad \alpha > 0, \ \beta > 0.$$

Определите условие замкнутости траектории.

□ Пусть в начальный момент времени t_0 частица находится на минимальном расстоянии $r_0 = r_{min}$ от силового центра. Будем отсчитывать угол φ от направления радиуса-вектора в этот момент времени, т.е. положим $\varphi_0 = 0$. Тогда, подставляя $U(r)$ в формулу (7.5) и производя интегрирование, найдем:

$$\varphi = \int\limits_{r_{min}}^{r} \frac{M/_{r^2}\, dr}{\sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}\right) - \frac{M^2}{r^2}}} =$$

$$= M \int\limits_{r_{min}}^{r} \frac{-d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{2m\beta + M^2} + 2mE - \frac{\left[(2m\beta + M^2)\frac{1}{r} - m\alpha\right]^2}{2m\beta + M^2}}} =$$

$$= -\frac{M}{\sqrt{2m\beta + M^2}} arcsin \frac{\left(2\beta + \frac{M^2}{m}\right)\frac{1}{r} - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 4E\left(\beta + \frac{M^2}{2m}\right)}}\Bigg|_{r_{min}}^{r} . \quad (7.7)$$

Для нахождения r_{min} воспользуемся формулой (7.6):

$$-\frac{\alpha}{r_{min}} + \frac{\beta}{r_{min}^2} + \frac{M^2}{2mr_{min}^2} = E.$$

Отсюда

$$\frac{1}{r_{min}} = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4E\left(\beta + \frac{M^2}{2m}\right)}}{2\beta + \frac{M^2}{m}}. \quad (7.8)$$

Подставляя это значение в (7.7), имеем:

$$\varphi = \frac{M}{\sqrt{2m\beta + M^2}}\left[\frac{\pi}{2} - arcsin \frac{\left(2\beta + \frac{M^2}{m}\right)\frac{1}{r} - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 4E\left(\beta + \frac{M^2}{2m}\right)}}\right] =$$

$$= \frac{M}{\sqrt{2m\beta + M^2}} arccos \frac{\left(2\beta + \frac{M^2}{m}\right)\frac{1}{r} - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 4E\left(\beta + \frac{M^2}{2m}\right)}}. \quad (7.9)$$

Введем обозначения:

$$p = \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{M^2}{m\alpha}, \;\; e = \sqrt{1 + \frac{4E}{\alpha^2}\left(\beta + \frac{M^2}{2m}\right)}, \;\; \omega = \sqrt{1 + \frac{2m\beta}{M^2}}.$$

С учетом сделанных обозначений из (7.9) получаем уравнение траектории:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\omega\varphi)}. \tag{7.10}$$

Из (7.10) следует, что в случае $E < 0$ ($e < 1$) движение частицы будет финитным. При этом условие замкнутости траектории имеет вид:

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{{}^{M}\!/_{r^2}\, dr}{\sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}\right) - \frac{M^2}{r^2}}} = 2\pi\frac{k}{n}, \tag{7.11}$$

где k и n - произвольные целые числа. Условие (7.11) означает, что через k полных оборотов точка займет первоначальное положение. С помощью (7.6) находим, что

$$\frac{1}{r_{max}} = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4E\left(\beta + \frac{M^2}{2m}\right)}}{2\beta + \frac{M^2}{m}}. \tag{7.12}$$

Вычисляя интеграл в выражении (7.11) с учетом (7.8) и (7.12), определяем, что траектория будет замкнутой при

$$\omega = {}^{k}\!/_{n}. \;\; \blacksquare$$

Задача 7.3. Задача двух тел. Имеются две материальные точки массами m_1 и m_2. Потенциальная энергия их взаимодействия зависит только от расстояния между точками, а внешние силы отсутствуют. Определите закон движения системы.

□ Функция Лагранжа системы двух частиц имеет вид:

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_2^2 - U(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|),$$

где $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ - радиусы-векторы частиц m_1 и m_2, соответственно. Выберем в качестве обобщенных координат системы радиус-вектор центра инерции

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{7.13}$$

и вектор взаимного расстояния точек

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2. \tag{7.14}$$

Из выражений (7.13) и (7.14) находим:

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} + \frac{m_2\boldsymbol{r}}{m_1 + m_2}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} - \frac{m_1\boldsymbol{r}}{m_1 + m_2},$$

откуда

$$\dot{\boldsymbol{r}}_1 = \dot{\boldsymbol{R}} + \frac{m_2\dot{\boldsymbol{r}}}{m_1 + m_2}, \quad \dot{\boldsymbol{r}}_2 = \dot{\boldsymbol{R}} - \frac{m_1\dot{\boldsymbol{r}}}{m_1 + m_2}. \tag{7.15}$$

Подставляя (7.15) в функцию Лагранжа, получим:

$$L = \frac{\mu\dot{\boldsymbol{R}}^2}{2} + \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - U(r). \tag{7.16}$$

Здесь $\mu = m_1 + m_2$ - полная масса системы, а $m = {m_1 m_2}/{(m_1 + m_2)}$ называется *приведенной массой*.

Из (7.16) видно, что функция Лагранжа в координатах $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}$ распадается на два слагаемых, зависящих от различных наборов переменных. А именно, первый член в (7.16) описывает свободное движение материальной точки с массой μ и радиусом-вектором $\boldsymbol{R}$, а остальные – движение материальной точки с массой m и радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ в центральном поле $U(r)$. Таким образом, исходная задача двух тел сведена к задачам о движении центра инерции системы и движении точки m в центральном поле.

Компоненты $\boldsymbol{R}$ являются циклическими координатами. Поэтому ${\partial L}/{\partial \dot{\boldsymbol{R}}}$ есть сохраняющийся импульс системы, т.е.

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{R}}} = \mu\dot{\boldsymbol{R}} = const.$$

Отсюда следует, что

$$\boldsymbol{R}(t) = \frac{\boldsymbol{P}t}{\mu} + \boldsymbol{R}(0),$$

т.е. центр инерции движется прямолинейно и равномерно.

Закон движения приведенной массы m в центральном поле $U(r)$ определяется интегралами (7.4) и (7.5). ■

Задача 7.4. Сферический маятник. Проинтегрируйте уравнения движения материальной точки массы m, движущейся по абсолютно гладкой поверхности сферы радиуса R в однородном поле тяжести.

□ Функция Лагранжа для сферического маятника (задача 3.3)

$$L = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) + mgRcos\theta.$$

Видно, что координата φ - циклическая, а $\partial L/_{\partial t} = 0$. Следовательно, имеется два интеграла движения – обобщенный импульс p_φ (совпадающий с проекцией M_z момента импульса на полярную ось z) и энергия E:

$$p_\varphi \equiv M_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2 sin^2\theta\dot{\varphi}\ , \tag{7.17}$$

$$E = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - mgRcos\theta. \tag{7.18}$$

Из интеграла движения (7.17) следует, что

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z}{mR^2 sin^2\theta}. \tag{7.19}$$

Подставляя это выражение в (7.18), получим:

$$E = \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} + U_{eff}(\theta), \tag{7.20}$$

где

$$U_{eff}(\theta) = \frac{M_z^2}{2mR^2 sin^2\theta} - mgRcos\theta.$$

Из (7.20) находим, что

$$\dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{mR^2}\left(E - U_{eff}(\theta)\right)},$$

откуда (разделяя переменные и интегрируя)

$$t - t_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\pm\sqrt{\frac{2}{mR^2}\left(E - U_{eff}(\theta)\right)}}, \quad \theta_0 = \theta(t_0). \qquad (7.21)$$

С учетом (7.21) из равенства (7.19) имеем:

$$\varphi - \varphi_0 = \pm\frac{M_z}{R\sqrt{2m}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{sin^2\theta\sqrt{\left(E - U_{eff}(\theta)\right)}}, \qquad \varphi_0 = \varphi(t_0). \qquad (7.22)$$

Формулы (7.21) и (7.22) являются решением в квадратурах поставленной задачи. ■

Задача 7.5. Проинтегрируйте уравнения движения частицы массы m и заряда q, находящейся в магнитном поле бесконечного прямого тока.

□ Введем цилиндрическую систему координат, ось z которой направим вдоль тока. Силовые линии магнитного поля представляют собою концентрические окружности, плоскость которых перпендикулярна току. Поэтому вектор напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}$ будет иметь единственную отличную от нуля составляющую H_φ. Для ее нахождения воспользуемся законом полного тока. В качестве замкнутой кривой L (контура интегрирования) выберем окружность радиуса ρ, перпендикулярную к току и имеющую центр на оси тока. Тогда

$$\oint_L H_\varphi dl = 2\pi\rho H_\varphi = \frac{4\pi}{c} I, \qquad (7.23)$$

где I - сила тока. Из (7.23) находим, что

$$H_\varphi = \frac{2I}{c\rho} \; .$$

В цилиндрических координатах (см. приложение)

$$rot\boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix},$$

а равенство $\boldsymbol{H} = rot\boldsymbol{A}$ имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{2I}{c\rho}, \\ \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (7.24)$$

Положим $A_\rho = 0$, $A_\varphi = 0$. Из второго уравнения системы (7.24) имеем

$$A_z = -\frac{2I}{c} ln\frac{\rho}{\rho_0}, \qquad \rho_0 = const.$$

Поскольку A_z зависит только от ρ, то при сделанном выборе векторного потенциала все уравнения системы (7.24) обращаются в тождества. При этом функция Лагранжа частицы

$$L = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + \frac{q}{c}(\boldsymbol{A}, \dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{2qI}{c^2} ln\frac{\rho}{\rho_0}\dot{z}. \qquad (7.25)$$

Из (7.25) видно, что φ и z - циклические координаты, а ${\partial L}/{\partial t} = 0$. Это означает, что интегралами движения являются обобщенные импульсы

$$p_\varphi = M_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}\,, \qquad (7.26)$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} - \frac{2qI}{c^2} ln\frac{\rho}{\rho_0}, \qquad (7.27)$$

и энергия

$$E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2). \qquad (7.28)$$

Интегралы движения (7.26)-(7.28) позволяют найти закон движения частицы в квадратурах. Действительно, выражая $\dot{\varphi}$ и $\dot{z}$ из (7.26) и (7.27), представим энергию (7.28) в виде

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \frac{M_z^2}{m^2\rho^2} + \left(\frac{p_z}{m} + \frac{2qI}{mc^2} ln\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2\right),$$

откуда

$$\dot{\rho}^2 = \frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(\rho)\right). \tag{7.29}$$

Здесь

$$U_{eff}(\rho) = \frac{M_z^2}{2m\rho^2} + \frac{1}{2}\left(p_z + \frac{2qI}{c^2} ln\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2.$$

Разделяя переменные в (7.29) и интегрируя, имеем (полагаем, что $\rho(t_0) = \rho_0$):

$$t - t_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(\rho)\right)}}. \tag{7.30}$$

Интегрирование выражения (7.27) приводит к равенству:

$$z - z_0 = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \left(\frac{p_z}{m} + \frac{2Iq}{mc^2} ln\frac{\rho}{\rho_0}\right) \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(\rho)\right)}}, \qquad z_0 = z(t_0). \tag{7.31}$$

Наконец, из равенства (7.26) находим:

$$\varphi - \varphi_0 = \pm\frac{M_z}{\sqrt{2m}} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{\left(E - U_{eff}(\rho)\right)}}, \quad \varphi_0 = \varphi(t_0). \tag{7.32}$$

Интегралы (7.30)-(7.32) задают закон движения частицы. ■

Задача 7.6 Частица массы m и заряда q движется в поле магнитного диполя с векторным потенциалом

$$\boldsymbol{A} = \frac{[\boldsymbol{\mu r}]}{r^3}, \ \ \boldsymbol{\mu} = const,$$

в плоскости перпендикулярной $\boldsymbol{\mu}$. Определите возможные типы движения и найдите закон движения в квадратурах.

□ Воспользуемся цилиндрической системой координат, ось z которой направим вдоль $\boldsymbol{\mu}$, а плоскость $z = 0$ совместим с плоскостью движения частицы.

Векторный потенциал

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho^3}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z \\ 0 & 0 & \mu \\ \rho & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\mu}{\rho^2}\boldsymbol{e}_\varphi,$$

а функция Лагранжа (4.10) есть

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + \frac{q\mu}{c\rho}\dot{\varphi}.$$

Поскольку функция Лагранжа явно от времени не зависит, а координата φ – циклическая, то интегралами движения являются обобщенная энергия

$$E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2), \tag{7.33}$$

и обобщенный импульс

$$p_\varphi \equiv M_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{q\mu}{c\rho}. \tag{7.34}$$

Из (7.34) находим, что

$$\dot{\varphi} = \frac{\left(M_z - \frac{q\mu}{c\rho}\right)}{m\rho^2}. \tag{7.35}$$

Подставляя выражение для $\dot{\varphi}$ в (7.33), имеем:

$$E = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + U_{eff}(\rho), \tag{7.36}$$

где

$$U_{eff}(\rho) = \frac{\left(M_z - \frac{q\mu}{c\rho}\right)^2}{2m\rho^2}. \tag{7.37}$$

С целью определения возможных типов движения частицы проанализируем зависимость $U_{eff}(\rho)$. Очевидно, что при $\rho \to \infty$, эффективная потенциальная энергия $U_{eff} \to 0$, а при $\rho \to 0$, $U_{eff} \to \infty$. Приравнивая производную ${dU_{eff}}/{d\rho}$ к нулю, получим:

$$\left(\frac{M_z c}{q\mu}\rho - 1\right)\left(\frac{M_z c}{2q\mu}\rho - 1\right) = 0. \quad (7.38)$$

Отсюда следует, что при ${M_z}/{q} \leq 0$ уравнение (7.38) не имеет решений, а, следовательно, функция (7.37) не имеет локальных экстремумов. Схематично график функции $U_{eff}(\rho)$ для данного случая представлен на рис. 7.1 (а). В этом случае при любой энергии E частица совершает инфинитное движение.

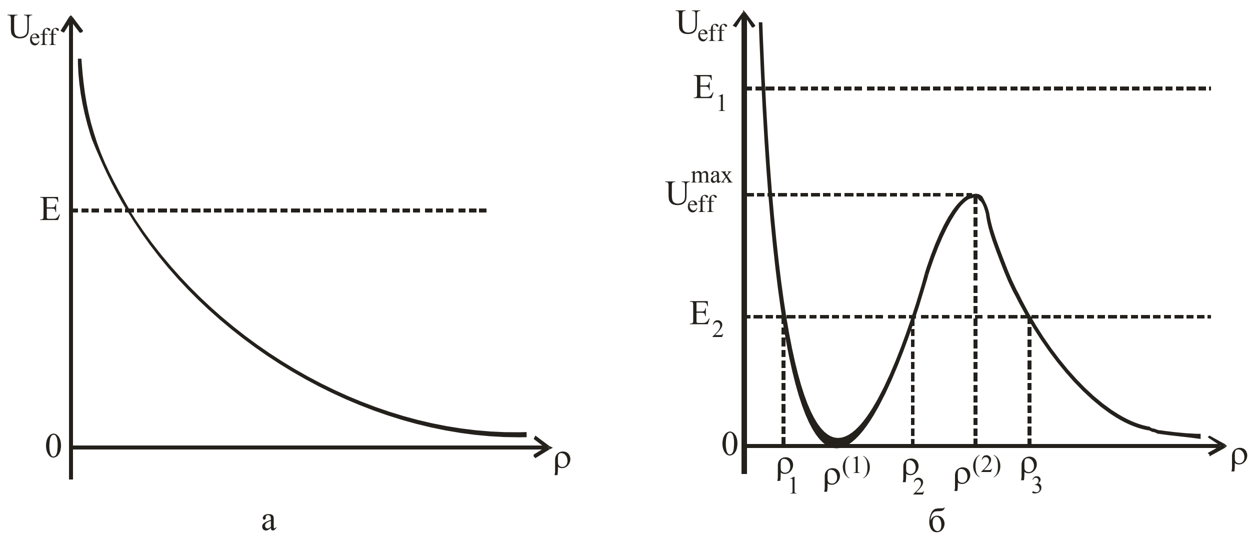

Рис. 7.1

В противном случае, ${M_z}/{q} > 0$, решениями (7.38) будут

$$\rho^{(1)} = \frac{q\mu}{M_z c}, \qquad \rho^{(2)} = \frac{2q\mu}{M_z c}.$$

Значение $\rho^{(1)}$ соответствует минимуму функции $U_{eff}(\rho)$, а значение $\rho^{(2)}$ – ее локальному максимуму. Подставляя $\rho^{(2)}$ в (7.37), найдем значение локального максимума функции $U_{eff}(\rho)$:

$$U_{eff}^{max} = \frac{c^2 M_z^4}{32mq^2\mu^2}.$$

График $U_{eff}(\rho)$ для ${M_z}/{q} > 0$ приведен на 7.1 (б). Видно, что при $E > U_{eff}^{max}$ движение инфинитно, а при $E \le U_{eff}^{max}$ движение может быть как инфинитным (в области $\rho > \rho_3$ для энергии E_2 на рисунке), так и финитным ($\rho_1 < \rho < \rho_2$).

Из соотношения (7.36) следует:

$$t - t_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(\rho)\right)}}. \tag{7.39}$$

С учетом (7.37) из (7.35) получаем:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\left(M_z - \frac{q\mu}{c\rho}\right) d\rho}{\pm\rho^2\sqrt{2m\left(E - U_{eff}(\rho)\right)}}. \tag{7.40}$$

Выражения (7.39) и (7.40) определяют закон движения частицы. ■

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

34. Найдите уравнение траектории материальной точки массы m, движущейся в центральном поле с потенциалом

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}.$$

35. Материальная точка массы m движется в центральном поле с потенциалом

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2} ln\frac{r}{r_0} \quad (\alpha > 0).$$

Постройте график зависимости $U_{eff}(r)$, опишите возможные типы движения и для случая равенства нулю полной энергии точки найдите уравнение траектории.

36. Найдите уравнение траектории материальной точки массы m, движущейся в центральном поле с потенциалом

$$U(r) = \frac{\alpha}{r^2} \quad (\alpha > 0).$$

37. Частица массы m и заряда q движется в однородном поле тяжести под бесконечно длинным тонким проводом с постоянным током I (рис. 7.2). Движение происходит в вертикальной плоскости, проходящей через провод с током. Определите возможные типы движения частицы и найдите закон движения в квадратурах.

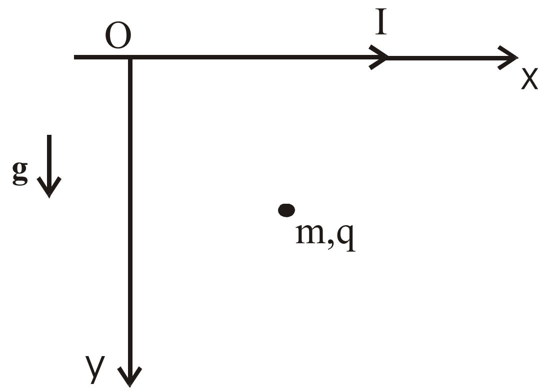

Рис. 7.2

38. Потенциальная энергия взаимодействия двух частиц имеет вид

$$U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \frac{k}{2}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2, \ \ k = const.$$

Найдите $\boldsymbol{r}_1(t)$ и $\boldsymbol{r}_2(t)$.

39. Атом состоит из ядра массы M и n электронов одинаковых масс m. Исключите движение центра инерции и сведите задачу к задаче о движении n частиц. Найдите функцию Лагранжа рассматриваемой системы.

40. Найдите функцию Лагранжа и уравнения движения двух частиц с массами m_1 и m_2 и с зарядами q_1 и q_2, находящихся в однородном электрическом поле напряженности $\boldsymbol{E}$, если $q_1 = -q_2 = q$.

§ 8. Рассеяние частиц

Рассмотрим однородный поток одинаковых частиц, налетающих на неподвижный силовой центр из бесконечности, где все они имеют одинаковую скорость v_∞. Если после прохождения силового центра частицы отклоняются от своего первоначального направления и снова уходят на бесконечность, то такой процесс называют *рассеянием частиц*. Пусть потенциальная энергия взаимодействия частиц с полем зависит только от расстояния r до силового центра, т.е. $U = U(r)$. На рис. 8.1 схематично изображена траектория движения одной из частиц потока. Угол между

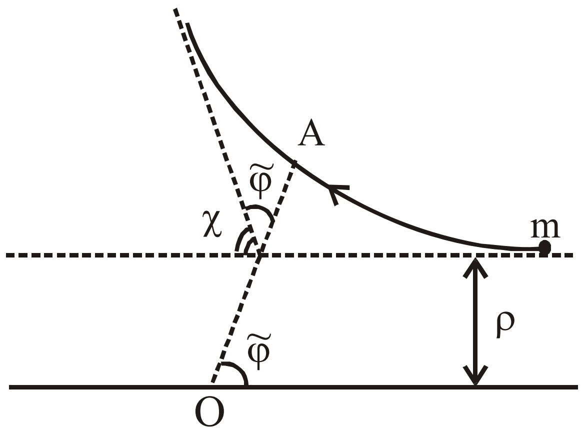

Рис. 8.1

асимптотами траектории называется *углом рассеяния* (на рисунке угол рассеяния обозначен посредством χ). Если бы частица не взаимодействовала с силовым центром, то она прошла бы на расстоянии ρ от него. Параметр ρ называют *прицельным расстоянием*. Траектория частицы в центральном поле симметрична по отношению к прямой, проведенной в ближайшую к центру точку орбиты (отрезок OA на рисунке). Поэтому обе асимптоты пересекают указанную прямую под одинаковыми углами. Обозначим эти углы через $\tilde{\varphi}$. Угол $\tilde{\varphi}$ связан с центральным углом соотношением

$$\chi = |\pi - 2\tilde{\varphi}|. \tag{8.1}$$

Поместим начало O полярной системы координат в силовом центре. Полярный угол φ будет определяться формулой (7.5). Будем отсчитывать угол φ от радиуса-вектора $\boldsymbol{r}_{min} = \overrightarrow{OA}$. Поскольку частица уходит на бесконечность, то для определения $\tilde{\varphi}$ верхний предел интегрирования в (7.5) следует положить равным ∞. Учитывая также, что

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2} \text{ и } M = mv_\infty \rho,$$

из формулы (7.5) получим:

$$\tilde{\varphi} = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho/_{r^2}\, dr}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2}}}. \tag{8.2}$$

Минимальное расстояние между частицей и силовым центром определяется формулой (7.6), которая в новых обозначениях запишется в виде:

$$1 - \frac{\rho^2}{r_{min}^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2} = 0. \tag{8.3}$$

В физических приложениях, как правило, приходится иметь дело с рассеянием целого пучка одинаковых частиц, падающих на силовой центр с одинаковой скоростью v_∞. Этот пучок можно охарактеризовать *плотностью потока* частиц n, под которой подразумевается число частиц, пролетающих за секунду через перпендикулярную к пучку единичную площадку. Частицы пучка рассеиваются на разные углы χ в зависимости от того, с каким прицельным расстоянием они летят. Будем считать, что связь между ρ и χ является взаимно однозначной. Тогда частицы, прицельное расстояние которых лежит в пределах $[\rho,\ \rho + d\rho]$, рассеиваются в интервал углов $[\chi,\ \chi + d\chi]$. В случае однородного по сечению пучка поток частиц, прицельное расстояние которых попадает в интервал $[\rho,\ \rho + d\rho]$, равен $dN = n2\pi\rho d\rho$. Основной характеристикой процесса рассеяния является *дифференциальное эффективное сечение рассеяния*, $d\sigma$, которое определяется как отношение числа частиц, рассеянных в интервал углов $[\chi,\ \chi + d\chi]$ в единицу времени к плотности потока налетающих частиц, т.е.

$$d\sigma = \frac{dN}{n} = 2\pi\rho d\rho.$$

Отсюда, переходя от переменной ρ к χ, получим:

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right| d\chi. \qquad (8.4)$$

Здесь производная ${d\rho(\chi)}/{d\chi}$ взята по модулю, поскольку, как правило, ${d\rho(\chi)}/{d\chi} < 0$ (как правило, чем меньше ρ, тем больше угол рассеяния χ).

Часто $d\sigma$ относят не к элементу плоского угла $d\chi$, а к элементу телесного угла do. Телесный угол между конусами с углами раствора χ и $\chi + d\chi$ есть $do = 2\pi sin\chi d\chi$. Учитывая это, из (8.4) находим:

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{sin\chi}\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right| do. \qquad (8.5)$$

Полное сечение рассеяния, σ, можно получить либо интегрированием (8.4) по углу рассеяния χ в пределах от 0 до π, либо интегрированием (8.5) по всему телесному углу.

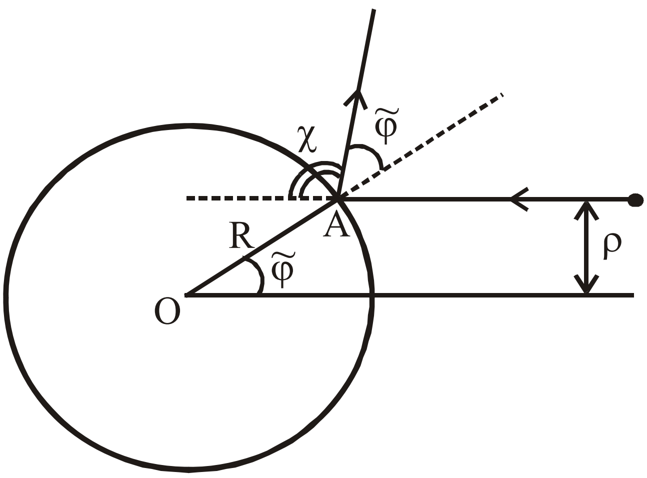

Рис. 8.2

Задача 8.1. Найдите дифференциальное и полное сечения рассеяния частиц от поверхности абсолютно твердого шара радиуса R.

□ Поскольку в данном случае угол падения частиц равен углу отражения, траектория каждой частицы будет состоять из двух прямых, расположенных симметрично относительно радиуса, проведенного в точку столкновения частицы с шаром. Схематично процесс рассеяния показан на рис. 8.2. Из рисунка видно, что

$$\rho = R sin\tilde{\varphi}.$$

Пользуясь равенством (8.1), перепишем выражение для ρ в виде:

$$\rho = R sin\frac{\pi - \chi}{2} = R cos\frac{\chi}{2}.$$

Подставляя это выражение в (8.5), найдем:

$$d\sigma = \frac{R^2}{4} do.$$

Для нахождения полного сечения рассеяния проинтегрируем $d\sigma$ по всему телесному углу do, получим:

$$\sigma = \int \frac{R^2}{4} do = \pi R^2.$$

Отсюда виден геометрический смысл найденного полного сечения рассеяния: для того, чтобы частица могла вообще рассеяться ей необходимо попасть в площадь сечения шара плоскостью, проходящей через его центр и расположенной перпендикулярно скорости частицы. ■

Задача 8.2. Найдите дифференциальное сечение рассеяния частиц в поле

$$U(r) = \frac{\alpha}{r^2} \quad (\alpha > 0).$$

□ Формула (8.2) принимает вид:

$$\tilde{\varphi} = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho dr}{r\sqrt{r^2 - \left(\rho^2 + \frac{2\alpha}{m v_\infty^2}\right)}}. \qquad (8.6)$$

Вычислив интеграл (8.6), найдем:

$$\tilde{\varphi} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \frac{2\alpha}{m v_\infty^2}}} arcsin\frac{\sqrt{\rho^2 + \frac{2\alpha}{m v_\infty^2}}}{r_{min}}. \qquad (8.7)$$

Значение r_{min} ищем из условия (8.3):

$$1-\frac{\rho^2}{r_{min}^2}-\frac{2\alpha}{mv_\infty^2 r_{min}^2}=0,$$

откуда

$$r_{min}=\sqrt{\rho^2+\frac{2\alpha}{mv_\infty^2}}.$$

Подставляя r_{min} в (8.7), имеем:

$$\tilde{\varphi}=\frac{\pi}{2}\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+\frac{2\alpha}{mv_\infty^2}}}.$$

Выражая отсюда ρ через $\tilde{\varphi}$ и учитывая, что $\tilde{\varphi}={(\pi-\chi)}/{2}$, получаем:

$$\rho=\sqrt{\frac{2\alpha}{mv_\infty^2}}\frac{\pi-\chi}{\sqrt{2\pi\chi-\chi^2}}. \tag{8.8}$$

Дифференцирование этого выражения по χ дает:

$$\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right|=\sqrt{\frac{2\alpha}{mv_\infty^2}}\frac{\pi^2}{(2\pi\chi-\chi^2)^{3/2}}. \tag{8.9}$$

Дифференциальное сечение рассеяния получим, подставив (8.8) и (8.9) в формулу (8.5):

$$d\sigma=\frac{2\pi^2\alpha}{mv_\infty^2}\frac{\pi-\chi}{\chi^2(2\pi-\chi)^2}\frac{do}{sin\chi}.$$

■

При движении в центральном поле (см. § 7) наличие центробежной энергии ${M^2}/{2mr^2}$, обращающейся при $r\to 0$ в бесконечность, как ${1}/{r^2}$, приводит обычно к невозможности проникновения движущихся частиц к центру поля. “Падение” частицы в центр поля возможно лишь при условии, что $U(r)\to-\infty$ либо как $-{\alpha}/{r^2}$ с $\alpha>{M^2}/{2m}$, либо пропорционально

$-1/_{r^n}$ с $n > 2$. *Полное сечение захвата* или *“падения”* в центр поля определяется как отношение числа всех частиц данного пучка, захваченных за единицу времени, к плотности потока этого пучка до рассеяния.

Задача 8.3. Определите полное сечения захвата частиц в центр поля

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}, \quad \alpha > 0.$$

□ Чтобы частица достигла центра поля необходимо выполнение условия $\alpha > M^2/_{2m}$. Учитывая, что $M = mv_\infty \rho$, данное условие можно переписать в виде $2\alpha > m\rho^2 v_\infty^2$. Отсюда видно, что захватываются полем частицы, у которых прицельное расстояние

$$\rho \leq \rho_{max} = \sqrt{\frac{2\alpha}{mv_\infty^2}}.$$

Поэтому искомое сечение захвата

$$\sigma = \pi\rho_{max}^2 = \frac{2\pi\alpha}{mv_\infty^2}.$$

■

Задача 8.4. Определите полное сечение захвата в центр поля

$$U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}, \qquad \alpha > 0, \ \beta > 0.$$

□ На рис. 8.3 схематично представлены зависимости “эффективной” потенциальной энергии

$$U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2} \tag{8.10}$$

для случаев $M^2/_{2m} \geq \beta$ (а) и $M^2/_{2m} < \beta$ (б).

Видно, что в случае $M^2/_{2m} \geq \beta$ частицы не могут попасть в центр поля, при любой энергии падающих частиц возможно лишь их рассеяние.

Для случая ${M^2}/{2m} < \beta$ найдем максимальное значение “эффективной” потенциальной энергии. Из равенства

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{M^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}\right) = 0$$

определяем координату максимума функции (8.10):

$$r_0 = \frac{2\beta}{\alpha} - \frac{M^2}{m\alpha}.$$

Подставляя r_0 в (8.10), получаем:

$$U_{eff}^{max} = \frac{\alpha^2}{4\beta - 2mv_\infty^2\rho^2}.$$

Здесь учтено, что $M = mv_\infty\rho$.

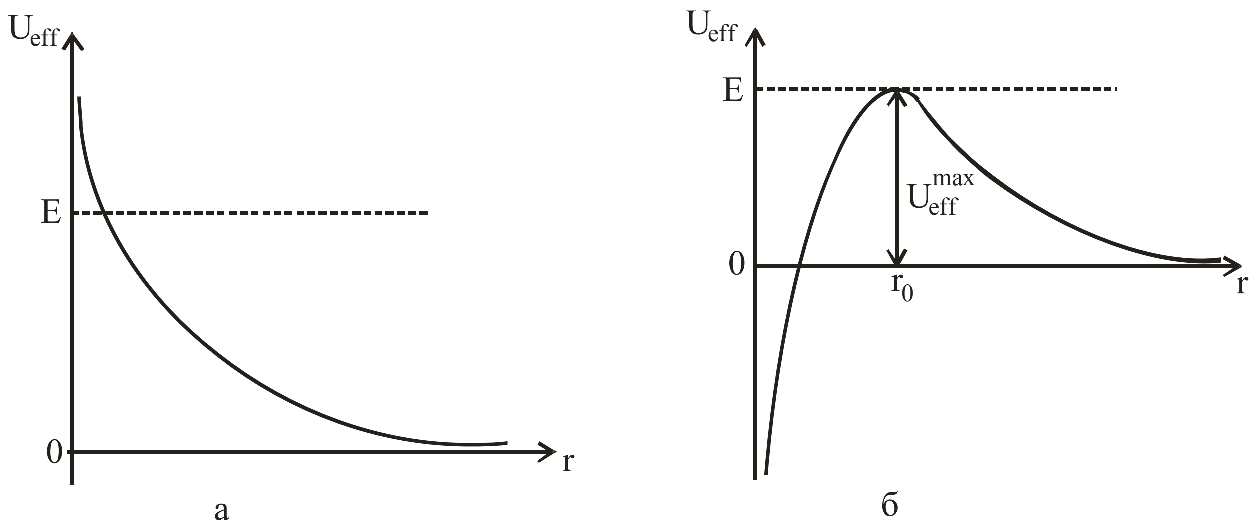

Рис. 8.3

Очевидно, что “падают” в центр те частицы, у которых $E > U_{eff}^{max}$. Максимальное значение прицельного расстояния ρ_{max} находится из условия $E = U_{eff}^{max}$ или

$$E = \frac{\alpha^2}{4\beta - 2mv_\infty^2\rho_{max}^2} = \frac{\alpha^2}{4\beta - 4E\rho_{max}^2}, \qquad (8.11)$$

где учтено, что $E = {mv_\infty^2}/{2}$. Из (8.11) находим, что

$$\rho_{max}^2 = \frac{\beta}{E} - \frac{\alpha^2}{4E^2}. \qquad (8.12)$$

Полное сечение захвата

$$\sigma = \pi\rho_{max}^2 = \pi\left(\frac{\beta}{E} - \frac{\alpha^2}{4E^2}\right).$$

■

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

41. Поток частиц, скорости которых первоначально параллельны оси z, рассеивается на неподвижном упругом эллипсоиде вращения

$$\frac{\rho^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Найдите дифференциальное сечение рассеяния.

Указание: угол наклона касательной в точке падения частицы равен углу падения $\tilde{\varphi}$ и определяется соотношением $tg\tilde{\varphi} = {dz}/{d\rho}$ (рис. 8.4). Угол рассеяния $\chi = \pi - 2\tilde{\varphi}$. Далее решение аналогично решению задач 8.1 и 8.2.

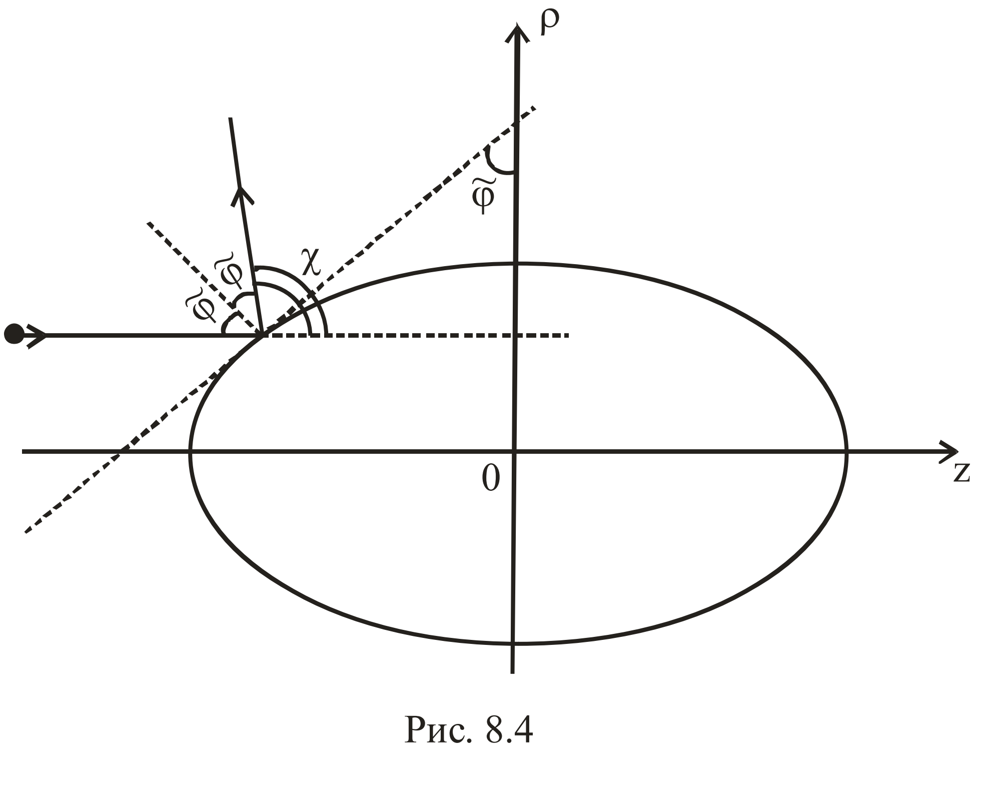

Рис. 8.4

42. *Формула Резерфорда.* Найдите дифференциальное сечение рассеяния частиц в поле

$$U(r)=\frac{\alpha}{r}.$$

43. Найдите полное сечение захвата частиц в центр поля

$$U(r)=-\frac{\alpha}{r^n}, \qquad \alpha>0,\ n>2.$$

44. Найдите полное сечение захвата в центр поля

$$U(r)=\frac{\alpha}{r^2}-\frac{\beta}{r^4}, \qquad \alpha>0,\ \beta>0.$$

§ 9. Колебания систем со многими степенями свободы

Рассмотрим механическую систему с s степенями свободы на которую наложены стационарные идеальные голономные связи и действуют потенциальные силы. Пусть потенциальная энергия системы зависит только от обобщенных координат q и имеет минимум в точке q^0. Обозначим отклонения системы от положения равновесия посредством $\xi_\alpha=q_\alpha-q_\alpha^0$, $\alpha=1,2,\dots,s$. Потенциальную энергию разложим в окрестности точки q^0 в ряд по малому параметру ξ_α с точностью до членов второго порядка малости, полагая $U(q^0)=0$:

$$U=\frac{1}{2!}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\frac{\partial^2U}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}(q^0)\xi_\alpha\xi_\beta=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}k_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta, \qquad (9.1)$$

где введено обозначение $k_{\alpha\beta}\equiv{}^{\partial^2U}\!\big/_{\partial q_\alpha\partial q_\beta}(q^0)$. Ряд (9.1) не содержит члена с первыми производными от U по координатам, поскольку потенциальная энергия имеет экстремум в точке q^0. Кинетическая энергия рассматриваемой системы (см. задачу 3.2)

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}m_{\alpha\beta}(q)\dot{\xi}_\alpha\dot{\xi}_\beta, \qquad (9.2)$$

где

$$m_{\alpha\beta}(q)=\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \xi_\beta};$$

$\boldsymbol{r}_i$ и m_i - радиусы-векторы и массы точек системы, соответственно. Будем считать, что скорости $\dot{\xi}_\alpha$ малы. Тогда, чтобы получить в (9.2) форму второго порядка малости (такого же порядка малости, что и потенциальная энергия) разложим коэффициенты $m_{\alpha\beta}(q)$ в ряд, ограничиваясь первым членом разложения:

$$m_{\alpha\beta}(q)=m_{\alpha\beta}(q^0)+\cdots.$$

При этом (9.2) сводится к выражению

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} m_{\alpha\beta}\dot{\xi}_\alpha\dot{\xi}_\beta,$$

где для сокращения записи введено обозначение: $m_{\alpha\beta}(q^0)\equiv m_{\alpha\beta}$.

Функция Лагранжа системы

$$L=T-U=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\left(m_{\alpha\beta}\dot{\xi}_\alpha\dot{\xi}_\beta \cdot -k_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta\right),$$

а уравнения Лагранжа имеют вид:

$$\sum_{\beta=1}^{s}(m_{\alpha\beta}\ddot{\xi}_\beta+k_{\alpha\beta}\xi_\beta)=0,\quad \alpha=1,2,\dots,s. \tag{9.2}$$

Частные решения системы (9.2) будем искать в виде

$$\xi_\beta=A_\beta e^{i\omega t},\qquad \beta=1,2,\dots,s,$$

где A_β – комплексные постоянные (“i” в экспоненте – мнимая единица). Подставляя ξ_β в (9.2) и сокращая на $e^{i\omega t}$, получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно A_β:

$$\sum_{\beta=1}^{s}\left(-\omega^2 m_{\alpha\beta}+k_{\alpha\beta}\right)A_\beta=0,\quad \alpha=1,2,\dots,s. \tag{9.3}$$

Чтобы эта система имела нетривиальные решения, ее определитель должен быть равен нулю, т.е.

$$\left|-\omega^2 m_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta}\right| = 0. \qquad (9.4)$$

Уравнение (9.4) называется *характеристическим уравнением*. Оно представляет собой алгебраическое уравнение степени s относительно ω^2 и имеет s корней ω_k^2 (k=1,2,…, s). Величины ω_k называются *собственными частотами* системы. Значения ω_k могут оказаться кратными, т.е. какие-то из частот могут совпадать. Такие частоты называются *вырожденными*.

После того как частоты ω_k найдены, подставляя каждую из них в систему (9.3), можно найти соответствующие значения $A_\beta^{(k)}$. В случае когда все корни характеристического уравнения различны, система (9.3) имеет для каждого ω_k ровно одно линейно независимое решение $A_\beta^{(k)}$, которое можно представить в виде

$$A_\beta^{(k)} = \Delta_{\beta_k\beta}^{(k)} A_k, \qquad \beta = 1,2, \dots, s,$$

где A_k - произвольная комплексная постоянная, а $\Delta_{\beta_k\beta}^{(k)}$ – алгебраические дополнения элементов β_k-ой строки характеристического детерминанта (9.4), взятого при значении $\omega = \omega_k$. Строка β_k выбирается произвольно, но так, чтобы в ней был хотя бы один элемент с отличным от нуля алгебраическим дополнением (такой элемент существует в силу предположения о невырожденности собственных частот).

Комплексную постоянную A_k выразим через действительные постоянные C_k и δ_k с помощью соотношения

$$A_k = C_k e^{i\delta_k}.$$

Тогда

$$A_\beta^{(k)} = \Delta_{\beta_k\beta}^{(k)} C_k e^{i\delta_k}, \qquad \beta = 1,2, \dots, s,$$

а частное решение

$$\xi_\beta = \Delta_{\beta_k\beta}^{(k)} C_k e^{i(\omega_k t + \delta_k)}, \;\; \beta = 1,2, \dots, s.$$

Переходя к вещественной части, имеем:

$$\xi_\beta = \Delta^{(k)}_{\beta_k\beta} C_k \cos(\omega_k t + \delta_k), \quad \beta = 1,2,\dots,s.$$

Общим решением системы (9.2) будет

$$\xi_\beta = \sum_{k=1}^{s} \Delta^{(k)}_{\beta_k\beta} C_k \cos(\omega_k t + \delta_k), \quad \beta = 1,2,\dots,s. \tag{9.5}$$

Константы C_k и δ_k определяются начальными условиями. Из (9.5) следует, что изменение каждой из координат системы со временем представляет собой суперпозицию s гармонических колебаний $\Theta_k = C_k \cos(\omega_k t + \delta_k)$. С помощью (9.5) можно выразить Θ_k через $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$. Таким образом, координаты Θ_k можно рассматривать как новые обобщенные координаты. Эти координаты (изменяющиеся по гармоническому закону, и, следовательно, удовлетворяющие уравнению $\ddot{\Theta}_k + \omega_k^2 \Theta_k = 0$) называют *нормальными* или *главными* координатами.

Задача 9.1. Тело массы m_1, соединенное с пружиной жесткости k, другой конец которой закреплен неподвижно, может двигаться без трения по горизонтальной плоскости. К телу прикреплен математический маятник массы m_2 и длины l (рис. 9.1). Найдите функцию Лагранжа системы и частоты малых колебаний.

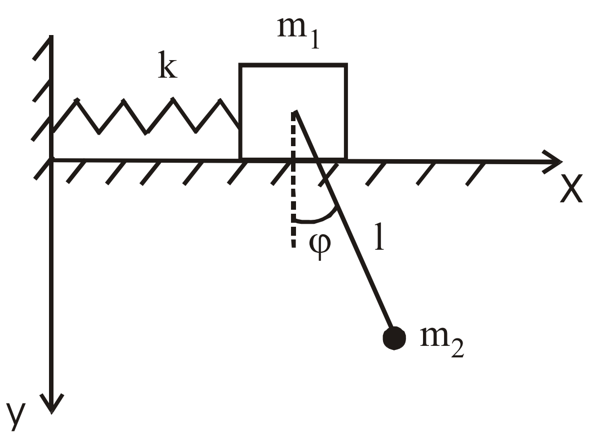

Рис. 9.1

□ В качестве обобщенных координат выберем координату x смещения тела массы m_1 от положения равновесия и угол φ отклонения от вертикали математического маятника. Кинетическую энергию можно записать в виде:

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2),$$

где x_2 и y_2 – декартовы координаты частицы m_2, выраженные через обобщенные координаты с помощью формул $x_2 = x + l sin\varphi,\ \ y_2 = l cos\varphi$.

Отсюда

$$\dot{x}_2 = \dot{x} + l\dot{\varphi} cos\varphi, \ \ \dot{y}_2 = -l\dot{\varphi} sin\varphi. \tag{9.6}$$

С учетом (9.6) кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2 l^2 \dot{\varphi}^2}{2} + m_2 l \dot{x}\dot{\varphi} cos\varphi. \tag{9.7}$$

Ограничиваясь членами второго порядка малости, полагаем в (9.7) $cos\varphi = 1$. При этом

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2 l^2 \dot{\varphi}^2}{2} + m_2 l \dot{x}\dot{\varphi}.$$

Потенциальная энергия системы

$$U = \frac{k}{2}x^2 - m_2 g l cos\varphi. \tag{9.8}$$

Разлагая (9.8) в ряд до членов второго порядка малости, имеем:

$$U = \frac{k}{2}x^2 - m_2 g l\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right).$$

Опуская постоянную $m_2 g l$, находим функцию Лагранжа малых колебаний системы:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2 l^2 \dot{\varphi}^2}{2} + m_2 l \dot{x}\dot{\varphi} - \frac{k}{2}x^2 - m_2 g l \frac{\varphi^2}{2}.$$

Составим уравнения Лагранжа:

$$\left.\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} + kx = 0, \\ \ddot{x} + l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.9}$$

Частные решения этой системы ищем в виде:

$$x = A_1 e^{i\omega t}, \qquad \varphi = A_2 e^{i\omega t}.$$

Подставляя их в (9.9) и сокращая на $e^{i\omega t}$, получим:

$$\left.\begin{aligned} [-(m_1 + m_2)\omega^2 + k]A_1 - m_2 l \omega^2 A_2 = 0, \\ -\omega^2 A_1 + \left(g - l\omega^2\right)A_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.10}$$

Запишем характеристическое уравнение системы (9.10):

$$\begin{vmatrix} -(m_1 + m_2)\omega^2 + k & -m_2 l \omega^2 \\ -\omega^2 & g - l\omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда получаем квадратное уравнение относительно ω^2:

$$\omega^4 - \left(\frac{k}{m_1} + \frac{g}{l}\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)\omega^2 + \frac{kg}{m_1 l} = 0.$$

Решая это уравнение, находим собственные частоты малых колебаний системы:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{k}{m_1} + \frac{g}{l}\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{k}{m_1} + \frac{g}{l}\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)^2 - \frac{4kg}{m_1 l}}\right].$$

■

Задача 9.2. Проинтегрируйте уравнения движения и определите нормальные координаты колебаний плоского двойного математического маятника (рис. 3.1) при условии, что длины и массы математических маятников одинаковы.

□ Функция Лагранжа двойного математического маятника получена в задаче 3.4. В случае $m_1 = m_2 = m$ и $l_1 = l_2 = l$, она имеет вид:

$$L = ml^2\left(\dot{\varphi}_1^2 + \frac{\dot{\varphi}_2^2}{2} + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\right) + mgl(2cos\varphi_1 + cos\varphi_2).$$

Считая колебания малыми, полагаем

$$cos\varphi_1 \approx 1 - \frac{\varphi_1^2}{2}, \qquad cos\varphi_2 \approx 1 - \frac{\varphi_2^2}{2}, \qquad \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \approx 1.$$

При этом

$$L = ml^2\left({\dot{\varphi}_1}^2 + \frac{{\dot{\varphi}_2}^2}{2} + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\right) - mgl\left(\varphi_1^2 + \frac{\varphi_2^2}{2}\right),$$

а уравнения Лагранжа:

$$\left.\begin{aligned} 2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + \frac{2g}{l}\varphi_1 = 0, \\ \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l}\varphi_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.11}$$

Ищем частные решения системы (9.11) в виде

$$\varphi_1 = A_1 e^{i\omega t}, \;\; \varphi_2 = A_2 e^{i\omega t}.$$

Подставляя φ_1 и φ_2 в (9.11), получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{2g}{l}-2\omega^2\right)A_1-\omega^2A_2=0,\\ -\omega^2A_1+\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right)A_2=0.\end{aligned}\right\}$$

Характеристическое уравнение этой системы:

$$\begin{vmatrix}\frac{2g}{l}-2\omega^2 & -\omega^2\\ -\omega^2 & \frac{g}{l}-\omega^2\end{vmatrix}=0.$$

Отсюда находим, что

$$\omega_{1,2}^2=\left(2\pm\sqrt{2}\right)\frac{g}{l}.$$

Частным решением системы (9.11), соответствующим частоте ω_1 является:

$$\varphi_1(\omega_1)=\Delta_{11}^{(1)}C_1e^{i(\omega_1t+\delta_1)}=C_1e^{i(\omega_1t+\delta_1)},$$

$$\varphi_2(\omega_1)=\Delta_{12}^{(1)}C_1e^{i(\omega_1t+\delta_1)}=-\sqrt{2}C_1e^{i(\omega_1t+\delta_1)}.$$

Вторым частным решением системы (9.11) будет:

$$\varphi_1(\omega_2)=\Delta_{21}^{(2)}C_2e^{i\left(\omega_2t+\varphi^{(2)}\right)}=C_2e^{i(\omega_2t+\delta_2)},$$

$$\varphi_2(\omega_2)=\Delta_{22}^{(2)}C_2e^{i\left(\omega_2t+\varphi^{(2)}\right)}=\sqrt{2}C_2e^{i(\omega_2t+\delta_2)}.$$

Общее решение системы (9.11) записывается в виде:

$$\varphi_1=Re[\varphi_1(\omega_1)+\varphi_1(\omega_2)]=C_1\cos(\omega_1t+\delta_1)+C_2\cos(\omega_2t+\delta_2),\quad(9.12)$$

$$\varphi_2=Re\left[\varphi_2(\omega_1)+\varphi_2(\omega_2)\right]=$$

$$=-\sqrt{2}(C_1\cos(\omega_1t+\delta_1)-C_2\cos(\omega_2t+\delta_2)).\quad(9.13)$$

Из (9.12) и (9.13) видно, что

$$\Theta_1=\frac{1}{2}\left(\varphi_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_2\right)=C_1\cos(\omega_1t+\delta_1),$$

и

$$\Theta_2 = \frac{1}{2}\left(\varphi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_2\right) = C_2\cos(\omega_2 t + \delta_2).$$

являются нормальными координатами. ■

Рассмотрим теперь колебания молекул. N-атомная молекула имеет $3N$ степеней свободы. Поступательному движению молекулы соответствует три степени свободы. Если не все атомы молекулы расположены вдоль одной прямой (нелинейная молекула), то также три степени свободы отвечают вращательному движению. Для линейной молекулы имеется всего две вращательные степени свободы. Таким образом, в случае нелинейной молекулы имеется $3N-6$, а в случае линейной молекулы - $3N-5$ колебательных степеней свободы. Представим радиус-вектор i-го атома молекулы $\boldsymbol{r}_i$ в виде $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i^0 + \boldsymbol{u}_i$, где $\boldsymbol{r}_i^0$ - радиус-вектор положения равновесия атома с номером i, а $\boldsymbol{u}_i$ - его отклонение от положения равновесия. Исключение из рассмотрения поступательного движения молекулы как целого приводит к равенству

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\,\boldsymbol{u}_i = 0, \tag{9.14}$$

а исключение вращения молекулы – к выражению

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\boldsymbol{r}_i^0\boldsymbol{u}_i\right] = 0. \tag{9.15}$$

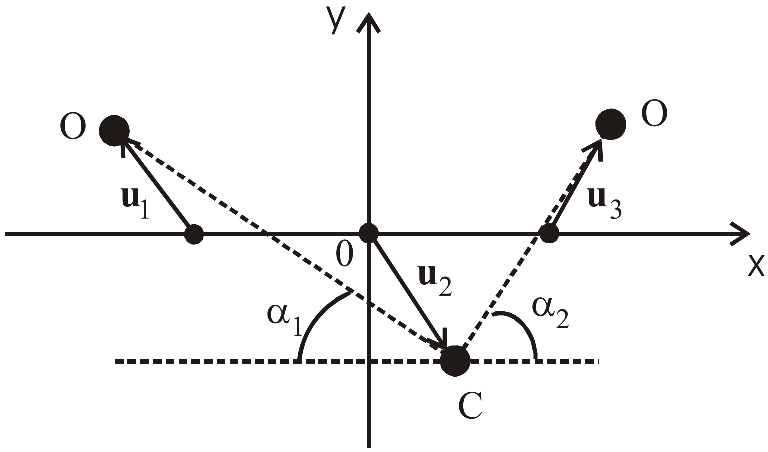

Рис. 9.2

Здесь m_i - масса i-го атома. При рассмотрении задачи о колебаниях молекулы условия (9.14) и (9.15) являются голономными идеальными связями, наложенными на систему.

Задача 9.3. Найдите частоты и закон движения малых колебаний молекулы CO_2.

□ Молекула CO_2 является линейной молекулой. Совместим положение равновесия атома углерода с началом прямоугольной декартовой системы координат, а ось x направим вдоль молекулы. Рассмотрим вначале колебания молекулы в плоскости xy (рис. 9.2). Из симметрии задачи ясно, что для плоскости xz ситуация будет полностью аналогичной. Перенумеруем атомы слева направо и обозначим расстояния между атомами C и O в положении равновесия посредством l. Тогда радиусы-векторы атомов в положении равновесия будут $\boldsymbol{r}_1^0 = (-l, 0{,}0)$, $\boldsymbol{r}_2^0 = (0{,}0{,}0)$, $\boldsymbol{r}_3^0 = (l, 0{,}0)$. Смещения атомов от положения равновесия имеют компоненты: $\boldsymbol{u}_1 = (x_1, y_1, 0)$, $\boldsymbol{u}_2 = (x_2, y_2, 0)$, $\boldsymbol{u}_3 = (x_3, y_3, 0)$. Пусть m - массы атомов кислорода, а M - углерода. Для рассматриваемого случая условие (9.14) сводится к двум уравнениям:

$$m(x_1 + x_3) + Mx_2 = 0, \tag{9.16}$$

$$m(y_1 + y_3) + My_2 = 0; \tag{9.17}$$

а условие (9.15) принимает вид

$$y_1 = y_3. \tag{9.18}$$

В случае линейной молекулы различают колебания, сохраняющие ее прямолинейную форму (валентные колебания) и колебания, выводящие атомы с прямой (деформационные колебания). Будем считать, что валентные и деформационные колебания являются независимыми.

Будем предполагать, что между атомами молекулы действуют упругие силы. Потенциальную энергию валентных колебаний тогда можно записать как (считаем, что потенциальные энергии валентных связей $C - O$ независимы друг от друга)

$$U_1 = \frac{k}{2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2)^2,$$

где $k > 0$ – коэффициент пропорциональности. Потенциальная энергия деформационных колебаний зависит от угла α равного отклонению угла OCO от значения π, т.е. угол $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ (см. рис. 9.2). В случае малых колебаний $\alpha_1 \approx {(y_1 - y_2)}/{l}$, $\alpha_2 \approx {(y_3 - y_2)}/{l}$. Поэтому $\alpha = {(y_1 - y_2)}/{l} + {(y_3 - y_2)}/{l}$.

С учетом этого потенциальная энергия деформационных колебаний

$$U_2 = \frac{æ l^2 \alpha^2}{2} = \frac{æ}{2}[(y_1 - y_2) + (y_3 - y_2)]^2,$$

где æ > 0 - еще один коэффициент.

Функция Лагранжа молекулы

$$L = T - (U_1 + U_2) = \frac{m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2)}{2} + \frac{M(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)}{2} -$$

$$-\frac{k}{2}[(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2] - \frac{æ}{2}[(y_1 - y_2) + (y_3 - y_2)]^2. \quad (9.19)$$

Так как имеется три уравнения связей (9.16)-(9.18), то из шести переменных $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ только три являются независимыми. Выберем в качестве независимых координаты x_1, x_3, y_1. С помощью уравнений связей (9.16)-(9.18) остальные переменные выражаются через x_1, x_3, y_1:

$$x_2 = -\frac{m}{M}(x_1 + x_3), \qquad y_3 = y_1, \qquad y_2 = -\frac{2my_1}{M}.$$

Подставляя эти выражения в функцию Лагранжа, найдем:

$$L = \frac{m}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m^2}{M}\dot{x}_1\dot{x}_3 + m\left(1 + \frac{2m}{M}\right)\dot{y}_1^2 - 2æ\left(1 + \frac{2m}{M}\right)^2 y_1^2 -$$

$$-\frac{k}{2}\left[1 + \frac{2m}{M}\left(1 + \frac{m}{M}\right)\right](x_1^2 + x_3^2) - \frac{2km}{M}\left(1 + \frac{m}{M}\right)x_1x_3.$$

Рассмотрим сперва уравнение движения по переменной y_1. Имеем:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = 2m\left(1 + \frac{2m}{M}\right)\ddot{y}_1, \quad \frac{\partial L}{\partial y_1} = -4æ\left(1 + \frac{2m}{M}\right)^2 y_1,$$

и уравнение Лагранжа

$$m\ddot{y}_1 + 2æ\left(1 + \frac{2m}{M}\right)y_1 = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$y_1(t) = C_1 cos(\omega_1 t + \delta_1),$$

где

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2æ}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}.$$

Таким образом, частное решение уравнений движения, описывающее деформационное колебание молекулы CO_2, имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} cos(\omega_1 t + \delta_1).$$

Заметим, что частота ω_1 является двукратно вырожденной, поскольку с такой же частотой будут происходить деформационные колебания в плоскости xz.

Рассмотрим теперь валентные колебания. Запишем уравнения Лагранжа по переменным x_1 и x_3:

$$\left.\begin{aligned} m\rho\ddot{x}_1 + k\left(1 + \frac{2m\rho}{M}\right)x_1 + \frac{m^2}{M}\ddot{x}_3 + \frac{2km\rho}{M}x_3 = 0, \\ \frac{m^2}{M}\ddot{x}_1 + \frac{2km\rho}{M}x_1 + m\rho\ddot{x}_3 + k\left(1 + \frac{2m\rho}{M}\right)x_3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9.20)$$

Здесь $\rho = 1 + {}^{m}/_{M}$.

Частные решения ищем в виде

$$x_1 = A_1 e^{i\omega t}, \qquad x_3 = A_3 e^{i\omega t}.$$

Подставляя частные решения в систему (9.20), находим:

$$\left.\begin{aligned} \left[-m\rho\omega^2 + k\left(1 + \frac{2m\rho}{M}\right)\right]A_1 + \left(-\frac{m^2}{M}\omega^2 + \frac{2km\rho}{M}\right)A_3 = 0, \\ \left(-\frac{m^2}{M}\omega^2 + \frac{2km\rho}{M}\right)A_1 + \left[-m\rho\omega^2 + k\left(1 + \frac{2m\rho}{M}\right)\right]A_3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9.21)$$

Составим характеристическое уравнение для системы (9.21), получим:

$$\begin{vmatrix} -m\rho\omega^2 + k\left(1 + \frac{2m\rho}{M}\right) & \left(-\frac{m^2}{M}\omega^2 + \frac{2km\rho}{M}\right) \\ -\frac{m^2}{M}\omega^2 + \frac{2km\rho}{M} & -m\rho\omega^2 + k\left(1 + \frac{2m\rho}{M}\right) \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда находим, что

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k(2m + M)}{mM}}.$$

По стандартной процедуре (для невырожденных частот) получаем частные решения, соответствующие частотам ω_2 и ω_3:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} cos(\omega_2 t + \delta_2), \qquad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} cos(\omega_3 t + \delta_3).$$

Общим решением уравнений движения, описывающим колебание молекулы в плоскости xy, будет

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} cos(\omega_1 t + \delta_1) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} cos(\omega_2 t + \delta_2) +$$

$$+C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} cos(\omega_3 t + \delta_3).$$

Как уже отмечалось ранее, еще одним независимым нормальным колебанием является деформационное колебание в плоскости xz. Соответствующее решение получится, если в вышеприведенных формулах заменить y на z. ■

Задачи для самостоятельного решения

45. Два груза массами m_1 и m_2 прикреплены к пружинам жесткости k (рис. 9.3). Найдите частоты малых колебаний системы в поле тяжести.

46. Два математических маятника одинаковой длины l и массы m связаны между собой пружиной жесткости k, закрепленной на расстоянии a от точки подвеса (рис. 3.2). Проинтегрируйте уравнения движения и найдите нормальные координаты малых колебаний.

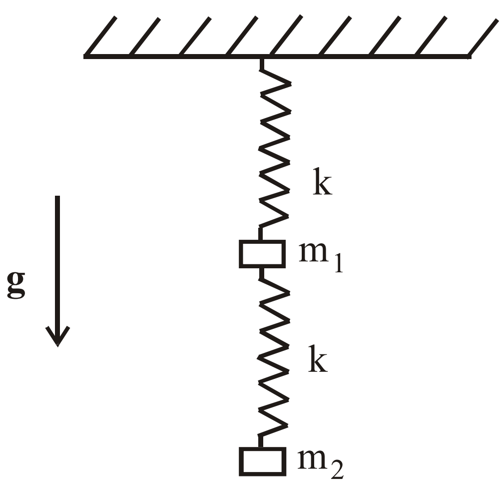

Рис. 9.3

47. Найдите закон движения и нормальные координаты системы с двумя степенями свободы, если ее функция Лагранжа

$$L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \frac{\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2) + \alpha xy,$$
$$\alpha = const.$$

48. Найдите частоту колебаний двухатомной молекулы. Массы атомов которой равны m_1 и m_2.

49. Найдите частоты колебаний трехатомной линейной несимметричной молекулы, массы атомов которой равны m_1, m_2 и m_3 (рис. 9.4). Считать, что силы, действующие между атомами при колебаниях молекулы, описываются законом Гука, с коэффициентами пропорциональности k_1, k_2 для валентных колебаний и æ для деформационных колебаний.

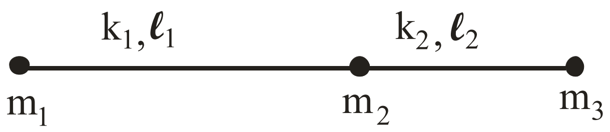

Рис. 9.4

Указание: при рассмотрении валентных колебаний удобно перейти к новым переменным $\xi_1 = x_1 - x_2$, $\xi_2 = x_3 - x_2$; а при рассмотрении деформационных колебаний выразить смещения атомов y_1, y_2 и y_3 через α - угол отклонения молекулы от значения π.

Глава 4. Движение твердого тела

§ 10. Тензор инерции

Как уже упоминалось ранее, под твердым телом в механике понимается система материальных точек, расстояния между которыми неизменны. Твердое тело обладает шестью степенями свободы (см. задачу 2.2). Для однозначного определения положения твердого тела относительно инерциальной системы отсчета K (с осями x, y, z) введем систему K' (с осями x', y', z') жестко связанную с твердым телом. Начало отсчета системы K' удобно выбрать в центре инерции твердого тела. Произвольное перемещение твердого тела можно представить в виде параллельного переноса тела в пространстве и поворота вокруг центра инерции. В качестве обобщенных координат, задающих положение твердого тела, выберем радиус-вектор $\boldsymbol{R}$ центра инерции (для описания поступательного движения) и три угла, характеризующих ориентацию осей x', y', z' по отношению к осям x, y, z (для описания вращательного движения). Пусть масса твердого тела равна μ, скорость его центра инерции – $\boldsymbol{V}$, а угловая скорость вращения твердого тела - $\boldsymbol{\Omega}$. Тогда кинетическая энергия твердого тела имеет вид:

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} I_{\alpha\beta}\Omega_\alpha\Omega_\beta, \tag{10.1}$$

где $I_{\alpha\beta}$ - *тензор моментов инерции* или просто *тензор инерции* тела. Индексы α, β в (10.1) нумеруют оси декартовой системы координат K'. Компоненты тензора инерции тела можно записать в виде следующей таблицы:

$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \sum m(y'^2 + z'^2) & -\sum mx'y' & -\sum mx'z' \\ -\sum my'x' & \sum m(x'^2 + z'^2) & -\sum my'z' \\ -\sum mz'x' & -\sum mz'y' & \sum m(x'^2 + y'^2) \end{pmatrix}, \tag{10.2}$$

где суммирование ведется по всем материальным точкам системы. Из представления (10.2) видно, что тензор инерции является *аддитивной* величиной – моменты инерции тела равны суммам моментов инерции его частей. Если возможно ввести плотность твердого тела ρ, то в (10.2) сумма заменяется интегралом по объему тела:

$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \int \rho(y'^2 + z'^2)dV & -\int \rho x'y'dV & -\int \rho x'z'dV \\ -\int \rho y'x'dV & \int \rho(x'^2 + z'^2)dV & -\int \rho y'z'\,dV \\ -\int \rho z'x'dV & -\int \rho z'y'dV & \int \rho(x'^2 + y'^2)dV \end{pmatrix}, \quad (10.3)$$

где ρ - плотность тела. Тензор инерции симметричен, т.е.

$$I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}.$$

Как и всякий симметричный тензор второго ранга, тензор инерции может быть приведен к диагональному виду путем соответствующего выбора направлений осей x', y', z' относительно тела. Эти направления называют *главными осями инерции*, а соответствующие значения компонент тензора – *главными моментами инерции*. Обозначим главные моменты инерции посредством $I_{11} = I_{x'} \equiv I_1$, $I_{22} = I_{y'} \equiv I_2$, $I_{33} = I_{z'} \equiv I_3$. Тензор инерции при этом будет иметь вид

$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix},$$

а кинетическая энергия твердого тела запишется следующим образом:

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2). \quad (10.4)$$

Следовательно, для определения кинетической энергии твердого тела достаточно найти его главные моменты инерции.

Задача 10.1. Определите главные моменты инерции двухатомной молекулы (такую систему можно рассматривать как *жесткий ротатор*: две материальные точки, скрепленные жестким невесомым стержнем).

□ Пусть расстояние между атомами есть l. Направим ось z' по оси молекулы. Далее совместим начало координат с центром инерции молекулы, определяемым равенством

$$m_1 z_1' + m_2 z_2' = 0, \quad (10.5)$$

где m_1, m_2 и z_1', z_2' - массы и координаты, соответственно, первого и второго атомов. Поскольку расстояние между атомами l, то

$$|z_2' - z_1'| = l. \qquad (10.6)$$

Из (10.5) и (10.6) находим (в предположении, что $z_2' > z_1'$):

$$z_1' = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2}; \;\; z_2' = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}.$$

Поскольку координаты x', y' атомов равны нулю, то, как это видно из формулы (10.2), отличными от нуля компонентами тензора инерции будут

$$I_1 = I_2 = \sum_{a=1}^{2} m_a z_a'^2 = m_1 z_1'^2 + m_2 z_2'^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2.$$

Так как тензор инерции получился диагональным, то найденные значения являются главными моментами инерции молекулы. ■

Задача 10.2. Определите главные моменты инерции однородного шара массы μ и радиуса R.

□ В силу сферической симметрии центр инерции шара находится в его центре, а тензор инерции диагонален, причем $I_1 = I_2 = I_3 = I$. Вычисления удобно проводить в сферической системе координат с началом в центре шара. Поскольку декартовы прямоугольные координаты связаны со сферическими соотношениями $x' = r sin\theta cos\varphi,\; y' = r sin\theta sin\varphi,\; z' = r cos\theta$, то момент инерции можно представить в виде:

$$I = \int \rho (x'^2 + y'^2) dV = \rho \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R} r^4 sin^3\theta \, dr d\varphi d\theta = \rho \frac{8\pi R^5}{15}. \qquad (10.7)$$

В формуле (10.7) учтено, что якобиан перехода от прямоугольных декартовых координат к сферическим равен $r^2 sin\theta$. Поскольку плотность шара $\rho = {\mu}/{\frac{4}{3}\pi R^3}$, то, подставляя это значение в (10.8), найдем:

$$I = \frac{2\mu R^2}{5}.$$

■

Формулы (10.2), (10.3) позволяют найти тензор инерции $I_{\alpha\beta}$, вычисленный относительно системы координат с началом в центре инерции твердого тела. Пусть $I_{\alpha\beta}^A$ – тензор инерции, определенный по отношению к системе координат с началом в точке A. Будем считать, что точка A

находится на расстоянии $\boldsymbol{a}$ от центра инерции тела. Связь между тензорами $I^A_{\alpha\beta}$ и $I_{\alpha\beta}$ устанавливается соотношением

$$I^A_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta} + \mu\left(a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta\right), \tag{10.8}$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ - символ Кронекера:

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, \text{при } \alpha = \beta, \\ 0, \text{при } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Задача 10.3. Определите главные моменты инерции однородного полушара массы μ и радиуса R (рис. 10.1).

□ Вначале определим тензор инерции полушара относительно системы координат с центром в точке A - центре шара. Поскольку тензор инерции аддитивен по отношению к частям, из которых состоит тело, то тензор инерции полушара $I^A_{\alpha\beta}(\mu)$ (вычисленный относительно точки A) связан с тензором шара $I_{\alpha\beta}(2\mu)$ (вычисленным относительно той же точки в задаче 10.2) выражением:

$$I^A_{\alpha\beta}(\mu) = \frac{I_{\alpha\beta}(2\mu)}{2} = \begin{cases} \frac{2}{5}\mu R^2, \text{при } \alpha = \beta, \\ 0, \qquad \text{при } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

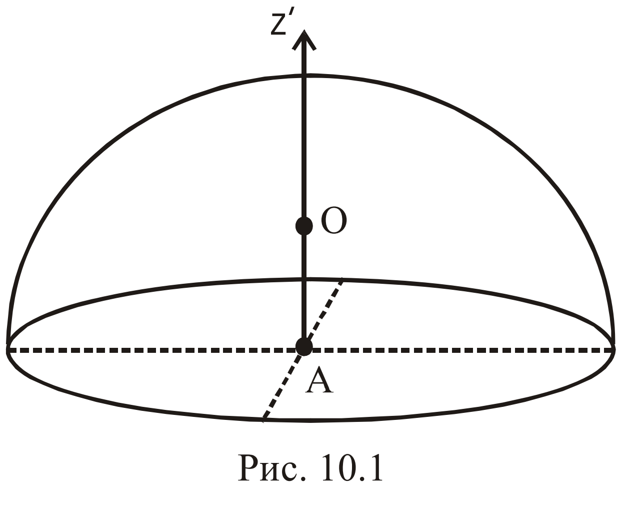

Рис. 10.1

Теперь вычислим координаты центра инерции (точки O) полушара. Из соображений симметрии очевидно, что центр инерции будет находиться на оси z', т.е. координаты вектора $\boldsymbol{a}$, задающего положение центра инерции полушара относительно точки A, есть $(a_1 = 0, a_2 = 0, a_3)$. Координата a_3 определяется равенством:

$$a_3 = \frac{1}{\mu}\int \rho z' dV = \frac{\rho}{\mu}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^3 sin\theta cos\theta \, dr d\varphi d\theta = \frac{3}{8}R.$$

Далее с помощью формулы (10.8) найдем компоненты тензора $I_{\alpha\beta}(\mu)$ полушара относительно системы координат с центром в точке O. С учетом равенства нулю компонент a_1 и a_2, формула (10.8) в нашем случае будет иметь вид:

$$I_{\alpha\beta}(\mu) = I^A_{\alpha\beta}(\mu) - \mu\left(a_3^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta\right). \qquad (10.9)$$

С помощью соотношения (10.9) находим главные моменты инерции:

$$I_1(\mu) = I_{11}(\mu) = I_2(\mu) = I_{22}(\mu) = I^A_{11}(\mu) - \mu a_3^2 = \frac{83}{320}\mu R^2,$$

$$I_3(\mu) = I_{33}(\mu) = I^A_{33}(\mu) - \mu(a_3^2 - a_3^2) = \frac{2}{5}\mu R^2.$$

■

Задачи для самостоятельного решения

50. Найдите главные моменты инерции молекулы из трех одинаковых атомов, расположенных в вершинах равнобедренного треугольника (рис. 10.2).

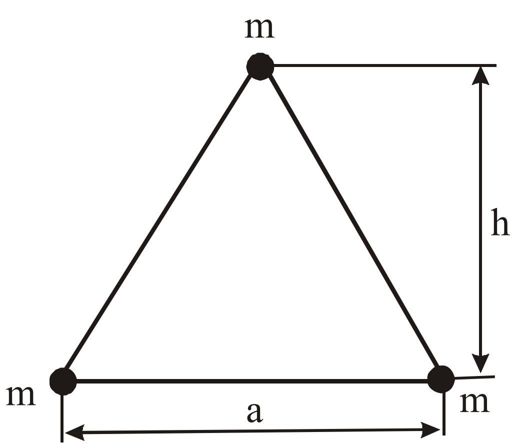

Рис. 10.2

51. Определите главные моменты инерции однородного прямоугольного параллелепипеда с ребрами длины $2a, 2b, 2c$ и массой μ.

52. Определите главные моменты инерции однородного кругового конуса с высотой H, радиусом основания R и массой μ.

53. Определите главные моменты инерции сплошного однородного полуцилиндра массы μ, радиуса R и длины H.

§ 11. Углы Эйлера. Интегрирование уравнений движения твердого тела

В § 10 отмечалось, что для описания вращательного движения твердого тела необходимо задать три угла, которые характеризуют ориентацию осей (x', y', z') системы K', жестко связанной с твердым телом, по отношению к осям (x, y, z) неподвижной системы K. Обычно в качестве трех таких углов используют эйлеровы углы φ, θ, ψ. Для определения этих углов совместим начало системы K с началом системы K'. Это можно сделать, поскольку в данном случае нас не интересует поступательное движение тела. Любой поворот тела можно представить как последовательность показанных на рис. 11.1 трех поворотов:

1. поворота вокруг оси z на угол φ (рис. 11.1 а);
2. поворота вокруг полученной в результате первого поворота линии ON (называемой линией узлов) на угол θ (рис. 11.1 б);
3. поворота вокруг оси z' на угол ψ (рис. 11.1 в).

Направление каждого из поворотов связано с направлением оси, вокруг которой он осуществляется, правилом правого винта. Линия узлов (как можно видеть из рисунка) есть линия пересечения плоскостей $x'y'$ и xy. Угол φ образован осью X и линией узлов, угол ψ - линией узлов и осью x, и угол θ есть угол между осями z и z'.

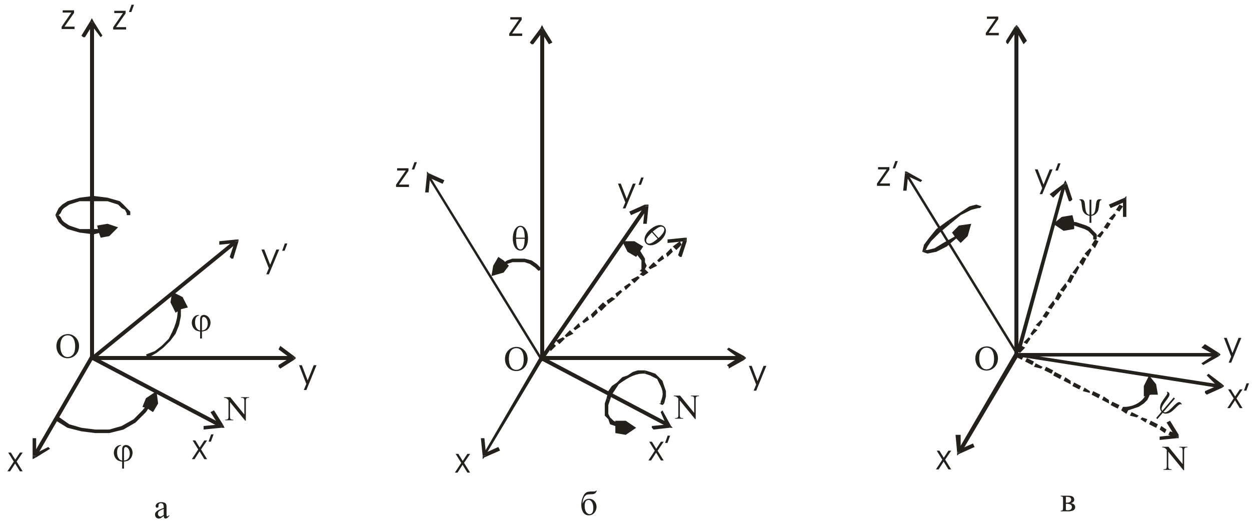

Рис. 11.1

Для того, чтобы набор углов Эйлера (φ, θ, ψ), определяющий каждый реальный поворот, был однозначным, принимают, что значения углов φ и ψ могут изменяться в пределах от 0 до 2π, а значение угла θ ограничивают интервалом от 0 до π.

Проекции вектора угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ на оси подвижной системы координат (x', y', z') определяются через эйлеровы углы следующими выражениями:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\,, \\ \Omega_2 &= \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi, \\ \Omega_3 &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}. \end{aligned}\right\} \tag{11.1}$$

С помощью этих выражений можно представить кинетическую энергию твердого тела (10.4) в виде функции от обобщенных координат θ, ψ и обобщенных скоростей $\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\boldsymbol{R}}$ (здесь под $\dot{\boldsymbol{R}}$ понимаются производные по времени от координат центра инерции твердого тела). Потенциальная энергия твердого тела зависит от обобщенных координат $\boldsymbol{R}, \varphi, \theta, \psi$. Таким образом, функция Лагранжа твердого тела может быть записана в виде

$$L = T\left(\dot{\boldsymbol{R}}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \theta, \psi\right) - U(\boldsymbol{R}, \varphi, \theta, \psi).$$

Задача 11.1. Выразите кинетическую энергию вращательного движения симметрического волчка через углы Эйлера.

□ Симметрическим волчком называется любое твердое тело, у которого два главных момента инерции равны между собой и отличаются от третьего. Пусть, например,

$$I = I_1 = I_2 \neq I_3.$$

С помощью формул (10.4) и (11.1) для кинетической энергии вращательного движения получаем выражение:

$$T_{\text{вр}} = \frac{I}{2}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \frac{I_3}{2}\Omega_3^2 = \frac{I}{2}\left(\dot{\varphi}^2 sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi} cos\theta + \dot{\psi}\right)^2. \quad (11.2)$$

■

Задача 11.2. Найдите функцию Лагранжа однородного тонкого стержня массы μ и длины $2l$, движущегося в поле тяжести Земли.

□ В качестве обобщенных координат выберем координаты X, Y, Z центра тяжести (инерции) стержня и углы Эйлера φ, θ, ψ. Из соображений симметрии очевидно, что два главных момента инерции совпадают, например, $I = I_1 = I_2$, а момент инерции $I_3 = 0$ (толщиной стержня пренебрегаем). С учетом этого полная кинетическая энергия будет равна:

$$T = \frac{\mu}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2\right) + \frac{I}{2}\left(\dot{\varphi}^2 sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right),$$

Момент инерции

$$I = \frac{\mu}{2l}\int_{-l}^{l} z'^2 dz' = \frac{\mu l^2}{3}.$$

Следовательно, выражение для кинетической энергии можно переписать в виде

$$T = \frac{\mu}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2\right) + \frac{\mu l^2}{6}\left(\dot{\varphi}^2 sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right).$$

Направим ось z вертикально вверх, перпендикулярно поверхности Земли. Тогда потенциальная энергия стержня $U = \mu g Z$.

Функция Лагранжа

$$L = T - U = \frac{\mu}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2\right) + \frac{\mu l^2}{6}\left(\dot{\varphi}^2 sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) - \mu g Z.$$

■

Задача 11.3. Тонкий диск массы μ и радиуса R скатывается без проскальзывания по наклонной плоскости, угол наклона которой α (рис. 11.2). Найдите функцию Лагранжа и закон движения диска.

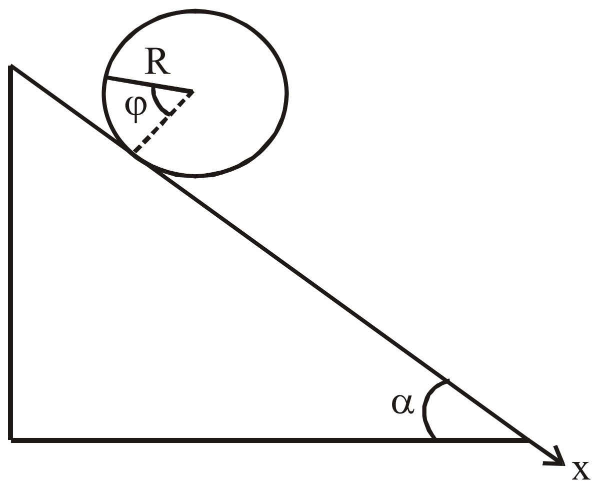

Рис. 11.2

□ Направим ось x вдоль наклонной плоскости и выберем в качестве обобщенной координату центра инерции диска X. Тогда кинетическая энергия диска запишется в виде:

$$T = \frac{\mu \dot{X}^2}{2} + \frac{I_3 \dot{\varphi}^2}{2}, \qquad (11.3)$$

где I_3 - момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр инерции и направленной перпендикулярно поверхности диска, а φ - угол поворота диска.

Вычислим момент инерции диска I_3:

$$I_3 = \int \sigma r^2 dS = \frac{\mu}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^3 dr d\,\varphi = \frac{\mu R^2}{2},$$

где σ – поверхностная плотность.

Подставляя I_3 в формулу (11.3), найдем:

$$T = \frac{\mu \dot{X}^2}{2} + \frac{\mu R^2 \dot{\varphi}^2}{4}. \qquad (11.4)$$

Условие движения без проскальзывания приводит к связи

$$\dot{X} = R\dot{\varphi}.$$

С учетом условия связи из (11.4) получаем выражение для кинетической энергии диска:

$$T = \frac{3\mu\dot{X}^2}{4}.$$

Потенциальная энергия диска

$$U = -\mu g X sin\alpha.$$

Функция Лагранжа

$$L = T - U = \frac{3\mu\dot{X}^2}{4} + \mu g X sin\alpha,$$

а уравнение Лагранжа имеет вид:

$$\frac{3}{2}\mu\ddot{X} - \mu g sin\alpha = 0.$$

Отсюда находим закон движения:

$$X = \frac{g}{3}t^2 sin\alpha + \dot{X}_0 t + X_0,$$

где $\dot{X}_0$ и X_0 - начальные скорость и координата центра инерции диска. ■

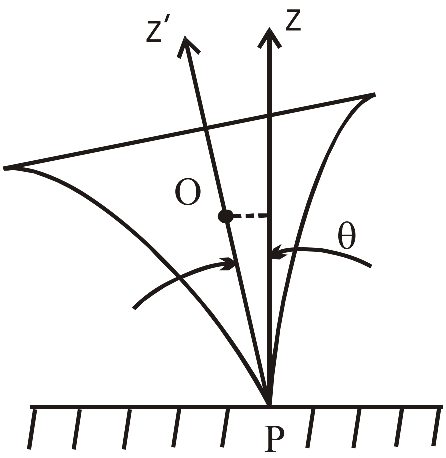

Рис. 11.3

Задача 11.4. Точка опоры симметрического волчка массы μ может двигаться по гладкой горизонтальной плоскости (рис. 11.3). Найдите закон движения волчка в поле тяжести.

□ Пусть ось z' направлена по оси симметрии тела и пусть центр инерции тела (точка O на рисунке) лежит на расстоянии l от точки опоры P $(OP = l)$. Ось z неподвижной системы координат направим вертикально вверх, а плоскость xy совместим с горизонтальной поверхностью. Пусть X, Y, Z – координаты центра инерции тела в неподвижной системе координат. Наличие точки опоры означает, что на волчок наложена связь $Z = l cos\theta$. Отсюда следует также, что $\dot{Z} = -l\dot{\theta} sin\theta$. Поэтому

$$T = \frac{\mu}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + l^2\dot{\theta}^2 sin^2\theta\right) + \frac{I}{2}\left(\dot{\varphi}^2 sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi} cos\theta + \dot{\psi}\right)^2.$$

Потенциальная энергия определяется расстоянием по вертикали от горизонтальной плоскости до центра масс тела, т.е.

$$U = \mu g Z = \mu g l cos\theta.$$

Функция Лагранжа системы

$$L = \frac{\mu}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + l^2\dot{\theta}^2 sin^2\theta\right) + \frac{I}{2}\left(\dot{\varphi}^2 sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) +$$

$$+\frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 - \mu g l cos\theta. \quad (11.6)$$

Эта функция не зависит от координат X, Y, φ, ψ, т.е. эти координаты – циклические. Соответствующие им сохраняющиеся обобщенные импульсы

$$P_X = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = \mu\dot{X}, \quad (11.7)$$

$$P_Y = \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} = \mu\dot{Y}, \quad (11.8)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I\dot{\varphi}sin^2\theta + I_3\left(\dot{\varphi}cos\theta + \dot{\psi}\right)cos\theta, \quad (11.9)$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3\left(\dot{\varphi}cos\theta + \dot{\psi}\right). \quad (11.10)$$

Первые два интеграла движения выражают законы сохранения проекций импульса на оси x, y. Третий и четвертый интегралы движения есть законы сохранения проекций момента импульса на оси z и z', соответственно, поскольку координаты φ и ψ являются углами поворота тела вокруг осей z и z'. Функция Лагранжа (11.6) не зависит явно от времени, поэтому еще одним интегралом движения будет обобщенная энергия

$$E = \frac{\mu}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + l^2\dot{\theta}^2 sin^2\theta\right) + \frac{I}{2}\left(\dot{\varphi}^2 sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) +$$

$$+\frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 + \mu g l cos\theta. \quad (11.11)$$

Таким образом, мы имеем систему из пяти интегралов движения (11.7)-(11.11) для пяти неизвестных функций $X(t), Y(t), \varphi(t), \theta(t), \psi(t)$. Из интегралов движения (11.7), (11.8) следует, что центр инерции тела движется в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью. С целью облегчения дальнейших выкладок исключим поступательное движение волчка, перейдя в систему отсчета, в которой $P_X = P_Y = 0$. Из уравнения (11.10) следует, что третий член в правой части (11.11) есть постоянная величина ${p_\psi^2}/{2I_3}$. Далее, с помощью (11.9) и (11.10) находим:

$$p_\varphi = I\dot{\varphi}sin^2\theta + p_\psi cos\theta\,. \tag{11.12}$$

Выражая отсюда $\dot{\varphi}$ и подставляя в выражение для обобщенной энергии (11.11), получим:

$$E_0 = \frac{\mu l^2}{2}\dot{\theta}^2 sin^2\theta + \frac{\left(p_\varphi - p_\psi cos\theta\right)^2}{2Isin^2\theta} + \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + \mu glcos\theta,$$

где $E_0 = E - {p_\psi}^2/{2I_3}$.

Разделение переменных в этом уравнении дает:

$$dt = \pm\frac{\sqrt{\mu l^2 sin^2\theta + I}d\theta}{\sqrt{2E_0 - \frac{\left(p_\varphi - p_\psi cos\theta\right)^2}{Isin^2\theta} - 2\mu glcos\theta}}, \tag{11.13}$$

откуда путем интегрирования находим:

$$t - t_0 = \int\limits_{\theta_0}^{\theta}\frac{\sqrt{\mu l^2 sin^2\theta + I}d\theta}{\pm\sqrt{2E_0 - \frac{\left(p_\varphi - p_\psi cos\theta\right)^2}{Isin^2\theta} - 2\mu glcos\theta}}, \quad \theta_0 = \theta(t_0). \tag{11.14}$$

Знак “+” (“-”) в формулах (11.13) и (11.14) берется на участках траектории с $\dot{\theta} > 0$ ($\dot{\theta} < 0$).

Разделяя переменные φ и t в уравнении (11.12) и используя (11.13), имеем:

$$d\varphi = \frac{\left(p_\varphi - p_\psi cos\theta\right)}{Isin^2\theta}\frac{\sqrt{\mu l^2 sin^2\theta + I}d\theta}{\pm\sqrt{2E_0 - \frac{\left(p_\varphi - p_\psi cos\theta\right)^2}{Isin^2\theta} - 2\mu glcos\theta}}. \tag{11.15}$$

Отсюда

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{(p_\varphi - p_\psi cos\theta)}{Isin^2\theta} \frac{\sqrt{\mu l^2 sin^2\theta + I} d\theta}{\pm\sqrt{2E_0 - \frac{(p_\varphi - p_\psi cos\theta)^2}{Isin^2\theta} - 2\mu glcos\theta}}, \quad (11.16)$$

где $\varphi_0 = \varphi(\,t_0)$.

Наконец, разделение переменных в уравнении (11.10) с учетом уравнения (11.15) дает:

$$\psi - \psi_0 = \frac{p_\psi}{I_3}(t - t_0) -$$

$$- \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{(p_\varphi - p_\psi cos\theta)cos\theta}{Isin^2\theta} \frac{\sqrt{\mu l^2 sin^2\theta + I} d\theta}{\pm\sqrt{2E_0 - \frac{(p_\varphi - p_\psi cos\theta)^2}{Isin^2\theta} - 2\mu glcos\theta}}, \quad (11.17)$$

где $\psi_0 = \psi(t_0)$.

Формулы (11.14), (11.16) и (11.17) определяют закон движения волчка в квадратурах. ■

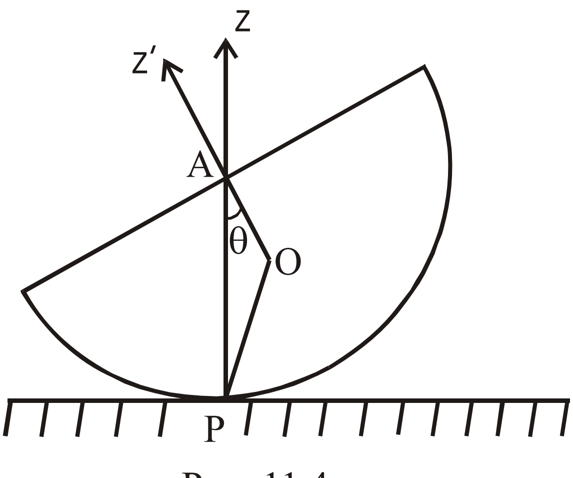

Рис. 11.4

Задача 11.5. Одна из половинок однородного шара массы μ находится на горизонтальной плоскости (рис. 11.4). Найдите частоту плоских малых колебаний в двух случаях: а) шероховатой плоскости; б) гладкой плоскости.

□ Пусть R – радиус шара. Ось z неподвижной системы координат направим вертикально вверх. Плоскость xy совместим с горизонтальной поверхностью. Центр инерции (точка O) находится на оси симметрии полушара (оси z' жестко связанной с телом системы координат) на расстоянии $OA = a_3 = {}^3\!/_8 R$ от центра шара (см. задачу 10.3).

Момент инерции относительно оси вращения (см. задачу 10.3)

$$I = \frac{83}{320}\mu R^2. \qquad (11.18)$$

Пусть θ - угол поворота полушара, P – точка соприкосновения полушара с плоскостью. Обозначим вектор $\overrightarrow{PO}$ через $\boldsymbol{c}$.

а) В случае шероховатой поверхности движение происходит без проскальзывания. При этом (поскольку скорость точки касания должна быть равна нулю) скорость центра инерции $\boldsymbol{V}$ связана с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$ соотношением:

$$\boldsymbol{V} - [\boldsymbol{\Omega c}] = 0,$$

откуда

$$V^2 = \dot{\theta}^2 c^2.$$

Кинетическая энергия полушара

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{I\dot{\theta}^2}{2} = \frac{\mu c^2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{83}{320}\mu R^2 \frac{\dot{\theta}^2}{2}.$$

Выразив c^2 через R и a_3 и положив в силу малости колебаний $\theta = 0$, имеем:

$$\mathrm{c}^2 = R^2 + a_3^2 - 2Ra_3 cos\theta \approx (R - a_3)^2 = \frac{25}{64}R^2. \qquad (11.19)$$

С учетом (11.19) кинетическая энергия принимает вид:

$$T = \frac{208}{640}\mu R^2 \dot{\theta}^2. \qquad (11.20)$$

Потенциальная энергия определяется высотой центра инерции над плоскостью, т.е.

$$U = \mu g(R - a_3 cos\theta),$$

или, с учетом малости колебаний,

$$U = \frac{5}{8}\mu g R + \frac{3}{16}\mu g R\theta^2. \qquad (11.21)$$

С помощью выражений (11.20) и (11.21) составляем функцию Лагранжа:

$$L = T - U = \frac{208}{640}\mu R^2\dot{\theta}^2 - \frac{3}{16}\mu g R\theta^2$$

(опущена константа $-{}^5\!/_8\,\mu g R$).

Записывая уравнение Лагранжа по переменной θ:

$$\frac{208}{320}\mu R^2\ddot{\theta} + \frac{3}{8}\mu g R\theta \ = 0,$$

видим, что частота малых колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{15}{26}\frac{g}{R}}.$$

б) В случае абсолютно гладкой поверхности центр инерции смещается только по вертикали, следовательно, $V^2 = \dot{Z}^2$. Координата центра масс $Z = \ R - a_3 cos\theta$, откуда $\dot{Z} = a_3\dot{\theta} sin\theta$. Полагая, в силу малости колебаний $\theta = 0$, имеем:

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{I\dot{\theta}^2}{2} = \frac{I\dot{\theta}^2}{2} = \frac{83}{640}\mu R^2\dot{\theta}^2. \qquad (11.22)$$

Потенциальная энергия по-прежнему определяется формулой (11.21), так что функция Лагранжа

$$L = \frac{83}{640}\mu R^2\dot{\theta}^2 - \frac{3}{16}\mu g R\theta^2,$$

а уравнение Лагранжа есть

$$\frac{83}{320}\mu R^2\ddot{\theta} + \frac{3}{8}\mu g R\theta = 0. \qquad (11.23)$$

Из (11.23) видно, что

$$\omega = \sqrt{\frac{120}{83}\frac{g}{R}}.$$

■

<u>*Задачи для самостоятельного решения*</u>

54. Выразите через углы Эйлера кинетическую энергию вращательного движения шарового волчка – твердого тела, у которого все главные моменты инерции равны.

55. Тонкий стержень массы μ скользит по вертикальной неподвижной нити, проходящей через отверстие, проделанное в его середине. Найдите функцию Лагранжа.

56. Найдите закон движения свободного симметрического волчка массы μ.

57. Одна из половинок однородного сплошного полуцилиндра массы μ находится на горизонтальной плоскости. Найдите частоту малых колебаний в двух случаях: а) шероховатой плоскости; б) гладкой плоскости.

58. Твердое тело подвешено на нити, которая представляет собой упругий круглый цилиндр, подчиняющийся закону Гука (коэффициент пропорциональности k). Длина цилиндра - l, радиус - R и плотность - σ. Момент инерции твердого тела относительно нити равен I. Найдите частоту крутильных колебаний системы.

§ 12. Уравнения Эйлера

Использование углов Эйлера для описания вращательного движения твердого тела не всегда оказывается удобным. В ряде случаев проще использовать *уравнения Эйлера*, которые имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} I_1\frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 = \mathcal{L}_1,\\ I_2\frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1 = \mathcal{L}_2,\\ I_3\frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = \mathcal{L}_3.\end{aligned}\right\} \qquad (12.1)$$

Индексы 1, 2, 3 в (12.1) нумеруют направленные вдоль главных осей инерции оси x', y', z' жестко связанной с телом системы K'. $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ - проекции на оси системы K' результирующего момента сил

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \sum_i [\boldsymbol{r}'_i \boldsymbol{F}_i],$$

вычисленного относительно центра инерции тела (суммирование ведется по всем точкам тела). Уравнения Эйлера есть ни что иное, как закон изменения момента импульса тела

$$ {}^{d\boldsymbol{M}}\!/_{dt} = \boldsymbol{\mathcal{L}}, \tag{12.2} $$

записанный в системе K'. Момент импульса $\boldsymbol{M}$ твердого тела в (12.2), также как и $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, вычисляется относитедьно центра инерции тела, а его проекции на оси системы координат K' равны: $M_1 = I_1\Omega_1$, $M_2 = I_2\Omega_2$, $M_3 = I_3\Omega_3$. Уравнения (12.1) определяют зависимости от времени проекций угловой скорости твердого тела, т.е. функции $\Omega_1(t)$, $\Omega_2(t)$, $\Omega_3(t)$. Если необходимо найти зависимости от времени эйлеровых углов, то систему (12.1) необходимо дополнить соотношениями (11.1), которые выражают проекции угловой скорости через углы Эйлера φ, θ, ψ. Часто систему (12.1) называют *динамическими уравнениями Эйлера*, а систему (11.1) – *кинематическими уравнениями Эйлера*.

Задача 12.1. Получите уравнения Эйлера (12.1) из закона изменения момента импульса твердого тела (12.2).

□ Уравнение (12.2) справедливо в неподвижной инерциальной системе отсчета K. Для того, чтобы записать это уравнение во вращающейся вместе с телом системе K', оси которой совпадают с главными осями инерции тела, представим приращение вектора $\boldsymbol{M}$ в виде:

$$ d\boldsymbol{M} = d'\boldsymbol{M} + [d\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{M}]. \tag{12.3} $$

В формуле (12.3) $d'\boldsymbol{M}$ - приращение вектора $\boldsymbol{M}$ за время dt, наблюдаемое в системе K', а $d\boldsymbol{\varphi}$ - угол поворота системы K' за тот же интервал времени (угол $d\boldsymbol{\varphi}$ направлен вдоль оси поворота). Учитывая (12.3), запишем уравнение (12.2) в следующей форме:

$$ \frac{d'\boldsymbol{M}}{dt} + [\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{M}] = \boldsymbol{\mathcal{L}}, \tag{12.4} $$

где $\boldsymbol{\Omega} = {}^{d\boldsymbol{\varphi}}\!/_{dt}$ - угловая скорость вращения тела. Абсолютно аналогично (12.3) записываем выражение для приращения угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ (в формуле (12.3) $\boldsymbol{M}$ меняется на $\boldsymbol{\Omega}$) и получаем, что

$$ \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{\Omega}}{dt} + [\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}]. $$

Так как $[\boldsymbol{\Omega\Omega}] = 0$, то

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{\Omega}}{dt}, \tag{12.5}$$

и, следовательно, скорости изменения вектора $\boldsymbol{\Omega}$ в системах K и K' равны.

Записывая теперь выражение (12.4) в проекции на ось x' системы K', с учетом того, что $M_1 = I_1\Omega_1$, имеем:

$$I_1\frac{d'\Omega_1}{dt} + [\boldsymbol{\Omega M}]_1 = \mathcal{L}_1. \tag{12.6}$$

Проекция на ось x' векторного произведения

$$[\boldsymbol{\Omega M}]_1 = M_3\Omega_2 - M_2\Omega_3 = (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3. \tag{12.7}$$

Здесь учтено, что $M_2 = I_2\Omega_2$ и $M_3 = I_3\Omega_3$. С помощью соотношений (12.5) и (12.7) записываем уравнение (12.6) в виде:

$$I_1\frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 = \mathcal{L}_1.$$

Видно, что данное уравнение совпадает с первым из уравнений системы (12.1). Аналогично получаются два оставшихся уравнения Эйлера для проекций на оси y' и z'. ■

Задача 12.2. Найдите для случая свободного симметрического волчка зависимости проекций вектора угловой скорости на главные оси инерции от времени.

□ Пусть $I = I_1 = I_2 \neq I_3$. Поскольку волчок свободный, т.е. на него не действуют внешние силы, то $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3 = 0$. При этом уравнения Эйлера (12.1) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} I\frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I)\Omega_2\Omega_3 = 0,\\ I\frac{d\Omega_2}{dt} + (I - I_3)\Omega_3\Omega_1 = 0,\\ I_3\frac{d\Omega_3}{dt} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12.8}$$

Из третьего уравнения системы (12.8) сразу следует, что $\Omega_3 = \Omega_3^0 = const$. Для определения зависимостей $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ умножим второе уравнение системы на мнимую единицу i и сложим с первым:

$$\frac{d}{dt}(\Omega_1 + i\Omega_2) = i\omega(\Omega_1 + i\Omega_2), \qquad (12.9)$$

где $\omega \equiv \Omega_3 \left({}^{I_3}\!/_{I} - 1 \right)$. Интегрируя (12.9), находим:

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = Ce^{i\omega t} = A\cos(\omega t + \alpha) + iA\sin(\omega t + \alpha). \qquad (12.10)$$

Здесь комплексная постоянная C выражена через действительные величины A и α с помощью соотношения $C = Ae^{i\alpha}$. Отделяя в (12.10) действительную и мнимую части, приходим к выражениям:

$$\Omega_1 = A\cos(\omega t + \alpha), \qquad \Omega_2 = A\sin(\omega t + \alpha).$$

Из полученных соотношений видно, что проекция угловой скорости на плоскость, перпендикулярную оси z', вращается в этой плоскости с угловой скоростью ω. При этом величина проекции угловой скорости на указанную плоскость имеет постоянное значение равное $\sqrt{(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)} = A$. Поскольку проекция угловой скорости $\Omega_3 = const$, то и весь вектор угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг оси волчка (оси z'). ■

Задачи для самостоятельного решения

59. Найдите временные зависимости проекций угловой скорости вращения на главные оси инерции свободного шарового волчка ($I_1 = I_2 = I_3 = I$).

60. Найдите с помощью уравнений Эйлера для свободного симметрического волчка зависимости от времени эйлеровых углов.

Указание: если ось z неподвижной системы координат направить вдоль постоянного вектора момента импульса $\boldsymbol{M}$, то, проектируя $\boldsymbol{M}$ на оси x', y', z', получаем три соотношения:

$$I\Omega_1 = M\sin\theta\sin\psi, \qquad I\Omega_2 = M\sin\theta\cos\psi, \qquad I_3\Omega_3 = M\cos\theta$$

Для нахождения зависимости эйлеровых углов от времени удобно данными соотношениями дополнить систему (11.1).

61. Пользуясь уравнениями Эйлера, покажите, что интегралами движения для свободного асимметрического волчка ($I_1 \neq I_2 \neq I_3$) являются выражения

$$I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2 \equiv 2E \text{ и } I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2 \equiv M^2.$$

Глава 5. Канонический формализм

§ 13. Уравнения Гамильтона

Рассмотрим систему с s степенями свободы. Функция

$$H(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s, t) \equiv H(q, p, t) = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L, \qquad (13.1)$$

в которой все обобщенные скорости выражены через обобщенные импульсы и обобщенные координаты с помощью уравнений $p_\alpha = {\partial L}/{\partial \dot{q}_\alpha}$, называется *функцией Гамильтона.* Сравнивая выражение (13.1) с (5.1) видим, что функция Гамильтона представляет собой обобщенную энергию системы.

Уравнениями Гамильтона или *каноническими уравнениями* называется следующая система $2s$ дифференциальных уравнений первого порядка для $2s$ неизвестных функций $q_\alpha(t)$, $p_\alpha(t)$:

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \qquad (13.2)$$

Уравнения (13.2) полностью эквивалентны уравнениям Лагранжа (3.1). Однако уравнения Гамильтона по сравнению с уравнениями Лагранжа имеют более симметричную форму и являются инвариантными по отношению к каноническим преобразованиям (см. следующий параграф). В связи с этим уравнения Гамильтона имеют ряд преимуществ по сравнению с уравнениями Лагранжа при исследовании различных общих вопросов механики.

Задача 13.1. Напишите функцию Гамильтона материальной точки, находящейся в потенциальном поле, в а) декартовых и б) цилиндрических координатах.

□ а) Функция Лагранжа в декартовых координатах имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z, t),$$

где m – масса точки, U – потенциальная энергия. С помощью функции Лагранжа находим выражения для обобщенных импульсов:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

откуда $\dot{x} = {p_x}/{m}$, $\dot{y} = {p_y}/{m}$, $\dot{z} = {p_z}/{m}$.

Теперь можно записать функцию Гамильтона:

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - L = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + U(x, y, z, t).$$

б) В цилиндрических координатах функция Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho, \varphi, z, t).$$

Для обобщенных импульсов получаем следующие выражения:

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \qquad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}, \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

Отсюда

$$\dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2}, \qquad \dot{z} = \frac{p_z}{m}.$$

С помощью функции Лагранжа и выражений для обобщенных импульсов и скоростей находим функцию Гамильтона:

$$H = p_\rho\dot{\rho} + p_\varphi\dot{\varphi} + p_z\dot{z} - L = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2\right) + U(\rho, \varphi, z, t).$$

■

Задача 13.2. Найдите функцию Гамильтона для заряженной частицы в электромагнитном поле.

□ Функция Лагранжа для частицы в электромагнитном поле записывается в виде (см. § 4):

$$L = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + \frac{q}{c}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t), \dot{\boldsymbol{r}}) - q\phi(\boldsymbol{r}, t).$$

Отсюда находим обобщенный импульс:

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = m\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t).$$

Из этого выражения, получаем:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)\right).$$

Функция Гамильтона системы:

$$H = \boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{r}} - L = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)\right)^2 + q\phi(\boldsymbol{r}, t). \qquad (13.3)$$

■

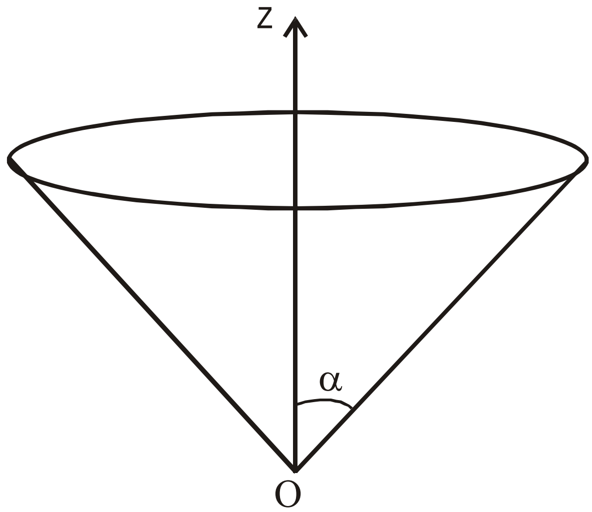

Рис. 13.1

Задача 13.3. Материальная точка движется по гладкой поверхности кругового конуса с вертикально направленной осью симметрии и углом раствора 2α. Раствор конуса направлен вверх (рис. 13.1). Найдите функцию Гамильтона и составьте канонические уравнения.

□ Направим полярную ось сферической системы координат (ось z на рис. 13.1) по оси симметрии конуса вертикально вверх, а за начало отсчета примем вершину конуса. При этом условие связи принимает вид:

$$\theta = \alpha. \qquad (13.4)$$

С учетом (13.4) кинетическая энергия точки

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 sin^2\alpha\dot{\varphi}^2),$$

а потенциальная энергия

$$U = mgrcos\alpha.$$

Функция Лагранжа:

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 sin^2\alpha\dot{\varphi}^2) - mgrcos\alpha.$$

В качестве обобщенных координат в функции Лагранжа выступают r и φ. Найдем обобщенные импульсы:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 sin^2 \alpha\dot{\varphi}.$$

Тогда функция Гамильтона

$$H = p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} - L = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2 sin^2 \alpha}\right) + mgrcos\alpha.$$

Зная функцию Гамильтона, записываем канонические уравнения:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 sin^2 \alpha};$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3 sin^2 \alpha} - mgcos\alpha, \qquad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0.$$

■

Задача 13.4. Найдите закон движения заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ с помощью уравнений Гамильтона. Векторный потенциал выбран в виде

$$A_y = \mathcal{H}x, \quad A_x = A_z = 0.$$

□ Полагая $\phi = 0$ (электрическое поле отсутствует) в формуле (13.3), получим:

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{q}{mc}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{A}) + \frac{q^2}{2mc^2}\boldsymbol{A}^2. \tag{13.5}$$

Скалярное произведение $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{A}) = p_y A_y = p_y \mathcal{H}x$. Тогда функцию Гамильтона (13.5) можно записать как

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_z^2) + \frac{1}{2m}(p_y - \frac{q}{c}\mathcal{H}x)^2.$$

Из уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \qquad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

следует, что $p_y = const$ и $p_z = const$. Теперь запишем уравнения Гамильтона для x и p_x:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \tag{13.6}$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = \omega\left(p_y - \frac{q}{c}\mathcal{H}x\right), \tag{13.7}$$

где $\omega = {}^{q\mathcal{H}}\!/_{mc}$ – циклотронная частота (см. § 1). Продифференцировав по времени уравнение (13.6), находим:

$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}_x}{m}.$$

Подставляя сюда вместо $\dot{p}_x$ выражение (13.7), имеем:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{\omega}{m} p_y.$$

Решение этого уравнения можно представить в виде

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) + x_0, \tag{13.8}$$

где A, α – произвольные амплитуда и фаза, а $x_0 = {}^{p_y}\!/_{\omega m}$.

Из уравнения (13.6)

$$p_x = m\dot{x} = -m\omega A\sin(\omega t + \alpha).$$

Для определения зависимостей $y(t)$ и $z(t)$ используем уравнения Гамильтона

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{1}{m}\left(p_y - \frac{q}{c}\mathcal{H}x\right) = \frac{\dot{p}}{m\omega} = -\omega A\cos(\omega t + \alpha),$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем:

$$y = -A\sin(\omega t + \alpha) + y_0, \qquad y_0 = const \tag{13.9}$$

$$z = \frac{p_z}{m} t + z_0, \;\; z_0 = const \tag{13.10}$$

Формулы (13.8)-(13.10) определяют закон движения частицы. ■

62. Напишите функцию Гамильтона материальной точки, находящейся в потенциальном поле, в сферических координатах.

63. Рассматривая декартовы координаты и углы Эйлера в качестве обобщенных координат, запишите функцию Гамильтона для движения однородного стержня длины $2l$ и массы μ в поле тяжести.

64. Функция Лагранжа релятивистской частицы, масса покоя которой равна m_0, имеет вид

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\boldsymbol{r}}^2}{c^2}}.$$

Найдите функцию Гамильтона частицы.

65. Составьте функцию и уравнения Гамильтона для случая движения материальной точки массы m в центральном поле $U(r)$.

66. Найдите канонические уравнения для материальной точки массы m, движущейся в однородном гравитационном поле по гладкой сферической поверхности радиуса R (сферический маятник).

67. Найдите закон движения одномерной системы, функция Гамильтона которой имеет вид

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \lambda\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)^2,$$

где m, ω, λ - постоянные положительные параметры.

§ 14. Канонические преобразования. Скобки Пуассона

Как уже упоминалось ранее, формальный вид уравнений Лагранжа не меняется при преобразовании обобщенных координат q_α ($\alpha = 1,2, \dots, s$). В связи с тем, что в гамильтоновом методе обобщенные импульсы p_α играют наравне с координатами q_α роль равноправных независимых переменных, уравнения Гамильтона допускают уже $2s$ преобразований от старых переменных (q_α, p_α) к новым (Q_α, P_α):

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t), \;\; P_\alpha = P_\alpha(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t). \qquad (14.1)$$

Новую функцию Гамильтона обозначим посредством $H'(Q, P, t)$ (под Q и P будем понимать всю совокупность новых обобщенных координат и импульсов соответственно). Преобразования (14.1) называются *каноническими*, если они сохраняют формальный вид уравнений Гамильтона, т.е. если и в новых переменных (Q, P) выполняются соотношения

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H'}{\partial P_\alpha}, \qquad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial H'}{\partial Q_\alpha} \qquad (\alpha = 1,2,\dots,s).$$

Далеко не каждое преобразование вида (14.1) будет являться каноническим. Важный класс канонических преобразований составляют преобразования, которые могут быть реализованы с помощью так называемой *производящей функции* – функции, зависящей от старых и новых переменных и времени.

1) Если производящая функция F зависит от старых и новых обобщенных координат и времени, т.е.

$$F = F(q, Q, t),$$

то каноническое преобразование, порождаемое этой функцией, имеет вид:

$$p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}, \qquad P_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha}, \qquad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{14.2}$$

2) Если производящая функция $\Phi = \Phi(q, P, t)$, то каноническое преобразование задается формулами:

$$p_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha}, \qquad Q_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial P_\alpha}, \qquad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \tag{14.3}$$

Задача 14.1. Найдите каноническое преобразование, соответствующее производящей функции

$$F(q, Q, t) = \sum_\alpha q_\alpha Q_\alpha.$$

□ Используя формулы (14.2), получаем:

$$p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \qquad P_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha} = -q_\alpha, \qquad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} = H.$$

Отсюда видно, что данная производящая функция переводит старые импульсы в новые координаты и, наоборот, старые координаты в новые импульсы. Такая возможность является следствием равноправия обобщенных координат и обобщенных импульсов в гамильтоновом формализме. ■

Задача 14.2. Найдите каноническое преобразование, порождаемое производящей функцией

$$F(q,Q,t)=\frac{1}{2}m\omega(t)q^2ctgQ.$$

Запишите в новых переменных Q,P уравнения движения гармонического осциллятора с частотой $\omega(t)$.

□ Поскольку производящая функция зависит от старых и новых обобщенных координат, с помощью уравнений (14.2) получаем:

$$p=\frac{\partial F}{\partial q}=m\omega(t)q\ ctgQ, \tag{14.4}$$

$$P=-\frac{\partial F}{\partial Q}=\frac{1}{2}m\omega(t)q^2\frac{1}{sin^2Q}, \tag{14.5}$$

$$H'=H+\frac{\partial F}{\partial t}=H+\frac{1}{2}m\dot{\omega}(t)q^2ctgQ. \tag{14.6}$$

Из соотношений (14.4) и (14.5) находим, что

$$p=\sqrt{2Pm\omega(t)}cosQ, \tag{14.7}$$

$$q=\sqrt{\frac{2P}{m\omega(t)}}sinQ. \tag{14.8}$$

Функция Гамильтона гармонического осциллятора в старых координатах имеет вид:

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2(t)q^2}{2}.$$

Подставляя в нее выражения (14.7) и (14.8), получаем функцию Гамильтона в новых координатах:

$$H=P\omega(t).$$

Заменяя в (14.6) H и q их выражениями через новые координаты, найдем новую функцию Гамильтона:

$$H' = P\omega(t) + \frac{1}{2}\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} P sin(2Q).$$

Уравнения Гамильтона в новых переменных:

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = \omega(t) + \frac{1}{2}\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} sin(2Q),$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} = -\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} P cos(2Q).$$

Рассмотрим частный случай: $\omega(t) = const$. Канонические уравнения при этом будут иметь вид:

$$\dot{Q} = \omega \,, \dot{P} = 0 \,,$$

откуда следует, что

$$Q = \omega t + Q_0, \qquad P = P_0,$$

где $Q_0, P_0 = const$. Подставляя Q и P в выражение (14.8), получим:

$$q = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega}} \sin(\omega t + Q_0).$$

■

Пусть даны две функции обобщенных координат и обобщенных импульсов $f(q,p)$ и $g(q,p)$*. *Скобкой Пуассона* функций f и g называют выражение

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}\right).$$

Для того, чтобы преобразование было каноническим, новые переменные должны удовлетворять соотношениям:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \qquad \{P_\alpha, P_\beta\} = 0, \qquad \{P_\alpha, Q_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}, \qquad (14.9)$$

* Эти функции также могут зависеть от времени или от каких-либо других параметров.

где $\delta_{\alpha\beta}$ - символ Кронекера.

Задача 14.3. Проверьте справедливость соотношений (14.9) для канонических преобразований из задачи 14.1.

□ В задаче 14.1 найдено, что $Q_\alpha = p_\alpha$, а $P_\alpha = -q_\alpha$. Принимая во внимание очевидные равенства:

${\partial q_\alpha}/{\partial p_k} = 0$, ${\partial q_\alpha}/{\partial q_k} = \delta_{\alpha k}$, ${\partial p_\alpha}/{\partial p_k} = \delta_{\alpha k}$, ${\partial p_\alpha}/{\partial q_k} = 0$, получаем:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_k}\frac{\partial Q_\beta}{\partial q_k} - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_k}\frac{\partial Q_\beta}{\partial p_k}\right) = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial p_k}\frac{\partial p_\beta}{\partial q_k} - \frac{\partial p_\alpha}{\partial q_k}\frac{\partial p_\beta}{\partial p_k}\right) = 0,$$

$$\{P_\alpha, P_\beta\} = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial p_k}\frac{\partial P_\beta}{\partial q_k} - \frac{\partial P_\alpha}{\partial q_k}\frac{\partial P_\beta}{\partial p_k}\right) = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial p_k}\frac{\partial q_\beta}{\partial q_k} - \frac{\partial q_\alpha}{\partial q_k}\frac{\partial q_\beta}{\partial p_k}\right) = 0,$$

$$\{P_\alpha, Q_\beta\} = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial p_k}\frac{\partial Q_\beta}{\partial q_k} - \frac{\partial P_\alpha}{\partial q_k}\frac{\partial Q_\beta}{\partial p_k}\right) = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_k}\frac{\partial p_\beta}{\partial p_k} - \frac{\partial q_\alpha}{\partial p_k}\frac{\partial p_\beta}{\partial q_k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{s}\delta_{\alpha k}\delta_{\beta k} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, видим, что соотношения (14.9) выполняются. ■

Полную производную по времени от функции $f(q,p,t)$ можно с помощью скобок Пуассона представить в виде

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\},$$

где H - функция Гамильтона. Отсюда следует, что если функция f не зависит явно от времени и $\{H, f\}$=0, то функция f является интегралом движения.

Задача 14.4. Покажите, что функция Гамильтона является инвариантной по отношению к бесконечно малому каноническому преобразованию, генерируемому производящей функцией

$$\Phi(q,P) = \sum_\alpha q_\alpha P_\alpha + \varepsilon f(q,P),$$

где $\varepsilon \ll 1$, а $f(q,p)$- интеграл движения.

□ С помощью (14.3) получаем каноническое преобразование, порождаемое функцией $\Phi(q,P)$:

$$\left.\begin{aligned} p_\alpha &= \frac{\partial\Phi}{\partial q_\alpha} = P_\alpha + \varepsilon\frac{\partial f(q,P)}{\partial q_\alpha},\\ Q_\alpha &= \frac{\partial\Phi}{\partial P_\alpha} = q_\alpha + \varepsilon\frac{\partial f(q,P)}{\partial P_\alpha}.\end{aligned}\right\} \tag{14.10}$$

Видно, что $P_\alpha = p_\alpha + o(\varepsilon)$ и $Q_\alpha = q_\alpha + o(\varepsilon)$, поэтому с точностью до членов первого порядка малости по ε каноническое преобразование (14.10) может быть представлено в виде:

$$\left.\begin{aligned} \delta p_\alpha &\equiv P_\alpha - p_\alpha = -\varepsilon\frac{\partial f(q,p)}{\partial q_\alpha},\\ \delta q_\alpha &\equiv Q_\alpha - q_\alpha = \varepsilon\frac{\partial f(q,p)}{\partial p_\alpha}.\end{aligned}\right\} \tag{14.11}$$

Изменение функции Гамильтона $H(q,p)$ при преобразовании (14.11)

$$\delta H \equiv H(Q,P) - H(q,p) = \sum_\alpha\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha\right) =$$

$$= \varepsilon\sum_\alpha\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right) = \varepsilon\{f,\mathrm{H}\}.$$

Поскольку функция f по условию задачи есть интеграл движения, то $\{f,\mathrm{H}\} = 0$, и, следовательно, $\delta H = 0$. ■

Важное свойство скобок Пуассона заключается в том, что если f и g - два интеграла движения, то величина $\{f,g\}$ также является интегралом движения. Однако следует заметить, что далеко не всегда таким способом удается получить новый интеграл движения. В некоторых случаях можно получить тривиальный результат – скобки Пуассона сведутся к постоянной. В других случаях полученный интеграл может оказаться просто функцией исходных интегралов f и g. Если же ни тот, ни другой случай не имеют места, то скобки Пуассона дают новый интеграл движения.

Задача 14.5. В однородном поле тяжести движется частица массы m. Известны два интеграла движения (см. задачу 5.4): проекция импульса $p_x = m\dot{x}$ и проекция момента импульса $M_z = xp_y - yp_x$ (ось z направлена вдоль силы тяжести). Найдите третий интеграл движения.

□ Для нахождения третьего интеграла движения найдем, что скобка Пуассона

$$\{p_x, M_z\} = \left(\frac{\partial p_x}{\partial p_x}\frac{\partial M_z}{\partial x} - \frac{\partial p_x}{\partial x}\frac{\partial M_z}{\partial p_x}\right) + \left(\frac{\partial p_x}{\partial p_y}\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial p_x}{\partial y}\frac{\partial M_z}{\partial p_y}\right) = p_y.$$

В рассматриваемом случае скобка Пуассона дает новый интеграл движения $p_y = m\dot{y}$ – проекцию импульса на ось y. ■

Задачи для самостоятельного решения

68. Найдите каноническое преобразование, порождаемое производящей функцией

$$\Phi(q, P, t) = qP - aPt + mqa, \qquad a = const.$$

69. Функция Гамильтона $H = {p^2}/{2m}$. Найдите каноническое преобразование и новую функцию Гамильтона, если производящая функция

$$\Phi(q, P, t) = qP - \frac{1}{2m}P^2 t.$$

70. Найдите каноническое преобразование, порождаемое производящей функцией

$$\Phi(q, P, t) = qP + (bq - aP)t,$$

где a, b -константы. Запишите в новых переменных уравнения Гамильтона для свободной частицы.

71. Найдите каноническое преобразование, задаваемое производящей функцией

$$F(q, Q, t) = \frac{1}{2}m\omega\left(q - \frac{F(t)}{m\omega^2}\right)^2 ctgQ.$$

Запишите уравнения движения в переменных P и Q для гармонического осциллятора, на который действует внешняя сила $F(t)$.

72. Проверьте выполнение условий (14.9) для канонического преобразования из задачи 67.

73. Докажите соотношения:

$$\text{а) } \{f, q_\alpha\} = \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}; \quad \text{б) } \{f, p_\alpha\} = -\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}.$$

74. Докажите соотношения:

а) $\{\boldsymbol{p}, r^2\} = 2\boldsymbol{r}$; б) $\{\boldsymbol{r}, p^2\} = -2\boldsymbol{p}$; в) $\{\boldsymbol{p}, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r})\} = \boldsymbol{a}$; г) $\{\boldsymbol{r}, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p})\} = -\boldsymbol{a}$;

д) $\{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{r})\} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$; $\quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} = const$.

75. Докажите тождество Якоби:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

76. Покажите, что уравнения Гамильтона можно записать в виде

$$\dot{p}_\alpha = \{H, p_\alpha\}, \;\; \dot{q}_\alpha = \{H, q_\alpha\} \quad (\alpha = 1,2, \dots, s).$$

77. Покажите, что функция

$$f(x, p, t) = x - \frac{p}{m} t$$

является интегралом движения свободной частицы.

§ 15. Уравнение Гамильтона-Якоби

Пусть механическая система с s степенями свободы описывается функцией Лагранжа $L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)$ и $q(t) = \{q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t)\}$ есть закон движения данной системы. Тогда величина

$$S(q_1, q_2, \dots, q_s, t) = \int_{t_0}^{t} L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t) dt,$$

рассматриваемая как функция значений координат q при фиксированных начальных их значениях $q^0 = q(t_0)$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0, \tag{15.1}$$

где $H\left(q, {}^{\partial S}\!/_{\partial q}, t\right)$ - функция Гамильтона, в которой обобщенные импульсы выражены через функцию S, посредством соотношений

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha = 1,2,\dots,s).$$

Уравнение (15.1) называется уравнением *Гамильтона-Якоби*, а функция $S(q,t)$ - *действием* системы.

Полным интегралом уравнения Гамильтона-Якоби называется решение этого уравнения

$$S = S(q_1, q_2, \dots, q_s, t, C_1, C_2, \dots, C_s) + A,$$

зависящее от s произвольных независимых констант $C_1, C_2, \dots, C_s$, помимо аддитивной постоянной A.

Рассмотрим функцию $S(q,t,C)$ как производящую функцию канонического преобразования, зависящую от старых координат $q_1, q_2, \dots, q_s$ и новых импульсов $C_1, C_2, \dots, C_s$. Каноническое преобразование, порождаемое этой функцией, будет иметь вид:

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, \qquad Q_\alpha = \frac{\partial S}{\partial C_\alpha}, \qquad H' = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \tag{15.2}$$

где Q_α играют роль новых координат. Новая функция Гамильтона $H' = 0$, поскольку функция действия S удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби. Учитывая, что $H' = 0$, уравнения Гамильтона для новых переменных C_α и Q_α запишутся следующим образом:

$$\dot{C}_\alpha = -\frac{\partial H'}{\partial Q_\alpha} = 0, \ \ \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H'}{\partial C_\alpha} = 0.$$

Отсюда следует, что $C_\alpha = const$ и $Q_\alpha = const$. Следовательно, из s соотношений (см. (15.2))

$$Q_\alpha = \frac{\partial S}{\partial C_\alpha} \tag{15.3}$$

можно найти координаты системы как функции времени и $2s$ произвольных постоянных C_α и Q_α.

Таким образом, чтобы найти закон движения механической системы методом Гамильтона-Якоби надо:

1) найти функцию Гамильтона системы;

2) с помощью найденной функции Гамильтона записать уравнение Гамильтона-Якоби (15.1);

3) найти полный интеграл (с точностью до аддитивной константы) этого уравнения $S(q_1, q_2, \dots, q_s, t, C_1, C_2, \dots, C_s)$, содержащий произвольные постоянные $C_1, C_2, \dots, C_s$ в числе, равном числу степеней свободы системы;

4) продифференцировать найденную в пункте 3) функцию $S(q_1, q_2, \dots, q_s, t, C_1, C_2, \dots, C_s)$ по произвольным постоянным C_α и приравнять результаты дифференцирования новым произвольным постоянным Q_α, т.е. записать соотношения (15.3);

5) из соотношений (15.3) найти координаты системы как функции времени и $2s$ произвольных постоянных.

Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби в ряде случаев удается найти методом *разделения переменных*. Пусть координата q_α и соответствующая ей производная ${\partial S}/{\partial q_\alpha}$ входят в уравнение Гамильтона-Якоби в виде некоторой комбинации

$$f\left(q_\alpha, \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}\right),$$

не содержащей в явном виде других переменных (в неявном виде в функцию S входят все переменные). При этом уравнение Гамильтона-Якоби можно схематично записать, как

$$F\left(q_1, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_{\alpha-1}}, \frac{\partial S}{\partial q_{\alpha+1}} \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, \frac{\partial S}{\partial t}, f\left(q_\alpha, \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}\right)\right) = \\ = 0. \qquad (15.4)$$

Решение данного уравнения будем искать в виде

$$S = S'(q_1, q_2, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_s, t) + S_\alpha(q_\alpha).$$

Подставляя это решение в уравнение (15.4), получаем:

$$F\left(q_1, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_s, \frac{\partial S'}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S'}{\partial q_{\alpha-1}}, \frac{\partial S'}{\partial q_{\alpha+1}} \dots, \frac{\partial S'}{\partial q_s}, \frac{\partial S'}{\partial t}, f\left(q_\alpha, \frac{dS_\alpha}{dq_\alpha}\right)\right) =$$

$$= 0. \qquad (15.5)$$

В этом уравнении переменная q_α входит только в функцию $f\left(q_\alpha, {dS_\alpha}/{dq_\alpha}\right)$, которая ни явно, ни неявно не содержит переменные $q_1, q_2, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_s$. Поэтому при изменении q_α будет меняться только функция f. А поскольку уравнение (15.5) должно выполняться при любом значении q_α, то функция f может быть равна только некоторой константе, т.е.

$$f\left(q_\alpha, \frac{dS_\alpha}{dq_\alpha}\right) = C_1. \qquad (15.6)$$

При этом уравнение (15.5) принимает вид:

$$F\left(q_1, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_s, \frac{\partial S'}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S'}{\partial q_{\alpha-1}}, \frac{\partial S'}{\partial q_{\alpha+1}} \dots, \frac{\partial S'}{\partial q_s}, \frac{\partial S'}{\partial t}, C_1\right) = 0. \quad (15.7)$$

Уравнение (15.6) является уже обыкновенным дифференциальным уравнением, которое может быть решено в квадратурах, а уравнение (15.7) содержит на одну независимую переменную меньше по сравнению с исходным уравнением (15.4). Если таким способом можно последовательно отделить все s координат и время, то нахождение полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби целиком сводится к квадратурам.

Частным случаем разделения является случай циклической координаты. Циклическая координата не входит в явном виде в функцию Гамильтона и, следовательно, в уравнение Гамильтона-Якоби. В этом случае

$$f\left(q_\alpha, \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha},$$

и уравнение (15.6) запишется в виде

$$\frac{dS_\alpha}{dq_\alpha} = C_1.$$

Отсюда $S_\alpha = C_1 q_\alpha$ и функция

$$S = S'(q_1, q_2, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_s, t) + C_1 q_\alpha.$$

Если функция Гамильтона не зависит явно от времени, то в роли "циклической координаты" выступает переменная t. При этом зависимость действия от времени сводится к слагаемому $-C_1 t$ (выбор знака "-" обусловлен тем, что константа C_1 в этом случае является обобщенной энергией системы).

Задача 15.1. Пользуясь определением, найдите действие частицы, движущейся в отсутствие поля и проходящей через точки $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}(t_1)$ и $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}(t_2)$.

□ По определению

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} dt. \qquad (15.8)$$

С помощью уравнения движения $m\ddot{\boldsymbol{r}} = 0$ находим, что

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{t_2 - t_1}.$$

Подставляя это значение в (15.8), получаем:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} \frac{(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)^2}{(t_2 - t_1)^2} dt = \frac{m}{2} \frac{(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)^2}{t_2 - t_1}.$$

■

Задача 15.2. Найдите полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби и закон движения свободной частицы массы m, движущейся вдоль одной прямой.

□ Направим ось x вдоль прямой, по которой движется точка. Для свободной частицы функция Гамильтона

$$H = \frac{p_x^2}{2m},$$

а уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2=0.$$

Поскольку функция H не зависит явно от времени, решение уравнения Гамильтон-Якоби будем искать в виде

$$S=-C_1t+f(x), \tag{15.9}$$

где $C_1=const$, а $f(x)$ - некоторая функция координаты, которая не зависит от времени явно. Для нахождения функции $f(x)$ подставим решение в виде (15.9) в уравнение Гамильтона-Якоби. Получим:

$$-C_1+\frac{1}{2m}\left(\frac{df}{dx}\right)^2=0,$$

откуда

$$\frac{df}{dx}=\pm\sqrt{2mC_1},$$

и, следовательно,

$$f=\pm\sqrt{2mC_1}x+A,$$

где A есть произвольная постоянная. Далее для определенности оставим перед радикалом знак “+”. Как будет видно из закона движения выбор знака “+” или “-” определяется начальными условиями – начальной координатой и направлением начальной скорости. Подставляя f в (15.9), находим:

$$S=-C_1t+\sqrt{2mC_1}x.$$

Здесь опущена аддитивная постоянная A. Теперь запишем уравнение (15.3):

$$Q_1=\frac{\partial S}{\partial C_1}=-t+\frac{mx}{\sqrt{2mC_1}},\quad Q_1=const.$$

Вводя обозначения $Q_1\sqrt{2C_1/m}=x_0$, $\sqrt{2mC_1}=p_0$, получаем закон движения точки:

$$x=x_0+\frac{p_0}{m}t.$$

Видим, что x_0 играет роль начальной координаты, а p_0 - начального импульса. ■

Задача 15.3. Найдите полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, траекторию и закон движения материальной точки массы m в поле тяжести.

□ Направим ось z вертикально вверх. Тогда функция Гамильтона

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + mgz,$$

а уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\} + mgz = 0.$$

Отсюда видно, что координаты x и y являются циклическими. В этом случае зависимость действия от переменных x и y сводится к слагаемым C_2x и C_3y ($C_2, C_3 = const$). Поскольку функция Гамильтона также не зависит явно от времени, то полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби будем искать в виде

$$S = -C_1t + C_2x + C_3y + f(z),\ \ C_1 = const. \tag{15.10}$$

Подставляя (15.10) в уравнение Гамильтона-Якоби, имеем:

$$-C_1 + \frac{1}{2m}\left\{C_2^2 + C_3^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2\right\} + mgz = 0,$$

откуда

$$f = \pm\int\sqrt{2mC_1 - C_2^2 - C_3^2 - 2m^2gz}\,dz =$$

$$= \mp\frac{1}{3m^2g}\left(2mC_1 - C_2^2 - C_3^2 - 2m^2gz\right)^{3/2} + A\,,$$

и, следовательно, с точностью до аддитивной постоянной A

$$S = -C_1t + C_2x + C_3y \mp \frac{1}{3m^2g}\left(2mC_1 - C_2^2 - C_3^2 - 2m^2gz\right)^{3/2}.$$

Подставляя эту функцию в уравнения (15.3), находим:

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial C_1} = -t \mp \frac{1}{mg}\sqrt{2mC_1 - C_2^2 - C_3^2 - 2m^2 gz}, \qquad (15.11)$$

$$Q_2 = \frac{\partial S}{\partial C_2} = x \pm \frac{C_2}{m^2 g}\sqrt{2mC_1 - C_2^2 - C_3^2 - 2m^2 gz}, \qquad (15.12)$$

$$Q_3 = \frac{\partial S}{\partial C_3} = y \pm \frac{C_3}{m^2 g}\sqrt{2mC_1 - C_2^2 - C_3^2 - 2m^2 gz}, \qquad (15.13)$$

где Q_1, Q_2, Q_3 - произвольные постоянные. Из уравнений (15.12) и (15.13) видно, что

$$\frac{x - Q_2}{C_2} = \frac{y - Q_3}{C_3}.$$

Это означает, что траектории точки лежит в плоскости, параллельной оси z. Если совместить с этой плоскостью плоскость xz, то $y = 0$. Тогда следует положить $C_3 = 0$. При этом из (15.12) получим уравнение параболы с осью, параллельной оси z, а именно

$$(x - Q_2)^2 = \frac{C_2^2}{m^4 g^2}(2mC_1 - C_2^2 - 2m^2 gz).$$

Уравнение (15.11) определяет функцию $z(t)$. Положив $Q_1 = -t_0$, из этого уравнения имеем:

$$(t - t_0)^2 = \frac{2mC_1 - C_2^2 - C_3^2 - 2m^2 gz}{m^2 g^2},$$

т.е. координата z изменяется пропорционально $(t - t_0)^2$. ■

Задача 15.4. Найдите полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, траекторию и закон движения частицы массы m и заряда q в поле электрического диполя.

□ Функция Лагранжа для заряда, находящегося в электрическом поле диполя, найдена в задаче 4.5 и равна

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right) - \frac{qp}{r^2}cos\theta,$$

где p – дипольный момент, а r, θ, φ - сферические координаты (полярная ось направлена вдоль диполя, а начало отсчета совмещено с диполем). С помощью функции Лагранжа найдем обобщенные импульсы:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \qquad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}sin^2\theta,$$

и затем функцию Гамильтона

$$H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\varphi\dot{\varphi} - L = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 sin^2\theta}\right) + \frac{qp}{r^2}cos\theta.$$

Уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\} + \frac{qp}{r^2}cos\theta = 0.$$

Замечая, что функция Гамильтона не зависит явно от времени и координаты φ, ищем полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби в виде

$$S = -C_1 t + C_2\varphi + f(r,\theta) \qquad (C_1, C_2 = const).$$

Подставляя S в уравнение Гамильтона-Якоби, имеем:

$$-C_1 + \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{C_2^2}{r^2 sin^2\theta}\right\} + \frac{qp}{r^2}cos\theta = 0. \qquad (15.14)$$

Представим функцию f в виде суммы функции, зависящей только от r, и функции, зависящей только от θ, т.е.

$$f(r,\theta) = R(r) + \Theta(\theta).$$

Подставим данное представление функции f в уравнение (15.14), умножим обе части уравнения на $2mr^2$ и перенесем все члены, зависящие от θ, в правую часть. В результате, находим:

$$-2mC_1 r^2 + r^2\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 = -\left\{\left(\frac{d\Theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{C_2^2}{sin^2\theta}\right\} - 2mqpcos\theta. \qquad (15.15)$$

Правая часть уравнения (15.15) является функцией только переменной θ, а левая – только r. Поэтому равенство (15.15) может выполняться только при условии, что левая и правая части равны одной и той же постоянной. Обозначив эту постоянную посредством $-C_3$, получаем два уравнения:

$$-2mC_1 r^2 + r^2\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 = -C_3,$$

$$-\left\{\left(\frac{d\Theta}{d\theta}\right)^2+\frac{C_2^2}{sin^2\theta}\right\}-\ 2mqpcos\theta=-C_3.$$

Из этих уравнений следует, что

$$R=\pm\int\sqrt{2mC_1-\frac{C_3}{r^2}}dr,\quad \Theta=\pm\int\sqrt{\left(C_3-\frac{C_2^2}{sin^2\theta}-2mqpcos\theta\right)}d\theta.$$

Тогда функция действия

$$S=-C_1t+C_2\varphi\pm\int\sqrt{2mC_1-\frac{C_3}{r^2}}dr\pm\int\sqrt{\left(C_3-\frac{C_2^2}{sin^2\theta}-2mqpcos\theta\right)}d\theta.$$

Пользуясь найденным полным интегралом, составим уравнения (15.3):

$$Q_1=\frac{\partial S}{\partial C_1}=-t\pm\int\frac{mdr}{\sqrt{2mC_1-\frac{C_3}{r^2}}},$$

$$Q_2=\frac{\partial S}{\partial C_2}=\varphi\mp C_2\int\frac{d\theta}{sin^2\theta\left(C_3-\frac{C_2^2}{sin^2\theta}-2mqpcos\theta\right)^{1/2}},$$

$$Q_3=\frac{\partial S}{\partial C_3}=\mp\frac{1}{2}\int\frac{dr}{r^2\sqrt{2mC_1-\frac{C_3}{r^2}}}\pm\frac{1}{2}\int\frac{d\theta}{\left(C_3-\frac{C_2^2}{sin^2\theta}-2mqpcos\theta\right)^{1/2}}.$$

Два последних равенства задают в квадратурах траекторию заряда и вместе с первым определяют закон движения. ■

Задачи для самостоятельного решения

78. Пользуясь определением, найдите действие одномерного гармонического осциллятора, проходящего через точки $x_1=x(t_1)$ и $x_2=x(t_2)$.

79. Запишите уравнение Гамильтона-Якоби для точки в а) прямоугольной, б) цилиндрической, в) сферической системах координат.

80. Найдите полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для тела, движущегося по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом.

81. Найдите полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для математического маятника и закон его движения в квадратуре. Длина математического маятника l, а масса m.

82. Найдите полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби и закон движения одномерного гармонического осциллятора.

83. Найдите в цилиндрических координатах полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, закон движения и траекторию частицы, движущейся в постоянном однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{H}$.

§ 16. Адиабатические инварианты. Переменные действие-угол

Рассмотрим механическую систему, совершающую одномерное финитное движение. Пусть данная система характеризуется каким-то параметром λ, определяющим свойства самой системы или внешнего поля, в котором она находится. Предположим, что параметр λ мало меняется за время периода T движения системы, т.е.

$$T\frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda.$$

Энергия E такой системы, вообще говоря, не сохраняется. Но в силу медленности изменения λ существует такая комбинация E и λ, которая в среднем остается неизменной при движении системы. Эта величина, называемая *адиабатическим инвариантом* (I), может быть вычислена по формуле:

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p dq. \tag{16.1}$$

В (16.1) интеграл берется по полному изменению обобщенной координаты q за время периода при заданных E и λ.

Задача 16.1. Частица массы m движется в прямоугольной потенциальной яме ширины a. Найдите, как изменяется энергия частицы при медленном изменении a.

□ Обобщенный импульс частицы

$$p = \pm\sqrt{2mE},$$

где E - полная энергия частицы при фиксированном значении a. С помощью формулы (16.1) находим:

$$I = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_0^a \sqrt{2mE}dq - \int\limits_a^0 \sqrt{2mE}dq\right) = \frac{1}{\pi}\sqrt{2mE}a.$$

Отсюда следует, что

$$Ea^2 = const.$$

■

Интегралу (16.1) может быть приписан наглядный геометрический смысл, если воспользоваться понятием о *фазовом пространстве*. В случае системы с одной степенью свободы, под фазовым пространством понимается двухмерное пространство с введенной декартовой системой координат, по осям которой отложены значения обобщенной координаты q и обобщенного импульса p. Каждая точка этого пространства отвечает определенному состоянию системы. При движении системы изображающая ее фазовая точка описывает в фазовом пространстве соответствующую линию, называемую *фазовой траекторией*. Если система совершает колебательное движение, то ее фазовая траектория представляет собой замкнутую кривую в фазовой плоскости q, p. Интеграл (16.1), взятый вдоль этой кривой, есть заключенная внутри нее площадь.

Задача 16.2. Определите изменение амплитуды линейных колебаний математического маятника при медленном изменении длины его подвеса.

□ Функция Гамильтона математического маятника

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}. \tag{16.2}$$

Фазовая траектория определяется законом сохранения энергии

$$H(p,q) = E,$$

с учетом которого (16.2) можно переписать в виде

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} = 1. \qquad (16.3)$$

Уравнение (16.3) представляет собой уравнение эллипса с полуосями $\sqrt{2mE}$ и $\sqrt{2E/_{m\omega^2}}$. Площадь эллипса есть $2\pi\, E/_{\omega}$, откуда

$$I = \frac{E}{\omega}. \qquad (16.4)$$

Частота $\omega = \sqrt{g/_l}$ изменяется при изменении длины подвеса маятника l. Пусть φ_0 есть амплитуда колебаний маятника при частоте ω. Тогда полную энергию маятника, предполагая колебания малыми, можно записать в виде

$$E = \frac{mgl}{2}\varphi_0^2.$$

С учетом написанных выражений для ω и E из (16.4) получаем:

$$l^{3/4}\varphi_0 = const.$$

■

С помощью величины I можно дать новую формулировку уравнениям движения системы (с постоянными параметрами), совершающей периодическое движение, в частности, получить частоты, характеризующие это движение. Пусть механическая система с одной степенью свободы совершает финитное движение, а ее функция Гамильтона не зависит явно от времени. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби (15.1) для данной системы можно представить в виде

$$S = -E_0 t + W(q, E_0). \qquad (16.5)$$

В (16.5) константа E_0 играет роль полной энергии системы, а $W(q, E_0)$ называется *укороченным действием* и, как можно убедиться прямой подстановкой (16.5) в уравнение Гамильтона-Якоби, удовлетворяет уравнению

$$H\left(q, \frac{\partial W(q, E_0)}{\partial q}\right) = E_0. \qquad (16.6)$$

Укороченное действие определяется при заданной энергии системы. Поскольку адиабатический инвариант I системы с постоянными параметрами является функцией одной только энергии, то укороченное действие W можно представить в виде функции, зависящей от q и I. Используем укороченное действие $W(q, I)$ в качестве производящей функции, зависящей от старой координаты q и нового импульса I. Каноническое преобразование, задаваемое функцией $W(q, I)$, определяется равенствами:

$$p = \frac{\partial W(q, I)}{\partial q}, \qquad w = \frac{\partial W(q, I)}{\partial I}, \tag{16.7}$$

где p старый импульс, а w играет роль новой координаты. Величину I называют *переменной действие*, а w - *угловой переменной*. Новая функция Гамильтона

$$H' = H(I) + \frac{\partial W(q, I)}{\partial t} = H(I).$$

Уравнения Гамильтона в переменных действие-угол будут иметь вид:

$$\dot{I} = 0, \qquad \dot{w} = \frac{\partial H(I)}{\partial I},$$

откуда следует, что

$$I = const, \qquad w = \frac{\partial H(I)}{\partial I} t + w_0.$$

Можно показать, что величина

$$\omega = \frac{\partial H(I)}{\partial I} \tag{16.8}$$

является частотой периодического движения системы.

Задача 16.3. Найдите переменные действие-угол и частоту вращения свободного твердого тела вокруг неподвижной оси. Момент инерции тела относительно оси вращения равен $\mathcal{J}$.

□ Кинетическая энергия твердого тела

$$T = \frac{1}{2} \mathcal{J} \dot{\varphi}^2,$$

где φ угол поворота тела, а потенциальная энергия $U = 0$. Функция Лагранжа

$$L = T - U = \frac{1}{2}\mathcal{J}\dot{\varphi}^2,$$

откуда обобщенный импульс

$$p_\varphi = \mathcal{J}\dot{\varphi},$$

и, следовательно, функция Гамильтона

$$H = \frac{p_\varphi^2}{2\mathcal{J}}. \qquad (16.9)$$

Уравнение (16.6) принимает вид:

$$\frac{p_\varphi^2}{2\mathcal{J}} = E_0.$$

Отсюда, считая $\dot{\varphi} > 0$, находим:

$$p_\varphi = \sqrt{2\mathcal{J}E_0}. \qquad (16.10)$$

Тогда переменная действие

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p_\varphi d\varphi = \frac{\sqrt{2\mathcal{J}E_0}}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi = \sqrt{2\mathcal{J}E_0}. \qquad (16.11)$$

Функция

$$W(\varphi, I) = \int p_\varphi d\varphi = I\varphi,$$

откуда по формуле (16.7) переменная угол

$$w = \frac{\partial W(\varphi, I)}{\partial I} = \varphi.$$

Сравнивая (16.10) и (16.11) видим, что $p_\varphi = I$. С учетом этого из (16.9) имеем:

$$H(I) = \frac{I^2}{2\mathcal{J}}.$$

Частоту ω определяем по формуле (16.8):

$$\omega = \frac{I}{\mathcal{J}}. \quad \blacksquare$$

Пусть теперь имеется механическая система с s степенями свободы (по-прежнему предполагается, что система совершает финитное (по всем координатам) движение). Будем и далее полагать, что функция Гамильтона не зависит от времени и ограничимся случаем, когда переменные в уравнении (16.6) разделяются, т.е.

$$W = \sum_{\alpha=1}^{s} W_\alpha(q_\alpha, C_1, C_2, \dots, C_{s-1}, E_0).$$

В этом случае движения в плоскостях q_α,p_α $(\alpha = 1,2,\dots,s)$ фазового пространства независимы и каждое из них можно исследовать также, как это было сделано ранее в случае одной степени свободы. При этом переменные действия

$$I_\alpha = \frac{1}{2\pi}\oint p_\alpha dq_\alpha = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} dq_\alpha\,, \qquad \alpha = 1,2,\dots,s,$$

где интеграл берется по полному циклу периодического движения. Принимая величины $I_1, I_2, \dots, I_s$ за новые импульсы, можно укороченное действие (16.8) записать в виде функции

$$W = W(q_1, q_2, \dots, q_s, I_1, I_2, \dots, I_s).$$

Соотношения

$$p_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}, \qquad w_\alpha = \frac{\partial W}{\partial I_\alpha} \qquad (\alpha = 1,2,\dots,s) \tag{16.12}$$

в неявном виде задают каноническое преобразование от переменных q_α, p_α к переменным действие-угол I_α, w_α. Частоты движения

$$\omega_\alpha = \frac{\partial H(I_1, I_2, \dots, I_s)}{\partial I_\alpha}, \quad \alpha = 1,2,\dots,s, \tag{16.13}$$

где $H(I_1, I_2, \dots, I_s)$ - новая функция Гамильтона.

Задача 16.4. Найдите адиабатические инварианты и частоты финитного движения двух тел с приведенной массой m и энергией взаимодействия

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \qquad \alpha > 0.$$

□ Функция Гамильтона двух точек относительно их центра масс

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) - \frac{\alpha}{r},$$

где p_r и p_φ - обобщенные импульсы по координатам r и φ полярной системы координат, соответственно. Уравнение Гамильтона-Якоби для укороченного действия в данном случае запишется как

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{\alpha}{r} = E_0. \qquad (16.14)$$

Его решение представим в виде (учитывая, что φ - циклическая координата):

$$W = W_r(r, E_0, M) + M\varphi, \qquad (16.15)$$

где посредством M обозначена еще одна константа. Подставляя (16.15) в (16.14), имеем:

$$p_r^2 \equiv \left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 = -2m|E_0| + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}, \qquad (16.16)$$

где $|E_0| = -E_0$ в силу финитности движения. Отсюда

$$p_r = \pm\sqrt{-2m|E_0| + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}}.$$

Обобщенный импульс

$$p_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \varphi} = M.$$

Из последнего соотношения видно, что постоянная M есть момент импульса приведенной массы m, который должен сохраняться (см. § 7) при движении в центральном поле.

Адиабатические инварианты (переменные действия)

$$I_r = \frac{1}{2\pi}\oint p_r dr,$$

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi}\oint p_\varphi d\varphi = \frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\pi = M.$$

В силу очевидной периодичности движения первый интеграл можно представить в виде удвоенного интеграла от r_{min} до r_{max}, т.е.

$$I_r = \frac{1}{\pi}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{-2m|E_0| + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}}\,dr. \qquad (16.17)$$

Значения r_{min} и r_{max} определяются из уравнения (7.6):

$$r_{min} = \frac{\alpha}{2|E_0|} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4E_0^2} - \frac{M^2}{2m|E_0|}},$$

$$r_{max} = \frac{\alpha}{2|E_0|} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4E_0^2} - \frac{M^2}{2m|E_0|}}.$$

С учетом этого интеграл (16.17) будет равен:

$$I_r = -M + \alpha\sqrt{\frac{m}{2|E_0|}} = -I_\varphi + \alpha\sqrt{\frac{m}{2|E_0|}}.$$

Отсюда

$$E_0 = -|E_0| = -\frac{m\alpha^2}{2\left(I_r + I_\varphi\right)^2} = H\left(I_r, I_\varphi\right).$$

Частоты ω_r, ω_φ вычисляем по формуле (16.13):

$$\omega_r = \omega_\varphi = \frac{\partial H\left(I_r, I_\varphi\right)}{\partial I_r} = \frac{\partial H\left(I_r, I_\varphi\right)}{\partial I_\varphi} = \frac{m\alpha^2}{\left(I_r + I_\varphi\right)^3}. \ \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

84. Шарик, находящийся в лифте, подскакивает над упругой плитой. Как изменяется максимальная высота подъема шарика h, если плита медленно поднимается?

85. Частица движется внутри упругого параллелепипеда. Как изменяется энергия частицы, если размеры параллелепипеда медленно изменяются?

86. Частица движется внутри сферы с упругими стенками, радиус R которой медленно изменяется. Как изменяется при этом энергия частицы?

87. Найдите адиабатические инварианты и частоты колебаний неизотропного пространственного осциллятора, функция Гамильтона которого

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2),$$

$$k_1, k_2, k_3 = const.$$

Ответы

1. $z = \frac{m}{k} lnch\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right).$

2. $x = \frac{q\mathcal{E}_0}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t) + \dot{x}_0 t, \qquad y = \dot{y}_0 t, \qquad z = 0.$

3. $v = \frac{2c}{q\mathcal{H}}\sqrt{q^2\mathcal{E}^2 + m^2 g^2};$

$\mathcal{E}, \mathcal{H}$ – напряженности электрического и магнитного полей соответственно,

g – ускорение свободного падения, c — скорость света.

4. $x = A_1 sin(\omega_1 t + \alpha_1) - A_2 sin(\omega_2 t + \alpha_2),$

$y = A_1 cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 cos(\omega_2 t + \alpha_2),$

$z = A_3 sin(\omega_0 t + \alpha_3);\;\; A_1 = \frac{\sqrt{(\omega_2 y_0 + \dot{x}_0)^2 + (\omega_2 x_0 - \dot{y}_0)^2}}{\omega_1 + \omega_2},$

$A_2 = \frac{\sqrt{(\omega_1 x_0 + \dot{y}_0)^2 + (\omega_1 y_0 - \dot{x}_0)^2}}{\omega_1 + \omega_2}, \qquad A_3 = \sqrt{z_0^2 + \frac{\dot{z}_0^2}{\omega_0^2}},$

$tg\alpha_1 = \frac{\omega_2 x_0 - \dot{y}_0}{\omega_2 y_0 + \dot{x}_0}, \qquad tg\alpha_2 = \frac{\omega_1 x_0 + \dot{y}_0}{\dot{x}_0 - \omega_1 y_0}, \qquad tg\alpha_3 = \frac{\omega_0 z_0}{\dot{z}_0};$

$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\omega_{\mathcal{H}}^2}{4}} \pm \frac{\omega_{\mathcal{H}}}{2}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_{\mathcal{H}} = \frac{q\mathcal{H}}{mc},$

ось z направлена вдоль $\boldsymbol{\mathcal{H}}$.

5. $s = 5.$ **6.** $s = 9.$ **7.** $s = 1.$ **8.** $s = 3.$ **9.** $s = \infty.$ **10.** $s = 2.$

11. а) $v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2,$ б) $v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2.$

12. $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2).$

13. $L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mglcos\varphi; \quad \ddot{\varphi} + \frac{2\dot{l}}{l}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}sin\varphi = 0.$

14. $L = \frac{ml^2}{2}(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + mgl(cos\varphi_1 + cos\varphi_2) - \frac{ka^2}{2}(sin\varphi_1 - sin\varphi_2)^2;$

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{l} sin\varphi_1 + \frac{ka^2}{ml^2}(sin\varphi_1 - sin\varphi_2)cos\varphi_1 = 0,$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l} sin\varphi_2 - \frac{ka^2}{ml^2}(sin\varphi_1 - sin\varphi_2)cos\varphi_2 = 0.$$

15. $L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + (m_1 - m_2)gx;\ (m_1 + m_2)\ddot{x} - (m_1 - m_2)g = 0.$

16. $L = \frac{m_1\dot{x}^2}{2} + (m_1 - m_2)gx; \quad m_1\ddot{x} - (m_1 - m_2)g = 0;$

ось x направлена вертикально вниз.

17. $L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + ml(g + a)cos\varphi; \quad \ddot{\varphi} + \frac{g + a}{l} sin\varphi = 0;$

точка подвеса маятника движется вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$.

18. $L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 - ml\ddot{s}sin\varphi + mlgcos\varphi; \quad \ddot{\varphi} + \frac{\ddot{s}}{l} cos\varphi + \frac{g}{l} sin\varphi = 0;$

19. $L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mlR\omega^2 sin(\varphi - \omega t) + mglcos\varphi; \quad \ddot{\varphi} - \frac{R\omega^2}{l} cos(\varphi - \omega t) +$

$$+ \frac{g}{l} sin\varphi = 0.$$

21. $L = \frac{1}{2} e^{\frac{k}{m}t}[m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - k_1 x_1^2 - k_2(x_2 - x_1)^2 - k_3 x_2^2];$

В случае, если массы и коэффициенты трения грузов различны и равны $k^{(1)}, m_1$ и $k^{(2)}, m_2$ для 1-го и 2-го грузов, соответственно, функцию Лагранжа можно записать при условии

$$\frac{k^{(1)}}{m_1} = \frac{k^{(2)}}{m_2}.$$

22. $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q\mathcal{H}}{c} x\dot{y};\ m\ddot{x} - \frac{q\mathcal{H}}{c}\dot{y} = 0, \qquad m\ddot{y} + \frac{q\mathcal{H}}{c}\dot{x} = 0,$
$m\ddot{z} = 0.$

23. $L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - \frac{q\gamma}{c} cos\theta\dot{\varphi}.$

24. а) $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q\mu}{c}\frac{\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}\dot{\varphi}$;

б) $L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) + \frac{q\mu}{cr} sin^2\theta\dot{\varphi}$.

25. E, p_x; ось x направлена по горизонтали.

26. $p_r = m\dot{r}, \qquad p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \qquad p_\varphi = mr^2 sin^2\theta\dot{\varphi} = M_z; \; p_\varphi = const.$

27. а) M_z, в случае электрического диполя ось z направлена вдоль диполя (вдоль дипольного момента $\boldsymbol{p}$), в случае магнитного диполя ось z направлена вдоль вектора $\boldsymbol{\mu}$; б) p_x, p_y, M_z, плоскость xy совмещена с бесконечной плоскостью; в) p_z, M_z, (ось z является осью цилиндра).

28. $E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \qquad p_y = m\dot{y} + \frac{q}{c}\mathcal{H}x, \qquad p_z = m\dot{z}.$

29. $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q}{c}\rho A(\rho, z)\dot{\varphi}; \; E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2),$

$M_z = m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{q}{c}\rho A(\rho, z).$

30. $x = Asin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right), \quad A, \alpha = const; \; T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$

31. $x = -2aln\left(1 - \frac{\dot{x}_0}{2a}t\right).$

32. $x = \frac{1}{a}\, Arsh\left[\sqrt{\frac{U_0 - |E|}{|E|}} sin\left(a\sqrt{\frac{2|E|}{m}}t + C\right)\right], C = const; \; T = \frac{2\pi}{a}\sqrt{\frac{m}{2|E|}}.$

33. $\langle F\rangle = \frac{2E}{a}.$

34. $r = \frac{p}{\pm 1 + ecos\varphi}$, знак "+" ("-") берется при $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$);

$p = \frac{M^2}{m|\alpha|}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}.$

35. $r = r_0 exp\left\{\frac{m\alpha}{2M^2}(\varphi - C)^2 + \frac{M^2}{2m\alpha}\right\};\qquad C = const.$

36. $r = \frac{1}{acos\,(\omega\varphi) + bsin\,(\omega\varphi)};\qquad \omega = \sqrt{1 + \frac{2m\alpha}{M^2}},\ \ a, b = const.$

37. $t - t_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(y)\right)}},\qquad x - x_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{\left(p_x + \frac{2qI}{c^2} ln\left(\frac{y}{y_0}\right)\right)dy}{\pm\sqrt{2m\left(E - U_{eff}(y)\right)}};$

$$U_{eff}(y) = \frac{\left(p_x + \frac{2qI}{c^2} ln\left(\frac{y}{y_0}\right)\right)^2}{2m} - mgy,\qquad y_0 = y(t_0),\qquad E, p_x = const.$$

38. $\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{R} + \frac{m}{m_1}(\boldsymbol{a}cos\,(\omega t) + \boldsymbol{b}sin\,(\omega t)),$

$$\boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{R} - \frac{m}{m_2}(\boldsymbol{a}cos\,(\omega t) + \boldsymbol{b}sin\,(\omega t));\ \omega^2 = \frac{k}{m},\quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2},\quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} = const.$$

39. $L = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{\boldsymbol{r}}_i^2 - \frac{m^2}{2(M + nm)}\left(\sum_{i=1}^{n}\dot{\boldsymbol{r}}_i\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{e^2}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|} + \sum_{i=1}^{n}\frac{ne^2}{r_i},$

здесь e - заряд электрона, а $\boldsymbol{r}_i$ - расстояние от i-го электрона до ядра. Начало отсчета выбрано в центре инерции атома.

40. $L = \frac{\mu}{2}\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{q^2}{r} + q\boldsymbol{E}\boldsymbol{r};\qquad \mu\ddot{\boldsymbol{R}} = 0,\qquad m\ddot{\boldsymbol{r}} = -q^2\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} + q\boldsymbol{E};$

$$\mu = m_1 + m_2,\qquad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},\qquad \boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2},\ \ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2.$$

41. $d\sigma = \frac{a^4c^2do}{4cos^4\frac{\chi}{2}\left(a^2 + c^2tg^2\frac{\chi}{2}\right)^2}.$ **42.** $d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2\frac{do}{sin^4\,\chi/2}.$

43. $\sigma = \pi n(n-2)^{(2-n)/n}\left(\dfrac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^{2/n}$. **44.** $\sigma = \pi\left(2\sqrt{\dfrac{\beta}{E}} - \dfrac{\alpha}{E}\right)$.

45. $\omega_{1,2}^2 = \dfrac{(2m_2+m_1)k}{2m_1m_2} \pm \sqrt{\dfrac{(2m_2+m_1)^2k^2}{4m_1^2m_2^2} - \dfrac{k^2}{m_1m_2}}$.

46. $\varphi_1 = C_1\cos(\omega_1 t + \delta_1) + C_2\cos(\omega_2 t + \delta_2)$,

$\varphi_2 = C_1\cos(\omega_1 t + \delta_1) - C_2\cos(\omega_2 t + \delta_2)$,

$\omega_1 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$, $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{2ka^2}{ml^2}}$;

$\Theta_1 = \dfrac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$, $\Theta_2 = \dfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}$; $C_1, C_2, \delta_1, \delta_2 = const$.

47. $\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 \mp \alpha$; $x = C_1\cos(\omega_1 t + \delta_1) + C_2\cos(\omega_2 t + \delta_2)$,

$y = C_1\cos(\omega_1 t + \delta_1) - C_2\cos(\omega_2 t + \delta_2)$; $\Theta_1 = \dfrac{x+y}{2}$,

$\Theta_2 = \dfrac{x-y}{2}$; $C_1, C_2, \delta_1, \delta_2 = const$.

48. $\omega = \sqrt{\dfrac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2}}$, $k = const$.

49. $\omega_1^2 = \dfrac{æ(l_1+l_2)^2}{4l_1^2l_2^2}\left(\dfrac{l_2^2}{m_1} + \dfrac{(l_1+l_2)^2}{m_2} + \dfrac{l_1^2}{m_3}\right)$,

$$\omega_{2,3}^2 = \frac{\left(\dfrac{k_1}{m_1}+\dfrac{k_1}{m_2}\right) + \left(\dfrac{k_2}{m_2}+\dfrac{k_2}{m_3}\right) \pm \sqrt{\left(\left(\dfrac{k_1}{m_1}+\dfrac{k_1}{m_2}\right) + \left(\dfrac{k_2}{m_2}+\dfrac{k_2}{m_3}\right)\right)^2 - \dfrac{4\mu k_1k_2}{m_1m_2m_3}}}{2},$$

$\mu = m_1 + m_2 + m_3$.

50. $I_1 = \dfrac{2m}{3}h^2$, $I_2 = \dfrac{m}{2}a^2$, $I_3 = m\left(\dfrac{2}{3}h^2 + \dfrac{a^2}{2}\right)$;

центр инерции лежит на высоте треугольника на расстоянии $h/_3$ от основания.

51. $I_1 = \frac{1}{3}\mu(b^2 + c^2), \qquad I_2 = \frac{1}{3}\mu(a^2 + c^2), \;\; I_3 = \frac{1}{3}\mu(a^2 + b^2).$

52. $I_1 = I_2 = \frac{3}{20}\mu\left(R^2 + \frac{H^2}{4}\right), \;\; I_3 = \frac{3}{10}\mu R^2; \;\; z' -$ ось конуса.

53. $I_1 = \mu R^2\left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right) + \frac{\mu H^2}{12}, \qquad I_2 = \frac{\mu}{4}\left(R^2 + \frac{H^2}{3}\right), \quad I_3 = \frac{\mu R^2}{2}\left(1 - \frac{32}{9\pi^2}\right);$

y' – ось, перпендикулярная плоскости разреза полуцилиндра, z' – ось, направленная вдоль полуцилиндра параллельно плоскости разреза.

54. $T_{\text{вр}} = \frac{I}{2}\left(\dot\varphi^2 + \dot\theta^2 + \dot\psi^2 + 2\dot\varphi\dot\psi cos\theta\right).$

55. $L = \frac{\mu \dot Z^2}{2} + \frac{I}{2}\left(\dot\varphi^2 sin^2\theta + \dot\theta^2\right) - \mu g Z, \qquad Z -$ координата центра масс,

φ, θ - эйлеровы углы.

56. $\boldsymbol{R} = \left(\boldsymbol{P}/_{\mu}\right)t + \boldsymbol{R}_0, \;\; \varphi = \dot\varphi_0 t + \varphi_0, \qquad \theta = \theta_0, \qquad \psi = \dot\psi_0 t + \psi_0;$

$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{R}_0, \varphi_0, \theta_0, \psi_0, \dot\varphi_0, \dot\psi_0 = const;$

ось z направлена вдоль вектора момента импульса $\boldsymbol{M}$.

57. а) $\omega = \sqrt{\frac{8}{R}\frac{g}{9\pi - 16}}$, б) $\omega = \sqrt{\frac{24\pi}{R}\frac{g}{9\pi^2 - 32}}.$

58. $\omega = \frac{1}{\sqrt{\frac{I}{k} + \frac{\pi R^4 \sigma l}{6k}}}; \quad$ при $R \to 0, \quad \omega \approx \sqrt{\frac{k}{I}}.$

59. $\Omega_1 = \Omega_1^0 = const, \Omega_2 = \Omega_2^0 = const, \Omega_3 = \Omega_3^0 = const.$

60. $\varphi = \dot\varphi_0 t + \varphi_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \psi = \dot\psi_0 t + \psi_0; \;\; \varphi_0, \theta_0, \psi_0, \dot\varphi_0, \dot\psi_0 = const$

(ср. с задачей 51). **62**. $H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 sin^2\theta}\right) + U(r, \theta, \varphi, t).$

63. $H=\frac{1}{2\mu}(p_X^2+p_Y^2+p_Z^2)+\frac{3}{2\mu l^2}\left(p_\theta^2+\frac{p_\varphi^2}{sin^2\theta}\right)+mgZ,$

где X,Y,Z - координаты центра инерции стержня; θ,φ - углы Эйлера.

64. $H=c\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m_0^2c^2}.$

65. $H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}\right)+U(r);\quad \dot{r}=\frac{p_r}{m},\qquad \dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mr^2},$

$\dot{p}_\varphi=0,\quad \dot{p}_r=\frac{p_\varphi^2}{mr^3}-\frac{dU}{dr}.$

66. $\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{mR^2},\ \ \dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mR^2sin^2\theta},\ \ \dot{p}_\varphi=0,\ \ \dot{p}_\theta=\frac{p_\varphi^2cos\theta}{mR^2sin^3\theta}-mgRsin\theta.$

67. $x(t)=x_0+\sqrt{\frac{2C}{m\omega^2}}sin\{\omega(1+2\lambda C)(t-t_0)\};\quad x_0=x(t_0),\qquad C=const.$

68. $Q=q-at,\ \ p=P+ma,\ \ H'=H-aP$ (преобразование Галилея).

69. $Q=q-\left(P/_m\right)t,\qquad p=P,\qquad H'=0.$

70. $Q=q-at,\ \ p=P+bt,\ \ H'=\frac{(P+bt)^2}{2m}+bQ-aP+abt;$

$\dot{Q}=\frac{P+bt}{m}-a,\qquad \dot{P}=-b.$

71. $H'=P\omega-\frac{\dot{F}}{\omega}\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}cosQ,\ \ \dot{Q}=\omega-\frac{\dot{F}}{\sqrt{2m\omega^3P}}cosQ,\ \ \dot{P}=-\frac{\dot{F}}{\omega}\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}sinQ.$

78. $S=\frac{m\omega}{2sin\big(\omega(t_2-t_1)\big)}\{(x_1^2+x_2^2)cos\big(\omega(t_2-t_1)\big)-2x_1x_2\}.$

79. а) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}+U(x,y,z)=0,$

б) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}+U(\rho,\varphi,z)=0,$

в) $\dfrac{\partial S}{\partial t}+\dfrac{1}{2m}\left\{\left(\dfrac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2+\dfrac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\dfrac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\}+U(r,\theta,\varphi)=0.$

80. $S=-C_1t\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{m}gsin\alpha}(C_1+mgxsin\alpha)^{3/2};\quad C_1=const.$

81. $S=-C_1t\pm\int\sqrt{2ml^2(C_1+mglcos\varphi)}\,d\varphi,$

$$t-t_0=\pm\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{2ml^2}{C_1+mglcos\varphi}}d\varphi;\ \ C_1,t_0=const.$$

82. $S=-C_1t\pm\int\sqrt{(2mC_1-mkq^2)}\,dq,$

$$q=\sqrt{\frac{2C_1}{k}}\sin\left(\omega(t+Q_1)\right);\ \ \omega=\sqrt{\frac{k}{m}},\qquad C_1,Q_1=const.$$

83. $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{2}H\rho\boldsymbol{e}_\varphi,$ (ось z направлена вдоль $\boldsymbol{H}$)

$$S=-C_1t+C_2\varphi+C_3z\pm\int\sqrt{2mC_1-C_3^2-\left(\frac{C_2}{\rho}-\frac{qH\rho}{2c}\right)^2}\,d\rho;$$

$$Q_1\equiv -t_0=-t\pm\int\frac{md\rho}{\sqrt{2mC_1-C_3^2-\left(\frac{C_2}{\rho}-\frac{qH\rho}{2c}\right)^2}},$$

$$Q_2\equiv\varphi_0=\varphi\mp\int\frac{\left(\frac{C_2}{\rho}-\frac{qH\rho}{2c}\right)d\rho}{\rho\sqrt{2mC_1-C_3^2-\left(\frac{C_2}{\rho}-\frac{qH\rho}{2c}\right)^2}},$$

$$Q_3\equiv z_0=z\mp\int\frac{C_3d\rho}{\sqrt{2mC_1-C_3^2-\left(\frac{C_2}{\rho}-\frac{qH\rho}{2c}\right)^2}}.$$

Из выражений для Q_1 и Q_3: $z=z_0+\dfrac{C_3}{m}(t-t_0).$

84. $h \sim g^{-1/3}$. **85**. $E = \dfrac{\pi^2}{2m}\left(\dfrac{I_1^2}{a^2} + \dfrac{I_2^2}{b^2} + \dfrac{I_3^2}{c^2}\right)$; $I_1, I_2, I_3 = const$,

a, b, c – длины ребер параллелепипеда.

86. $ER^2 = const$.

87. $I_{\text{x}} = \dfrac{C_1}{2\sqrt{mk_1}}$, $\quad I_{\text{y}} = \dfrac{C_2}{2\sqrt{mk_2}}$, $\quad I_{\text{z}} = \dfrac{C_3}{2\sqrt{mk_3}}$,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k_3}{m}}; \quad C_1, C_2, C_3 = const.$$

Приложение

Криволинейные системы координат

Положение точки A в пространстве можно определить ее радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$, отсчитываемым от некоторой фиксированной точки O. Радиус-вектор в пространстве трех измерений определяется тремя числами q_1, q_2, q_3. В отличие от самого радиуса-вектора числа q_1, q_2, q_3 зависят от устанавливаемого способа их определения, т.е. от принятой системы координат. Например, если эти три числа определять как расстояния, с соответствующими знаками, до трех взаимно перпендикулярных плоскостей, проходящих через точку O, положив $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$, то говорят о прямоугольной декартовой системе координат.

Очевидно, если зафиксировать одну из величин q_α $(\alpha = 1,2,3)$, например

$$q_1 = const,$$

и изменять непрерывно две другие q_2 и q_3, то полученные точки будут принадлежать некоторому семейству поверхностей. Таким же образом, уравнения $q_2 = const$ (q_1 и q_3 - переменные) и $q_3 = const$ (q_1 и q_2 - переменные) определяют, соответственно, еще два других семейства поверхностей. Если поверхности таковы, что через каждую точку A пространства проходит одна и только одна поверхность каждого семейства, то положение точки однозначно определяется пересечением этих трех поверхностей. Они носят название координатных поверхностей, а величины q_1, q_2, q_3 *криволинейных (обобщенных) координат* точки A.

Пересечение двух координатных поверхностей дает линию. Очевидно, что на этой линии значения двух координат постоянны, а третья меняется. Эти линии изменения одной из координат называются *координатными линиями*. В цилиндрической системе координат координатными линиями являются (рис. П.1): прямая $(\rho = const, \varphi = \mathrm{const})$, прямая $(\varphi = const, z = \mathrm{const})$ и окружность $(\rho = const, \varphi = \mathrm{const})$, а в сферической системе координатные линии (рис. П.2) – это окружность $(r = const, \varphi = \mathrm{const})$, окружность $(r = const, \theta = \mathrm{const})$ и прямая $(\varphi = \mathrm{const}, \theta = \mathrm{const})$*.

Условимся положительным направлением на координатной линии q_α называть направление, в котором перемещается точка при увеличении q_α.

* Координатные линии на рис. П.1 и П.2 обозначены пунктиром.

Направления координатных линий определяют при помощи трех единичных векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Эти векторы являются касательными к соответствующим координатным линиям и направлены в сторону возрастания соответствующих координат. Векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ образуют *локальный (местный) базис* системы координат. Для цилиндрической и сферической систем координат локальные базисы показаны на рисунках П.1 и П.2, соответственно. Касательные к координатным линиям, на которых установлено положительное направление базисными векторами, называются *координатными осями* криволинейной системы координат. Следует отметить, что в случае декартовой системы координат (прямоугольной и косоугольной), базисные векторы совпадают для всех точек пространства. Этим свойством обладает только декартова система координат. Для любой криволинейной системы координат, базисные векторы различны для различных точек пространства.

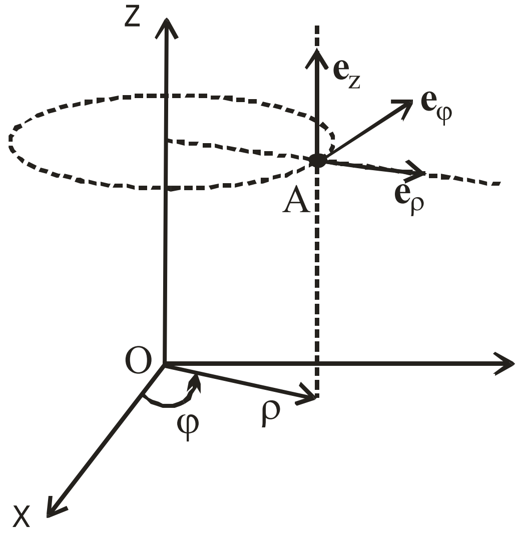

Рис. П.1

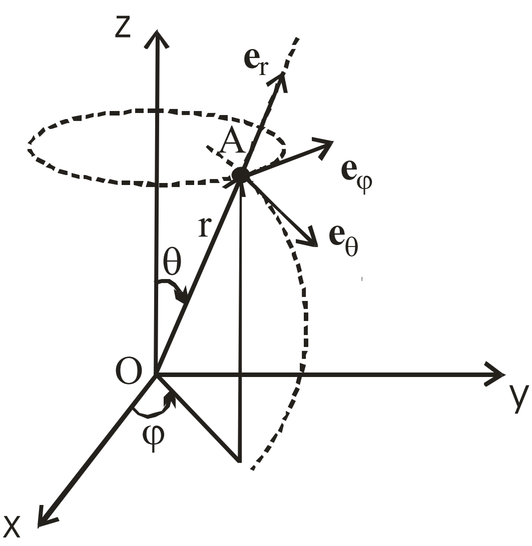

Рис. П.2

Системы координат, в которых векторы базиса в каждой точке пространства взаимно перпендикулярны, называются *ортогональными*. Цилиндрическая и сферическая системы координат являются ортогональными. Ортогональные системы наиболее распространены в приложениях, хотя, конечно, условие ортогональности системы не обязательно для обобщенных координат (q_1, q_2, q_3).

В случае ортогональной системы координат, основными ее характеристиками являются *коэффициенты Ламе.* Если радиус-вектор точки рассматривать как вектор-функцию обобщенных координат q_1, q_2, q_3, т.е.

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1, q_2, q_3),$$

то коэффициенты Ламе определяются соотношениями:

$$h_\alpha = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha}\right| \quad (\alpha = 1,2,3). \qquad (\text{П}. 1)$$

Для вычисления коэффициентов Ламе удобно радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ выразить через декартовы координаты, посредством равенства

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z,$$

и переписать формулу (П. 1) в виде:

$$h_\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_\alpha}\right)^2} \quad (\alpha = 1,2,3), \qquad (\text{П}. 2)$$

где x, y, z рассматриваются как функции обобщенных координат q_1, q_2, q_3.

В качестве примера с помощью формулы (П. 2) найдем коэффициенты Ламе для сферической системы координат. Связь декартовых координат со сферическими выражается равенствами (2.2), учитывая которые, получаем:

$$h_1 \equiv h_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{sin^2\theta cos^2\varphi + sin^2\theta sin^2\varphi + cos^2\theta} = 1,$$

$$h_2 \equiv h_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{r^2(cos^2\theta cos^2\varphi + cos^2\theta sin^2\varphi + sin^2\theta)} = r,$$

$$h_3 \equiv h_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{r^2(sin^2\theta sin^2\varphi + sin^2\theta cos^2\varphi)} = rsin\theta.$$

Абсолютно аналогично можно найти, что для цилиндрической системы координат $h_\rho = 1,\ h_\varphi = \rho,\ h_z = 1$.

При движении точки ее радиус-вектор зависит через обобщенные координаты от времени, т.е.

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t)).$$

По определению скорость точки

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3, \qquad (\text{П}.3)$$

где $\dot{q}_\alpha = {}^{dq_\alpha}/_{dt}$ - обобщенные скорости точки. Поскольку производные ${}^{\partial \boldsymbol{r}}/_{\partial q_\alpha}$ направлены также как и базисные векторы, можно записать:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha} = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha}\right| \boldsymbol{e}_\alpha = h_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha. \qquad (\text{П}.4)$$

С помощью этого равенства из (П. 3) находим:

$$\boldsymbol{v} = h_1\dot{q}_1\boldsymbol{e}_1 + h_2\dot{q}_2\boldsymbol{e}_2 + h_3\dot{q}_3\boldsymbol{e}_3,$$

откуда видно, что проекции скорости на оси криволинейной системы координат

$$v_\alpha = h_\alpha \dot{q}_\alpha \quad (\alpha = 1,2,3). \qquad (\text{П}.5)$$

Для квадрата скорости имеем:

$$v^2 = h_1^2\dot{q}_1^2 + h_2^2\dot{q}_2^2 + h_3^2\dot{q}_3^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} h_\alpha^2\dot{q}_\alpha^2.$$

С помощью (П. 5) легко найти, что в цилиндрической системе координат проекции скорости

$$v_\rho = h_\rho\dot{\rho} = \dot{\rho}, \qquad v_\varphi = h_\varphi\dot{\varphi} = \rho\dot{\varphi}, \qquad v_z = h_z\dot{z} = \dot{z},$$

а в сферической системе

$$v_r = h_r\dot{r} = \dot{r}, \qquad v_\theta = h_\theta\dot{\theta} = r\dot{\theta}, \qquad v_\varphi = h_\varphi\dot{\varphi} = r sin\theta\dot{\varphi}.$$

Найдем теперь ускорение точки в ортогональных криволинейных координатах. Для ортогональных базисных векторов проекции ускорения точки на координатные оси можно записать в виде

$$a_\alpha = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_\alpha) = \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}, \boldsymbol{e}_\alpha\right). \tag{П. 6}$$

Выражая $\boldsymbol{e}_\alpha$ из (П. 4), представим выражение (П. 6) в форме:

$$a_\alpha = \frac{1}{h_\alpha}\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{1}{h_\alpha}\left[\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{v}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha}\right) - \left(\boldsymbol{v}, \frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha}\right)\right]. \tag{П. 7}$$

Из (П. 3) следует равенство

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_1 \partial q_\alpha}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_2 \partial q_\alpha}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_3 \partial q_\alpha}\dot{q}_3. \tag{П. 8}$$

Кроме того найдем, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha \partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha \partial q_3}\dot{q}_3. \tag{П. 9}$$

Правые части равенств (П. 8) и (П. 9) совпадают, так как они отличаются только порядком частного дифференцирования. Поэтому

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_\alpha}\,. \tag{П. 10}$$

Дифференцируя (П. 3) по $\dot{q}_\alpha$, имеем:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha}\,. \tag{П. 11}$$

Используя (П. 10) и (П. 11), равенство (П. 7) можно записать в виде:

$$a_\alpha = \frac{1}{h_\alpha}\left[\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{v}, \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \left(\boldsymbol{v}, \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_\alpha}\right)\right] = \frac{1}{h_\alpha}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\left(v^2/2\right)}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial\left(v^2/2\right)}{\partial q_\alpha}\right]. \tag{П. 12}$$

С помощью (П. 12) найдем, что в цилиндрической системе координат проекции ускорения

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}, \quad a_z = \ddot{z},$$

а в сферической системе

$$a_r = \ddot{r} - r sin^2\theta\dot{\varphi}^2 - r\dot{\theta}^2, \quad a_\varphi = r sin\theta\ddot{\varphi} + 2 sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} + 2r cos\theta\dot{\varphi}\dot{\theta},$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r sin\theta cos\theta\dot{\varphi}^2.$$

С помощью коэффициентов Ламе можно записать выражения для дифференциальных операторов в ортогональных криволинейной координатах. В частности:

$$grad\Phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \Phi}{\partial q_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \Phi}{\partial q_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \Phi}{\partial q_3}\boldsymbol{e}_3,$$

$$div\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 A_3)\right],$$

$$rot\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\boldsymbol{e}_1 & h_2\boldsymbol{e}_2 & h_3\boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} = \frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_3 A_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(h_2 A_2)}{\partial q_3}\right] +$$

$$+\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_1 h_3}\left[\frac{\partial(h_1 A_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(h_3 A_3)}{\partial q_1}\right] + \frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial(h_2 A_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(h_1 A_1)}{\partial q_2}\right].$$

Литература

1. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. - М.: Наука, 1972.

2. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. - М.: Физматлит, 2002.

3. *Голдстейн Г.* Классическая механика. - М.: Наука, 1975.

4. *Казаков К.А.* Введение в теоретическую и квантовую механику. – М.: Изд-во МГУ, 2008.

5. *Коткин Г.Л., Сербо В.Г.* Сборник задач по классической механике. - М.: Наука, 1977.

6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. - М.: Физматлит, 2001.

7. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. – Ижевск: НИЦ "РХД", 1999.

8. *Никитин Н.Н.* Курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 1990.

9. *Ольховский И.И.* Курс теоретической механики для физиков. - М.: Изд-во МГУ, 1974.

10. *Ольховский И.И., Павленко Ю.Г., Кузьменков Л.С.* Задачи по теоретической механике для физиков. - М.: Изд-во МГУ, 1977.

11. *Павленко Ю.Г.* Лекции по теоретической механике. - М.: Физматлит, 2002.

12. *Павленко Ю.Г.* Задачи по теоретической механике. - М.: Физматлит, 2003.

13. *Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н.* Сборник задач по аналитической механике. - М.: Физматлит, 2002.

14. *Татаринов Я.В.* Лекции по классической динамике. - М.: Изд-во МГУ, 1984.

15. *Уиттекер Э.* Аналитическая динамика. - Ижевск: НИЦ "РХД", 1999.

16. *Яковенко Г.Н.* Краткий курс аналитической динамики. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2004.

Учебное издание

ФОРШ Павел Анатольевич

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ ДЛЯ ХИМИКОВ

Учебное пособие

Физический факультет МГУ
Лицензия ЛР-021293 от 18.06.1998
119991 Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова

ХИМИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА