ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ К КУРСУ "КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА"

НИКИТИН
НИКОЛАЙ ВИКТОРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

Осенний семестр 2020/2021 учебного года

ЗАДАЧИ К КУРСУ кафедры физики атомного ядра и квантовой теории столкновений физического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова

”Квантовая электродинамика”

Никитин Николай Викторович

(к.ф.-м.н., доцент)

кафедра физики атомного ядра и квантовой теории столкновений

Физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова

Москва 2020

Квантовая теория поля – наука «ручная», а не «ушная». То есть ни одни даже самые лучшие лекции, прочитанные самыми искусными преподавателями (к которым я себя не смею относить), не заменят вычислений, которые каждый студент должен самостоятельно проделать. Чтобы «набить руку» в подобных вычислениях, необходимы задачи. Желательно, чтобы задачи были корректно составлены и рационально подобраны, поскольку при современном темпе жизни фактор времени играет решающую роль.

Представленный ниже набор задач предназначен для решения студентами, которые слушают семестровый курс квантовой электродинамики (КЭД) на кафедрах физики атомного ядра и квантовой теории столкновений физического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова. Некоторая часть задач подробно разбирается в ходе лекций. Для значительного числа задач в лекциях дается идея решения. Задачи, помеченные знаком «$*$», являются задачами повышенной трудности и для своего решения требуют усидчивости, превышающей среднюю студенческую. *Для допуска к экзамену требуется правильно решить не менее 75% задач, которые НЕ помечены знаком* «$*$». При этом из каждого раздела должно быть решено минимум две задачи.

Квантовая электродинамика - первый из курс по квантовой теории поля и физике частиц, с которым встречаются студенты. Поэтому данный курс представляет собой, по-существу, введение в методы вычисления квантовой теории поля. Если студенты дальше заинтересуются физикой частиц, то им полезно знать, что умения, полученные в процессе изучения курса квантовой электродинамики пригодятся им при освоении электрослабой теории, квантовой хромодинамики и других приложений квантовой теории поля.

Обо всех замеченных неточностях и опечатках просьба сообщать автору по телефону *(495) 939–50–32* или по электронной почте *679nik@mail.ru*. В заголовке письма необходимо ставить "QFT–4 чтобы данное письмо можно было отличить от спама.

Пространство Минковского. Начала кинематики

Задача N1 Используя явный вид матрицы Λ^μ_ν преобразования Лоренца прямыми вычислениями показать, что квадрат любого 4–вектора является релятивистским инвариантом.

Задача N2 Показать, что явное выражение для матрицы преобразования Лоренца $\Lambda^\mu_\nu(\vec{v}\,)$ в случае, если система отсчета A' движется относительно системы отсчета A со скоростью $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$, имеет вид:

$$\Lambda \,=\, \begin{pmatrix} \gamma & \dfrac{v^1}{c}\,\gamma & \dfrac{v^2}{c}\,\gamma & \dfrac{v^3}{c}\,\gamma \\ \dfrac{v^1}{c}\,\gamma & 1 \,+\, \dfrac{v^1 * v^1}{|\vec{v}\,|^2}\,(\gamma \,-\, 1) & \dfrac{v^1 * v^2}{|\vec{v}\,|^2}\,(\gamma \,-\, 1) & \dfrac{v^1 * v^3}{|\vec{v}\,|^2}\,(\gamma \,-\, 1) \\ \dfrac{v^2}{c}\,\gamma & \dfrac{v^2 * v^1}{|\vec{v}\,|^2}\,(\gamma \,-\, 1) & 1 \,+\, \dfrac{v^2 * v^2}{|\vec{v}\,|^2}\,(\gamma \,-\, 1) & \dfrac{v^2 * v^3}{|\vec{v}\,|^2}\,(\gamma \,-\, 1) \\ \dfrac{v^3}{c}\,\gamma & \dfrac{v^3 * v^1}{|\vec{v}\,|^2}\,(\gamma \,-\, 1) & \dfrac{v^3 * v^2}{|\vec{v}\,|^2}\,(\gamma \,-\, 1) & 1 \,+\, \dfrac{v^3 * v^3}{|\vec{v}\,|^2}\,(\gamma \,-\, 1) \end{pmatrix},$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 \,-\, {}^{|\vec{v}\,|^2}/_{c^2}}$, c – скорость света в вакууме. Найти Λ^{-1}.

Задача N3 В пространстве Минковского даны два 4-вектора $a^\mu \,=\, ({}^1/_2,\ {}^1/_3,\ -{}^1/_4,\ {}^1/_2)$ и $b^\mu = ({}^1/_6,\ 1,\ {}^1/_2,\ -{}^3/_4)$. Вычислить, чему равны скалярные произведения $a^\mu a_\mu \,\equiv\, a^2$, $b^\mu\, b_\mu \,\equiv\, b^2$ и $a_\mu b_\mu \,\equiv\, (ab)$.

Задача N4 Найти, чему равны свертки и произведения

$$g_{\mu\nu} a^\nu; \quad g^\mu_\mu; \quad g_{\mu\nu} g^{\mu\alpha}; \quad g_{\mu\nu} g^{\alpha\mu}; \quad g_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}; \quad g_{\mu\nu}\, \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}; \quad a_\alpha a_\beta\, \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}.$$

в 4-мерном пространстве Минковского. Компоненты 4-вектора a^μ определены в Задаче N3.

Задача N5 Написать явный вид тензора $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} a_\alpha b_\beta$, где компоненты 4-векторов a^α и b^β определены в Задаче N3.

Задача N6 Объясните, почему все нижеперечисленные свертки

$$g_{\mu\mu}; \quad g_{\mu\nu}\, a^\mu b_\nu; \quad \partial_\mu\, e^{i\, x_\mu p^\mu}; \quad \varepsilon^{\mu\mu\alpha\mu}$$

4-мерном пространстве Минковского записаны неверно.

Задача N7 Получить выражения для сверток $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\zeta\eta\xi\beta}$ и $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\delta}$.

Задача N8 Пусть система отсчета A' движется относительно системы отсчета A со скоростью $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$. Показать, что в этом случае 4–дифференциалы d^4x и d^4p являются релятивистскими инвариантами.

Задача N9 Определить массу M частицы, которая распадается на две частицы с массами m_1 и m_2 и импульсами $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ соответственно.

Указание: при решении задачи использовать технику 4–векторов. Решение, полученное иным способом, приниматься не будет.

Задача N10 Протон с энергией E налетает на неподвижный протон. При каком минимальном значении E возможна реакция $pp \to pp\,(n\pi)$. При решении задачи предположить, что все остальные законы сохранения позволяют возникнуть в данной реакции π–мезонам в количестве n штук. Массы протона M и π–мезона μ считать известными.

Указание: при решении задачи использовать технику и свойства 4–векторов. Решение при помощи найденной в интернете формулы для порога реакции зачтено НЕ будет.

Задача N11* π^0–мезон движется со скоростью v вдоль оси z и распадается на лету на два γ–кванта. Найти угловое распределение получившихся γ–квантов в лабораторной системе отсчета, учитывая, что в системе покоя π^0–мезона это распределение сферически симметрично.

Задача N12 Найти для произвольных независимых 4–векторов A^μ и B^ν значения следующих производных:

$$\frac{\partial\, A^\mu}{\partial A_\nu}; \quad \frac{\partial\, A^\mu}{\partial A^\nu}; \quad \frac{\partial\, A_\mu}{\partial A_\nu}; \quad \frac{\partial\, A_\mu}{\partial A^\nu}; \quad \frac{\partial\, A^\mu}{\partial B_\nu}, \quad \frac{\partial\, (A^\mu\, B^\nu)}{\partial\, (A_\eta\, B_\zeta)}.$$

Сформулировать общее правило вычисления подобных производных.

Задача N13 Для произвольного 4–вектора A^μ найти

$$\frac{\partial\, A^2}{\partial A_\nu},$$

где $A^2 = A_\mu A^\mu$ – квадрат 4-вектора A^μ. Как результат задачи можно обобщить на более высокие степени?

Задача N14 Пусть x^μ и p^ν - два независимых 4-вектора. Найти $\partial^\mu e^{\mp\, i(px)}$ и $\partial^\mu \partial_\mu e^{\mp\, i(px)}$.

Задача N15 Пусть $S_{\mu\nu}$ – симметричный тензор второго ранга, а $A_{\mu\nu}$ – полностью антисимметричный тензор второго ранга. Чему равна свертка $S_{\mu\nu}\, A^{\mu\nu}$? Каким образом можно обобщить утверждение задачи?

Задача N16 В системе $\hbar = c = 1$ проверить следующие пересчетные коэффициенты:

$$1\,\text{\textit{ГэВ}} \approx 1,78 \times 10^{-24}\,\text{\textit{гр}} \approx 1,6 \times 10^{-10}\,\text{\textit{Дж}},$$

$$1\,\text{\textit{ГэВ}}^{-1} \approx 6,58 \times 10^{-25}\,\text{\textit{сек}} \approx 1,97 \times 10^{-14}\,\text{\textit{см}}.$$

Основы лагранжева формализма в КТП

Задача N17 Получить уравнения Лагранжа для лагранжиана вида $\mathcal{L}\left(\phi_i(x),\, \partial^\nu \partial_\nu \phi_i(x)\right)$ при условии, что на трехмерной поверхности Σ_3 вариации $\delta\phi_i(x) = 0$ и $\delta\, \partial^\nu \phi_i(x) = 0$.

Задача N18 Показать, что слагаемое вида $\partial_\mu \left(A_\nu(x)\, \partial^\nu\, A^\mu(x)\right)$ не вносит вклад в уравнения Лагранжа для свободного электромагнитного поля.

Указание: не забывать про калибровку Лоренца.

Задача N19* Пусть $\phi(x)$ – действительная функция нейтрального свободного скалярного поля массы m, которая подчиняется уравнению Клейна-Гордона-Фока:

$$\left(\partial^\mu\, \partial_\mu \,+\, m^2\right) \phi(x) \,=\, 0.$$

Написать лагранжиан $\mathcal{L}\left(\phi(x),\, \partial^\mu \phi(x)\right)$ для такого поля.

Задача N20 Пусть тензора $A^{\mu\nu}$ и $B^{\mu\nu}$ задаются формулами

$$A^{\mu\nu} \,=\, F^{\mu\nu} \,+\, \frac{i}{2}\, \tilde{F}^{\mu\nu}, \qquad\qquad B^{\mu\nu} \,=\, F^{\mu\nu} \,-\, \frac{i}{2}\, \tilde{F}^{\mu\nu},$$

где $\tilde{F}^{\mu\nu} \,=\, \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ так называемый дуальный тензор. Найти свертку $A^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$. Как можно объяснить полученный результат с физической точки зрения?

Электромагнитное поле

Задача N21 Зная явный вид тензора напряженности электромагнитного поля $F^{\mu\nu}(x)$ получить явный вид $F_{\mu\nu}(x)$.

Задача N22 Получить первую пару уравнений Максвелла из тождества Гамильтона–Якоби:

$$\partial^\lambda\, F^{\mu\nu}(x) \,+\, \partial^\nu\, F^{\lambda\mu}(x) \,+\, \partial^\mu\, F^{\nu\lambda}(x) \,=\, 0.$$

Задача N23 Найти явные выражения для напряженностей электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей через коэффициенты $c_{\vec{k}\,\lambda}$ и $c^\dagger_{\vec{k}\,\lambda}$.

Задача N24 В лекциях энергия и импульс свободного электромагнитного поля были найдены как компоненты тензора энергии–импульса. Однако возможен иной путь. Из общего курса физики известно, что энергия в единице объема для свободного электромагнитного поля имеет вид $(\vec{E}^2 + \vec{H}^2)/2$, а импульс поля в единице объема (вектор Пойнтинга) равен

$\vec{E}\times\vec{H}$. Используя результат Задачи N23, получить выражения для энергии и импульса поля в терминах коэффициентов $c_{\vec{k}\,\lambda}$ и $c^{\dagger}_{\vec{k}\,\lambda}$.

Задача N25* Явными вычислениями показать, что:

$$D_{\pm}^{\mu\nu} \,=\, g_{\mu\nu}\left(\frac{i}{(2\pi)^2x^2}\,\mp\,\frac{1}{4\pi}\,\delta(x^2)sign(x^0).\right)$$

Задача N26 Доказать, что пропагатор $D_c^{\mu\nu}$ электромагнитного поля является функцией Грина уравнения Даламберта, то есть для функции $D_c^{\mu\nu}$ выполняется равенство

$$\Box\, D_c^{\mu\nu}(x) \,=\, g^{\mu\nu}\delta^4(x),$$

где $\Box \,=\, -\,\partial^\mu\partial_\mu$ – даламбертиан.

Уравнения Паули, Клейна-Гордона-Фока и Дирака

Задача N27 Привести примеры истинно нейтральных адронов, отличных от π^0–мезона. Встречаются ли среди них барионы? А адроны, состоящие из четырех и более кварков и антикварков?

Задача N28 Показать, что для следов от матриц Паули σ^i выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sp}\,\left(\sigma^i\sigma^j\sigma^k\right) \,=\, 2\,i\,\varepsilon^{ijk},\\
&\mathrm{Sp}\,\left(\sigma^i\sigma^j\sigma^k\sigma^l\right) \,=\, 2\,\left(\delta^{ij}\delta^{kl} \,-\, \delta^{ik}\delta^{jl} \,+\, \delta^{il}\delta^{jk}\right).
\end{aligned}$$

Пользуясь полученным выше результатом и правилом разложения произведения нескольких матриц Паули по базису доказать, что

$$\sigma^i\sigma^j\sigma^k \,=\, i\varepsilon^{ijk}\hat{1} \,+\, \delta^{ij}\sigma^k \,-\, \delta^{ik}\sigma^j \,+\, \delta^{jk}\sigma^i,$$

где ε^{ijk}–абсолютно антисимметричный псевдотензор третьего ранга для которого $\varepsilon^{123}=+1$, δ^{ij}–символ Кронеккера, латинские индексы $\{i,j,k,l\}=\{1,2,3\}$.

Задача N29* Предполагая, что движение электрона в атоме водорода можно описать при помощи уравнения Клейна–Гордона–Фока с кулоновским взаимодействием, получить выражение для тонкой структуры спектра. Совпадает ли полученная формула с экспериментальными данными?

Задача N30 Найти унитарные матрицы переходов от стандартного к спинорному представлению и от спирального к спинорному представлению.

Задача N31* Предполагая, что движение электрона в атоме водорода можно описать при помощи уравнения Дирака с кулоновским взаимодействием, получить выражение для тонкой структуры спектра. В чем отличие полученной формулы от результата Задачи N29*?

Задача N32* Найти явный вид $u(\vec{p}, \lambda)$ в спиральном и спинорном представлениях.

Алгебра матриц Дирака

Задача N33 Показать, что

$$\gamma^5 = \frac{i}{4!}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta,$$
$$\gamma_\mu\gamma^5 = \frac{i}{3!}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta,$$

где $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ – полностью антисимметричный псевдотензор четвертого ранга, удовлетворяющий соглашению $\varepsilon^{0123} = -1$.

Задача N34 Проверить, что

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5 = g^{\mu\nu}\gamma^5 - \frac{i}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta,$$
$$\sigma^{\mu\nu}\gamma^5 = -\frac{i}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta},$$
$$\sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\gamma_5,$$
$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\zeta = \left(g^{\mu\nu}g^{\alpha\zeta} - g^{\mu\zeta}g^{\nu\alpha} + g^{\mu\alpha}g^{\nu\zeta}\right)\gamma_\alpha - i\varepsilon^{\mu\nu\zeta\alpha}\gamma_\alpha\gamma^5,$$

где $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ – полностью антисимметричный псевдотензор четвертого ранга, удовлетворяющий условию $\varepsilon^{0123} = -1$, а $\sigma^{\mu\nu} = i/2\,[\gamma^\mu,\, \gamma^\nu]$.

Задача N35 Показать, что

$$\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = 12I,$$
$$\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma_\mu = -2\,\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha,$$
$$\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma_\mu\gamma^\beta\gamma_\nu = 4\,\gamma^\beta\gamma^\alpha,$$

где $\sigma^{\mu\nu} = i/2\,[\gamma^\mu,\, \gamma^\nu]$ и I – единичная матрица 4×4.

Задача N36 Доказать, что

$$(I - \gamma^5)\,(I + \gamma^5) \;=\; 0,$$
$$(I \pm \gamma^5)^2 \;=\; 2\,(I \pm \gamma^5),$$
$$(I \pm \gamma^5)\gamma^\mu \;=\; \gamma^\mu\,(I \mp \gamma^5).$$

С помощью этих соотношений *не длиннее чем в одну строчку* (!) показать, что

$$O^\mu\gamma^\nu O_\mu \;=\; -4\,O^\nu,$$
$$O^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta O_\mu \;=\; 0,$$
$$O^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma O_\mu \;=\; -\,4\,\gamma^\gamma\gamma^\beta O^\alpha,$$

где $O^\mu = \gamma^\mu(I - \gamma^5)$.

Задача N37* Основываясь на результатах предыдущей задачи покажите, что операторы $P_\pm \;=\; \frac{1}{2}\,(I \pm \gamma^5)$ можно рассматривать как проекционные операторы. На какие состояния проецируют данные операторы?

Задача N38* Доказать, что операция взятия следа двух матриц удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения. Самостоятельно сформулируйте, каким свойствам при этом должны удовлетворять указанные матрицы.

Задача N39 Пусть a^μ, b^ν, c^α и d^β – произвольные 4-вектора. Введем следующее обозначение $\hat{a} = \gamma^\mu a_\mu$, которое широко используется для сокращения записи. Проверить, что

$$\mathrm{Sp}\,\left(\hat{a}\,\hat{b}\right) = 4\,(ab),$$
$$\mathrm{Sp}\,\left(\hat{a}\,\hat{b}\,\hat{c}\,\hat{d}\right) = 4\Big((ab)(cd)\;-\;(ac)(bd)\;+\;(ad)(bc)\Big),$$

где $(ab) = a^\mu b_\mu$ – скалярное произведение двух 4-векторов a^μ и b^ν.

Задача N40 Чему будет равен $\mathrm{Sp}\,\left(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\right)$, если вместо определения $\varepsilon^{0123} \;=\; -1$, которое было использовано в лекциях, принять другое определение $\varepsilon^{0123} = +1$?

Задача N41 В практических вычислениях часто используется следующее утверждение. Пусть A и B – две матрицы, которые состоят из произведений нечетного числа γ–матриц γ^0, γ^1, γ^2 и γ^3, стоящих в произвольном порядке, то есть

$$A = \gamma^{\mu_1}\;\ldots\;\gamma^{\mu_{2n+1}} \quad \text{и} \quad B = \gamma^{\nu_1}\;\ldots\;\gamma^{\nu_{2m+1}}.$$

Тогда

$$\mathrm{Sp}\,\left(A\gamma^\mu\right)\,\mathrm{Sp}\,\left(B\,\gamma_\mu\right) \;=\; 2\,\mathrm{Sp}\,\left(A\,B\right)\;+\;2\,\mathrm{Sp}\,\left(A\,B_{inv}\right),$$

где $B_{inv} = \gamma^{\nu_{2m+1}} \dots \gamma^{\nu_1}$.

Указание: вспомните о разложении произведения любого числа γ–матриц по базису.

Задача N42* Пусть a^μ – некоторый 4-вектор, подчиняющийся условию $a^\mu a_\mu \equiv a^2 > 0$. Проверить, что

$$e^{i\,\hat{a}} \,=\, I\,\cos\sqrt{a^2} \,+\, \frac{i\,\hat{a}}{\sqrt{a^2}}\,\sin\sqrt{a^2},$$

$$e^{\gamma^5\hat{a}} \,=\, I\,\cos\sqrt{a^2} \,+\, \frac{\gamma^5\,\hat{a}}{\sqrt{a^2}}\,\sin\sqrt{a^2}.$$

Задача N43 В квантовой теории поля при вычислении петлевых диаграмм часто удобно перейти из 4-мерного пространства Минковского в D-мерное пространство Минковского, где нулевая компонента по-прежнему отвечает времени, а остальные $D-1$ компонент являются пространственными. В D-мерном пространстве γ- матрицы, единичная матрица I и метрический тензор $g^{\mu\nu}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\{\gamma^\mu,\, \gamma^\nu\} \,=\, 2\,g^{\mu\nu} I, \quad g^\mu_\mu = D, \quad \mathrm{Sp}\, I \,=4.$$

Покажите, что при таком определении все следы γ-матриц, в которые не входит матрица γ^5, остаются такими же, как и в 4-мерии.

Задача N44* Сформулируйте, какие трудности возникают в D-мерии (см. предыдущую задачу) при определении матрицы γ^5? Как эти трудности можно попытаться обойти?

Задача N45 Покажите, что в D-мерии

$$\gamma^\mu\gamma_\mu \,=\, D\,I,$$

$$\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma_\mu \,=\, -2\,\gamma^\alpha \,-\, (D-4)\,\gamma^\alpha,$$

$$\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma_\mu \,=\, 4\,g^{\alpha\beta} I \,+\, (D-4)\,\gamma^\alpha\gamma^\beta,$$

$$\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma_\mu \,=\, -\,2\,\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha \,-\, (D-4)\,\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma.$$

Сравните данное вычисление с результатами в 4-мерии и сформулируйте правило перехода от результата вычисления сверток в 4-х измерениях к результату вычисления сверток в D измерениях.

Свойства уравнения Дирака

Задача N46 Доказать, что в стандартном представлении оператор зарядового сопряжения C обладает следующими свойствами:

$$C^\dagger = C^T = C^{-1} = -C, \qquad C^* = C.$$

Задача N47* Найти явный вид оператора зарядового сопряжения в спиральном и спинорном представлениях.

Задача N48* Найти явный вид $v(\vec{p}, \lambda)$ в спиральном и спинорном представлениях.

Задача N49 Доказать, что

$$\mathrm{Sp}\,\left(\gamma^{\mu_1}\,\gamma^{\mu_2}\,\ldots\,\gamma^{\mu_{n-1}}\,\gamma^{\mu_n}\right) = \mathrm{Sp}\,\left(\gamma^{\mu_n}\,\gamma^{\mu_{n-1}}\,\ldots\,\gamma^{\mu_2}\,\gamma^{\mu_1}\right),$$

где каждая матрица γ^{μ_i} это одна из матриц γ^0, γ^1, γ^2 или γ^3.

Задача важная, но сложная. Поэтому дадим некоторые указания. Случай нечетного n абсолютно тривиален. Для случая четного n необходимо использовать три факта, два из которых доказывались на лекциях ($C\,\gamma^{\mu\,T} C^\dagger = -\gamma^\mu$ и $C\,C^\dagger = I$), а один – в курсе линейной алгебры ($\mathrm{Sp} A^T = \mathrm{Sp} A$).

Задача N50 Проверьте, что $C\,\gamma^{5\,T} C^\dagger = +\gamma^5$.

Задача N51 Используя результаты двух предыдущих задач показать, что

$$\mathrm{Sp}\,\left(\gamma^5 \gamma^\mu\,\gamma^\nu\right) = 0.$$

Внимание! В качестве решения НЕ принимается доказательство, которое было проведено на лекции без использования свойств оператора зарядового сопряжения!

Задача N52 Показать, что для свободной частицы релятивистский оператор трехмерного спина $\vec{O}$ коммутирует с гамильтонианом H, то есть: $\left[\vec{O},\, H\right] = 0$.

Задача N53 Изменится ли оператор $\vec{O}$, если в представлении Фолди–Вутхайзена в качестве спинового оператора выбрать не оператор $\vec{S} = -\frac{1}{2}\,\gamma^5 \vec{\gamma}$ (как в лекциях), а оператор $\vec{S} = -\frac{1}{2}\,\gamma^0 \gamma^5 \vec{\gamma}$? Каков явный вид обоих операторов в стандартном представлении?

Задача N54 В стандартном представлении для фермионов и антифермионов со спином $s = 1/2$ найти собственные векторы проекционного оператора $\left(\vec{n}\,\vec{O}\right)$ на произвольное направление, задаваемое единичным вектором $\vec{n}$.

Задача N55 Найти матрицы плотности свободных фермионов и антифермионов, то есть проверить, что

$$\sum_{\lambda=\pm 1} u(\vec{p},\lambda)\,\bar{u}(\vec{p},\lambda) \,=\, \gamma^\mu p_\mu \,+\, I\,m,$$
$$\sum_{\lambda=\pm 1} v(\vec{p},\lambda)\,\bar{v}(\vec{p},\lambda) \,=\, \gamma^\mu p_\mu \,-\, I\,m.$$

Задача N56 Показать, что в отсутствии внешнего поля из уравнения

$$\Big(i\gamma^\mu\partial_\mu \,-\, I\,m\Big)\psi^c(x) \,=\, 0$$

следует уравнение

$$i\,\partial_\mu\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu \,+\, \bar{\psi}(x)\,m \,=\, 0.$$

Квантование дираковских полей

Задача N57 Показать, что тензор энергии–импульса свободного дираковского поля имеет вид

$$T^\mu_\nu(x) \,=\, \bar{\psi}(x)\,i\gamma^\mu\partial_\nu\,\psi(x).$$

Задача N58 Вычислить импульс и заряд свободного дираковского поля в терминах произведений $a^\dagger_{\vec{p},\lambda}a_{\vec{p},\lambda}$ и $b_{\vec{p},\lambda}b^\dagger_{\vec{p},\lambda}$.

Задача N59 Получить интегральное представление для функции

$$S_-(x-x') \,=\, -\,\langle 0\,\big|\bar{\psi}^{(+)}(x')\psi^{(-)}(x)\big|\,0\rangle$$

в виде:

$$S_-(x) \,=\, -\,i\,\left(i\gamma^\mu\partial_\mu \,+\, Im\right)\int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{ipx}}{2\varepsilon_p}.$$

Задача N60 Показать, что

$$\frac{e^{-i\varepsilon_p|t|}}{2\varepsilon_p} \,=\, i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\,p^0}{2\pi}\,\frac{e^{-ip^0t}}{p^2\,-\,m^2\,+\,i\varepsilon}.$$

Указание: вспомнить, что $\varepsilon_p^2 \,=\, |\vec{p}|^2 \,+\, m^2$ и провести вычисления интеграла при помощи теории вычетов аналогично тому, как это было сделано для электромагнитного поля.

Задача N61* Показать, что локальные калибровочные преобразования в КЭД допускают существование паулевского взаимодействия вида

$$\mathcal{L}^{int}_{Pauli}(x) \,=\, -\,\mu\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)F_{\mu\nu}(x)$$

наравне со взаимодействием $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)$.

Задача N62 Почему не имеет никакого физического смысла калибровочное преобразование электромагнитного поля вида $\tilde{A}^\mu(x) = A^\mu(x)\, e^{i\alpha(x)}$?

Матрица рассеяния

Задача N63 Показать, что если $\hat{A}^{(S)}$ и $\hat{A}^{(H)}$ – операторы одной и той же наблюдаемой в представлении Шредингера (S) и представлении Гейзенберга (H) соответственно, то собственные значения обоих операторов совпадают. Как этот факт можно объяснить с физической, а не с математической точки зрения? Обобщите утверждение на произвольное представление (в том числе и на представление взаимодействия).

Задача N64 Доказать, что коммутационные соотношения в представлениях Шредингера и Гейзенберга имеют один и тот же вид. Как обобщить данное утверждение на любое другое представление (в том числе и на представление взаимодействия)?

Задача N65* Какое преобразование осуществляет переход от представления Гейзенберга (H) к представлению взаимодействия (I)? Можно ли исходя из вида такого преобразования заключить, что $\hat{V}^{(I)} = \hat{V}^{(H)}$?

Задача N66 Доказать, что распад $\rho^0 \to \pi^0\pi^0$ абсолютно запрещен. Воспользоваться тем, что π^0–мезоны являются бозонами. В качестве необязательного дополнительного вопроса поразмыслить о причинах запрета распада $\rho^0 \to \gamma\gamma$.

Задача N67 Получить уравнение эволюции для оператора $\hat{A}^{(I)}$ некоторой наблюдаемой A в представлении взаимодействия.

Задача N68 Из первых принципов получить выражения для амплитуды $\left\langle f \left| S^{(1)} \right| i \right\rangle$ в случае нефизических процессов $\gamma e^+ \to e^+$ и $e^+e^- \to \gamma$. Какой множитель в амплитуде отвечает за невозможность данных процессов в природе?

Указание: используйте тот факт, что в фермионный ток определен при помощи нормального произведения операторов.

Задача N69* Из первых принципов получить выражения для амплитуды $\left\langle f \left| S^{(2)} \right| i \right\rangle$ в случае $e^+e^- \to \gamma\gamma$ и $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$. Проверить результат, непосредственно применив правила Фейнмана.

Задача N70 Написать правила Фейнмана для вычисления древесных диаграмм в теории с гамильтонианом взаимодействия $\mathcal{H}^{int}(x) = g\,\varphi(x)\,\left(\bar{f}(x)\gamma_5 f(x)\right)$, где $f(x)$ – поле фермионов,

$\varphi(x)$ – поле псевдоскалярной частицы, g – константа связи.

Задача N71* Написать правила Фейнмана для вычисления древесных диаграмм в теории с гамильтонианом взаимодействия $\mathcal{H}^{int}(x) = g\left(\partial^\mu\varphi(x)\right)\left(\bar{f}(x)\gamma_\mu\gamma_5 f(x)\right)$, где $f(x)$ – поле фермионов, $\varphi(x)$ – поле псевдоскалярной частицы, g – константа связи.

Релятивистская кинематика переходов $2 \to 2$

Задача N72 Пусть имеется два 4-вектора, квадраты которых $p_1^2 = m_1^2$ и $p_2^2 = m_2^2$. Показать, что выполняется следующее неравенство: $(p_1\, p_2) \geq m_1 m_2$.

Задача N73 Пользуясь результатами предыдущей задачи, найти верхние и нижние границы для мандельстамовских переменных реакции $2 \to 2$ в различных каналах. Считать, что все четыре частицы имеют *разные* массы.

Задача N74* Определить мандельстамовские переменные для распада $1 \to 3$ и найти для них верхние и нижние границы, если все четыре частицы в распаде имеют *разные* массы. Чтобы задача имела смысл, предположите, что масса распадающейся частицы M больше суммы масс m_1, m_2 и m_3 продуктов распада.

Задача N75 Частица массы M распадается на две частицы массой m_1 и m_2. В системе покоя распадающейся частицы вычислить двухчастичный фазовый объем

$$d\Phi^{(2)} = (2\pi)^4\,\delta(P - p_1 - p_2)\,\frac{d\vec{p}_1}{(2\pi)^3\,2\,\varepsilon_1}\,\frac{d\vec{p}_2}{(2\pi)^3\,2\,\varepsilon_2},$$

где P^μ – 4-импульс распадающейся частицы, $p_1^\mu = (\varepsilon_1, \vec{p}_1)$ и $p_2^\mu = (\varepsilon_2, \vec{p}_2)$ – 4-импульсы продуктов распада. Отдельно рассмотреть случай, когда $m_1 = m_2 = 0$.

Задача N76* Частица массы M распадается на три безмассовые частицы. Записать трехчастичный фазовый объем данного процесса. Произвести полное интегрирование.

Вычисления процессов в КЭД

Задача N77 Используя гамильтониан **Задачи N70** и полагая известной константу g, найти выражение для парциальной ширины распада $\pi^0 \to e^+e^-$.

Задача N78* Используя гамильтониан **Задачи N71*** и полагая известной константу g, вычислить парциальную ширину распада $\pi^0 \to e^+e^-$.

Задача N79 В «скалярной КЭД» записать $\pi^+\pi^+\gamma$ – вершину.

Задача N80* В рамках «скалярной КЭД» вычислить дифференциальное сечение процесса $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$.

Задача N81* Показать, что в нерелятивистском пределе скалярного эффекта Комптона $\gamma\pi \to \gamma\pi$ полное сечение процесса совпадает с формулой Томсона. Из каких физических соображений можно получить данный результат без всяких вычислений?

Задача N82* Для пиона электромагнитный формфактор в координатном представлении хорошо аппроксимируется функцией вида

$$F_\pi(r^2) \,=\, \alpha\, e^{-\beta\, r},$$

где α и β – некоторые действительные числа. Учтя, что $\langle r_\pi^2 \rangle \,=\, (0,44 \pm 0,02)$ фм^2, найти $F_\pi(q^2)$.

Задача N83 Показать, что амплитуда излучения мягкого фотона факторизуется, если в начальном и конечном состоянии находятся не фермионы (как в лекции), а бесструктурные точечные пионы «скалярной КЭД».

Задача N84* Записать глобальные и локальные калибровочные преобразования в «скалярной КЭД». Показать, что из глобальных калибровочных преобразования следуют законы сохранения электромагнитного тока и электрического заряда.

Задача N85 Найти сечение рассеяния электрона на покоящимся ядре, если в качестве потенциала взаимодействия использовать не кулоновский потенциал (как это было в лекциях), а потенциал Юкавы:

$$V(\vec{r}) \,=\, -\,\frac{e^2}{4\pi}\,\frac{1}{r}\,e^{-r/a},$$

где a – некоторая постоянная, имеющая размерность длины, $r = |\vec{r}\,|$.

Литература к лекциям.

- Основная литература.

1. С.М.Биленький, ”Введение в диаграммы Фейнмана и физику электрослабого взаимодействия”, М. ”Энергоатомиздат” 1990 и последующие издания.

2. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, А.П.Питаевский, ”Квантовая электродинамика”, М. "Наука" 1989 и последующие издания.

3. К.Ициксон, Ж.Б.Зюбер, ”Квантовая теория поля” в двух томах, М. ”Мир” 1984.

4. С. Швебер, ”Введение в релятивистскую квантовую теорию поля”, М. ”Издательство иностранной литературы” 1963.

- Дополнительная основная литература.

1. Р.Фейнман, ”Квантовая электродинамика”, М. ”Наука” 1964.

2. А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий, ”Квантовая электродинамика”, М. ”Наука” 1984.

3. А.А.Соколов, И.М.Тернов, В.Ч.Жуковский, А.В.Борисов, ”Квантовая электродинамика”, М. ”Из-во МГУ” 1983.

4. А.А.Соколов, И.М.Тернов, ”Релятивистский электрон”, М. ”Наука” 1983.

5. A.Grozin, ”Lectures on QED and QCD: Practical Calculation and Renormalization of One- and Multi-Loop Feynman Diagrams ”, ”World Scientific” 2007.

- Дополнительная литература.

1. М.Пескин, Д.Шредер, ”Введение в квантовую теорию поля”, М. ”РХД” 2001.

2. М.Б.Волошин, К.А.Тер–Мартиросян, ”Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц”, М. ”Энергоатомиздат” 1984.

3. В.В.Батыгин, И.Н.Топрыгин, ”Сборник задач по электродинамике”,
М., ”РХД” 2002.

4. Ф.Хелзен, А.Мартин, ”Кварки и лептоны”, М. ”УРСС” 2000.

5. В.В.Сыщенко, ”Квантовая электродинамика для начинающих”, НИЦ ”РХД” 2013.

6. W.Greiner, D.A. Bromley, ”Relativistic Quantum Mechanics”, ”Springer” 2000.

7. W.Greiner, J.Reinhardt, ”Field Quantization”, ”Springer” 2000.

8. W.Greiner, J.Reinhardt, ”Quantum Electrodynamics”, ”Springer” 2008.

9. W.Greiner, B.Muller, J.Rafelski, ”Quantum Electrodynamics of Strong Fields”, ”Springer-Verlag” 1985.

- Литература для углубленного изучения.

1. Э.Зи, "Квантовая теория поля в двух словах", М. "РХД" 2009.

2. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков, "Квантовые поля", М. "Наука" 1993.

3. В.И. Ритус, "Квантовая электродинамика явлений в интенсивном поле", "Труды ФИАН", т. 111, 1979.

4. В.А.Рубаков, "Классические калибровочные поля", М. "УРСС" 1999.

5. Л.Б.Окунь, "Лептоны и кварки", М. "Наука" 1990.

6. К.В.Степаньянц, "Классическая теория поля", М. "ФИЗМАТЛИТ" 2009.

7. А.А.Соколов, И.М.Тернов, В.Ч.Жуковский, А.В.Борисов, "Калибровочные поля", М. "Из-во МГУ" 1986.

8. Q.Ho-Kim, P.X.Yem, "Elementary Particles and Their Interactions", "Springer" 1998.

9. I.P.Grant, "Relativistic Quantum Theory of Atoms and Molecules. Theory and Computation" "Springer", 2007.

10. Сборник статей "Quantum Electrodynamics" под редакцией T.Kinoshita, "World Scientific", 1990.

11. E.Boos, "Quantum Field Theory and the Electroweak Standard Model", MSU, 2018.

- Видеолекции.

1. Н.В.Никитин (МГУ), "Квантовая электродинамика":
`https://teach-in.ru/course/quantum-electrodynamics`

2. В.С.Фадин (НГУ), "Лекции по квантовой электродинамике":
`http://www.inp.nsk.su/students/theor/videolectures/videolectures.html#HEPsem`

3. А.В.Резниченко (НГУ), "Семинары по квантовой электродинамике":
`https://www.youtube.com/playlist?list=PLPFUq1zn8x35Clwz11pSQTiJlPH5wjqQ1`

4. К. В. Парфёнов (МГУ), "Введение в физику элементарных частиц", Часть I:
`https://teach-in.ru/course/ELEMPARTPHYS1`

5. К. В. Парфёнов (МГУ), "Введение в физику элементарных частиц", Часть II:
`https://teach-in.ru/course/particle-physics-part2`

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА