

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЧАСТЬ I

БУТУЗОВ  
ВАЛЕНТИН ФЕДОРОВИЧ

—  
ФИЗФАК МГУ



ФИЗИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	6
<b>Глава 1. Вещественные числа</b> . . . . .	7
§ 1. Рациональные числа . . . . .	7
§ 2. Иррациональные числа . . . . .	8
§ 3. Сравнение вещественных чисел . . . . .	9
§ 4. Точные грани ограниченного числового множества . . . . .	10
§ 5. Арифметические операции над вещественными числами . . . . .	14
§ 6. Некоторые числовые неравенства . . . . .	16
§ 7. Геометрическое изображение вещественных чисел . . . . .	16
§ 8. Некоторые числовые множества . . . . .	17
<b>Глава 2. Предел функции</b> . . . . .	18
§ 1. Понятие функции . . . . .	18
§ 2. Определение предела функции . . . . .	19
§ 3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции . . . . .	25
§ 4. Свойства пределов функций . . . . .	31
§ 5. Теорема о пределе монотонной функции . . . . .	34
<b>Глава 3. Непрерывность функции</b> . . . . .	37
§ 1. Определение непрерывности. Точки разрыва функции . . . . .	37
§ 2. Свойства непрерывных функций . . . . .	41
§ 3. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции . . . . .	43
§ 4. Непрерывность элементарных функций . . . . .	44
§ 5. Замечательные пределы . . . . .	48

<b>Глава 4. Производные и дифференциалы</b> . . . . .	53
§ 1. Определение производной. Производные некоторых основных элементарных функций . . . . .	53
§ 2. Физический и геометрический смысл производной . . . . .	56
§ 3. Дифференцируемость и дифференциал функции . . . . .	59
§ 4. Правила дифференцирования . . . . .	63
§ 5. Производная обратной функции . . . . .	64
§ 6. Производная сложной функции . . . . .	66
§ 7. Инвариантность формы первого дифференциала . . . . .	69
§ 8. Производные высших порядков . . . . .	71
§ 9. Дифференциалы высших порядков . . . . .	73
§ 10. Производные вектор-функции . . . . .	75
<b>Глава 5. Интегралы</b> . . . . .	81
§ 1. Первообразная и неопределенный интеграл . . . . .	81
§ 2. Основные свойства неопределенных интегралов . . . . .	84
§ 3. Два метода интегрирования . . . . .	85
§ 4. Интегрирование рациональных функций . . . . .	88
§ 5. Понятие определенного интеграла . . . . .	94
§ 6. Суммы Дарбу . . . . .	97
§ 7. Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции . . . . .	101
§ 8. Классы интегрируемых функций . . . . .	103
§ 9. Свойства определенного интеграла . . . . .	107
§ 10. Формулы среднего значения . . . . .	111
§ 11. Формула Ньютона–Лейбница . . . . .	112
§ 12. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле . . . . .	115
§ 13. Геометрические приложения определенного интеграла . . . . .	118
§ 14. Физические приложения определенного интеграла . . . . .	122
§ 15. Методы приближенного вычисления определенных интегралов . . . . .	124
<b>Глава 6. Числовые последовательности</b> . . . . .	134
§ 1. Теорема о стягивающейся системе сегментов . . . . .	134
§ 2. Предельные точки последовательности . . . . .	135

---

§ 3. Критерий Коши сходимости последовательности . . . . .	140
§ 4. Второе определение предела функции . . . . .	142
§ 5. Критерий Коши существования предела функции . . . . .	145
<b>Глава 7. Основные теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях . . . . .</b>	<b>148</b>
§ 1. Теоремы об ограниченности непрерывных функций . . . . .	148
§ 2. Равномерная непрерывность функции . . . . .	151
§ 3. Возрастание и убывание функции в точке. Локальный экстремум . . . . .	152
§ 4. Теоремы Ролля и Лагранжа . . . . .	153
§ 5. Формула Коши. Правило Лопиталя . . . . .	158
§ 6. Формула Тейлора . . . . .	163
§ 7. Формула Маклорена и ее применения . . . . .	167
<b>Глава 8. Исследование поведения функций и построение графиков . . . . .</b>	<b>177</b>
§ 1. Точки локального экстремума и промежутки монотонности функции . . . . .	177
§ 2. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции . . . . .	180
§ 3. Асимптоты графика функции . . . . .	184
§ 4. Построение графиков функций . . . . .	187
§ 5. Приближенное вычисление корней уравнений . . . . .	189
Список литературы . . . . .	198

## Предисловие

Учебное пособие написано на основе многолетнего опыта чтения курса лекций по математическому анализу. В нем содержится первая часть курса, которая излагается на лекциях в I семестре. В этой части рассматриваются основные вопросы математического анализа функций одной переменной. Теоретический материал сопровождается иллюстрирующими примерами, особое внимание уделяется приложениям математических понятий и утверждений в физике. По ходу изложения читателю предлагаются небольшие задания.

Пособие полностью соответствует действующей программе курса математического анализа, представленный в нем материал минимизирован таким образом, что его можно реально изложить на лекциях в течение семестра при трех часах лекций в неделю. Это отличает пособие от других известных учебников по математическому анализу для физических специальностей, в которых наряду с основным материалом содержатся дополнительные разделы.

Пособие рассчитано на студентов 1 курса физического факультета и преподавателей, ведущих занятия по математическому анализу. Оно может быть использовано и на других факультетах МГУ, а также в других вузах.

Предлагаемый курс лекций складывался на протяжении ряда лет, при его формировании я испытывал благотворное влияние известных учебников для студентов физических специальностей: «Основы математического анализа» В.А. Ильина и Э.Г. Позняка, «Математический анализ» Л.Д. Кудрявцева, «Курс математического анализа» С.М. Никольского. Первый из названных учебников долгие годы является основным учебником по математическому анализу на физическом факультете МГУ. Ссылки на него в тексте лекций даются под номером [1].

При подготовке пособия к печати большую помощь, связанную с компьютерным набором текста, оказали мне коллеги по кафедре математики физического факультета МГУ, особенно Н.Е. Шапкина, Д.А. Грачев, И.Е. Могилевский. Всем им я признателен и благодарен.

*В.Ф. Бутузов*

## ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

## § 1. Рациональные числа

Простейшими числами являются целые положительные числа  $1, 2, \dots$ , используемые при счете. Они называются *натуральными* числами, и люди знали их так много тысячелетий назад, что знаменитый математик Леопольд Кронекер сказал: «Бог создал натуральные числа; все остальное — дело рук человека». Потребности практики привели к появлению простых дробей, т.е. чисел вида  $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}$ , и т.д. Значительно позднее индусы изобрели важное число 0, а в начале нашей эры итальянцы открыли отрицательные числа. Мы будем исходить из того, что нам известны *рациональные* числа и действия над ними.

*Рациональное число* — это число, которое можно представить в виде отношения

$$\frac{m}{n},$$

где  $m$  — целое, а  $n$  — натуральное число.

Для рациональных чисел существуют три правила.

1) Правило сравнения: рациональные числа  $\frac{m_1}{n_1}$  и  $\frac{m_2}{n_2}$ , связаны тем же знаком ( $>$ ,  $=$  или  $<$ ), что и целые числа  $m_1n_2$  и  $m_2n_1$ .

Свойство множества рациональных чисел, состоящее в том, что любые два рациональных числа связаны между собой знаком  $\geq$ , называется *упорядоченностью* этого множества.

2) Правило сложения:

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1n_2 + m_2n_1}{n_1n_2}.$$

3) Правило умножения:

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1m_2}{n_1n_2}.$$

Эти три правила обладают рядом свойств, например, правило сравнения обладает свойством транзитивности знака  $>$  (если  $a >$

$> b$  и  $b > c$ , то  $a > c$ ) и знака  $=$  (если  $a = b$  и  $b = c$ , то  $a = c$ ); правило сложения обладает перестановочным ( $a + b = b + a$ ), сочетательным ( $(a + b) + c = a + (b + c)$ ) и рядом других свойств; правило умножения также обладает перестановочным и сочетательными свойствами.

Рациональных чисел недостаточно для измерения различных величин, в частности, длин любых отрезков. Так, длина диагонали квадрата со стороной 1 не является рациональным числом. Возникает потребность расширить множество рациональных чисел и дополнить его так, чтобы иметь возможность измерять длины любых отрезков.

Отметим, что любое рациональное число с помощью процесса деления можно представить в виде *бесконечной десятичной периодической* дроби. Например,

$$\frac{1}{3} = 0,3333\dots = 0,(3); \quad \frac{1}{6} = 0,16666\dots = 0,1(6);$$

$$\frac{1}{2} = 0,500\dots 0 = 0,5(0).$$

Для отличных от нуля рациональных чисел, у которых десятичная дробь имеет период, состоящий из одной цифры 0, существует иное представление в виде бесконечной десятичной дроби — с цифрой 9 в периоде, например,

$$\frac{1}{2} = 0,5(0) = 0,499\dots 9\dots = 0,4(9).$$

Как правило, для таких рациональных чисел используется способ представления в виде бесконечной десятичной дроби, у которой, начиная с некоторого разряда после запятой, все цифры равны нулю. Но иногда используется представление с цифрой 9 в периоде (см. §4).

## § 2. Иррациональные числа

Кроме периодических существуют и *непериодические* десятичные дроби, например,

$$0,123456789101112\dots 100101102\dots,$$

$$1,414213\dots \quad (\text{число } \sqrt{2}),$$

$$3,141592\dots \quad (\text{число } \pi),$$

$$2,7182818284590452353\dots \quad (\text{число } e).$$

Бесконечные непериодические десятичные дроби будем называть *иррациональными числами*.

Рациональные и иррациональные числа с введенными для них ниже правилами сравнения, сложения и умножения называются *вещественными* (или *действительными*) числами.

Итак, любое вещественное число  $a$  можно представить в виде бесконечной десятичной дроби

$$a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots,$$

где из двух знаков плюс и минус берется какой-то один,  $\alpha_0$  — целое неотрицательное число,  $\alpha_k$  — цифры ( $k = 1, 2, \dots$ ).

Далее возникает задача введения для вещественных чисел трех правил (сравнения, сложения и умножения) с сохранением тех свойств, которые имели место для рациональных чисел.

### § 3. Сравнение вещественных чисел

При сравнении вещественных чисел договоримся использовать для всех рациональных чисел, допускающих двойное представление в виде бесконечной десятичной дроби, только один способ представления.

1) Если все  $\alpha_k = 0$ , то независимо от знака перед дробью число  $a$  считаем равным нулю:  $a = 0$ . Если хотя бы одно  $\alpha_k \neq 0$  и перед дробью стоит знак плюс, то число  $a$  будем называть положительным и писать  $a > 0$ , если же стоит знак минус, то число  $a$  будем называть отрицательным и писать  $a < 0$ .

2) Рассмотрим два вещественных числа: число  $a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$  и число  $b = \pm\beta_0, \beta_1\beta_2 \dots \beta_n \dots$ . Пусть  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ . Будем считать, что  $a = b$ , если их знаки одинаковы и  $\alpha_k = \beta_k$  для всех  $k = 0, 1, 2, \dots$ . В противном случае считаем, что  $a \neq b$ .

3) Пусть  $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$ . Тогда найдется такое целое число  $k \geq 0$ , что  $\alpha_i = \beta_i$  ( $i = 0, 1, \dots, k-1$ ),  $\alpha_k \neq \beta_k$ . Будем считать, что:

$$a > b, \quad \text{если } \alpha_k > \beta_k,$$

$$a < b, \quad \text{если } \alpha_k < \beta_k.$$

4) Пусть  $a \leq 0, b > 0$ . Тогда будем считать, что  $a < b$ .

5) Пусть  $a < 0, b < 0, a \neq b$ . Будем считать, что:

$$a > b, \quad \text{если } |a| < |b|,$$



$$a < b, \quad \text{если} \quad |a| > |b|.$$

Здесь символом  $|a|$  обозначено число  $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$ , если  $a = \pm \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$ .

**Задание.** Докажите, что сформулированное правило сравнения вещественных чисел обладает свойством транзитивности знаков  $=$  и  $>$ , и что в применении к рациональным числам оно дает тот же результат, что и правило сравнения рациональных чисел.

Из правила сравнения следует, что если

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots \geq 0,$$

то

$$\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \leq a \leq \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n + \frac{1}{10^n}$$

(аналогичные неравенства имеют место для  $a < 0$ ), т.е. любое неотрицательное вещественное число  $a$  можно приблизить рациональными числами с произвольной точностью до  $1/10^n$  ( $n$  — любое натуральное число) по недостатку ( $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ ) и по избытку ( $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n + 1/10^n$ ). Аналогичные приближения имеют место, если  $a < 0$ .

Для введения правил сложения и умножения вещественных чисел нам понадобится новое понятие — понятие точных граней ограниченного числового множества.

#### § 4. Точные грани ограниченного числового множества

Обозначим буквой  $X$  множество вещественных чисел, содержащее хотя бы одно число (такое множество называется *непустым*). Любое число  $x \in X$  будем называть *элементом* множества  $X$ .

**Определение.** Множество  $X$  называется *ограниченным сверху (снизу)*, если существует число  $M$  ( $m$ ) такое, что для любого элемента  $x \in X$  выполняется неравенство

$$x \leq M \quad (x \geq m).$$

Число  $M$  ( $m$ ) называется *верхней (нижней) гранью* множества  $X$ . Для краткости вместо слов «существует» и «для любого» будем использовать следующие логические символы (*кванторы*):  $\exists$  — квантор существования (заменяет слово «существует» или

«найдется») и  $\forall$  — квантор всеобщности (заменяет выражения «для любого» или «для всех»).

Запишем данное определение ограниченного сверху множества с помощью кванторов.

Множество  $X$  называется ограниченным сверху, если

$$\exists M, \quad \forall x \in X : x \leq M. \quad (1.1)$$

Отрицание этого предложения в позитивной форме выглядит так: Множество  $X$  называется неограниченным сверху, если

$$\forall M \quad \exists x \in X : x > M. \quad (1.2)$$

Сравнивая (1.1) и (1.2), мы видим, что для построения отрицания предложения (1.1) нужно квантор  $\exists$  заменить на  $\forall$ , а квантор  $\forall$  на  $\exists$ , и стоящее после двоеточия неравенство заменить ему противоположным. Это правило можно использовать и для построения отрицаний любых других утверждений, содержащих кванторы  $\exists$  и  $\forall$ .

**Задание.** Запишите с помощью кванторов определение ограниченного снизу множества и отрицание этого определения.

Множество  $X$  называется *ограниченным*, если оно ограничено и сверху и снизу, т.е. если  $\exists M$  и  $m$ ,  $\forall x \in X : m \leq x \leq M$ .

Нетрудно видеть, что такое определение эквивалентно следующему: множество  $X$  ограничено, если  $\exists A > 0$ ,  $\forall x \in X : |x| \leq A$ .

**Пример.** Множество  $X = \{x : x < 0\}$  — ограничено сверху, но не ограничено снизу. Очевидно, любое неотрицательное число является верхней гранью этого множества. Таким образом, ограниченное сверху множество имеет бесконечно много верхних граней. Среди этих верхних граней в данном примере имеется наименьшая — число 0.

**Определение.** Наименьшая из верхних граней ограниченного сверху множества  $X$  называется *точной верхней гранью* этого множества и обозначается

$$\sup X \quad (\text{supremum множества } X) .$$

Иногда мы будем писать  $\bar{x} = \sup X$ .

Аналогично, наибольшая из нижних граней ограниченного снизу множества  $X$  называется *точной нижней гранью* этого множества и обозначается

$$\inf X \quad (\text{infimum множества } X),$$

другое обозначение:  $\underline{x} = \inf X$ .

Определение точной верхней грани можно сформулировать иначе: число  $\bar{x}$  называется точной верхней гранью ограниченного сверху множества  $X$ , если:

1)  $\forall x \in X : x \leq \bar{x}$  (это означает, что  $\bar{x}$  — одна из верхних граней множества  $X$ );

2)  $\forall \tilde{x} < \bar{x} \exists x \in X : x > \tilde{x}$  (это означает, что  $\bar{x}$  — наименьшая из верхних граней).

**Задание.** Сформулируйте аналогичное определение точной нижней грани.

Поставим вопрос: всегда ли среди верхних граней ограниченного сверху множества имеется наименьшая? Ответ на этот вопрос не очевиден. Например, множество  $\{x : x > 0\}$  не имеет наименьшего числа. Оказывается, что в отношении верхних граней ограниченного сверху множества ответ на поставленный вопрос положительный.

**Теорема.** Ограниченное сверху (снизу) непустое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Доказательство. Мы докажем теорему для точной верхней грани (для точной нижней грани доказательство аналогично). Пусть  $X$  — ограниченное сверху множество, т.е.  $\exists M, \forall x \in X : x \leq M$ . Могут представиться 2 случая:

1) среди элементов множества  $X$  имеется хотя бы одно число  $x \geq 0$ ;

2)  $\forall x \in X : x < 0$ .

В случае 1) будем рассматривать только неотрицательные  $x \in X$ :  $X_+ = \{x \in X : x = x_0, x_1 x_2 \dots x_n \dots \geq 0\}$ . Т.к.  $x_0 \leq M$ , то среди всех целых частей чисел из множества  $X_+$  имеется наибольшее целое число. Пусть

$$\max_{X_+} \{x_0\} = \bar{x}_0.$$

Рассмотрим множество  $X_0 = \{x \in X : x = \bar{x}_0, x_1 x_2 \dots x_n \dots\}$ . Пусть

$$\max_{X_0} \{x_1\} = \bar{x}_1.$$

Далее рассмотрим множество  $X_1 = \{x \in X : x = \bar{x}_0, \bar{x}_1 x_2 \dots x_n \dots\}$ . Пусть

$$\max_{X_1} \{x_2\} = \bar{x}_2.$$

И так далее. На  $k$ -ом шаге рассмотрим множество

$$X_{k-1} = \{x \in X : x = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{k-1} x_k \dots\}.$$

Пусть

$$\max_{X_{k-1}}\{x_k\} = \overline{x}_k.$$

Продолжая (мысленно) этот процесс, мы определим числа  $\overline{x}_k$  для всех  $k$ .

Рассмотрим число

$$\overline{x} = \overline{x}_0, \overline{x}_1 \dots \overline{x}_n \dots$$

и докажем, что  $\overline{x} = \sup X$ . Для этого нужно доказать, что:

а)  $\forall x \in X : x \leq \overline{x}$ ;

б)  $\forall \tilde{x} < \overline{x} \exists x \in X : x > \tilde{x}$ .

Докажем утверждение а). Так как  $\overline{x} \geq 0$ , то для любого отрицательного  $x \in X : x \leq \overline{x}$ . Если же предположить, что существует неотрицательное число  $x = x_0, x_1 \dots x_n \dots \in X$ , такое, что  $x > \overline{x}$ , то по правилу сравнения вещественных чисел  $\exists k : x_0 = \overline{x}_0, \dots, x_{k-1} = \overline{x}_{k-1}, x_k > \overline{x}_k$ . С другой стороны, в силу написанных равенств,  $x \in X_{k-1}$ , и, следовательно, согласно определению  $\overline{x}_k$ , выполняется неравенство

$$x_k \leq \overline{x}_k = \max_{X_{k-1}}\{x_k\}.$$

Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно. Итак,  $\forall x \in X : x \leq \overline{x}$ .

Докажем утверждение б). Пусть

$$0 \leq \tilde{x} = \tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_n \dots < \overline{x} = \overline{x}_0, \overline{x}_1 \dots \overline{x}_n \dots$$

Тогда  $\exists k$ , такое, что  $\tilde{x}_0 = \overline{x}_0, \dots, \tilde{x}_{k-1} = \overline{x}_{k-1}, \tilde{x}_k < \overline{x}_k$ . Возьмем любое  $x \in X_k$ . Оно имеет вид

$$\overline{x} = \overline{x}_0, \overline{x}_1 \dots \overline{x}_k x_{k+1} \dots,$$

и, следовательно, согласно правилу сравнения вещественных чисел, справедливо неравенство  $x > \tilde{x}$ . Таким образом, мы доказали, что  $\forall \tilde{x} < \overline{x} \exists x \in X : x > \tilde{x}$ .

Итак, для случая 1) мы доказали, что  $\overline{x} = \sup X$ . Обратимся к случаю 2). Если все  $x < 0$ , т.е.  $x = -x_0, x_1 \dots x_n \dots$ , то построение числа  $\overline{x} = -\overline{x}_0, \overline{x}_1 \dots \overline{x}_n \dots$  ведется аналогично, только теперь нужно положить

$$\overline{x}_0 = \min_X\{x_0\},$$

далее нужно рассмотреть множество

$$X_0 = \{x \in X : x = -\overline{x_0}, x_1 \dots x_n \dots\}$$

и положить

$$\overline{x_1} = \min_{X_0} \{x_1\}$$

и т.д. Как и в случае 1) доказывается, что  $\overline{x} = \sup X$ . Теорема доказана.

**Задание.** Докажите существование точной нижней грани у ограниченного снизу множества.

Отметим, что точная верхняя (нижняя) грань ограниченного сверху (снизу) множества может не принадлежать этому множеству. Приведем пример: пусть  $X = \{x : x < 2, 5\}$ . Здесь  $\overline{x} = 2, 4(9) = 2, 5 \notin X$ . Еще один пример:  $X = \{x : 1 < x \leq 2\}$ . Здесь  $\sup X = 2 \in X$ , в то время как  $\inf X = 1 \notin X$ . Таким образом, нужно различать *существование* точных граней множества  $X$  и *принадлежность* их множеству  $X$ . Заметим также, что в последнем примере множество  $X$  имеет наибольшее (максимальное) число:  $\max X = 2 = \sup X$ , но не имеет минимального числа. Понятия  $\sup$  и  $\inf$  являются обобщениями понятий  $\max$  и  $\min$ . В отличие от  $\max$  и  $\min$  у ограниченного множества всегда имеются  $\sup$  и  $\inf$ .

## § 5. Арифметические операции над вещественными числами

### Сложение вещественных чисел

Пусть  $x$  и  $y$  — произвольные вещественные числа, и пусть  $x_r$  и  $y_r$  — любые рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам:

$$x_r \leq x, \quad y_r \leq y.$$

Рассмотрим множество  $\{x_r + y_r\}$  (здесь  $x_r$  и  $y_r$  складываются по правилу сложения рациональных чисел). Оно ограничено сверху. Действительно, если  $\overline{x}$  и  $\overline{y}$  — рациональные числа, такие, что  $x \leq \overline{x}$ ,  $y \leq \overline{y}$ , то в силу транзитивности знака  $\leq$  имеем:  $x_r \leq \overline{x}$ ,  $y_r \leq \overline{y}$ , откуда  $x_r + y_r \leq \overline{x} + \overline{y}$ . Итак, множество  $\{x_r + y_r\}$  ограничено сверху. Следовательно, оно имеет точную верхнюю грань.

**Определение.** Суммой вещественных чисел  $x$  и  $y$  назовем точную верхнюю грань множества  $\{x_r + y_r\}$ :

$$x + y = \sup_{\substack{x_r, y_r \in \mathbb{Q} \\ x_r \leq x \\ y_r \leq y}} \{x_r + y_r\}.$$

Здесь и далее буквой  $\mathbb{Q}$  обозначается множество всех рациональных чисел.

### Умножение вещественных чисел

1) Пусть  $x > 0$  и  $y > 0$  — произвольные вещественные числа, и пусть  $x_r$  и  $y_r$  — любые рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < x_r \leq x, \quad 0 < y_r \leq y.$$

Рассмотрим множество  $\{x_r \cdot y_r\}$ , где умножение  $x_r \cdot y_r$  производится по правилу для рациональных чисел. Оно ограничено сверху.

**Определение.** Произведением положительных вещественных чисел  $x$  и  $y$  назовем точную верхнюю грань множества  $\{x_r \cdot y_r\}$ :

$$x \cdot y = \sup_{\substack{x_r, y_r \in \mathbb{Q} \\ 0 < x_r \leq x \\ 0 < y_r \leq y}} \{x_r \cdot y_r\}.$$

2)  $\forall x$  полагаем:  $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ .

3) Пусть  $x \neq 0, y \neq 0$ . Тогда полагаем (по определению)

$$x \cdot y = \begin{cases} |x| \cdot |y|, & \text{если } x \text{ и } y \text{ одного знака,} \\ -|x| \cdot |y|, & \text{если } x \text{ и } y \text{ разных знаков.} \end{cases}$$

Можно доказать, что сформулированные правила сложения и умножения вещественных чисел обладают такими же свойствами, как и правила сложения и умножения рациональных чисел, и что в применении к рациональным числам они дают тот же результат, что и правила сложения и умножения рациональных чисел.

*Вычитание* определяется как действие, обратное сложению: разность чисел  $x$  и  $y$  — это такое число  $z$ , что  $y + z = x$ . Можно доказать, что  $\forall x, y \exists! z : y + z = x$  (Здесь знак ! означает, что такое число  $z$  единственно).

*Деление* определяется как действие, обратное умножению: частное от деления  $x$  на  $y \neq 0$  — это такое число  $z$ , что  $y \cdot z = x$ . Можно доказать, что  $\forall x, \forall y \neq 0 \exists! z : y \cdot z = x$ .

## § 6. Некоторые числовые неравенства

а)  $\forall a: -|a| \leq a \leq |a|$ . Данное неравенство непосредственно следует из правила сравнения вещественных чисел.

б)  $\forall a, b: |a \pm b| \leq |a| + |b|$  (докажите самостоятельно).

в)  $\forall a, b: |a - b| \geq |a| - |b|$ .

Доказательство. Так как  $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$  в силу утверждения б), то  $|a - b| \geq |a| - |b|$ .

## § 7. Геометрическое изображение вещественных чисел

Введем в рассмотрение *координатную прямую* (или *ось координат*), т.е. прямую, на которой выбрано направление, начало отсчета (точка  $O$ ) и масштабный отрезок  $OE$ , длину которого полагаем равной 1 (рис. 1.1).

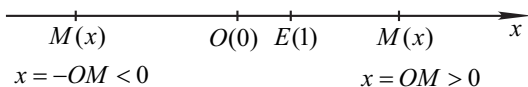


Рис. 1.1.

Каждой точке  $M$  координатной прямой поставим в соответствие определенное вещественное число — длину отрезка  $OM$ , если точка  $M$  лежит на положительной полуоси, и взятую со знаком минус длину отрезка  $OM$ , если точка  $M$  лежит на отрицательной полуоси. Точке  $O$  поставим в соответствие число нуль.

Итак, каждой точке  $M$  координатной прямой соответствует некоторое вещественное число. Имеет место и обратное соответствие, т.е. каждому вещественному числу соответствует некоторая точка на координатной прямой. Доказательство этого утверждения основывается на аксиомах геометрии, а именно, на аксиоме непрерывности прямой. Мы не будем заниматься этим подробно.

Для наглядности мы будем часто пользоваться геометрическим изображением вещественных чисел в виде точек на координатной прямой. Поэтому сами числа часто будем называть точками.

Заметим, что если  $\bar{x} = \sup X$ , то каждая точка множества  $X$  лежит левее  $\bar{x}$  или совпадает с  $\bar{x}$ , причем сколь угодно близко от  $\bar{x}$  имеются точки множества  $X$ .

## § 8. Некоторые числовые множества

- 1) *Интервал*  $(a, b) = \{x : a < x < b\}$ .
- 2) *Сегмент* (или *отрезок*)  $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ ; точки  $a$  и  $b$  называются *граничными* точками сегмента, остальные его точки — *внутренними* точками.
- 3) *Окрестность точки  $c$*  — любой интервал, содержащий точку  $c$ .
- 4)  $\varepsilon$ -*окрестность точки  $c$*  — интервал  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ , то есть  $\{x : |x - c| < \varepsilon\}$ .
- 5) *Проколотая  $\varepsilon$ -окрестность точки  $c$*  — множество  $\{x : 0 < |x - c| < \varepsilon\}$ .
- 6) *Числовая прямая*  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ .
- 7) *Полупрямая*  $[a, +\infty) = \{x : x \geq a\}$  или  $(-\infty, a]$  или  $(a, +\infty)$  или  $(-\infty, a)$ .

Каждое из множеств 1)-4) и 6), 7) называется также *числовым промежутком*, проколотая окрестность точки состоит из двух промежутков.



## ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

## § 1. Понятие функции

Пусть  $X$  — некоторое числовое множество.

Если каждому числу  $x \in X$  поставлено в соответствие некоторое (единственное) число  $y$ , то говорят, что на множестве  $X$  определена (задана) *функция* и пишут  $y = f(x)$  (или  $y = y(x)$ ). При этом множество  $X$  называется *областью определения функции*; переменная числовая величина  $x$ , принимающая значения из  $X$  (пробегающая множество  $X$ ) называется *независимой переменной* или *аргументом* функции. Число  $y$ , соответствующее данному значению  $x$ , называется *частным значением* функции в точке  $x$ ;  $\{y\}$  — *множество значений* функции.

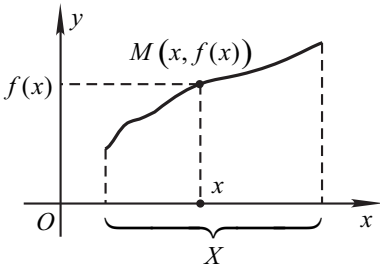


Рис. 2.1.

Геометрически функция  $y = f(x)$  изображается своим *графиком*. График функции — это множество точек  $\{M(x, f(x)), x \in X\}$  в прямоугольной системе координат  $Oxy$  (рис. 2.1).

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется *ограниченной сверху (снизу)* на множестве  $X$ , если существует число  $M$  (число  $m$ ), такое, что

$\forall x \in X : f(x) \leq M$  ( $f(x) \geq m$ ). При этом число  $M$  ( $m$ ) называется *верхней (нижней) гранью* функции  $f(x)$  на множестве  $X$ .

Функция  $f(x)$  называется *ограниченной* на множестве  $X$ , если она ограничена на этом множестве сверху и снизу, т.е.  $\exists M$  и  $m$  такие, что  $\forall x \in X : m \leq f(x) \leq M$ .

Другое (эквивалентное) определение: функция  $f(x)$  называется *ограниченной* на множестве  $X$ , если  $\exists A > 0, \forall x \in X : |f(x)| \leq A$ .

**Определение.** Наименьшая (наибольшая) из верхних (нижних) граней ограниченной сверху (снизу) функции  $f(x)$  на мно-

жестве  $X$  называется ее *точной верхней (нижней) гранью* на этом множестве и обозначается

$$\sup_X f(x) \quad (\inf_X f(x)).$$

Можно сказать иначе: точная верхняя грань функции  $y = f(x)$  — это  $\sup\{y\}$ , где  $\{y\}$  — множество значений функции.

**Эквивалентное определение.** Число  $M$  называется точной верхней гранью функции  $f(x)$  на множестве  $X$ , если:

1)  $\forall x \in X : f(x) \leq M$  (это условие показывает, что  $M$  — одна из верхних граней  $f(x)$  на  $X$ );

2)  $\forall \widetilde{M} < M \quad \exists \widetilde{x} \in X : f(\widetilde{x}) > \widetilde{M}$  (это условие показывает, что  $M$  — наименьшая из верхних граней).

**Задание.**

1) Сформулируйте аналогичное определение точной нижней грани функции,

2) Сформулируйте определения:

а) неограниченной сверху на множестве  $X$  функции,

б) неограниченной снизу на множестве  $X$  функции,

в) неограниченной на множестве  $X$  функции.

**Пример.** Рассмотрим функцию  $y = \sin x$ ,  $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ .

$$\sup_{(0, \pi/2]} \sin x = 1 \in \{y\}, \quad \inf_{(0, \pi/2]} \sin x = 0 \notin \{y\}.$$

Этот пример показывает, что ограниченная функция может не принимать значения, равного какой-либо ее точной грани. В таком случае говорят, что функция не достигает этой точной грани.

## § 2. Определение предела функции

**Определение.** Число  $a$  называется *предельной точкой числового множества  $X$* , если в любой проколотой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$  содержатся точки из множества  $X$ .

При этом сама точка  $a$  может принадлежать, а может и не принадлежать множеству  $X$ .

**Примеры.**

1)  $X = \{x : a < x < b\}$ . Любая точка интервала  $X$ , а также точки  $a$  и  $b$  — предельные точки интервала  $X$ .

2)  $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел — не имеет предельных точек.

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на множестве  $X$  и  $a$  — предельная точка  $X$ .

**Определение (по Коши).** Число  $b$  называется *пределом функции  $f(x)$  в точке  $a$*  (при  $x \rightarrow a$ ), если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , такое, что для любого значения аргумента  $x$  из проколотой  $\delta$ -окрестности точки  $a$  выполняется неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$  (иначе говоря,  $|f(x) - b| < \varepsilon$ , если  $x \in X$  и  $0 < |x - a| < \delta$ ).

Обозначение:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

**Задание.** Постройте отрицание определения предела функции, то есть сформулируйте определение

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq b.$$

Геометрическая иллюстрация определения предела функции.

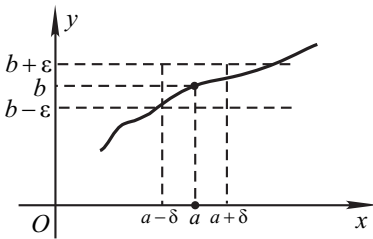


Рис. 2.2.

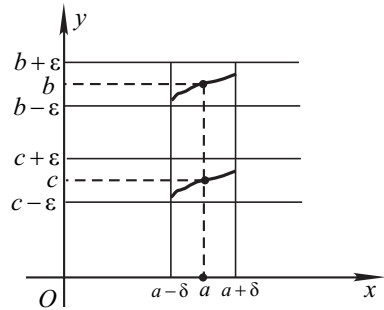


Рис. 2.3.

Поскольку

$$|f(x) - b| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - b < \varepsilon \Leftrightarrow b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon,$$

то существование предела, равного  $b$ , у функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$  с геометрической точки зрения означает, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , такое, что в пределах проколотой  $\delta$ -окрестности точки  $a$  график  $f(x)$  лежит в полосе между прямыми  $y = b - \varepsilon$  и  $y = b + \varepsilon$  (рис. 2.2).

Замечание 1. Функция может иметь в данной точке не более одного предела.

В самом деле, если предположить, что функция имеет в точке  $a$  два предела:  $b$  и  $c$ , то, взяв непересекающиеся  $\varepsilon$ -окрестности точек  $b$  и  $c$ , получим, что в пределах некоторой проколотой

$\delta$ -окрестности точки  $a$  график функции лежит одновременно в полосе между  $y = b - \varepsilon$  и  $y = b + \varepsilon$  и также в полосе между прямыми  $y = c - \varepsilon$  и  $y = c + \varepsilon$ , чего не может быть (рис. 2.3).

**Замечание 2.** Если функция  $f(x)$  имеет предел в точке  $a$ , то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Утверждение следует непосредственно из определения предела функции:  $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$  при  $0 < |x - a| < \delta$ .

**Примеры.**

1) Пусть  $f(x) = b = \text{const} \forall x \in \mathbb{R}$ , тогда  $\forall a$  :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Действительно,  $\forall \varepsilon > 0$  возьмем любое  $\delta > 0$ . Тогда  $|f(x) - b| = 0 < \varepsilon$  при всех  $x$  и, значит, при  $0 < |x - a| < \delta$ .

2) Пусть

$$f(x) = \begin{cases} b, & \text{если } x \neq a \\ c \neq b, & \text{если } x = a \end{cases},$$

тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

3) Пусть

$$f(x) = \begin{cases} b, & \text{если } x \neq a \\ \text{не определена,} & \text{если } x = a, \end{cases}$$

тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

**Замечание 3.** В примерах 2) и 3), как и в примере 1), для любого  $\varepsilon > 0$  можно взять любое  $\delta > 0$ , то есть  $\delta$  не зависит от  $\varepsilon$ .

**Замечание 4.** Если в определении предела функции опустить неравенство  $0 < |x - a|$ , т.е. потребовать выполнения неравенства  $|f(x) - b| < \varepsilon$  для всех значений аргумента  $x$  из  $\delta$ -окрестности точки  $a$ , включая и саму точку  $a$  (если, конечно, она принадлежит области определения функции), то ответ в примере 3 не изменится, поскольку  $x = a$  не является значением аргумента функции. В примере 2, напротив, ответ изменится: предел у функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$  не будет существовать, так как для  $x = a$  неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$  принимает вид  $|c - b| < \varepsilon$ , и, следовательно, оно не выполняется, если взять  $\varepsilon$  меньше, чем  $|c - b|$ .

4) Пусть  $f(x) = x$ , тогда для любого  $a$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a.$$

В самом деле,  $\forall \varepsilon > 0$  возьмем  $\delta = \varepsilon$ . Тогда если  $|x - a| < \delta = \varepsilon$ , то  $|f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon$ , что и требовалось доказать.

5) Пусть  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ . Заметим, что  $x = 0$  является предельной точкой области определения функции, и докажем, что эта функция не имеет предела при  $x \rightarrow 0$ .

Доказательство проведем от противного: предположим, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = b,$$

где  $b$  — некоторое число. Возьмем  $\varepsilon = 1$ . По определению предела функции  $\exists \delta > 0$ , такое, что  $|\sin \frac{1}{x} - b| < 1$  при  $0 < |x| < \delta$ .

Возьмем

$$x_1 = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, \quad x_2 = \frac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{2}}.$$

При достаточно большом  $n \in \mathbb{N}$  числа  $x_1$  и  $x_2$  удовлетворяют неравенствам:  $0 < |x_i| < \delta, i = 1, 2$ . При этом

$$\left| \sin \frac{1}{x_1} - b \right| = |1 - b| < 1 \quad \text{и} \quad \left| \sin \frac{1}{x_2} - b \right| = |-1 - b| = |1 + b| < 1.$$

Последние два неравенства не могут одновременно выполняться ни при каком  $b$ , следовательно, наше предположение неверно и предел функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow 0$  не существует.

6) Пусть  $f(x) = \sin x$ , тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0.$$

Чтобы доказать это, воспользуемся известным неравенством  $\sin x < x$  при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . Оно выражает тот

факт, что площадь равнобедренного треугольника, вписанного в сектор единичной окружности, меньше площади этого сектора (рис. 2.4):  $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \sin x < S_{\text{сект. } AOB} = \frac{1}{2}x$ . Попутно заметим,

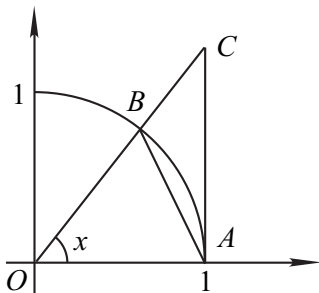


Рис. 2.4.

что  $S_{\text{сект. } AOB} < S_{\Delta AOC}$ , то есть  $\frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$ , или  $x < \operatorname{tg} x$  при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  (это неравенство понадобится нам не здесь, а позднее). В силу нечетности функций  $\sin x$  и  $x$  имеем:

$$|\sin x| < |x| \quad \text{при} \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$  и положим  $\delta = \varepsilon$ . Тогда для всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $0 < |x| < \delta = \varepsilon$ , получим

$$|\sin x - 0| = |\sin x| < |x| < \varepsilon,$$

а это и означает, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ .

### Односторонние пределы

Может случиться так, что при стремлении аргумента  $x$  к точке  $a$  слева и справа функция  $f(x)$  имеет разные предельные значения. В качестве примера приведем функцию (рис. 2.5)

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

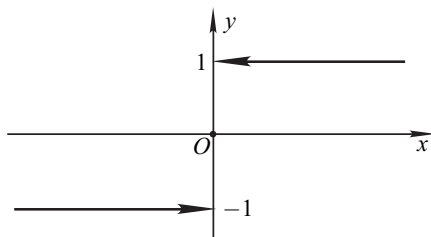


Рис. 2.5.

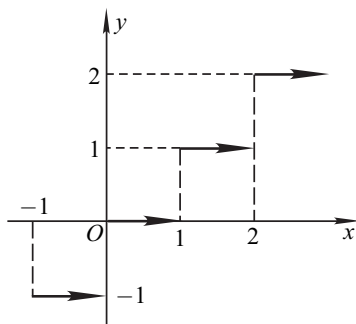


Рис. 2.6.

**Определение.** Число  $b$  называется *пределом функции*  $f(x)$  в точке  $a$  справа (слева), если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , такое, что  $\forall x \in (a, a + \delta)$  (соответственно,  $\forall x \in (a - \delta, a)$ ) выполняется неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$ .

Обозначение:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b \quad \text{или} \quad f(a+0) = b$$

$$\left( \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b \quad \text{или} \quad f(a-0) = b \right).$$

**Пример.** Рассмотрим функцию  $f(x) = [x]$ , где  $[x]$  —целая часть числа  $x$ , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $x$  (рис. 2.6). Для любого  $n \in \mathbb{Z}$  ( $\mathbb{Z}$  - множество всех целых чисел, включая нуль) имеем:

$$f(n - 0) = n - 1, \quad f(n + 0) = n \quad \text{и} \quad f(n) = n.$$

Из определения предела функции и определений односторонних пределов следует

**Теорема 1.** Если у функции  $f(x)$  существуют в точке  $a$  предел слева и предел справа, причем  $f(a - 0) = f(a + 0) = b$ , то в данной точке существует предел этой функции, равный  $b$ .

### Предел функции при $x \rightarrow \infty$

Пусть функция  $f(x)$  задана на множестве  $X$  и  $\forall A \exists x \in X : x > A$ .

**Определение.** Число  $b$  будем называть *пределом функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$* , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists A$ , такое, что для любого значения аргумента  $x > A$  выполняется неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$ .

Обозначение:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$$

Аналогично определяется предел функции при  $x \rightarrow -\infty$ . Если функция  $f(x)$  имеет равный числу  $b$  предел при  $x \rightarrow +\infty$  и равный этому же числу предел при  $x \rightarrow -\infty$ , то пишут

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b.$$

**Пример.** Рассмотрим функцию  $f(x) = 1/x$  и докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Действительно,  $\forall \varepsilon > 0$  возьмем  $A = 1/\varepsilon$ . Тогда если  $x > A = 1/\varepsilon$ , то  $1/x < \varepsilon$ , т.е.  $|1/x - 0| < \varepsilon$ , а это означает, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

**Задание.** Докажите, что функция  $f(x) = 1/x$  имеет равный нулю предел и при  $x \rightarrow -\infty$ .

Частный случай предела функции при  $x \rightarrow +\infty$  — *предел числовой последовательности*.

*Числовая последовательность* — это функция, определенная на множестве натуральных чисел:  $f(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Обычно числовую последовательность обозначают так:

$$\{x_n\} = x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Индекс  $n$  называется номером члена последовательности  $x_n$ .

**Определение.** Число  $a$  называется *пределом числовой последовательности*  $\{x_n\}$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ , такой, что  $\forall n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

Обозначение:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a.$$

Если последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел, то говорят, что она *сходится*, а если не имеет предела, то говорят, что она *расходится*.

**Задание.** Пусть  $x_n = \frac{n+1}{n}$ . Докажите, пользуясь определением предела числовой последовательности, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1.$$

### § 3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется *бесконечно малой* в точке  $a$  (при  $x \rightarrow a$ ), если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

Иначе говоря, функция  $f(x)$  — бесконечно малая в точке  $a$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\} : |f(x)| < \varepsilon$ . Разумеется, неравенство  $|f(x)| < \varepsilon$  должно выполняться для тех  $x$  из проколотой  $\delta$ -окрестности точки  $a$ , которые входят в область определения  $X$  функции  $f(x)$ , но для краткости записи условие  $x \in X$  будем часто опускать.

**Примеры.**

1) Функция  $f(x) = \sin x$  является бесконечно малой в точке  $x = 0$ , так как (это было доказано)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0.$$



## 2) Функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \neq 0 \\ 1, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

также является бесконечно малой в точке  $x = 0$  (заметим, что при этом  $f(0) = 1 \neq 0$ ).

3) Функция  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  не является бесконечно малой в точке  $x = 0$ , хотя  $f(0) = 0$ .

Аналогично определяется бесконечно малая при  $x \rightarrow +\infty$  (или  $-\infty$ ) функция, в частности, бесконечно малая последовательность  $\{x_n\}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

**Примеры.**

1) Функция  $f(x) = 1/x$  является бесконечно малой при  $x \rightarrow \infty$ .

2) Последовательность  $\{1/n\}$  является бесконечно малой.

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется *бесконечно большой в точке  $a$*  (при  $x \rightarrow a$ ), если

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0, \forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\} : |f(x)| > A.$$

Обозначение:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

Если при этом выполнено неравенство  $f(x) > A$  ( $f(x) < -A$ ), то пишут

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty (-\infty).$$

**Пример.** Функция  $f(x) = 1/x$  является бесконечно большой в точке  $x = 0$  (для доказательства этого утверждения достаточно  $\forall A > 0$  взять  $\delta = 1/A$ ).

Аналогично определяется бесконечно большая функция при  $x \rightarrow +\infty$  ( $-\infty$ ), а также при  $x \rightarrow a + 0$  ( $x \rightarrow a - 0$ ).

**Примеры:**

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

**Задание.** Докажите следующие утверждения (считая, что  $f(x)$  определена в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ ):

1) если  $f(x)$  — бесконечно большая в точке  $a$  функция, то в некоторой проколотой окрестности точки  $a$  определена функция  $g(x) = 1/f(x)$  и она является бесконечно малой в точке  $a$ .

2) если  $f(x)$  — бесконечно малая в точке  $a$  функция и  $f(x) \neq 0$  в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ , то  $g(x) = 1/f(x)$  —

бесконечно большая функция в точке  $a$ .

3) если  $f(x) = c = \text{const}$  и

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0,$$

то  $c = 0$ .

**Теорема 2.** Сумма и разность двух бесконечно малых в точке  $a$  функций являются бесконечно малыми в точке  $a$  функциями.

Доказательство. Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — бесконечно малые в точке  $a$  функции. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0, \quad \forall x \in \{0 < |x - a| < \delta_1\} : |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

и также

$$\exists \delta_2 > 0, \quad \forall x \in \{0 < |x - a| < \delta_2\} : |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Тогда  $\forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\}$  выполнены неравенства

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

следовательно,

$$\forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\} : |f(x) \pm g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| < \varepsilon,$$

а это и означает, что функции  $f(x) + g(x)$  и  $f(x) - g(x)$  являются бесконечно малыми в точке  $a$ .

**Следствие.** Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых в точке  $a$  функций является бесконечно малой в точке  $a$  функцией.

Доказательство проведем по индукции. Для двух слагаемых утверждение верно в силу теоремы 2. Предположим, что утверждение верно для  $n$  слагаемых ( $n \geq 2$ ), и докажем, что тогда оно верно и для  $n + 1$  слагаемых.

Пусть  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), f_{n+1}(x)$  — бесконечно малые в точке  $a$  функции. Их сумму представим в виде

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) + f_{n+1}(x) = g(x) + f_{n+1}(x)$$

Функция  $g(x)$  является бесконечно малой в точке  $a$  в силу индуктивного предположения. Поэтому  $\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x)$  представляет

собой сумму двух бесконечно малых в точке  $a$  функций  $g(x)$  и  $f_{n+1}(x)$ , а такая сумма является бесконечно малой в точке  $a$  функцией в силу теоремы 2. Следствие доказано.

**Теорема 3.** Произведение бесконечно малой в точке  $a$  функции на ограниченную в окрестности точки  $a$  функцию есть бесконечно малая функция в точке  $a$ .

Доказательство. Пусть  $f(x)$  — бесконечно малая в точке  $a$  функция, а  $g(x)$  — ограниченная функция в некоторой окрестности точки  $a$  (обозначим эту окрестность  $\omega$ ). Тогда существует такое число  $M > 0$ , что  $\forall x \in \omega : |g(x)| \leq M$ .

Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$ . Так как  $f(x)$  — бесконечно малая в точке  $a$  функция, то

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\} : |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Возьмем  $\delta_1 \leq \delta$  столь малым, что  $\delta_1$ -окрестность точки  $a$  принадлежит  $\omega$ . Тогда

$$\forall x \in \{0 < |x - a| < \delta_1\} : |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

а это и означает, что  $f(x) \cdot g(x)$  — бесконечно малая в точке  $a$  функция.

**Следствие.** Произведение конечного числа ограниченных функций, из которых хотя бы одна — бесконечно малая в точке  $a$ , есть бесконечно малая в точке  $a$  функция.

### Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

1) Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — бесконечно малые в точке  $a$  функции. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

называется *неопределенностью типа  $\frac{0}{0}$* .

**Пример.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  является неопределенностью типа  $\frac{0}{0}$ .

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется *бесконечно малой более высокого порядка* (имеет *более высокий порядок малости*), чем  $g(x)$  при  $x \rightarrow a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Обозначение:  $f = o(g)$  при  $x \rightarrow a$  (символ  $o(g)$  читается так: о-малое от  $g$ ).

**Пример.**  $x^2 = o(x)$  при  $x \rightarrow 0$ .

**Определение.** Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  называются *бесконечно малыми одного порядка* (имеют *одинаковый порядок малости*) при  $x \rightarrow a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \neq 0.$$

Обозначение:  $f = O(g)$  при  $x \rightarrow a$  (символ  $O(g)$  читается так: О-большое от  $g$ ).

**Пример.**  $2x^2 + x^3 = O(x^2)$  при  $x \rightarrow 0$ .

**Определение.** Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  называются *эквивалентными бесконечно малыми* при  $x \rightarrow a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Обозначение:  $f \sim g$  при  $x \rightarrow a$ .

**Примеры.**

1)  $x^2 + x^3 \sim x^2$  при  $x \rightarrow 0$ .

2)  $\sin x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$  (это будет доказано ниже).

Замечание. Для неопределенностей типа  $\frac{0}{0}$  при  $x \rightarrow a + 0$ ,  $x \rightarrow a - 0$  и  $x \rightarrow \infty$  можно дать аналогичные определения.

**Свойства символа «о-малое»:**

а)  $o(g) \pm o(g) = o(g)$ .

б) Если  $f = o(g)$ , то  $o(f) \pm o(g) = o(g)$ .

Пример:  $o(x^2) \pm o(x) = o(x)$ .

в) Если  $f$  и  $g$  — бесконечно малые, то  $f \cdot g = o(f)$ ,  $f \cdot g = o(g)$ .

г) Если  $f \sim g$ , то  $f - g = o(f)$  и  $f - g = o(g)$ .

д)  $o(c \cdot g) = o(g)$ , если  $c = \text{const} \neq 0$ .

е)  $o(g + o(g)) = o(g)$ . Пример:  $o(x + 2x^2) = o(x)$ .

Справедливость этих утверждений нетрудно доказать, используя определение символа «о-малое».

Замечание. Равенства с символом «о-малое», как правило, верны только в одну сторону (слева направо). Например,  $x^2 = o(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , но, вообще говоря,  $o(x) \neq x^2$ .

2) Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — бесконечно большие в точке  $a$  функции. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

называется *неопределенностью типа*  $\frac{\infty}{\infty}$ .

**Определение.** Говорят, что функция  $f(x)$  имеет при  $x \rightarrow a$  более высокий порядок роста, чем функция  $g(x)$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

**Пример.** Функция  $f(x) = 1/x^2$  имеет при  $x \rightarrow 0$  более высокий порядок роста, чем функция  $g(x) = 1/x$ , так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

**Определение.** Говорят, что функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют при  $x \rightarrow a$  одинаковый порядок роста, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \neq 0.$$

**Пример.** Функции  $f(x) = 1/x + 1$  и  $g(x) = 1/x$  имеют при  $x \rightarrow 0$  одинаковый порядок роста.

3) Существуют другие типы неопределенностей:

$$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0.$$

Приведем примеры.

а)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$$

является неопределенностью типа  $\infty - \infty$ .

б)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} x$$

является неопределенностью типа  $0 \cdot \infty$ .

в)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}$$

является неопределенностью типа  $1^\infty$ .

г)

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x$$

является неопределенностью типа  $0^0$ .

д)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$$

является неопределенностью типа  $\infty^0$ .

## § 4. Свойства пределов функций

**Лемма 1.** Если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

то  $f(x) = b + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x)$  — бесконечно малая функция в точке  $a$ .

Доказательство. Согласно определению предела

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\} : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Это означает, что функция  $\alpha(x) = f(x) - b$  — бесконечно малая в точке  $a$ . Представим  $f(x)$  в виде  $f(x) = b + [f(x) - b] = b + \alpha(x)$ . Тем самым лемма 1 доказана.

**Лемма 2 (обратная).** Если  $f(x) = b + \alpha(x)$ , где  $b$  — число, а  $\alpha(x)$  — бесконечно малая функция в точке  $a$ , то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Докажите лемму 2 самостоятельно.

**Теорема 4.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены в проколотой окрестности точки  $a$ , и пусть

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c.$$

Тогда:

1)

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = b \pm c.$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = bc.$$

3) если  $c \neq 0$ , то в некоторой проколотой окрестности точки  $a$  определена функция  $f(x)/g(x)$  и

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}.$$

Доказательство. 1) В силу леммы 1

$$f(x) = b + \alpha(x), \quad g(x) = c + \beta(x), \quad (2.1)$$

где  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  — бесконечно малые функции в точке  $a$ . Поэтому

$$f(x) \pm g(x) = (b \pm c) + \alpha(x) \pm \beta(x) = (b \pm c) + \gamma(x), \quad (2.2)$$

где  $\gamma(x) = \alpha(x) \pm \beta(x)$  — бесконечно малая функция в точке  $a$  в силу теоремы 2. Согласно лемме 2 из равенства (2.2) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = b \pm c.$$

2) Докажите самостоятельно.

3) Пусть  $c > 0$  (для  $c < 0$  доказательство аналогичное). Возьмем  $\varepsilon = \frac{c}{2}$ . По определению предела функции

$$\exists \delta > 0, \quad \forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\} : |g(x) - c| < \varepsilon,$$

то есть  $c - \varepsilon < g(x) < c + \varepsilon$ , или  $\frac{c}{2} < g(x) < \frac{3c}{2}$ , поскольку  $\varepsilon = \frac{c}{2}$ . Из левого неравенства следует, что  $g(x) \neq 0$  в проколотой  $\delta$ -окрестности точки  $a$ , и, следовательно, в этой проколотой окрестности определена функция  $\frac{f(x)}{g(x)}$ .

Используя равенства (2.1), получаем:

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} = \frac{b + \alpha(x)}{c + \beta(x)} - \frac{b}{c} = \frac{c\alpha(x) - b\beta(x)}{c \cdot g(x)} := \gamma(x). \quad (2.3)$$

(Символ  $:=$  означает, что дробь, стоящая слева от этого символа, обозначена через  $\gamma(x)$ ).

Функция  $\frac{1}{cg(x)}$  ограничена в проколотой  $\delta$ -окрестности точки  $a$ , так как  $g(x) > \frac{c}{2}$  и, следовательно,  $0 < \frac{1}{cg(x)} < \frac{2}{c^2}$ , а функция  $c\alpha(x) - b\beta(x)$  — бесконечно малая в точке  $a$  в силу теорем 2 и 3. Поэтому  $\gamma(x)$  — бесконечно малая в точке  $a$  функция (по теореме 3).

Из равенства (2.3) следует, что  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} + \gamma(x)$ , а это в силу леммы 2 означает, что

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}.$$

Теорема 4 доказана.

Замечание 1. Теорема 4 справедлива в отношении пределов функций при  $x \rightarrow \infty$ .

**Следствия из теоремы 4:**

1)

$$\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x),$$

где  $c = \text{const}$ .

2) Пусть  $P_n(x)$  и  $Q_m(x)$  — многочлены степени  $n$  и  $m$ , тогда функция  $f(x) = P_n(x)/Q_m(x)$  называется *рациональной функцией* или *рациональной дробью*.

Имеет место следующее утверждение: если  $Q_m(a) \neq 0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}.$$

Доказательство. Пусть  $Q_m(x) = C_m x^m + C_{m-1} x^{m-1} + \dots + C_0$ , где  $C_i$  — какие-то числа (коэффициенты многочлена  $Q_m(x)$ ). Ранее было доказано, что

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a.$$

Отсюда, в силу теоремы 4, следует, что

$$\lim_{x \rightarrow a} x^i = a^i (i = 1, 2, \dots, m), \quad \lim_{x \rightarrow a} c_i x^i = c_i a^i,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} Q_m(x) = c_m a^m + c_{m-1} a^{m-1} + \dots + c_0 = Q_m(a).$$

Аналогично,

$$\lim_{x \rightarrow a} P_n(x) = P_n(a),$$

а так как  $Q_m(a) \neq 0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} P_n(x)}{\lim_{x \rightarrow a} Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}.$$

**Пример.**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-3} = \frac{2}{-1} = -2.$$

**Теорема 5.** Если в некоторой проколотой окрестности точки  $a$  выполняется неравенство  $f(x) \geq c$  ( $f(x) \leq c$ ) и существует

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$



то  $b \geq c$  ( $b \leq c$ ).

Доказательство. Рассмотрим случай, когда  $f(x) \geq c$ , и докажем, что  $b \geq c$ . Допустим, что  $b < c$ , и возьмем  $\varepsilon > 0$  столь малым, что  $b + \varepsilon < c$ . По определению предела функции существует  $\delta > 0$  такое, что в проколотой  $\delta$ -окрестности точки  $a$  выполняется неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$  или  $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ . Таким образом, в некоторой проколотой  $\delta$ -окрестности точки  $a$  должны одновременно выполняться неравенства  $f(x) \geq c$  и  $f(x) < b + \varepsilon < c$ , чего не может быть. Полученное противоречие доказывает, что  $b \geq c$ .

Замечание 2. Теорема 5 справедлива в отношении предела функции при  $x \rightarrow \infty$ .

Замечание 3 (о пределе последовательности). Если для любого номера  $n$  выполнено неравенство  $c \leq x_n \leq b$  и существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , то  $c \leq a \leq b$ .

Замечание 4. Из условия  $f(x) > c$  не следует, что и предел функции будет больше  $c$ . Приведем пример:  $1/x > 0$  при  $x > 0$ , тогда как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

**Теорема 6.** Если в проколотой окрестности точки  $a$  выполняются неравенства  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ , и существуют пределы функций  $f(x)$  и  $h(x)$  при  $x \rightarrow a$ , причем

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b,$$

то существует

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b.$$

Доказательство. Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$ . Согласно определению предела функции найдется проколотая  $\delta$ -окрестность точки  $a$ , в которой  $|f(x) - b| < \varepsilon$ ,  $|h(x) - b| < \varepsilon$  и, кроме того, выполняются неравенства  $f(x) - b \leq g(x) - b \leq h(x) - b$ . Отсюда следует, что  $|g(x) - b| < \varepsilon$  при  $x \in \{0 < |x - a| < \delta\}$ , а это и означает, что  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ .

## § 5. Теорема о пределе монотонной функции

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется: а) *возрастающей*, б) *убывающей*, в) *невозрастающей*, г) *неубывающей* на множестве  $X$ , если для любых  $x_1, x_2 \in X$ , таких, что  $x_1 < x_2$ ,

выполняется неравенство: а)  $f(x_1) < f(x_2)$ , б)  $f(x_1) > f(x_2)$ , в)  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , г)  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .

Функции а)-г) называются *монотонными*, а функции а) и б) — *строго монотонными* на множестве  $X$ .

### Примеры.

1) Функция  $f(x) = x^2$  является возрастающей на полупрямой  $(0; +\infty)$ .

2) Функция  $f(x) = [x]$  (целая часть  $x$ ) не убывает на числовой прямой  $(-\infty; +\infty)$ .

**Теорема 7.** Если функция  $f(x)$  монотонна и ограничена на полупрямой  $x \geq a$ , то существует

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда функция  $f(x)$  не убывает на полупрямой  $x \geq a$  и ограничена сверху на этом множестве (случай невозрастающей функции рассматривается аналогично). Тогда существует точная верхняя грань функции (обозначим ее буквой  $b$ ):

$$\sup_{x \in [a; +\infty)} f(x) = b.$$

Докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$$

Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$  и рассмотрим число  $b - \varepsilon$ . По определению точной верхней грани функции  $\exists A \in [a; +\infty)$ :  $f(A) > b - \varepsilon$ . Поскольку  $f(x)$  не убывает, то  $f(x) \geq f(A)$  при  $x > A$ , и, следовательно,  $f(x) > b - \varepsilon$  при  $x > A$ . Отсюда получаем неравенство  $b - f(x) < \varepsilon$  при  $x > A$ , или  $|f(x) - b| < \varepsilon$  при  $x > A$ , а это означает, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ . Теорема 7 доказана.

Замечание. Аналогичная теорема имеет место для правого и левого пределов функции в точке  $a$ : если функция  $f(x)$  монотонна и ограничена в правой (левой) полуокрестности точки  $a$ , то существует

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \quad \left( \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \right).$$

**Следствие.** Монотонная ограниченная последовательность сходится.

**Пример.** Рассмотрим последовательность  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Докажем, что  $\{x_n\}$  — монотонная ограниченная последователь-

ность (тем самым будет доказано, что эта последовательность сходится).

Нам потребуется *неравенство Бернулли*:

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ и } \forall x \in [-1, +\infty) : (1+x)^n \geq 1+nx,$$

причем при  $n > 1$  знак равенства имеет место только для случая  $x = 0$  (предлагается доказать это неравенство самостоятельно, используя метод математической индукции).

Покажем, используя неравенство Бернулли, что последовательность  $\{x_n\}$  монотонно возрастает:

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ &= \frac{(n^2 + 2n + 1 - 1)^{n+1}}{(n^2 + 2n + 1)^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} > \left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = 1, \end{aligned}$$

откуда следует, что  $x_{n+1} > x_n$  для любых  $n$ , то есть последовательность  $\{x_n\}$  — возрастающая.

Рассмотрим теперь последовательность  $\{y_n\}$ , где

$$y_n = x_n \cdot (1 + 1/n).$$

Очевидно, что  $\forall n \in \mathbb{N} : y_n > x_n$ . Вновь используя неравенство Бернулли, нетрудно доказать, что  $y_n < y_{n-1}$ , т.е. последовательность  $\{y_n\}$  — убывающая.

Таким образом,

$$2 = x_1 < x_2 < \dots < x_n < y_n < y_{n-1} < \dots < y_1 = 4,$$

то есть  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  — монотонные ограниченные последовательности. Значит, они сходятся, причем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n.$$

Предел числовой последовательности  $\{x_n\}$  — это и есть знаменитое число  $e$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718281828\dots$$

## НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

### § 1. Определение непрерывности. Точки разрыва функции

Наглядное представление о непрерывной и разрывной функциях дают непрерывная и разрывная кривые — графики этих функций (рис. 3.1). Как сформулировать математическое определение непрерывности?

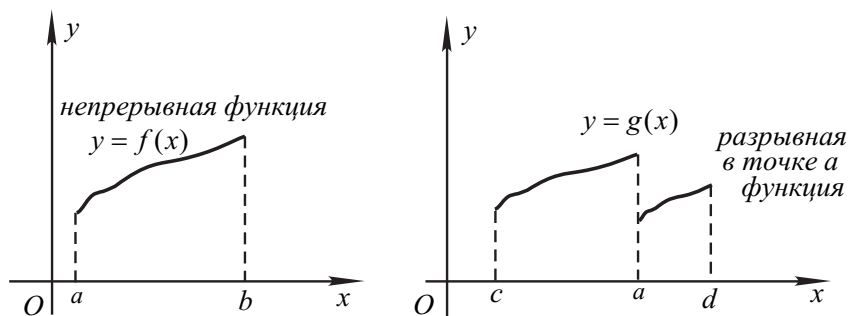


Рис. 3.1.

Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $a$ .

**Определение 1.** Функция  $f(x)$  называется *непрерывной* в точке  $a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

#### Примеры.

1) Функция  $\sin x$  непрерывна в точке  $x = 0$ , поскольку  $\sin 0 = 0$  и было доказано, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0.$$

Таким образом, выполнено условие непрерывности

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0.$$

2) Рациональная функция  $P_n(x)/Q_m(x)$  непрерывна в любой точке  $a$ , в которой  $Q_m(a) \neq 0$ , так как было доказано, что

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}.$$

**Определение 2 (эквивалентное определению 1).** Функция  $f(x)$  называется *непрерывной* в точке  $a$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , такое, что  $\forall x \in \{|x - a| < \delta\} : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

Отметим, что в этом определении отсутствует условие  $0 < |x - a|$  (то есть  $x \neq a$ ), фигурирующее в определении предела функции, поскольку оно здесь является излишним — в точке  $x = a$  неравенство  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  выполняется для любого  $\varepsilon > 0$ .

С помощью определения 2 установим одно важное свойство непрерывной функции. Пусть  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$  и  $f(a) > 0$ . Возьмем  $\varepsilon = f(a)$ . Тогда, согласно определению 2, существует  $\delta > 0$ , такое, что  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon = f(a)$  в  $\delta$ -окрестности точки  $a$ , т.е.  $-f(a) < f(x) - f(a) < f(a)$ . Из левого неравенства следует, что  $f(x) > 0$  в  $\delta$ -окрестности точки  $a$ . Тем самым мы доказали, что если функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$  и положительна в этой точке, то она будет положительной и в некоторой окрестности точки  $a$  (аналогичное утверждение справедливо и в случае, когда  $f(x)$  отрицательна в точке  $a$ ). Это свойство называется *устойчивостью знака* непрерывной функции.

### Задание.

Установите, верны ли утверждения:

1) если функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$ , то функция  $|f(x)|$  также непрерывна в точке  $a$ ?

2) если функция  $|f(x)|$  непрерывна в точке  $a$ , то и функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$ ?

Если утверждение верно, то его необходимо доказать, если же неверно — привести контрпример.

### Односторонняя непрерывность

Пусть функция  $f(x)$  определена в правой полукрестности точки  $a$ , т.е. при  $a \leq x < a + \delta$ .

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется *непрерывной справа* в точке  $a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a) \quad (\text{другая форма записи : } f(a+0) = f(a)).$$

Аналогичным образом определяется *непрерывность слева* в точке  $a$ :

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a) \quad (\text{или} \quad f(a-0) = f(a)).$$

**Пример.** Рассмотрим функцию  $f(x) = [x]$  (целая часть  $x$ ). Для любого  $n \in \mathbb{Z}$  имеем:  $f(n+0) = n$ ,  $f(n-0) = n-1$  и  $f(n) = n$ , поэтому функция  $[x]$  непрерывна в точках  $x = n$  только справа, а в остальных точках — и справа, и слева.

**Теорема 1.** Если функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$  слева и справа, то она непрерывна в точке  $a$ .

Доказательство. По условию

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a).$$

Согласно теореме 1 главы 2 отсюда следует, что существует

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

а это и означает, что  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$ . Теорема доказана.

### Точки разрыва функции

**Определение.** Предельная точка области определения функции, в которой функция не является непрерывной, называется *точкой разрыва* функции.

**Примеры.**

- 1) Функция  $f(x) = [x]$  разрывна в точках  $x = n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
- 2) Функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

где  $\mathbb{Q}$  — множество всех рациональных чисел, разрывна во всех точках, так как  $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow a} D(x)$$

не существует (докажите самостоятельно).

3) Функция  $f(x) = x \cdot D(x)$  непрерывна в точке  $x = 0$ , поскольку

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0,$$

и разрывна во всех остальных точках (докажите самостоятельно).

### Классификация точек разрыва

1) **Устранимый разрыв.** Точка  $a$  называется *точкой устранимого разрыва* функции  $f(x)$ , если

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

но в точке  $a$  функция  $f(x)$  либо не определена, либо  $f(a) \neq b$ .

Если положить  $f(a) = b$ , то разрыв будет устранен, т.е. функция станет непрерывной в точке  $a$ .

**Пример.** Рассмотрим функцию  $f(x) = \sin x/x$ ,  $x \neq 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(это будет вскоре доказано), однако в точке  $x = 0$  эта функция не определена. Если положить

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

то функция  $f(x)$  будет непрерывной в точке  $x = 0$ .

2) **Разрыв 1-ого рода.** Точка  $a$  называется *точкой разрыва 1-ого рода* функции  $f(x)$ , если существуют

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \text{ и } \lim_{x \rightarrow a-0} f(x),$$

но они не равны (т.е.  $f(a-0) \neq f(a+0)$ ).

**Пример.** Рассмотрим функцию  $f(x) = [x]$ . Точки  $x = n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  являются точками разрыва 1-ого рода данной функции, так как  $f(n-0) = n-1$ , а  $f(n+0) = n \neq f(n-0)$ .

3) **Разрыв 2-ого рода.** Точка  $a$  называется *точкой разрыва 2-ого рода* функции  $f(x)$ , если в этой точке не существует по крайней мере один из односторонних пределов  $f(x)$ .

**Примеры.**

1) Точка  $x = 0$  является точкой разрыва 2-ого рода функции  $\sin \frac{1}{x}$ , так как оба односторонних предела  $\lim_{x \rightarrow -0} \sin \frac{1}{x}$  и  $\lim_{x \rightarrow +0} \sin \frac{1}{x}$  не существуют.

2) Точка  $x = 1$  является точкой разрыва 2-ого рода функции  $2^{1/(x-1)}$ , поскольку

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0, \quad \text{но } \lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \infty \quad (\text{т.е. не существует}).$$

## § 2. Свойства непрерывных функций

**Теорема 2.** Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны в точке  $a$ , то функции  $f(x) \pm g(x)$ ,  $f(x)g(x)$ ,  $f(x)/g(x)$  (при условии  $g(a) \neq 0$ ) также непрерывны в точке  $a$ .

Доказательство. По условию

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

Отсюда следует (согласно теореме 4 главы 2), что

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = f(a) \pm g(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = f(a)g(a),$$

$$\text{и, если выполнено условие } g(a) \neq 0, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)},$$

а это и означает справедливость утверждения теоремы.

### Понятие сложной функции

Пусть аргумент  $t$  функции  $y = f(t)$  является не независимой переменной, а функцией некоторой переменной  $x$ :  $t = \varphi(x)$ . Тогда говорят, что переменная  $y$  является *сложной функцией* переменной  $x$  (или *суперпозицией* функций  $f$  и  $\varphi$ ) и пишут  $y = f(\varphi(x))$ .

**Пример.**  $y = \sin(x^2)$  — сложная функция:  $y = \sin t$ , где  $t = x^2$ .

**Теорема 3.** Пусть функция  $t = \varphi(x)$  непрерывна в точке  $x = a$ ,  $\varphi(a) = b$ , а функция  $y = f(t)$  непрерывна в точке  $b$ . Тогда сложная функция  $y = f(\varphi(x))$  непрерывна в точке  $x = a$ .

Доказательство. Нужно доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = f(\varphi(a)),$$

т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , такое, что

$$|f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon \text{ при } |x - a| < \delta.$$

Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$ . Так как функция  $f(t)$  непрерывна в точке  $b$ , то  $\exists \gamma > 0$ , такое, что  $|f(t) - f(b)| < \varepsilon$  при  $|t - b| < \gamma$ , откуда следует, что

$$|f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon \text{ при } |\varphi(x) - \varphi(a)| < \gamma. \quad (3.1)$$

В свою очередь, в силу непрерывности функции  $\varphi(x)$  в точке  $a$  для указанного  $\gamma$  существует  $\delta > 0$ , такое, что

$$|\varphi(x) - \varphi(a)| < \gamma \text{ при } |x - a| < \delta. \quad (3.2)$$



Из (3.1) и (3.2) следует, что если

$$|x - a| < \delta, \text{ то } |f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется *непрерывной на множестве  $X$* , если она непрерывна в каждой точке этого множества.

**Пример:** рациональная функция  $P_n(x)/Q_m(x)$  непрерывна на любом интервале, на котором  $Q_m(x) \neq 0$ .

В частности,  $f(x)$  называется непрерывной на сегменте  $[a, b]$  ( $a < b$ ), если она непрерывна в каждой внутренней точке сегмента  $[a, b]$ , непрерывна в точке  $a$  справа и в точке  $b$  слева.

**Теорема 4.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на сегменте  $[a, b]$  и  $f(a)f(b) < 0$ , то существует точка  $c \in (a, b)$ , такая, что  $f(c) = 0$ .

Доказательство. Пусть для определенности  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ . Тогда в силу устойчивости знака непрерывной функции  $f(x) < 0$  в некоторой правой полуокрестности точки  $a$ . Рассмотрим множество  $X$  таких чисел  $\tilde{x}$  сегмента  $[a, b]$ , для которых  $f(x) < 0$  на  $[a, \tilde{x}]$ , то есть  $X = \{\tilde{x} : f(x) < 0 \text{ при } a \leq x < \tilde{x}\}$ . Это множество ограничено сверху и, следовательно, имеет точную верхнюю грань. Пусть  $\sup X = c$ . Отметим, что

$$\forall x_0 < c : f(x_0) < 0. \quad (3.3)$$

Действительно, если  $x_0 < c$ , то  $x_0$  не является верхней гранью множества  $X$  и поэтому существует число  $\tilde{x} \in X$ , такое, что  $\tilde{x} > x_0$ . Так как  $f(x) < 0$  на  $[a, \tilde{x}]$ , то  $f(x_0) < 0$ .

Докажем, что  $f(c) = 0$ . Будем рассуждать от противного.

Допустим, что  $f(c) < 0$ . Тогда  $f(x) < 0$  в некоторой окрестности точки  $c$  и, следовательно,  $\exists \tilde{x} > c$ , такое, что  $f(x) < 0$  на  $[a, \tilde{x}]$ , а это противоречит тому, что  $\sup X = c$ .

Допустим теперь, что  $f(c) > 0$ . Тогда  $f(x) > 0$  в некоторой окрестности точки  $c$ , и, следовательно,  $\exists x < c : f(x) > 0$ , что противоречит неравенству (3.3).

Итак, мы заключаем, что  $f(c) = 0$ . Теорема доказана.

**Следствие. (Теорема о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.)** Пусть  $f(x)$  непрерывна на сегменте  $[a, b]$ , причем  $f(a) = A$ ,  $f(b) = B$ . Тогда  $\forall C \in (A, B) \exists c \in (a, b) : f(c) = C$ .

Доказательство. Пусть для определенности  $A < B$ ,  $A < C < B$ . Введем функцию  $g(x) = f(x) - C$ . Она непрерывна на сегменте  $[a, b]$ , причем  $g(a) = f(a) - C = A - C < 0$ ,

$g(b) = f(b) - C = B - C > 0$ . По теореме 4 существует такая точка  $c \in (a, b)$ , что  $g(c) = 0$ , т.е.  $f(c) - C = 0$ , откуда  $f(c) = C$ , что и требовалось доказать.

### § 3. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на множестве  $X$  и  $Y$  — множество ее значений. Пусть каждое  $y \in Y$  соответствует ровно одному значению  $x$  из множества  $X$ . В этом случае говорят, что функция  $y = f(x)$  устанавливает *взаимно однозначное соответствие* между элементами множеств  $X$  и  $Y$ .

Поставим в соответствие каждому  $y$  из  $Y$  то число  $x$  из  $X$ , для которого  $f(x) = y$ . Тем самым на множестве  $Y$  будет определена функция. Она называется *обратной* по отношению к функции  $y = f(x)$  и обозначается  $x = f^{-1}(y)$ .

Очевидно, обратной по отношению к функции  $x = f^{-1}(y)$  является функция  $y = f(x)$ . Поэтому эти две функции называются *взаимно обратными*.

#### Примеры.

1) Рассмотрим функцию  $y = x^2$ ,  $X = [0, +\infty)$ . Множество ее значений  $Y = [0, +\infty)$ . Обратной по отношению к этой функции будет функция  $x = \sqrt{y}$ , определенная на множестве  $Y$ .

2) Рассмотрим теперь функцию  $y = x^2$ , определенную на множестве  $X = (-\infty, +\infty)$ . В этом случае, как и в примере 1,  $Y \in [0, +\infty)$ , но обратной функции не существует, поскольку соответствие, устанавливаемое данной функцией между элементами множеств  $X$  и  $Y$ , не является взаимно однозначным.

**Теорема 5.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена, строго монотонна и непрерывна на сегменте  $[a, b]$ . Тогда: 1) множеством ее значений является сегмент  $Y = [f(a), f(b)]$ ; 2) на сегменте  $Y$  существует обратная функция  $x = f^{-1}(y)$ ; 3) обратная функция также строго монотонна; 4) обратная функция непрерывна на сегменте  $Y$ .

Доказательство. Пусть (для определенности) функция  $y = f(x)$  возрастает на  $[a, b]$ . Все

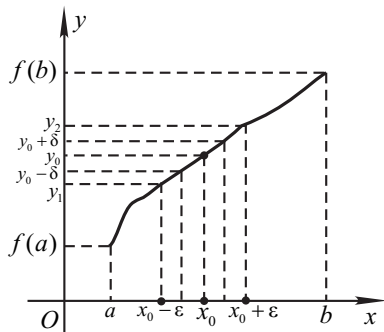


Рис. 3.2.

утверждения теоремы наглядно очевидны (рис. 3.2). Проведем аккуратное доказательство.

1) В силу непрерывности функция  $y = f(x)$  принимает все значения от  $f(a)$  до  $f(b)$ , а в силу возрастания не имеет значений, меньших  $f(a)$  и больших  $f(b)$ . Таким образом, множество ее значений есть сегмент  $Y = [f(a), f(b)]$ .

2) Каждое число  $y \in Y$  соответствует ровно одному числу  $x \in [a, b]$ . Действительно, если предположить, что некоторое  $y$  из  $Y$  соответствует двум числам  $x_1$  и  $x_2$  из  $[a, b]$  (пусть ради определенности  $x_1 < x_2$ ), то получим  $f(x_1) = f(x_2) = y$ , что противоречит возрастанию функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Следовательно, на сегменте  $Y$  существует обратная функция  $x = f^{-1}(y)$ .

3) Докажем, что обратная функция  $x = f^{-1}(y)$  возрастает на  $Y$ . Пусть  $y_1, y_2 \in Y$ ,  $y_1 < y_2$ . Нужно доказать, что  $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ . Положим  $f^{-1}(y_1) = x_1$ ,  $f^{-1}(y_2) = x_2$ . Нужно доказать, что  $x_1 < x_2$ . Допустим, что  $x_1 \geq x_2$ . Тогда  $f(x_1) \geq f(x_2)$  в силу возрастания функции  $y = f(x)$ , т.е.  $y_1 \geq y_2$ , что противоречит условию  $y_1 < y_2$ . Итак, функция  $x = f^{-1}(y)$  возрастает на сегменте  $Y$ .

4) Остается доказать непрерывность функции  $x = f^{-1}(y)$  на сегменте  $Y$ . Докажем непрерывность в произвольной внутренней точке  $y_0 \in Y$ . Пусть  $f^{-1}(y_0) = x_0$ . Нужно доказать, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , такое, что  $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$  при  $|y - y_0| < \delta$ , или  $|f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$  для любого значения  $y$  из  $\delta$ -окрестности точки  $y_0$ .

Возьмем  $\varepsilon$  столь малым, что  $x_0 - \varepsilon > a$ ,  $x_0 + \varepsilon < b$ .

Пусть  $f(x_0 - \varepsilon) = y_1$ ,  $f(x_0 + \varepsilon) = y_2$ . Поскольку функция  $y = f(x)$  возрастающая, то  $y_1 < y_0 < y_2$ , а в силу возрастания обратной функции  $\forall y \in (y_1, y_2)$ :  $f^{-1}(y) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ . Возьмем любую  $\delta$ -окрестность точки  $y_0$ , которая лежит в интервале  $(y_1, y_2)$ . Тогда для любого значения  $y$  из этой  $\delta$ -окрестности значения обратной функции будут принадлежать  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x_0$ , т.е.  $\forall y \in \{|y - y_0| < \delta\}$  выполняется неравенство  $|f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$ , что и требовалось доказать.

Непрерывность обратной функции в граничных точках сегмента  $Y$  доказывается аналогично.

Теорема 5 полностью доказана.

## § 4. Непрерывность элементарных функций

Используя теорему 5, докажем непрерывность основных элементарных функций.

1)  $y = \sin x$  (определение этой функции было дано в школьном курсе математики). Ранее было доказано, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 0,$$

откуда следует непрерывность  $\sin x$  в точке  $x = 0$ .

Докажем непрерывность функции  $y = \sin x$  в произвольной точке  $x = a \in \mathbb{R}$ .

Нужно доказать, что  $\sin x \rightarrow \sin a$  при  $x \rightarrow a$ , или, что то же самое,  $\sin x - \sin a \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a$ . Имеем:

$$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow a,$$

поскольку первый сомножитель представляет собой бесконечно малую функцию при  $x \rightarrow a$ , а второй — ограниченную функцию.

Рассмотрим функцию  $y = \sin x$  на отрезке  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Она непрерывна и возрастает на этом отрезке (возрастание следует из формулы

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cos \frac{x_2 + x_1}{2}.$$

По теореме 5 множеством значений функции является сегмент

$$Y = \left[ \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right), \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) \right] = [-1, 1],$$

на сегменте  $Y$  существует обратная функция (она обозначается  $x = \arcsin y$ ) и эта функция возрастает и непрерывна на сегменте  $[-1, 1]$ .

2) Вопрос о непрерывности функции  $y = \cos x$  и обратной по отношению к ней функции  $x = \arccos y$  рассмотрите самостоятельно.

3)  $y = \operatorname{tg} x$ . Поскольку  $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$  (где  $x \neq \pi/2 + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ), то данная функция непрерывна во всех точках ее области определения как частное двух непрерывных функций.

Рассмотрим функцию  $y = \operatorname{tg} x$  на отрезке  $[-\pi/2 + \delta, \pi/2 - \delta]$ , где  $\delta > 0$  — произвольно малое число. Возрастание функции  $\operatorname{tg} x$  на этом отрезке вытекает из формулы

$$\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cdot \cos x_2}.$$

По теореме 5 множеством значений данной функции является сегмент  $Y = [\operatorname{tg}(-\pi/2 + \delta), \operatorname{tg}(\pi/2 - \delta)]$ , на сегменте  $Y$  существу-

ет обратная функция (она обозначается  $x = \arctg y$ ), возрастающая и непрерывная.

Поскольку

$$\operatorname{tg}(-\pi/2 + \delta) \rightarrow -\infty \text{ и } \operatorname{tg}(\pi/2 - \delta) \rightarrow +\infty \text{ при } \delta \rightarrow +0,$$

то  $\forall y \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$ , такое, что

$$y \in [\operatorname{tg}(-\pi/2 + \delta), \operatorname{tg}(\pi/2 - \delta)].$$

Поэтому функция  $x = \arctg y$  определена, возрастает и непрерывна на всей числовой прямой  $(-\infty, +\infty)$ .

4) Вопрос о непрерывности функции  $y = \operatorname{ctg} x$  и обратной по отношению к ней функции  $x = \operatorname{arcctg} y$  рассмотрите самостоятельно.

5) **Степенная функция  $y = x^n$** , где  $n$  — натуральное число. Она непрерывна в каждой точке как произведение  $n$  непрерывных функций, равных  $x$ .

Рассмотрим данную функцию на сегменте  $[0, a]$ , где  $a > 0$  — произвольное фиксированное число. Эта функция непрерывна и возрастает на этом сегменте. По теореме 5 множеством ее значений является сегмент  $Y = [0, a^n]$ , на сегменте  $Y$  существует обратная функция (она обозначается  $x = \sqrt[n]{y}$  или  $x = y^{1/n}$ ), возрастающая и непрерывная.

Поскольку  $\forall y > 0 \exists a$ , такое, что  $y \in [0, a^n]$ , то функция  $x = \sqrt[n]{y}$  определена, возрастает и непрерывна на полупрямой  $[0, +\infty)$ .

Итак,  $\forall x \geq 0$  определена дробная степень  $x^{1/n}$ . Далее, по определению положим  $x^{m/n} = (x^{1/n})^m$ , где  $m$  — любое целое число.

6) **Показательная функция  $y = a^x$**  ( $a > 0, a \neq 1$ ). Для рациональных  $x = m/n$  показательная функция определена выше в п. 5). Из школьного курса алгебры известно, что для рациональных показателей степени  $r = m/n$  функция  $a^r$  обладает следующими свойствами:

- а) если  $r_1 > r_2$ , то  $a^{r_1} > a^{r_2}$  при  $a > 1$  и  $a^{r_1} < a^{r_2}$  при  $0 < a < 1$ ;
- б)  $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$ ;
- в)  $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$ ;
- г)  $a^0 = 1$  (по определению);
- д)  $a^{-r} = 1/a^r$  (по определению);
- е)  $a^r b^r = (ab)^r$ ;
- ж)  $\forall r: a^r > 0$ .

Определим теперь  $a^x$  для любого вещественного числа  $x$ .

Пусть  $a > 1$ ,  $x$  — произвольное вещественное число. Рассмотрим множество  $\{a^r\}$ , где  $r$  — любое рациональное число, не превосходящее  $x$ . Это множество ограничено сверху, например, числом  $a^{\bar{r}}$ , где  $\bar{r}$  — любое рациональное число, большее  $x$ . Следовательно, существует  $\sup\{a^r\}$ . Положим по определению

$$a^x = \sup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ r \leq x}} \{a^r\}.$$

Можно определить  $a^x$  иначе:

$$a^x = \inf_{\substack{R \in \mathbb{Q} \\ R \geq x}} \{a^R\}.$$

**Задание.** Докажите, что оба определения дают один и тот же результат.

Если  $0 < a < 1$ , то  $1/a > 1$ , и для любого  $x$  положим  $a^x = (1/a)^{-x}$ .

Итак, функция  $a^x$  определена для любого  $x$ . Можно доказать, что  $a^x$  обладает свойствами а)-ж) для любых вещественных чисел  $x$ , в частности, функция  $a^x$  строго монотонна.

Докажем непрерывность функции  $a^x$  в произвольной точке  $c$ .

Пусть  $a > 1$ . Докажем сначала непрерывность функции  $a^x$  в точке  $c$  слева. Для этого нужно доказать, что  $\forall \varepsilon > 0$  существует левая полукрестность точки  $c$ , в которой  $a^c - a^x < \varepsilon$ . По определению

$$a^c = \sup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ r \leq c}} \{a^r\}.$$

Возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$  и рассмотрим число  $a^c - \varepsilon$ . Так как оно меньше  $a^c$ , то согласно определению точной верхней грани  $\exists \tilde{r} < c$ , такое, что  $a^{\tilde{r}} > a^c - \varepsilon$ . В силу возрастания  $a^x$  справедливо неравенство  $a^x > a^{\tilde{r}}$  при  $\tilde{r} < x \leq c$ . Поэтому  $a^x > a^c - \varepsilon$  при  $\tilde{r} < x \leq c$ , или, что то же самое,  $a^c - a^x < \varepsilon$  при  $\tilde{r} < x \leq c$ , что и доказывает непрерывность функции  $a^x$  в точке  $c$  слева.

Аналогично доказывается непрерывность функции  $a^x$  в точке  $c$  справа. Из непрерывности слева и справа следует непрерывность функции  $a^x$  в точке  $c$ .

Рассмотрим теперь функцию  $y = a^x$  на произвольном сегменте  $[b, c]$ . По теореме 5 множеством ее значений является сегмент  $Y = [a^b, a^c]$ , на сегменте  $Y$  существует обратная функция (она обозначается  $x = \log_a y$ ), строго монотонная и непрерывная.

Поскольку  $\forall y > 0 \exists b$  и  $c$ , такие, что  $y \in [a^b, a^c]$ , то функция  $x = \log_a y$  определена, строго монотонна и непрерывна на полу-прямой  $(0, +\infty)$ .

Если  $a = e$ , то  $\log_e y := \ln y$  называется *натуральным логарифмом*, а функция  $e^x$  называется *экспонентой*.

7) **Степенная функция с произвольным вещественным показателем:**  $y = x^\alpha$ , где  $x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ . Поскольку  $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ , то данная функция непрерывна как суперпозиция непрерывных функций  $y = e^t$  и  $t = \alpha \ln x$ .

Рассмотренные функции 1)-7) называются *основными элементарными функциями*. Любая функция, которая получается из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и суперпозиций, называется просто *элементарной функцией*, а множество всех элементарных функций называется *классом элементарных функций*. Из непрерывности основных элементарных функций следует, что *любая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в окрестности которой она определена*.

## § 5. Замечательные пределы

### Первый замечательный предел

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(Этот предел является неопределенностью типа  $\frac{0}{0}$ ).

Доказательство. Воспользуемся неравенствами (они были доказаны ранее)

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \text{при} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

из которых следует:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{при} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

В силу четности функций  $\cos x$  и  $\sin x/x$  выписанные неравенства верны также при  $-\pi/2 < x < 0$ . Перейдем к пределу при

$x \rightarrow 0$ . Поскольку  $\cos x \rightarrow 1$  (в силу непрерывности функции  $\cos x$ ) и  $1 \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow 0$ , то, согласно теореме 6 главы 2,  $\sin x/x \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow 0$ , что и требовалось доказать.

**Следствия.**

1) Так как  $\sin x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ , то  $\sin x - x = o(x)$ , откуда получаем простейшую асимптотическую формулу для функции  $\sin x$  при  $x \rightarrow 0$ :

$$\sin x = x + o(x).$$

Позднее мы покажем, что здесь  $o(x) = -x^3/6 + o(x^3)$ .

2)

$$\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2) \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 1,$$

откуда получаем  $1 - \cos x \sim x^2/2 \Rightarrow 1 - \cos x - x^2/2 = o(x^2) \Rightarrow \cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$  при  $x \rightarrow 0$ .

3)

$$\operatorname{tg} x = x + o(x) \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

(эту формулу выведите самостоятельно). Позднее мы узнаем, что здесь  $o(x) = x^3/3 + o(x^3)$ .

**Примеры.**

1)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x + 2 \sin^2 x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)\right) + 2(x + o(x))^2}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{9x^2}{2} + o(x^2) + 2x^2 + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{13}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \right) = \frac{13}{2}. \end{aligned}$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}.$$

Первая попытка (использование простейших асимптотических формул):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x) - (x + o(x))}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x^3} = ?$$



Вторая попытка (с помощью первого замечательного предела):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos x - 1)}{\cos x \cdot x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} = 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

### Второй замечательный предел

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

(Этот предел является неопределенностью типа  $1^\infty$ )

По определению

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Положим  $1/n = x$ , тогда  $n = 1/x$ ,  $x \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$  и мы получаем:

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}.$$

Однако, это еще не доказывает, что второй замечательный предел имеет место, т.к. при таком подходе  $x \rightarrow 0$ , принимая лишь значения  $1/n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , а нужно доказать справедливость предельного равенства при любом способе стремления  $x$  к нулю, в том числе и когда  $x$  принимает отрицательные значения.

Введем функцию

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]}, \quad x \geq 1.$$

Так как  $f(x) = (1 + 1/n)^n$  при  $n \leq x < n + 1$ , то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Воспользуемся неравенствами (при  $x \geq 1$ ):

$$\begin{aligned} [x] \leq x \leq [x] + 1 = [x + 1] &\Rightarrow \frac{1}{[x + 1]} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{[x]} \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 + \frac{1}{[x + 1]} \leq 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{[x]} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{[x + 1]}\right)^{[x]} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{[x + 1]}\right)^{[x+1]} \cdot \left(1 + \frac{1}{[x + 1]}\right)^{-1} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq & \\ \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \cdot \left(1 + \frac{1}{[x]}\right). & \end{aligned}$$

Перейдем к пределу при  $x \rightarrow +\infty$ . Левая и правая части последнего двойного неравенства, очевидно, стремятся к  $e$ . Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Положим  $y = 1/x$ . Тогда  $y \rightarrow +0$  при  $x \rightarrow +\infty$  и мы получаем:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow +0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

Ради удобства перепишем последнее равенство в виде

$$\lim_{x \rightarrow +0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e. \quad (3.4)$$

Докажем теперь, что

$$\lim_{x \rightarrow -0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e. \quad (3.5)$$

Положим  $y = -x$ . Тогда  $y \rightarrow +0$  при  $x \rightarrow -0$  и

$$(1 + x)^{\frac{1}{x}} = (1 - y)^{-\frac{1}{y}} = \left(\frac{1}{1 - y}\right)^{\frac{1}{y}} = \left(1 + \frac{y}{1 - y}\right)^{\frac{1}{y}}.$$

Пусть  $z = y/(1 - y)$ . Тогда если  $y \rightarrow +0$ , то  $z \rightarrow +0$ . Кроме того,  $y = z/(1 + z)$  и  $1/y = 1/z + 1$ . Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow -0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{z \rightarrow +0} (1 + z)^{\frac{1}{z}} \cdot (1 + z) = e \cdot 1 = e,$$

то есть выполнено равенство (3.5).

Из (3.4) и (3.5) следует:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

что и требовалось доказать.

**Примеры.**

1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a \left[ (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

Отсюда вытекает, что  $\log_a(1+x) \sim x/\ln a$  при  $x \rightarrow 0$ , поэтому имеет место асимптотическая формула

$$\log_a(1+x) = \frac{x}{\ln a} + o(x) \quad \text{при } x \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

В частности, для  $a = e$  получаем формулу

$$\ln(1+x) = x + o(x) \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \ln a.$$

Здесь была сделана замена  $a^x - 1 = y$ , при этом  $y \rightarrow 0$ , если  $x \rightarrow 0$ . Следовательно,  $a^x - 1 \sim x \ln a$  при  $x \rightarrow 0$ , поэтому имеет место асимптотическая формула

$$a^x = 1 + x \ln a + o(x) \quad \text{при } x \rightarrow 0. \quad (3.7)$$

В частности, для  $a = e$  получаем формулу

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

## ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

## § 1. Определение производной. Производные некоторых основных элементарных функций

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на интервале  $(a, b)$ . Зафиксируем какую-нибудь точку  $x$  из  $(a, b)$  и рассмотрим другую точку  $x + \Delta x$  этого интервала. Величину  $\Delta x$  назовем *приращением аргумента* функции в точке  $x$ . Составим разность

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

При фиксированной точке  $x$  эта разность является функцией аргумента  $\Delta x$ . Она называется *приращением функции*  $y = f(x)$  в точке  $x$ .

Рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Оно также является функцией аргумента  $\Delta x$ .

**Определение.** Если существует

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то он называется *производной* функции  $y = f(x)$  в точке  $x$ .

Обозначения производной:  $f'(x)$  или  $y'(x)$ .

В физике часто используется обозначение  $\dot{y}(x)$ , обычно в том случае, когда  $x$  — время. Несколько позже мы введем еще одно обозначение:  $\frac{dy}{dx}$ , но это будет не единый символ, а дробь, в которой числитель и знаменатель имеют свой смысл.

**Примеры.**

1) Постоянная функция  $y = c$ , где  $c$  — некоторое число. Так как  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$ , то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0, \quad \text{то есть } c' = 0.$$

2) Степенная функция  $y = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Найдем приращение функции:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^n - x^n = \\ &= x^n + nx^{n-1} \cdot \Delta x + n(n-1)x^{n-2} \times (\Delta x)^2/2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n = \\ &= nx^{n-1} \cdot \Delta x + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \rightarrow nx^{n-1} \quad \text{при } \Delta x \rightarrow 0,$$

то есть

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Позднее мы докажем, что эта формула верна для любого вещественного числа  $n$  и любого  $x > 0$ .

3) Функция  $y = \sin x$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \\ &= 2 \left( \frac{\Delta x}{2} + o(\Delta x) \right) \cdot \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \quad \text{при } \Delta x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой  $\sin \frac{\Delta x}{2} = \frac{\Delta x}{2} + o(\Delta x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Используя теперь непрерывность функции  $\cos x$ , получаем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left( 1 + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right) \cdot \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \rightarrow \cos x \quad \text{при } \Delta x \rightarrow 0.$$

Итак,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

4) Докажите самостоятельно, что

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

5) Логарифмическая функция  $y = \log_a x$  ( $x > 0$ ). Так как

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right),$$

то, применяя формулу (3.6), получаем:

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{x \ln a} + o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \rightarrow 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x \ln a} + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \rightarrow \frac{1}{x \ln a} \quad \text{при} \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

Итак,

$$(\log_a x)' = 1/(x \ln a),$$

в частности,

$$(\ln x)' = 1/x.$$

6) Показательная функция  $y = a^x$  ( $a > 0; a \neq 1$ ).

Используя формулу (3.7), получаем

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1) = a^x(\Delta x \cdot \ln a + o(\Delta x))$$

при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Отсюда следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \left( \ln a + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right) \rightarrow a^x \cdot \ln a \quad \text{при} \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

Итак,

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a,$$

в частности,

$$(e^x)' = e^x.$$

### Односторонние производные

Рассмотрим разностное отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{при} \quad \Delta x > 0.$$

**Определение.** Если существует

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то он называется *правой производной* функции  $y = f(x)$  в точке  $x$ . Обозначение:  $f'_{\text{пр}}(x)$ .

Аналогично определяется левая производная функции  $y = f(x)$  в точке  $x$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_{\text{лев}}(x).$$

Функция  $y = f(x)$  может иметь в какой-то точке не равные односторонние производные.

**Пример.** Рассмотрим функцию  $y = |x|$ . В точке  $x = 0$  имеем:

$$\Delta y = y(0 + \Delta x) - y(0) = \begin{cases} \Delta x, & \text{если } \Delta x > 0 \\ -\Delta x, & \text{если } \Delta x < 0 \end{cases},$$

поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} +1, & \text{если } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{если } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Следовательно, правая производная функции  $y = |x|$  в точке 0 равна 1, а левая производная равна  $-1$ . Производной в этой точке функция  $y = |x|$  не имеет.

### Частные производные

Рассмотрим функцию не одной, а нескольких переменных, например,  $z = f(x, y)$ . Если зафиксировать значение одной из переменных, например  $y$ , то функция  $z$  станет функцией одной переменной  $x$ . Производная этой функции называется *частной производной* функции  $z = f(x, y)$  по аргументу  $x$  и обозначается  $z'_x$ . Аналогично определяется частная производная  $z'_y$  по аргументу  $y$ .

**Пример.** Рассмотрим функцию  $z = x^y$ . Тогда  $z'_x = y \cdot x^{y-1}$ ,  $z'_y = x^y \cdot \ln x$ .

## § 2. Физический и геометрический смысл производной

### Физический смысл производной

Пусть  $x$  — время, а  $y = f(x)$  — координата точки, движущейся по оси  $Oy$ , в момент времени  $x$ .

Разностное отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

представляет собой *среднюю скорость* точки на промежутке времени от момента  $x$  до момента  $x + \Delta x$ , а величина

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = v(x)$$

является *мгновенной скоростью* точки в момент времени  $x$ .

В случае произвольной функции  $y = f(x)$  производная  $f'(x)$  характеризует *скорость* изменения переменной  $y$  (функции) по отношению к изменению аргумента  $x$ .

### Геометрический смысл производной

Пусть задана прямоугольная система координат и дана прямая  $l$ . Обозначим буквой  $\alpha$  величину угла, на который нужно повернуть ось  $Ox$ , чтобы совместить ее положительное направление с одним из направлений на прямой  $l$ , причем  $-\pi/2 < \alpha \leq \pi/2$  (рис. 4.1). Число  $k = \operatorname{tg} \alpha$  называется *угловым коэффициентом* прямой  $l$  в данной системе координат.

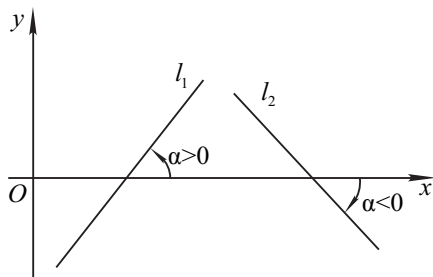


Рис. 4.1.

Рассмотрим график функции  $y = f(x)$ , т.е. множество точек  $\{(x, f(x)), x \in X\}$ , где  $X$  — область определения этой функции. Отметим на графике точки  $M(x, f(x))$  и  $N(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ . Прямая  $MN$  называется *секущей* по отношению к графику функции. Величину угла между секущей  $MN$  и осью  $Ox$  обозначим  $\varphi(\Delta x)$  (рис. 4.2). Устремим теперь  $\Delta x$  к нулю.

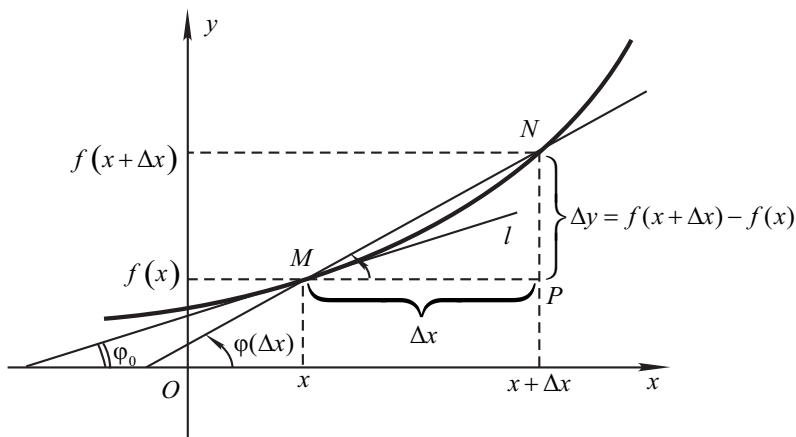


Рис. 4.2.



**Определение.** Если существует

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0,$$

то прямая  $l$  с угловым коэффициентом  $k = \operatorname{tg} \varphi_0$ , проходящая через точку  $M(x, f(x))$ , называется *касательной* к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M$ .

Говорят также, что прямая  $l$  является предельным положением секущей  $MN$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . В соответствии с этим можно сказать, что касательная к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M(x, f(x))$  есть предельное положение секущей  $MN$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

**Теорема 1.** Если функция  $y = f(x)$  имеет в точке  $x$  производную  $f'(x)$ , то график функции имеет в точке  $M(x, f(x))$  касательную, причем угловой коэффициент касательной равен  $f'(x)$ .

Доказательство. Из треугольника  $MNP$  (см. рис. 4.2) получаем:

$$\operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Перейдем к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$  и воспользуемся тем, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

и  $\operatorname{arctg} t$  —непрерывная функция. Получим:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arctg} f'(x).$$

Отсюда по определению касательной следует, что существует касательная к графику функции в точке  $M(x, f(x))$ . При этом

$$\varphi_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} f'(x),$$

и, следовательно, для углового коэффициента касательной получаем равенство  $k = \operatorname{tg} \varphi_0 = f'(x)$ . Теорема доказана.

Отметим, что уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M(x_0, f(x_0))$  имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

### § 3. Дифференцируемость и дифференциал функции

Пусть функция  $y = f(x)$  имеет производную в точке  $x$ , то есть

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Введем функцию

$$\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x). \quad (4.1)$$

Функция  $\alpha(\Delta x)$  определена при  $\Delta x \neq 0$  и является бесконечно малой при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Из равенства (4.1) получаем:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \quad \text{при} \quad \Delta x \neq 0. \quad (4.2)$$

Равенство (4.2) будет верным и для  $\Delta x = 0$ , если доопределить каким-нибудь образом функцию  $\alpha(\Delta x)$  при  $\Delta x = 0$ . Для дальнейшего удобно положить  $\alpha(0) = 0$ , то есть доопределить  $\alpha(\Delta x)$  в точке  $\Delta x = 0$  по непрерывности. Отметим также, что  $f'(x)$  не зависит от  $\Delta x$ , т.е. для данной точки  $x$  является некоторым числом.

Итак, если функция  $y = f(x)$  имеет производную в точке  $x$ , то ее приращение в этой точке можно представить в виде (4.2), где  $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\alpha(0) = 0$ .

Пусть теперь дано, что приращение функции  $y = f(x)$  в точке  $x$  имеет вид

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \quad (4.3)$$

где  $A$  — некоторое число, а  $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\alpha(0) = 0$ . Покажем, что в этом случае функция  $y = f(x)$  имеет производную в точке  $x$ , причем  $f'(x) = A$ . Из (4.3) получаем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$

откуда следует, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = A.$$

Таким образом, если функция  $y = f(x)$  имеет производную в точке  $x$ , то ее приращение в этой точке можно представить в виде (4.3), где  $A = f'(x)$ , и обратно, если приращение функции в точке  $x$  можно представить в виде (4.3), то она имеет в точке  $x$

производную, причем  $f'(x) = A$ , т.е. существование производной функции в точке  $x$  и представление приращения функции в виде (4.3) являются эквивалентными свойствами функции.

**Определение.** Если приращение функции  $y = f(x)$  в точке  $x$  можно представить в виде (4.3), где  $A$  — некоторое число, а  $\alpha(\Delta x)$  — бесконечно малая функция при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\alpha(0) = 0$ , то функция  $y = f(x)$  называется *дифференцируемой* в точке  $x$ .

Из проведенного рассуждения следует, что для дифференцируемости функции в точке  $x$  необходимо и достаточно, чтобы она имела производную в этой точке.

Операцию вычисления производной называют *дифференцированием* функции.

**Замечание.** Условие дифференцируемости (4.3) с учетом равенств  $A = f'(x)$ ,  $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = o(\Delta x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , можно записать в виде

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x). \quad (4.4)$$

**Пример.** Рассмотрим функцию  $y = x^2$ . Имеем:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta x = 2x \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

Здесь  $A = f'(x) = 2x$ .

**Теорема 2.** Если функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $a$ , то она и непрерывна в этой точке.

Доказательство. Нужно доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Введем обозначение:  $x - a = \Delta x$ . Тогда  $\Delta x \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a$ ,  $x = a + \Delta x$ , и нужно доказать, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(a + \Delta x) = f(a) \quad \text{или} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(a + \Delta x) - f(a)] = 0.$$

Но  $f(a + \Delta x) - f(a) = \Delta y$  — приращение функции в точке  $a$ . Таким образом, требуется доказать, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

По условию теоремы функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $a$ , поэтому

$$\Delta y = f'(a) \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Равенство

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0,$$

где  $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ , называется *разностной формой условия непрерывности функции  $y = f(x)$  в точке  $a$* . Если это условие выполнено, то функция непрерывна в точке  $a$ , и наоборот, если функция непрерывна в точке  $a$ , то это условие выполнено.

Отметим также, что обратное к теореме 2 утверждение неверно, т.е. непрерывная в некоторой точке функция может быть недифференцируемой в этой точке.

**Пример.** Функция  $f(x) = |x|$  непрерывна в точке  $x = 0$ , но не дифференцируема в этой точке.

Существуют функции, которые непрерывны в каждой точке числовой прямой, но ни в одной точке не дифференцируемы. Впервые пример такой функции построил Карл Вейерштрасс (1815-1897) в 1872 году.

### Дифференциал функции

Обратимся снова к условию дифференцируемости функции, записанному в виде (4.4):  $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ . Приращение  $\Delta y$  дифференцируемой в точке  $x$  функции  $y = f(x)$  состоит из двух слагаемых:  $f'(x) \cdot \Delta x$  и  $o(\Delta x)$ . Оба слагаемых являются бесконечно малыми функциями при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Если  $f'(x) \neq 0$ , то первое слагаемое является бесконечно малой того же порядка, что и  $\Delta x$ :  $f'(x) \cdot \Delta x = O(\Delta x)$ . Второе слагаемое  $o(\Delta x)$  является бесконечно малой более высокого порядка, чем  $\Delta x$ .

**Определение.** Дифференциалом функции  $y = f(x)$  в точке  $x$  называется линейная функция аргумента  $\Delta x$ :

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \quad (4.5)$$

Отметим, что если  $f'(x) \neq 0$ , то  $dy = f'(x) \cdot \Delta x$  является главной частью  $\Delta y$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Если же  $f'(x) = 0$ , то  $dy = 0$  и уже не является главной частью приращения функции.

Дифференциалом независимой переменной  $x$  назовем приращение этой переменной:  $dx = \Delta x$ . Формула (4.5) принимает теперь вид:  $dy = f'(x)dx$ , откуда следует, что

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

т.е. если  $x$  — независимая переменная, то производная функции в точке  $x$  равна отношению дифференциала функции в этой точке к дифференциалу независимой переменной.

**Пример.** Рассмотрим функцию  $y = \sin x$ . Найдем ее дифференциал:  $dy = d(\sin x) = \cos x \cdot dx$  — линейная функция аргумента  $dx$  при фиксированном  $x$ . В частности,

$$d(\sin x) \Big|_{x=\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} dx; \quad d(\sin x) \Big|_{x=\frac{\pi}{3}, dx=0,1} = 0,05; \quad d(\sin x) \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0.$$

### Физический смысл дифференциала функции

Пусть  $x$  — время,  $y = f(x)$  — координата точки на оси  $Oy$  в момент времени  $x$ . Тогда  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  — изменение (приращение) координаты за промежуток времени от момента  $x$  до момента  $x + \Delta x$ . При этом  $dy = f'(x) \cdot \Delta x = v(x) \cdot \Delta x$ , то есть дифференциал равен тому изменению координаты, которое имела бы точка, если бы ее скорость  $v(x)$  на отрезке времени  $[x, x + \Delta x]$  была постоянной, равной  $f'(x)$ .

### Геометрический смысл дифференциала функции

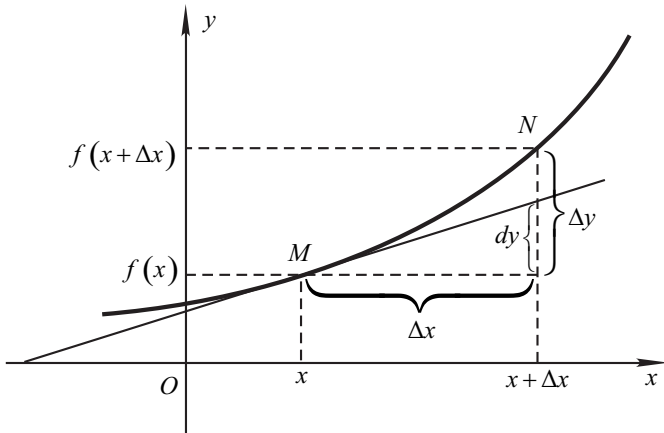


Рис. 4.3.

Дифференциал  $dy$  равен тому изменению функции  $y = f(x)$  при изменении аргумента на  $\Delta x$ , которое имела бы функция, если бы на отрезке  $[x, x + \Delta x]$  она была линейной с угловым коэффициентом прямой (ее графика), равным  $f'(x)$  (см. рис. 4.3).

### Использование дифференциала для приближенных вычислений

С помощью формулы  $\Delta y = dy + o(\Delta x)$  можно приближенно вычислять  $f(x + \Delta x)$  при малых  $\Delta x$ , если известны  $f(x)$  и  $f'(x)$ . В самом деле, из равенства

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

следует:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

откуда получаем приближенное равенство

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x.$$

### § 4. Правила дифференцирования

**Теорема 3.** Если функции  $u(x)$  и  $v(x)$  дифференцируемы в точке  $x$ , то функции  $u(x) \pm v(x)$ ,  $u(x) \cdot v(x)$ ,  $u(x)/v(x)$  (где  $v(x) \neq 0$ ) также дифференцируемы в точке  $x$ , причем:

$$1) [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x);$$

$$2) [u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x);$$

$$3) \left[ \frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Доказательство. Докажем формулу 2) (формулы 1) и 3) докажете самостоятельно). Положим  $y(x) = u(x)v(x)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = \\ &= u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) + u(x)v(x + \Delta x) - \\ &\quad - u(x)v(x + \Delta x) = [u(x + \Delta x) - u(x)]v(x + \Delta x) + \\ &\quad + u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u \cdot v(x + \Delta x) + \Delta v \cdot u(x). \end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x + \Delta x) + \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u(x).$$

Перейдем в последнем равенстве к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v(x)u'(x) + u(x)v'(x),$$

то есть  $y'(x) = (u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ , что и требовалось доказать.

**Следствия.**

$$(1) [c \cdot y(x)]' = c \cdot y'(x), \quad \text{где } c = \text{const};$$

$$(2) (\operatorname{tg} x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(3) (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (\text{докажите самостоятельно}).$$

## § 5. Производная обратной функции

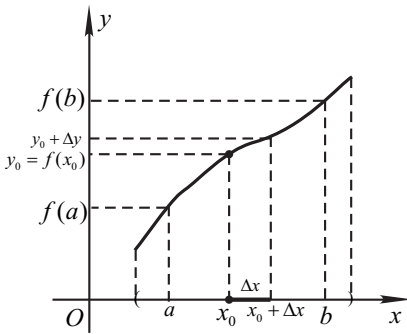


Рис. 4.4.

**Теорема 4.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена, строго монотонна и непрерывна в окрестности точки  $x_0$ , дифференцируема в самой точке  $x_0$  и  $f'(x_0) \neq 0$ . Пусть  $f(x_0) = y_0$ . Тогда в некоторой окрестности точки  $y_0$  существует обратная функция  $x = f^{-1}(y)$ , эта функция дифференцируема в точке  $y_0$  и

$$f^{-1}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Рассмотрим какой-нибудь сегмент  $[a, b]$ , расположенный в указанной окрестности точки  $x_0$  и такой, что  $a < x_0 < b$ . Функция  $y = f(x)$  строго монотонна и непрерывна на этом сегменте (рис. 4.4). Поэтому, согласно теореме 5 главы 3, множеством значений функции  $y = f(x)$ , заданной на  $[a, b]$ , является сегмент  $Y = [f(a), f(b)]$ , на сегменте  $Y$  существует обратная функция  $x = f^{-1}(y)$ , строго монотонная и непрерывная. При этом  $y_0 \in (f(a), f(b))$ .

Дадим аргументу  $y$  обратной функции в точке  $y_0$  приращение  $\Delta y \neq 0$  столь малое, что  $(y_0 + \Delta y) \in (f(a), f(b))$ . Обратная функция получит приращение  $\Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)$ , которое

отлично от нуля в силу строгой монотонности обратной функции:  $\Delta x \neq 0$ . Поэтому справедливо равенство:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}. \quad (4.6)$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при  $\Delta y \rightarrow 0$  и воспользуемся непрерывностью обратной функции  $x = f^{-1}(y)$  и условием непрерывности в разностной форме:  $\Delta x \rightarrow 0$  при  $\Delta y \rightarrow 0$ . Так как при  $\Delta x \rightarrow 0$  знаменатель в правой части (4.6) стремится к  $f'(x_0)$ , то предел правой части равен  $\frac{1}{f'(x_0)}$ . Следовательно, существует предел и левой части равенства (4.6), который по определению производной равен  $f^{-1}'(y_0)$ . Таким образом, переходя к пределу при  $\Delta y \rightarrow 0$  в равенстве (4.6), мы получаем:

$$f^{-1}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Теорема доказана.

**Замечание.** Полученная формула для производной обратной функции имеет простой и ясный физический смысл. Производная  $f'(x_0)$  есть скорость изменения переменной  $y$  по отношению к изменению переменной  $x$  в точке  $x_0$ . Это означает, что при малом изменении  $x$  от  $x_0$  до  $x_0 + \Delta x$ , т.е. при изменении  $x$  на малую величину  $\Delta x$ , переменная  $y$  изменится на величину  $\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$ . Можно сказать, что  $y$  изменяется в  $f'(x_0)$  раз «быстрее», чем  $x$ . Но тогда  $x$  изменяется в  $1/f'(x_0)$  раз «медленнее», чем  $y$ :  $\Delta x \approx \frac{1}{f'(x_0)} \cdot \Delta y$ , то есть скорость изменения переменной  $x$  по отношению к изменению переменной  $y$  (а эта скорость и есть  $f^{-1}'(y_0)$ ) равна  $1/f'(x_0)$ .

### Примеры.

1) Рассмотрим функцию  $y = \sin x$  при  $-\pi/2 < x < \pi/2$ . Эта

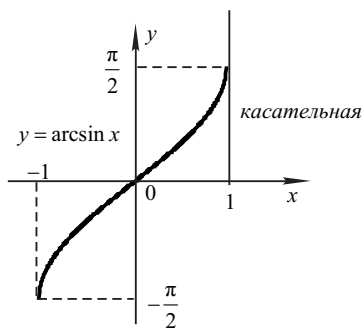


Рис. 4.5.



функция имеет обратную:  $x = \arcsin y$ ,  $-1 < y < 1$ . Для любого  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$  выполнены условия теоремы 4, согласно которой

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad -1 < y < 1.$$

Запишем эту формулу, заменив  $y$  на  $x$ :

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

Замечание. При  $x \rightarrow +1$  (и также при  $x \rightarrow -1$ ) имеем:  $(\arcsin x)' \rightarrow +\infty$ . В таком случае говорят, что функция имеет в данной точке бесконечную производную. Геометрически это означает, что касательная к графику функции в соответствующей точке — это прямая, параллельная оси  $Oy$  (рис 4.5).

2) Самостоятельно выведите формулу

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

3) Рассмотрим функцию  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $-\pi/2 < x < \pi/2$ . Эта функция имеет обратную:  $x = \operatorname{arctg} y$ ,  $-\infty < y < +\infty$ . Для любого  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$  выполнены условия теоремы 4, согласно которой

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Запишем эту формулу, заменив  $y$  на  $x$ :

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

4) Самостоятельно выведите формулу

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

## § 6. Производная сложной функции

Рассмотрим сложную функцию  $y = f(t)$ , где  $t = \varphi(x)$ , то есть  $y = f(\varphi(x)) := F(x)$ .

**Теорема 5.** Пусть функция  $t = \varphi(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ ,  $\varphi(x_0) = t_0$ , и функция  $y = f(t)$  дифференцируема в точке

$t_0$ . Тогда сложная функция  $F(x) = f(\varphi(x))$  дифференцируема в точке  $x_0$  и выполняется равенство:

$$F'(x_0) = f'(t_0) \cdot \varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0).$$

Доказательство. Согласно определению дифференцируемости функции нужно доказать, что приращение функции  $y = F(x)$  в точке  $x_0$  можно представить в виде:

$$\Delta y = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \quad (4.7)$$

где  $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\alpha(0) = 0$ .

Дадим аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$  в точке  $x_0$ . Функция  $t = \varphi(x)$  получит приращение  $\Delta t = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)$ , которое можно представить в виде (в силу дифференцируемости функции  $t = \varphi(x)$  в точке  $x_0$ ):

$$\Delta t = \varphi'(x_0) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x) \cdot \Delta x, \quad (4.8)$$

где  $\beta(\Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\beta(0) = 0$ .

Этому приращению  $\Delta t$  переменной  $t$  соответствует приращение  $\Delta y = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$  функции  $y = f(t)$ . Поскольку функция  $y = f(t)$  дифференцируема в точке  $t_0$ , то  $\Delta y$  можно представить в виде

$$\Delta y = f'(t_0) \cdot \Delta t + \gamma(\Delta t) \cdot \Delta t, \quad (4.9)$$

где  $\gamma(\Delta t) \rightarrow 0$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  и  $\gamma(0) = 0$ .

Подставив выражение (4.8) для  $\Delta t$  в равенство (4.9), получим:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f'(t_0) \cdot \varphi'(x_0) \cdot \Delta x + [\beta \cdot f'(t_0) + \gamma \cdot \varphi'(x_0) + \gamma\beta] \Delta x = \\ &= f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \end{aligned}$$

т.е. мы получили равенство (4.7), причем  $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\alpha(0) = 0$ . Теорема доказана.

Замечание. Полученная формула имеет простой и ясный физический смысл:  $\varphi'(x_0)$  — скорость изменения переменной  $t$  по отношению к изменению переменной  $x$ ,  $f'(t_0)$  — скорость изменения  $y$  по отношению к изменению  $t$ , а  $F'(x_0)$  — скорость изменения  $y$  по отношению к изменению  $x$ . Ясно, что эти скорости связаны равенством:  $F'(x_0) = f'(t_0) \cdot \varphi'(x_0)$ .

**Примеры.**

1) Рассмотрим функцию

$$y = x^\alpha,$$

где  $\alpha$  — произвольное фиксированное вещественное число,  $x > 0$ . Для этой функции справедливо представление:  $x^\alpha = e^{(\alpha \ln x)} = e^t$ , где  $t = \alpha \ln x$ . По формуле производной сложной функции

$$(x^\alpha)' = (e^t)' \cdot (\alpha \ln x)' = e^t \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Итак, при  $x > 0 \forall \alpha \in \mathbb{R}$ :

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Отметим два частных случая этой формулы:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

2) Найдем производную функции

$$y = \ln \cos(\operatorname{arctg} e^x).$$

Она является суперпозицией четырех функций, поэтому ее производная состоит из четырех сомножителей:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\cos(\operatorname{arctg} e^x)} \cdot (-\sin(\operatorname{arctg} e^x)) \cdot \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot e^x = \\ &= -\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} e^x) \cdot \frac{e^x}{1+e^{2x}} = -\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}. \end{aligned}$$

3) Вычислим производную так называемой степенно-показательной функции

$$y(x) = [u(x)]^{v(x)}, \quad \text{где } u(x) > 0.$$

Так как  $y = e^{v \ln u}$ , то  $y' = e^{v \ln u} \left( v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \right) = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'$ , или

$$(u^v)' = (u^v)' \Big|_{u=\text{const}} + (u^v)' \Big|_{v=\text{const}}.$$

## § 7. Инвариантность формы первого дифференциала

Дифференциал функции  $y = f(x)$ , где  $x$  — независимая переменная, выражается формулой

$$dy = f'(x)dx, \quad (4.10)$$

здесь  $dx = \Delta x$  является приращением независимой переменной  $x$ . Дифференциал функции  $dy$  называется также *первым дифференциалом функции*.

Покажем, что формула (4.10) останется в силе и тогда, когда  $x$  будет не независимой переменной, а дифференцируемой функцией некоторой независимой переменной  $t$ :  $x = \varphi(t)$ . В этом случае  $y = f(\varphi(t)) := F(t)$  — сложная функция независимой переменной  $t$ , дифференцируемая в силу теоремы 5. Согласно определению дифференциала функции  $dy = F'(t)dt$ , а по теореме 5  $F'(t) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ , поэтому  $dy = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$ . Так как  $x = \varphi(t)$ ,  $dx = \varphi'(t)dt$ , то выражение для  $dy$  также можно записать в виде (4.10), то есть формула (4.10) имеет место и в том случае, когда  $x$  — дифференцируемая функция некоторого аргумента  $t$ .

Это свойство называется *инвариантностью формы первого дифференциала*. Отметим, что инвариантной (не изменяющейся) является только форма (вид) первого дифференциала, а суть меняется, поскольку теперь  $dx = \varphi'(t)dt \neq \Delta x$ . Из (4.10) следует, что

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad (4.11)$$

т.е. производная функции равна отношению дифференциалов функции и аргумента и в том случае, когда аргумент  $x$  — не независимая переменная, а функция некоторой независимой переменной  $t$ .

**Следствие из формулы (4.11).** Пусть переменные  $x$  и  $y$  заданы как функции аргумента  $t$ , который назовем *параметром*:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \quad (4.12)$$

Пусть параметр  $t$  изменяется на некотором промежутке и пусть существует функция  $t = \varphi^{-1}(x)$ , обратная к функции  $x = \varphi(t)$ . Тогда можно записать:  $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) := f(x)$ .

Таким образом, уравнения (4.12) определяют функцию  $y = f(x)$ . Такой способ задания функции называется *параметрическим заданием функции*.

Вычислим  $f'(x)$ . По формуле (4.11):

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Итак, мы получили формулу производной функции, заданной параметрически:

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Эту же формулу можно получить иначе, если использовать правило дифференцирования сложной функции и формулу производной обратной функции:

$$\begin{aligned} y = f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)) &\Rightarrow f'(x) = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \left(\varphi^{-1}(x)\right)' = \\ &= \psi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \end{aligned}$$

### Физическая интерпретация.

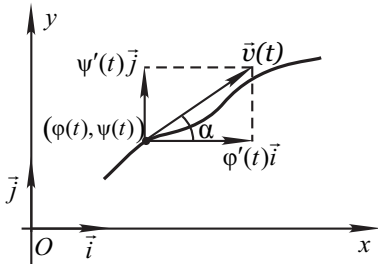


Рис. 4.6.

Уравнения (4.12) можно рассматривать как уравнения, задающие движение точки на плоскости:  $t$  — время,  $(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$  — координаты точки в момент времени  $t$  (рис. 4.6).

При такой интерпретации график функции  $y = f(x)$  представляет собой траекторию движения точки на плоскости. Вектор скорости этой точки  $\vec{v}(t) = \varphi'(t)\vec{i} + \psi'(t)\vec{j}$  направлен

по касательной к траектории, так как

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = f'(x).$$

## § 8. Производные высших порядков

Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема в каждой точке интервала  $(a, b)$ . Тогда производная  $f'(x)$  является функцией, определенной на интервале  $(a, b)$ . Если  $f'(x)$  дифференцируема в некоторой точке  $x$  из  $(a, b)$ , то *производная от  $f'(x)$  в точке  $x$  называется второй производной функции  $f(x)$  в точке  $x$  (или производной второго порядка)* и обозначается  $f''(x)$  (другие обозначения:  $f^{(2)}(x)$ ,  $y''(x)$ ,  $y^{(2)}(x)$ ).

*Производная  $n$ -ого порядка (или  $n$ -я производная) функции  $y = f(x)$  определяется как производная от производной  $(n - 1)$ -ого порядка:*

$$f^{(n)}(x) = \left[ f^{(n-1)}(x) \right]'$$

### Физический смысл второй производной

Если  $x$  — время, а  $y = f(x)$  — координата точки на оси  $Oy$  в момент времени  $x$ , то  $f'(x) = v(x)$  — мгновенная скорость точки в момент  $x$ , а  $f''(x) = [f'(x)]' = v'(x) = a(x)$  — ускорение точки в момент  $x$ .

### Геометрический смысл второй производной

Позже будет установлено, что знак  $f''(x)$  определяет направление выпуклости графика функции  $y = f(x)$  (рис. 4.7).

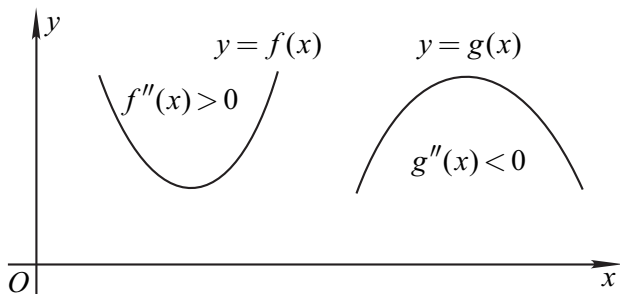


Рис. 4.7.

### Примеры.

1)  $y = x^\alpha$ .

$$y' = \alpha x^{\alpha-1},$$

$$y'' = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2},$$

$$y''' = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)x^{\alpha-3}$$

и т.д. Для производной  $n$ -ого порядка получается выражение

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)x^{\alpha-n}$$

(строгое доказательство проведите самостоятельно по индукции). В частности, если  $\alpha = m \in \mathbb{N}$ , то

$$(x^m)^{(m)} = m(m-1) \times \dots \times 1 \cdot x^0 = m!, \quad (x^m)^{(n)} = 0 \quad \forall n > m.$$

$$2) y = a^x.$$

$$y' = a^x \ln a,$$

$$y'' = a^x (\ln a)^2,$$

и т.д. Производная  $n$ -ого порядка выражается формулой

$$y^{(n)} = a^x (\ln a)^n$$

(строгое доказательство проведите самостоятельно по индукции). В частности,  $(e^x)^{(n)} = e^x$ .

$$3) y = \sin x.$$

$$y' = \cos x = \sin(x + \pi/2),$$

$$y'' = \sin(x + 2\pi/2),$$

и т.д. Производная  $n$ -ого порядка выражается формулой

$$y^{(n)} = \sin(x + n\pi/2)$$

(строгое доказательство проведите самостоятельно по индукции).

$$4) \text{ Докажите самостоятельно, что } (\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2).$$

### Две формулы для производных $n$ -ого порядка

Если функции  $u(x)$  и  $v(x)$  имеют производные  $n$ -ого порядка, то функции  $u(x) \pm v(x)$ ,  $u(x)v(x)$  также имеют производные  $n$ -ого порядка, причем:

$$(u(x) \pm v(x))^{(n)} = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x). \quad (4.13)$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v + C_n^1 \cdot u^{(n-1)}v' + C_n^2 \cdot u^{(n-2)}v^{(2)} + \dots + \\ + C_n^k \cdot u^{(n-k)}v^{(k)} + \dots + u \cdot v^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot u^{(n-k)}v^{(k)}, \quad (4.14)$$

где  $u^{(0)} := u$ ,  $C_n^k = n!/[k!(n-k)!]$ ,  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ ,  $0! = 1$ . Эта формула называется *формулой Лейбница*.

Для  $n = 2$  получаем:

$$\begin{aligned}(u(x) \pm v(x))^{(2)} &= \left[ (u(x) \pm v(x))' \right]' = \left[ u'(x) \pm v'(x) \right]' = \\ &= u^{(2)}(x) \pm v^{(2)}(x),\end{aligned}$$

то есть для  $n = 2$  формула (4.13) верна.

Справедливость этой формулы для любого  $n \in \mathbb{N}$  докажите самостоятельно методом математической индукции.

Заметим, что равенство (4.14) по форме похоже на формулу бинома Ньютона:

$$(u + v)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot u^{n-k} v^k.$$

Справедливость формулы Лейбница также докажите самостоятельно по индукции. Предварительно нужно доказать формулу:

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$$

**Пример.** Рассмотрим функцию  $y = x^2 \cdot e^{3x}$ . Используя формулу (4.14), найдем  $y^{(10)}$ :

$$\begin{aligned}y^{(10)} &= (e^{3x})^{(10)} \cdot x^2 + C_{10}^1 \cdot (e^{3x})^{(9)} \cdot (x^2)' + \\ &+ C_{10}^2 \cdot (e^{3x})^{(8)} \cdot (x^2)'' + \dots = 3^{10} \cdot e^{3x} \cdot x^2 + 10 \cdot 3^9 \cdot e^{3x} \cdot 2x + \\ &+ \frac{10 \cdot 9}{2} e^{3x} \cdot 3^8 \cdot 2 = 3^9 \cdot e^{3x} (3x^2 + 20x + 30).\end{aligned}$$

## § 9. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , т.е. дифференцируема в каждой точке этого интервала. Если  $x$  — независимая переменная, то первый дифференциал функции выражается формулой

$$dy = f'(x)dx.$$

Если  $x = \varphi(t)$  — дифференцируемая функция независимой переменной  $t$ , то

$$dy = f'(x)dx = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$



В каждом из двух случаев  $dy$  является функцией двух переменных — независимой переменной ( $x$  или  $t$ ) и ее дифференциала ( $dx$  или  $dt$ ), который входит в виде сомножителя. При введении дифференциала второго порядка мы будем рассматривать  $dy$  как функцию только независимой переменной ( $x$  или  $t$ ), то есть дифференциал независимой переменной ( $dx$  или  $dt$ ) будем рассматривать как постоянный множитель в выражении для  $dy$ . Такую же договоренность примем при определении дифференциалов более высокого порядка.

При этом условии определим *дифференциал второго порядка* (или *второй дифференциал*)  $d^2y$  функции  $y = f(x)$  как дифференциал от первого дифференциала, т.е.

$$d^2y = d(dy),$$

и, кроме того, при вычислении дифференциала от  $dy$  приращение дифференциала независимой переменной ( $x$  или  $t$ ) будем снова брать равным  $dx$  или  $dt$ .

*Дифференциал  $n$ -ого порядка*  $d^n y$  ( $n \geq 2$ ) определим формулой

$$d^n y = d(d^{n-1} y),$$

сохранив договоренность в отношении дифференциала независимой переменной.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть  $x$  является независимой переменной, тогда  $dy = f'(x)dx$ , где  $dx = \Delta x$  — приращение независимой переменной. Далее, согласно определению,

$$\begin{aligned} d^2y &= d(dy) = d(f'(x)dx) = dx \cdot \left[ d(f'(x)) \right] = dx \cdot \left[ (f'(x))' dx \right] = \\ &= f^{(2)}(x)(dx)^2, \end{aligned}$$

$$d^3y = d(d^2y) = (dx)^2 d \left[ f^{(2)}(x) \right] = (dx)^2 \cdot f^{(3)}(x) dx = f^{(3)}(x)(dx)^3,$$

и т.д. По индукции несложно доказать общую формулу для любого  $n$ :

$$d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Из этой формулы вытекает, что

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n},$$

т.е. производная  $n$ -го порядка функции  $y = f(x)$  равна отношению дифференциала  $n$ -го порядка функции к  $n$ -й степени дифференциала независимой переменной.

**Пример.**  $y = \sin x$ . Найдем  $d^{20}y$ :

$$\begin{aligned} d^{20}(\sin x) &= (\sin x)^{(20)} \cdot (dx)^{(20)} = \sin(x + 20 \cdot \pi/2)(dx)^{20} = \\ &= \sin x \cdot (dx)^{20}. \end{aligned}$$

2. Пусть теперь  $x$  — функция некоторой независимой переменной  $t$ :  $x = \varphi(t)$ . В этом случае

$$dx = \varphi'(t)dt, \quad dy = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt,$$

и далее получаем:

$$\begin{aligned} d^2y &= d(dy) = dt \cdot d\left(f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\right) = dt \cdot \left(f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\right)' dt = \\ &= \left[f''(\varphi(t)) \cdot (\varphi'(t))^2 + f'(\varphi(t)) \cdot \varphi''(t)\right] dt^2 = \\ &= f''(\varphi(t)) \cdot (\varphi'(t)dt)^2 + f'(\varphi(t)) \cdot \varphi''(t)dt^2 = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x. \end{aligned}$$

Итак,

$$d^2y = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x.$$

Таким образом, форма второго дифференциала не инвариантна. Это же относится к дифференциалам более высокого порядка.

## § 10. Производные вектор-функции

Если каждому числу  $t$  из множества  $T$  поставлен в соответствие некоторый вектор  $\vec{r}$ , то говорят, что на множестве  $T$  задана векторная функция (или *вектор-функция*)  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ .

Модуль вектора  $\vec{r}(t)$  будем обозначать, как обычно,  $|\vec{r}(t)|$ . Отметим, что  $|\vec{r}(t)|$  — скалярная функция аргумента  $t$ .

**Определение.** Вектор  $\vec{a}$  называется *пределом вектор-функции*  $\vec{r}(t)$  при  $t \rightarrow t_0$ , если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0.$$

Обозначение:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} \quad \text{или} \quad \vec{r}(t) \rightarrow \vec{a} \quad \text{при} \quad t \rightarrow t_0.$$

Зафиксируем значение аргумента  $t$  и дадим ему приращение  $\Delta t \neq 0$ . Вектор-функция получит приращение

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t).$$

**Определение.** Если существует

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t},$$

то он называется *производной* вектор-функции  $\vec{r}(t)$  в точке  $t$ .

Обозначение:  $\vec{r}'(t)$  или  $d\vec{r}/dt$ .

Зададим прямоугольную систему координат  $Oxyz$  и введем базис  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ . Разложим вектор  $\vec{r}(t)$  по этому базису:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = \{x(t), y(t), z(t)\};$$

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}.$$

**Утверждение.** Для того, чтобы  $\vec{r}(t) \rightarrow \vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$  при  $t \rightarrow t_0$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$x(t) \rightarrow a_1, \quad y(t) \rightarrow a_2, \quad z(t) \rightarrow a_3 \quad \text{при} \quad t \rightarrow t_0.$$

Доказательство несложно провести, используя равенство

$$|\vec{r}(t) - \vec{a}| = \sqrt{(x(t) - a_1)^2 + (y(t) - a_2)^2 + (z(t) - a_3)^2}.$$

Из этого утверждения, в частности, следует, что

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} = \{x'(t), y'(t), z'(t)\},$$

т.е. вычисление производной вектор-функции сводится к вычислению производных ее координат.

**Определение.** Множество концов всех векторов  $\vec{r}(t)$  ( $t \in T$ ), отложенных от начала координат (точки  $O$ ), называется *годографом* вектор-функции  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  (рис. 4.8).

**Физический смысл годографа** — это траектория точки, движение которой в пространстве задано уравнением  $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$ .

**Физический смысл производной  $d\vec{r}/dt$**  — это скорость точки. Можно доказать, что вектор  $d\vec{r}/dt$  является касательным к годографу.

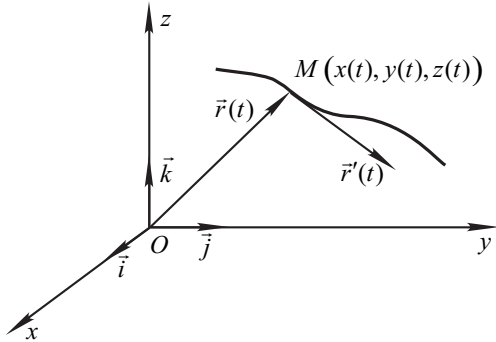


Рис. 4.8.

### Правила дифференцирования вектор-функций

- 1)  $\left[ \vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t) \right]' = \vec{r}'_1(t) \pm \vec{r}'_2(t);$
- 2)  $\left[ f(t) \cdot \vec{r}(t) \right]' = f'(t) \cdot \vec{r}(t) + f(t) \cdot \vec{r}'(t);$
- 3)  $\left( \vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t) \right)' = \vec{r}'_1(t) \cdot \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}'_2(t);$
- 4)  $\left[ \vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t) \right]' = \left[ \vec{r}'_1(t) \times \vec{r}_2(t) \right] + \left[ \vec{r}_1(t) \times \vec{r}'_2(t) \right].$

Здесь  $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$  — скалярное произведение, а  $[\vec{r}_1 \times \vec{r}_2]$  — векторное произведение векторов  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ .

Эти правила нетрудно обосновать, используя выражения для  $\vec{r}_1 \pm \vec{r}_2, \dots, [\vec{r}_1 \times \vec{r}_2]$  в координатах.

Производные высших порядков вектор-функции вводятся, как и для скалярной функции:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right), \dots, \vec{r}^{(n)}(t) = \left[ \vec{r}^{(n-1)}(t) \right]'$$

В координатах:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \{x''(t), y''(t), z''(t)\}.$$

**Пример 1.** Рассмотрим прямую (ось вращения) и вектор  $\vec{a}$  с началом на этой прямой, составляющий угол  $\alpha$  с прямой. Пусть вектор  $\vec{a}$  вращается вокруг прямой с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , причем угол  $\alpha$  и длина вектора  $\vec{a}$  остаются неизменными.

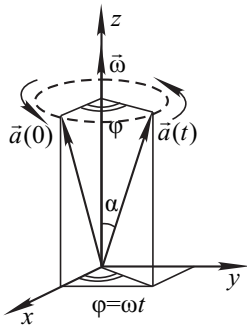


Рис. 4.9.

Положим  $|\vec{a}| = a$  и введем вектор  $\vec{\omega}$ , у которого  $|\vec{\omega}| = \omega$ , а направление показано на рис. 4.9.

Вектор  $\vec{a}$  зависит от времени:  $\vec{a} = \vec{a}(t)$ . Докажем, что

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{a}].$$

Введем прямоугольную систему координат  $Oxyz$  так, чтобы положительное направление оси  $Oz$  совпало с направлением вектора  $\vec{\omega}$ , и запишем координаты вектора  $\vec{a}(t)$ :

$$\vec{a}(t) = \{a \sin \alpha \cdot \cos \omega t, a \sin \alpha \cdot \sin \omega t, a \cos \alpha\}.$$

Введем обозначения:  $a \sin \alpha = b$ ,  $a \cos \alpha = c$ , тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \{-b\omega \sin \omega t, b\omega \cos \omega t, 0\},$$

$$[\vec{\omega} \times \vec{a}(t)] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ b \cos \omega t & b \sin \omega t & c \end{vmatrix} = \{-b\omega \sin \omega t, b\omega \cos \omega t, 0\},$$

откуда следует, что

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{a}].$$

Если начало вектора  $\vec{a}$  не лежит на оси вращения, то доказанная формула остается в силе, поскольку такой вектор можно представить в виде разности двух векторов с началами на оси вращения (рис. 4.10):

$$\begin{aligned} \vec{a} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 &\Rightarrow \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\vec{a}_1}{dt} - \frac{d\vec{a}_2}{dt} = \\ &= [\vec{\omega} \times \vec{a}_1] - [\vec{\omega} \times \vec{a}_2] = [\vec{\omega} \times (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)] = [\vec{\omega} \times \vec{a}]. \end{aligned}$$

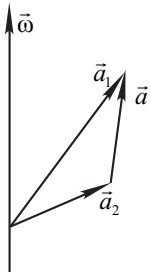


Рис. 4.10.

**Пример 2.** Рассмотрим твердое тело (например, Земной шар), вращающееся с постоянной угловой скоростью  $\vec{\omega}$  относительно неподвижной системы координат с базисом  $\{\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0\}$  (рис. 4.11). Введем на этом твердом теле свой базис

$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ . Он вращается вместе с твердым телом с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ , поэтому

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \vec{i}(t), & \vec{j} &= \vec{j}(t), & \vec{k} &= \vec{k}(t), \\ \frac{d\vec{i}}{dt} &= [\vec{\omega} \times \vec{i}], & \frac{d\vec{j}}{dt} &= [\vec{\omega} \times \vec{j}], & \frac{d\vec{k}}{dt} &= [\vec{\omega} \times \vec{k}].\end{aligned}$$

Рассмотрим точку  $M$ , движущуюся внутри тела или по его поверхности. Ее положение относительно неподвижной системы координат в каждый момент времени можно задать радиус-вектором  $O\vec{M}$ , который обозначим  $\vec{r}(t)$ . Выведем формулу скорости точки  $M$  относительно неподвижной системы координат, т.е. формулу для  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ . С этой целью разложим вектор  $\vec{r}(t)$  по (вращающемуся) базису  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ :

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + x \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + y \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} + z \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} = \\ &= \left( \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} \right) + x \cdot [\vec{\omega} \times \vec{i}] + y \cdot [\vec{\omega} \times \vec{j}] + z \cdot [\vec{\omega} \times \vec{k}].\end{aligned}$$

Выражение в скобках представляет собой скорость точки относительно связанного с телом базиса  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ . Назовем ее *относительной скоростью* и обозначим  $\vec{v}_{\text{отн.}}$ . Таким образом,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{\text{отн.}} + [\vec{\omega} \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})] = \vec{v}_{\text{отн.}} + [\vec{\omega} \times \vec{r}].$$

В полученном равенстве векторное произведение  $[\vec{\omega} \times \vec{r}]$  представляет собой компоненту скорости, обусловленную вращением тела. Назовем ее *переносной скоростью* и обозначим  $\vec{v}_{\text{пер.}}$ .

Итак, абсолютная скорость точки  $M$  (т.е. скорость относительно неподвижной системы координат) равна сумме переносной и относительной скоростей:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{\text{пер.}} + \vec{v}_{\text{отн.}}$$

Получим теперь формулу для ускорения точки  $M$ . Имеем:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{\text{пер.}}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{\text{отн.}}}{dt} = [\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}] + \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} \right) =$$

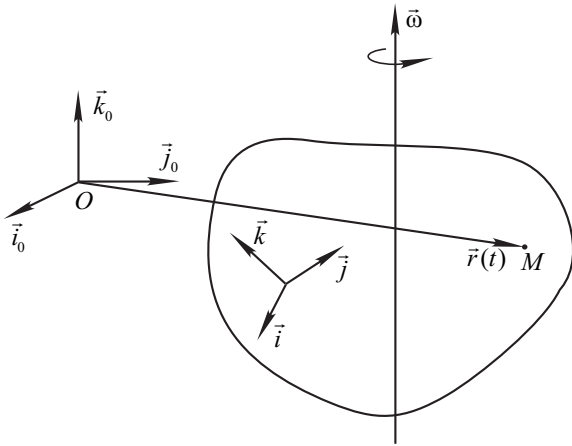


Рис. 4.11.

$$\begin{aligned}
 &= [\vec{\omega} \times (\vec{v}_{\text{пер.}} + \vec{v}_{\text{отн.}})] + \left( \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k} \right) + \\
 &+ \left( \frac{dx}{dt} \cdot [\vec{\omega} \times \vec{i}] + \frac{dy}{dt} \cdot [\vec{\omega} \times \vec{j}] + \frac{dz}{dt} \cdot [\vec{\omega} \times \vec{k}] \right) = \\
 &= [\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{пер.}}] + [\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{отн.}}] + \vec{a}_{\text{отн.}} + [\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{отн.}}] = \\
 &= \vec{a}_{\text{пер.}} + \vec{a}_{\text{отн.}} + 2[\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{отн.}}].
 \end{aligned}$$

В этом равенстве слагаемые

$$[\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{пер.}}] =: \vec{a}_{\text{пер.}}$$

и

$$\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k} =: \vec{a}_{\text{отн.}}$$

являются соответственно переносным и относительным ускорениями, а слагаемое  $2[\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{отн.}}]$  — так называемым *кориолисовым* ускорением  $\vec{a}_{\text{кор.}}$ .

Итак, абсолютное ускорение равно сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{пер.}} + \vec{a}_{\text{отн.}} + \vec{a}_{\text{кор.}}$$

Отметим, что  $\vec{a}_{\text{пер.}} = [\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{пер.}}] = [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]]$  представляет собой *двойное векторное произведение*.

## ИНТЕГРАЛЫ

## § 1. Первообразная и неопределенный интеграл

К понятию первообразной приводит следующая физическая задача. Пусть  $x$  — время,  $y = f(x)$  — координата точки, движущейся по оси  $y$ , в момент времени  $x$ . Тогда  $f'(x) = v(x)$  — скорость точки в момент времени  $x$ . Если известна зависимость координаты от времени, т.е. известна функция  $f(x)$ , то для нахождения скорости  $v(x)$  нужно выполнить операцию дифференцирования.

Пусть теперь наоборот — известна зависимость скорости от времени, т.е. известна функция  $v(x)$ , а требуется найти зависимость координаты от времени, т.е. функцию  $f(x)$ , такую, производная  $f'(x)$  которой равна заданной функции  $v(x)$ :  $f'(x) = v(x)$ . Тем самым возникает задача, *обратная дифференцированию*.

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на промежутке  $X$ .

**Определение.** Функция  $F(x)$  называется *первообразной* для функции  $f(x)$  на промежутке  $X$ , если  $\forall x \in X : F'(x) = f(x)$ .

В соответствии с этим определением функция  $f(x)$ , задающая координату точки на оси в момент времени  $x$ , является первообразной для функции  $v(x)$ , задающей скорость точки:  $f'(x) = v(x)$ .

**Примеры.**

1)  $F(x) = \ln x$  — первообразная для  $f(x) = 1/x$  на полупрямой  $X_+ = (0; +\infty)$ , т.к.  $(\ln x)' = 1/x \forall x \in (0; +\infty)$ .

$F(x) = \ln(-x)$  — первообразная для  $f(x) = 1/x$  на полупрямой  $X_- = (-\infty; 0)$ , т.к.

$$(\ln(-x))' = -1/(-x) = 1/x \forall x \in (-\infty; 0).$$

Отсюда следует, что  $F(x) = \ln|x|$  — первообразная для  $f(x) = 1/x$  на полупрямых  $X_+$  и  $X_-$ .

2) Для функции

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$



первообразной на  $(-\infty; +\infty)$  является функция

$$F(x) = \begin{cases} x^2/2, & \text{если } x \geq 0, \\ -x^2/2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

В самом деле,

$$\forall x > 0 : F'(x) = x = f(x); \quad \forall x < 0 : F'(x) = -x = f(x).$$

Остается доказать (сделайте это самостоятельно), что

$$\exists F'(0) = 0 = f(0).$$

3) Рассмотрим функцию

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Она имеет первообразную  $F(x) = x$  на полупрямой  $(0; +\infty)$ , имеет первообразную  $F(x) = -x$  на полупрямой  $(-\infty; 0)$ , но не имеет первообразной на всей числовой прямой  $(-\infty; +\infty)$ .

Отметим, что если  $F(x)$  — первообразная для  $f(x)$  на промежутке  $X$ , то есть  $\forall x \in X : F'(x) = f(x)$ , то  $F(x) + C$ , где  $C$  — любое число, также первообразная для  $f(x)$  на промежутке  $X$ , так как  $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$ . Справедливо и обратное.

**Теорема 1 (основная теорема интегрального исчисления).**

Если  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  — любые две первообразные для функции  $f(x)$  на промежутке  $X$ , то  $F_1(x) - F_2(x) = C = \operatorname{const}$  на этом промежутке.

Доказательство.

Положим  $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$ . Нужно доказать, что  $F(x) = \operatorname{const}$  на промежутке  $X$ . Имеем

$$\forall x \in X : F'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Таким образом, нужно доказать, что если  $F'(x) \equiv 0$  на промежутке  $X$ , то  $F(x) = C = \operatorname{const}$  на  $X$ . При всей очевидности этого утверждения мы пока *не можем* его доказать. Это утверждение будет доказано позже.

**Следствие.** Если  $F(x)$  — одна из первообразных для  $f(x)$  на промежутке  $X$ , то любая первообразная  $\Phi(x)$  для  $f(x)$  на этом промежутке имеет вид

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

где  $C$  — некоторая постоянная.

**Определение.** Совокупность всех первообразных для функции  $f(x)$  на промежутке  $X$  называется *неопределенным интегралом* от  $f(x)$  на этом промежутке и обозначается так:

$$\int f(x)dx.$$

В этом обозначении функция  $f(x)$  называется *подынтегральной функцией*, а выражение  $f(x)dx$  — *подынтегральным выражением*. Отметим, что  $f(x)dx$  является дифференциалом любой первообразной  $F(x)$  для  $f(x)$ :

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx. \quad (5.1)$$

Операция вычисления неопределенного интеграла называется *интегрированием*. В силу следствия из теоремы 1

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (5.2)$$

где  $F(x)$  — одна из первообразных для  $f(x)$ , а  $C$  — произвольная постоянная.

**Пример.**  $\int \cos x dx = \sin x + C$ .

Замечание по поводу обозначения: почему используется такое обозначение:  $\int f(x)dx$ , а не более краткое:  $\int f(x)$ ? Во-первых, потому, что  $dx$  указывает, по какой переменной ищется первообразная:

$$\int xy dx = \frac{yx^2}{2} + C; \quad \int xy dy = \frac{xy^2}{2} + C.$$

Во-вторых, дифференциал  $dx$  играет роль в формуле замены переменной, о которой пойдет речь в разделе 3.

Отметим, что символом  $\int f(x)dx$  мы будем обозначать как всю совокупность первообразных, так и некоторую из них.

Поставим вопрос: для каких функций  $f(x)$  существует первообразная? Позднее мы покажем, что *первообразная существует для любой непрерывной на промежутке функции  $f(x)$* . Разрывные функции также могут иметь первообразную.

**Пример.** Функция

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

является первообразной на  $(-\infty; +\infty)$  для функции

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

которая разрывна в точке  $x = 0$ , поскольку  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  не существует. Равенство  $F'(x) = f(x)$ , если  $x \neq 0$ , проверяется непосредственно путем дифференцирования функции  $x^2 \sin \frac{1}{x}$ ; равенство  $F'(0) = f(0) = 0$  требует отдельного обоснования (получите это равенство, пользуясь определением производной).

Если первообразная для  $f(x)$  является элементарной функцией, то говорят, что интеграл

$$\int f(x) dx$$

*выражается через элементарные функции.* Оказывается, что интеграл от элементарной функции может не выражаться через элементарные функции, т.е. *класс элементарных функций не замкнут относительно операции интегрирования.*

**Примеры:**  $\int e^{-x^2} dx$ ;  $\int \sin(x^2) dx$   $\int \frac{\sin x}{x} dx$  — эти интегралы не выражаются через элементарные функции.

Таблица основных интегралов.

- 1)  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$ ;
- 2)  $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$ ;
- 3)  $\int \sin x dx = -\cos x + C$ ;
- 4) (допишите таблицу самостоятельно).

## § 2. Основные свойства неопределенных интегралов

- 1)  $d(\int f(x) dx) = f(x) dx$ ;
- 2)  $\int dF(x) = F(x) + C$ ;
- 3)  $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ ;
- 4)  $\forall k \in \mathbb{R} \quad (k \neq 0) : \int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ .

Свойства 1) и 2) следуют из равенств (5.1) и (5.2) (см. раздел 5.1).

Докажем справедливость равенства 3). Пусть  $F(x)$  и  $G(x)$  — первообразные для  $f(x)$  и  $g(x)$  соответственно. Тогда  $F'(x) = f(x)$ ,  $G'(x) = g(x)$  и

$$\int f(x)dx = F(x) + C_1; \quad \int g(x)dx = G(x) + C_2,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

Сложим (вычтем) два последних равенства:

$$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = [F(x) \pm G(x)] + (C_1 \pm C_2). \quad (5.3)$$

С другой стороны, поскольку  $[F(x) \pm G(x)]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$ , то функция  $F(x) \pm G(x)$  является первообразной для функции  $f(x) \pm g(x)$ , поэтому

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = [F(x) \pm G(x)] + C, \quad (5.4)$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Сравнивая правые части равенств (5.3) и (5.4), приходим к равенству

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,$$

что и требовалось доказать.

Справедливость равенства 4) докажите самостоятельно.

### § 3. Два метода интегрирования

#### Замена переменной

**Теорема 2.** Пусть функция  $x = \varphi(t)$  определена и дифференцируема на промежутке  $T$  и множеством ее значений является промежуток  $X$ . Пусть на  $X$  определена функция  $f(x)$ , имеющая первообразную  $F(x)$ . Тогда функция  $F(\varphi(t))$  является первообразной для функции  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  на промежутке  $T$ .

**Доказательство.** Используя равенство  $F'(x) = f(x)$  и правило дифференцирования сложной функции, получаем:

$$[F(\varphi(t))] = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

что и доказывает утверждение теоремы 2.

**Следствие.** Поскольку

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C, \quad (5.5)$$

а

$$F(\varphi(t)) + C = (F(x) + C) \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(x)dx \Big|_{x=\varphi(t)},$$

то формулу (5.5) можно записать в виде

$$\int f(x)dx \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Эта формула называется *формулой замены переменной в неопределенном интеграле*. Она показывает, что если в интеграле  $\int f(x)dx$  делается замена переменной  $x = \varphi(t)$ , то нужно подставить вместо  $x$  функцию  $\varphi(t)$ , а вместо  $dx$  — дифференциал  $d\varphi(t) = \varphi'(t)dt$  (тем самым проясняется предназначение множителя  $dx$  в обозначении интеграла).

**Примеры.** 1)  $\int \sin(\alpha x)dx$ .

Сделаем замену переменной  $x = t/\alpha$ . Тогда  $dx = dt/\alpha$  и по формуле замены переменной получаем:

$$\int \sin(\alpha x)dx = \frac{1}{\alpha} \int \sin t dt = -\frac{1}{\alpha} \cos t + C = -\frac{1}{\alpha} \cos \alpha x + C.$$

$$2) \int \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx \quad (a > 0).$$

Подынтегральная функция определена на промежутке  $0 \leq x < a$ . Сделаем замену переменной  $x = a \sin^2 t$ , где  $0 \leq t < \pi/2$ . Тогда

$$dx = 2a \sin t \cos t dt, \quad \sin t = \sqrt{\frac{x}{a}}, \quad t = \arcsin \sqrt{\frac{x}{a}}, \quad \cos t = \sqrt{1 - \frac{x}{a}}.$$

Применяя формулу замены переменной, приходим к равенствам:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx \Big|_{x=a^2 \sin^2 t} &= \int \sqrt{\frac{a \sin^2 t}{a - a \sin^2 t}} \cdot 2a \sin t \cos t dt = \\ &= 2a \int \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \sin t \cos t dt = 2a \int \sin^2 t dt = a \int (1 - \cos 2t) dt = \\ &= a \left( t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + C = a(t - \sin t \cos t) + C. \end{aligned}$$

Возвращаясь от переменной  $t$  снова к переменной  $x$  (с помощью выражений для  $t, \sin t$  и  $\cos t$ ), получаем:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx &= a \cdot \arcsin \sqrt{\frac{x}{a}} - a \sqrt{\frac{x}{a}} \sqrt{1 - \frac{x}{a}} + C = \\ &= a \cdot \arcsin \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{x(a-x)} + C. \end{aligned}$$

### Интегрирование по частям

**Теорема 3.** Пусть функции  $u(x)$  и  $v(x)$  определены и дифференцируемы на промежутке  $X$  и пусть функция  $v(x)u'(x)$  имеет первообразную, то есть на промежутке  $X$  существует интеграл

$$\int v(x)u'(x)dx.$$

Тогда интеграл

$$\int u(x)v'(x)dx$$

также существует на промежутке  $X$  и выполняется равенство

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Это равенство называется *формулой интегрирования по частям*.

Доказательство. Воспользуемся равенством

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

откуда следует:  $u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x)$ . Функция  $[u(x)v(x)]'$  имеет первообразную  $[u(x)v(x)]$ , функция  $u'(x)v(x)$  имеет первообразную по условию теоремы. Следовательно, функция  $u(x)v'(x)$  также имеет первообразную и при этом

$$\begin{aligned} \int u(x)v'(x)dx &= \int \left[ [u(x)v(x)]' - v(x)u'(x) \right] dx = \\ &= u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Поскольку  $v'(x)dx = dv$ ,  $u'(x)dx = du$ , то формулу интегрирования по частям можно записать в виде

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Смысл интегрирования по частям состоит в том, что вычисление интеграла  $\int u dv$  сводится к вычислению интеграла  $\int v du$ , который может оказаться проще исходного интеграла. Пример:

$$\int x e^x dx = \int x d(e^x) = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

#### § 4. Интегрирование рациональных функций

Рациональная функция (или рациональная дробь)  $P_n(x)/Q_m(x)$  называется *правильной*, если  $n < m$  (здесь  $n$  и  $m$  — степени многочленов  $P_n(x)$  и  $Q_m(x)$ ). Правильную рациональную дробь можно разложить на сумму так называемых *простейших дробей*. Рассмотрим пример:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^4 - 1} &= \frac{x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \\ &= \frac{x^3(A+B+C) + x^2(A-B+D) + x(A+B-C) + (A-B-D)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}. \end{aligned}$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в числителях левой и правой дробей, получаем систему уравнений относительно  $A, B, C$  и  $D$ :

$$\begin{cases} A + B + C = 0, \\ A - B + D = 0, \\ A + B - C = 1, \\ A - B - D = 0, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение  $A = B = 1/4$ ,  $C = -1/2$ ,  $D = 0$ . Таким образом, искомое разложение имеет вид:

$$\frac{x}{x^4 - 1} = \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} - \frac{x}{2(x^2+1)}.$$

Обратимся теперь к общему случаю произвольной правильной рациональной дроби  $P_n(x)/Q_m(x)$ . Пусть знаменатель  $Q_m(x)$  имеет следующее разложение на множители:

$$Q_m(x) = (x-a)^\alpha \dots (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\gamma \dots (x^2+rx+s)^\delta,$$

где числа  $a, \dots, b$  — различные вещественные корни этого многочлена;  $x^2 + px + q, \dots, x^2 + rx + s$  — квадратные трехчлены с вещественными коэффициентами, имеющие комплексные (различные) корни;  $\alpha, \dots, \delta$  — натуральные числа — кратности соответствующих корней, причем, как нетрудно видеть,  $(\alpha + \dots + \beta) + 2(\gamma + \dots + \delta) = m$ . Можно доказать, что всякий многочлен с вещественными коэффициентами имеет единственное разложение указанного вида; оно называется *разложением многочлена с вещественными коэффициентами на произведение неприводимых вещественных множителей*.

Правильную рациональную дробь  $P_n(x)/Q_m(x)$ , у которой знаменатель имеет приведенное выше представление, можно разложить, и притом единственным образом, на сумму простейших дробей следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = & \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1}{(x-a)} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \\ & + \dots + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{M_\gamma x + N_\gamma}{(x^2 + px + q)^\gamma} + \dots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \dots + \\ & + \frac{L_\delta x + K_\delta}{(x^2 + rx + s)^\delta} + \dots + \frac{L_1 x + K_1}{x^2 + rx + s}. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $A_\alpha, \dots, K_1$  можно определить таким же способом, как в рассмотренном примере. Этот способ нахождения коэффициентов называется *методом неопределенных коэффициентов*.

Таким образом, интегрирование правильной рациональной дроби сводится к интегрированию простейших дробей четырех типов. Рассмотрим интегралы от этих простейших дробей.

1)

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln |x-a| + C.$$

2)

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{(x-a)^\alpha} dx &= A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^\alpha} = A(x-a)^{-\alpha+1} \frac{1}{-\alpha+1} + C = \\ &= \frac{A}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}} + C \quad (\alpha \in \mathbb{N}, \alpha > 1). \end{aligned}$$

3)

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx,$$



причем  $p^2 - 4q < 0$ , и, следовательно, квадратный трехчлен  $x^2 + px + q$  имеет комплексные корни.

Введем обозначение  $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$  и сделаем замену переменной  $t = x + \frac{p}{2}$ . Тогда  $x^2 + px + q = (x + p/2)^2 + (q - p^2/4) = t^2 + a^2$ ,  $x = t - p/2$ ,  $dx = dt$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{M(t - p/2) + N}{t^2 + a^2} dt = M \int \frac{tdt}{t^2 + a^2} + \\ &+ \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{t^2 + a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \frac{1}{a} \int \frac{d(t/a)}{1 + (t/a)^2} = \\ &= \frac{M}{2} \ln(t^2 + a^2) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} = \\ &= \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{2\sqrt{q - p^2/4}} \operatorname{arctg} \frac{x + p/2}{\sqrt{q - p^2/4}} + C. \end{aligned}$$

4)

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\alpha} dx,$$

причем  $\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha > 1$ , а квадратный трехчлен  $x^2 + px + q$  имеет комплексные корни.

Снова введем обозначение  $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$  и сделаем замену переменной  $t = x + p/2$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\alpha} dx &= \int \frac{Mt + (N - Mp/2)}{(t^2 + a^2)^\alpha} dt = \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^\alpha} + (N - Mp/2) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^\alpha} = \\ &= \frac{M}{2(1 - \alpha)(t^2 + a^2)^{\alpha-1}} + (N - Mp/2) J_\alpha, \end{aligned}$$

где  $J_\alpha = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^\alpha}$  ( $\alpha > 1$ ). Для вычисления интеграла  $J_\alpha$  воспользуемся методом интегрирования по частям, считая  $\alpha \geq 1$ :

$$J_\alpha = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^\alpha} = \frac{t}{(t^2 + a^2)^\alpha} - \int t d\left(\frac{1}{(t^2 + a^2)^\alpha}\right) = \frac{t}{(t^2 + a^2)^\alpha} -$$

$$\begin{aligned}
-\int t(-\alpha)(t^2 + a^2)^{-\alpha-1} \cdot 2t dt &= \frac{t}{(t^2 + a^2)^\alpha} + 2\alpha \int \frac{t^2 + a^2 - a^2}{(t^2 + a^2)^{\alpha+1}} dt = \\
&= \frac{t}{(t^2 + a^2)^\alpha} + 2\alpha \left[ \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^\alpha} - a^2 \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{\alpha+1}} \right] = \\
&= \frac{t}{(t^2 + a^2)^\alpha} + 2\alpha J_\alpha - 2\alpha a^2 J_{\alpha+1}.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем *рекуррентную формулу* для вычисления  $J_\alpha$ :

$$J_{\alpha+1} = \frac{1}{2\alpha a^2} \left[ \frac{t}{(t^2 + a^2)^\alpha} + (2\alpha - 1)J_\alpha \right].$$

Поскольку

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(t/a)}{1 + (t/a)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C,$$

то, полагая в рекуррентной формуле  $\alpha = 1$ , находим  $J_2$ :

$$J_2 = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \left[ \frac{t}{t^2 + a^2} + \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} \right] + C;$$

полагая в рекуррентной формуле  $\alpha = 2$  и зная  $J_2$ , найдем  $J_3$ , и т.д.

Таким образом, каждая из простейших дробей интегрируется в элементарных функциях.

Если рациональная дробь  $P_n(x)/Q_m(x)$  неправильная, т.е.  $n \geq m$ , то, разделив  $P_n(x)$  на  $Q_m(x)$ , получим

$$P_n(x) = Q_m(x) \cdot T_{n-m}(x) + R_k(x),$$

где  $T_{n-m}(x)$  и  $R_k(x)$  — многочлены степени  $n - m$  и  $k$ , причем  $k < m$ . Отсюда

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

где второе слагаемое в правой части равенства представляет собой правильную рациональную дробь. Тем самым, интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

**Общий вывод:** любая рациональная функция интегрируется в элементарных функциях.

**Замечание.** Пусть  $Q_m(x) = (x - a)^\alpha \varphi(x)$ , где  $\varphi(a) \neq 0$ , т.е.  $x = a$  — вещественный корень кратности  $\alpha$ . Тогда

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x - a)^\alpha \varphi(x)} = \frac{A_\alpha}{(x - a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x - a)^{\alpha-1}} + \dots$$

Умножив последнее равенство на  $(x - a)^\alpha$  и положив затем  $x = a$ , получим:

$$A_\alpha = \frac{P_n(a)}{\varphi(a)} = \frac{P_n(x)}{\varphi(x)} \Big|_{x=a}.$$

Таким образом, чтобы найти коэффициент  $A_\alpha$ , нужно в дроби  $\frac{P_n(x)}{(x - a)^\alpha \varphi(x)}$  вычеркнуть в знаменателе множитель  $(x - a)^\alpha$ , а затем в оставшемся выражении положить  $x = a$ . Такой способ нахождения коэффициента  $A_\alpha$  называется *методом вычеркивания*.

### Примеры.

1) Вычислим интеграл от правильной рациональной дроби, рассмотренной в начале этого раздела:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{xdx}{x^2+1} = \\ &= \frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x^2-1}{x^2+1} \right| + C. \end{aligned}$$

2)

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}.$$

Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}.$$

Используя метод вычеркивания, находим  $A$  и  $B$ :  $A = \frac{1}{2a}$ ,  $B = -\frac{1}{2a}$ . Итак,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{2a} \int \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2a} \left( \ln|x-a| - \ln|x+a| \right) + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C. \end{aligned}$$

Это интеграл носит название «высокий логарифм».

3)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Первый способ. Воспользуемся *подстановкой Эйлера*

$$t = x + \sqrt{x^2 + 1}.$$

Тогда  $t - x = \sqrt{x^2 + 1} \implies t^2 - 2xt + x^2 = x^2 + 1$ , откуда

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t}, \quad dx = \frac{2t \cdot 2t - 2(t^2 - 1)}{4t^2} dt = \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt,$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = t - x = t - \frac{t^2 - 1}{2t} = \frac{t^2 + 1}{2t}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} &= \int \frac{t^2 + 1}{2t^2} \cdot \frac{2t}{t^2 + 1} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \\ &= \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right) + C. \end{aligned}$$

Второй способ. Сделаем замену переменной  $x = \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ .

Тогда

$$dx = \operatorname{ch} t dt, \quad t = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right).$$

Учитывая равенство  $\operatorname{sh}^2 t + 1 = \operatorname{ch}^2 t$ , получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{\operatorname{ch} t dt}{\operatorname{ch} t} = t + C = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right) + C.$$

Аналогично выводится равенство

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| + C.$$

Итак,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C.$$

Этот интеграл называется «длинный логарифм».

4)

$$\int \frac{dx}{5 \cos x + 4}.$$

Положим  $t = \operatorname{tg}(x/2)$ , тогда

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$5 \cos x + 4 = \frac{5-5t^2}{1+t^2} + 4 = \frac{9-t^2}{1+t^2}.$$

Используя выписанные равенства, а также формулу «высокого логарифма», получаем:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5 \cos x + 4} &= 2 \int \frac{dt}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{9-t^2} = -2 \int \frac{dt}{t^2-9} = \\ &= -\frac{2}{6} \ln \left| \frac{t-3}{t+3} \right| + C = -\frac{1}{3} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3} \right| + C. \end{aligned}$$

## § 5. Понятие определенного интеграла

Пусть функция  $f(x)$  определена на сегменте  $[a, b]$ , где  $a < b$ . Выберем на сегменте  $[a, b]$  произвольным образом точки  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ , так, что

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

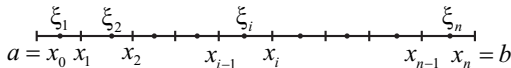


Рис. 5.1.

Определенный выбор точек  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  назовем *разбиением* сегмента  $[a, b]$ , сами точки  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  назовем *точками разбиения*, а сегменты  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — *частичными сегментами*. На каждом частичном сегменте  $[x_{i-1}, x_i]$  возьмем какую-нибудь точку  $\xi_i$  (рис. 5.1). Точки  $\xi_i$  называются *промежуточными точками*.

Положим  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  (замечим, что  $\Delta x_i > 0$ ) и составим сумму

$$I(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

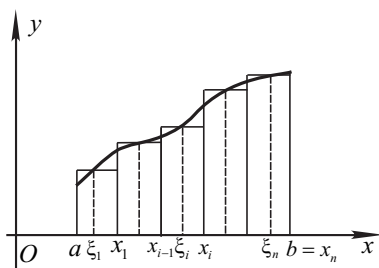


Рис. 5.2.

Число  $I(x_i, \xi_i)$  называется *интегральной суммой* функции  $f(x)$ , соответствующей данному разбиению сегмента  $[a, b]$  и данному выбору промежуточных точек  $\xi_i$  на частичных сегментах  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Геометрический смысл интегральной суммы для  $f(x) \geq 0$  — площадь ступенчатой фигуры (рис. 5.2).

Пусть  $\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ . Величину  $\Delta$  называют *диаметром разбиения*.

**Определение.** Число  $I$  называется пределом интегральных сумм  $I(x_i, \xi_i)$  при  $\Delta \rightarrow 0$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , такое, что для любого разбиения  $[a, b]$ , у которого  $\Delta < \delta$ , и любого выбора точек  $\xi_i$  выполняется неравенство

$$|I(x_i, \xi_i) - I| < \varepsilon.$$

Если существует  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} I(x_i, \xi_i) = I$ , то функция  $f(x)$  называется интегрируемой (по Риману) на  $[a, b]$ , а число  $I$  называется определенным интегралом от функции  $f(x)$  по сегменту  $[a, b]$  и обозначается так:

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Геометрический смысл определенного интеграла для непрерывной функции  $f(x) \geq 0$ : интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  равен площади криволинейной трапеции (рис. 5.3) (это будет доказано в главе II). **Физические примеры:**

1)  $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$  — путь, пройденный точкой по прямой за промежуток времени  $[t_1, t_2]$  при скорости  $v(t)$ .

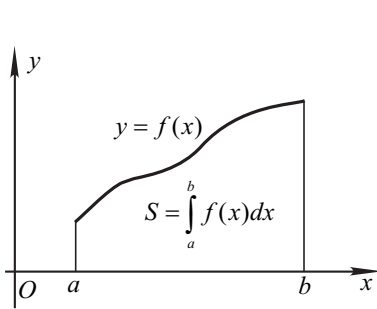


Рис. 5.3.

2)  $A = \int_a^b f(x) dx$  — работа силы  $f(x)$  при перемещении материальной точки по оси  $x$  из точки  $a$  в точку  $b$  (направление силы совпадает с направлением оси  $x$ , если  $f(x) > 0$ , и противоположно направлению оси  $x$ , если  $f(x) < 0$ ).

Поставим вопрос: для каких функций  $f(x)$  существует

$\int_a^b f(x) dx$ , то есть какие функции интегрируемы?

Неограниченная на сегменте  $[a, b]$  функция  $f(x)$  неинтегрируема, так как для любого разбиения  $[a, b]$  интегральная сумма  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$  может быть сделана сколь угодно большой за счет выбора точек  $\xi_i$ , и, следовательно, не существует предела интегральных сумм при  $\Delta \rightarrow 0$ .

Рассмотрим два примера ограниченных функций.

1)  $f(x) = c = \text{const}$ ,  $x \in [a, b]$ .

Для любого разбиения  $[a, b]$  и любого выбора точек  $\xi_i$ :

$$I(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = c \sum_{i=1}^n \Delta x_i = c(b - a).$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} I(x_i, \xi_i) = c(b - a),$$

то есть

$$\int_a^b c dx = c(b - a)$$

Итак, постоянная на сегменте функция интегрируема на этом сегменте.

2)  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррациональное число,} \end{cases}$  где  $x \in [a, b]$  —

(функция Дирихле).

Для любого разбиения сегмента  $[a, b]$  интегральная сумма

$I(x_i, \xi_i)$  может принимать значения от 0 до  $(b - a)$  в зависимости от выбора точек  $\xi_i$ . Следовательно, не существует  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} I(x_i, \xi_i)$ , то есть функция Дирихле не интегрируема по Риману.

В дальнейшем мы будем рассматривать только ограниченные функции.

Наша цель — доказать интегрируемость непрерывных функций, некоторых разрывных функций, в частности, кусочно-непрерывных функций, и монотонных функций. Для этого потребуется развить теорию верхних и нижних сумм Дарбу.

## § 6. Суммы Дарбу

Пусть  $f(x)$  — ограниченная на  $[a, b]$  функция. Рассмотрим произвольное разбиение сегмента  $[a, b]$  на частичные сегменты  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Введем обозначения:

$$M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

и составим две суммы:

$$S = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i; \quad s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i,$$

где  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ .

Числа  $S$  и  $s$  называются *верхней и нижней суммами* функции  $f(x)$  для данного разбиения сегмента  $[a, b]$  или, коротко, *верхней и нижней суммами Дарбу*.

**Свойства сумм Дарбу.**

I. Так как  $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  выполняются неравенства  $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ , то

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

то есть для данного разбиения

$$s \leq I(x_i, \xi_i) \leq S. \quad (5.6)$$

Итак, *любая интегральная сумма данного разбиения заключена между нижней и верхней суммами этого разбиения*. Иначе говоря, нижняя и верхняя суммы данного разбиения являются



нижней и верхней гранями множества интегральных сумм этого разбиения. Более того,

$$s = \inf \{I(x_i, \xi_i)\}, \quad S = \sup \{I(x_i, \xi_i)\}. \quad (5.7)$$

Это следует из того, что точку  $\xi_i$  на частичном сегменте  $[x_{i-1}, x_i]$  можно выбрать так, что значение  $f(\xi_i)$  будет сколь угодно мало отличаться от  $m_i$  (и также от  $M_i$ ).

II. Чтобы отличать одно разбиение сегмента  $[a, b]$  от другого, будем обозначать разбиения буквой  $T$  с различными индексами.

Пусть разбиение  $T_2$  сегмента  $[a, b]$  получено путем добавления нескольких новых точек к разбиению  $T_1$ . Нижнюю и верхнюю суммы разбиений  $T_1$  и  $T_2$  обозначим  $s_1, S_1$  и  $s_2, S_2$  соответственно. Тогда

$$s_2 \geq s_1, \quad S_2 \leq S_1.$$

Другими словами, при измельчении разбиения нижняя сумма не убывает, а верхняя — не возрастает.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда к разбиению  $T_1$  добавлена только одна новая точка разбиения:  $x' \in [x_{j-1}, x_j]$  (рис. 5.4). Докажем, что будет выполнено неравенство  $S_2 \leq S_1$  (неравенство  $s_2 \geq s_1$  доказывается аналогично). Введем обозначения

$$\Delta x'_j = x' - x_{j-1}, \quad \Delta x''_j = x_j - x', \quad M'_j = \sup_{[x_{j-1}, x']} f(x), \quad M''_j = \sup_{[x', x_j]} f(x).$$

Тогда

$$\Delta x_j = x_j - x_{j-1} = \Delta x'_j + \Delta x''_j, \quad M'_j \leq M_j, \quad M''_j \leq M_j.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= M_j \Delta x_j - (M'_j \Delta x'_j + M''_j \Delta x''_j) = \\ &= M_j (\Delta x'_j + \Delta x''_j) - M'_j \Delta x'_j - M''_j \Delta x''_j = \\ &= (M_j - M'_j) \Delta x'_j + (M_j - M''_j) \Delta x''_j \geq 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

то есть  $S_2 \leq S_1$ . Отсюда следует, что если добавлено несколько новых точек разбиения, то неравенство  $S_2 \leq S_1$  также выполняется.

Пусть для разбиения  $T_1$   $\Delta = \max \Delta x_i$ , пусть

$$\sup_{[a,b]} f(x) = M, \quad \inf_{[a,b]} f(x) = m,$$

и пусть разбиение  $T_2$  получено путем добавления одной новой точки к разбиению  $T_1$ . Тогда из (5.8) следует неравенство  $S_1 - S_2 \leq (M - m) \cdot \Delta$ . Если разбиение  $T_2$  получено путем добавления  $p$  новых точек к разбиению  $T_1$ , то

$$S_1 - S_2 \leq p(M - m) \Delta, \quad s_2 - s_1 \leq p(M - m) \Delta. \quad (5.9)$$

III. *Нижняя сумма произвольного разбиения не превосходит верхней суммы любого другого разбиения.*

Доказательство. Пусть суммы Дарбу произвольных разбиений  $T_1$  и  $T_2$  равны  $s_1, S_1$  и  $s_2, S_2$ . Требуется доказать, что  $s_1 \leq S_2$  и  $s_2 \leq S_1$ .

Обозначим буквой  $T$  объединение разбиений  $T_1$  и  $T_2$ . Пусть суммы Дарбу разбиения  $T$  равны  $s$  и  $S$ . Тогда, используя свойство II и неравенства (5.6), приходим к неравенствам

$$s_1 \leq s \leq S \leq S_1,$$

$$s_2 \leq s \leq S \leq S_2,$$

из которых следует, что  $s_1 \leq S_2, s_2 \leq S_1$ .

IV. Рассмотрим множество  $\{s\}$  всевозможных нижних сумм и множество  $\{S\}$  всевозможных верхних сумм (для данной функции  $f(x)$  на сегменте  $[a, b]$ ). Множество  $\{S\}$  ограничено снизу (любой нижней суммой) и, следовательно, имеет точную нижнюю грань. Множество  $\{s\}$  ограничено сверху (любой верхней суммой) и, следовательно, имеет точную верхнюю грань. Введем обозначения

$$\bar{I} = \inf\{S\}, \quad \underline{I} = \sup\{s\}.$$

Числа  $\bar{I}$  и  $\underline{I}$  называются *верхним и нижним интегралами Дарбу* (от функции  $f(x)$  на сегменте  $[a, b]$ ).

Утверждение.  $\underline{I} \leq \bar{I}$ .

Доказательство. Предположим, что  $\underline{I} > \bar{I}$  и положим  $K = \frac{1}{2}(\bar{I} + \underline{I})$ . Согласно определению точных граней числового множества найдутся такие верхняя сумма  $S'$  и нижняя сумма  $s''$ , которые удовлетворяют неравенствам  $S' < K$  и  $s'' > K$  (рис. 5.5).

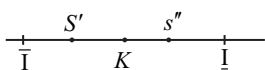


Рис. 5.5.

Отсюда следует, что  $S' < s''$ , что противоречит свойству III. Поэтому наше предположение неверно, и следовательно,  $\underline{I} \leq \bar{I}$ .

Итак, для нижней  $s$  и верхней  $S$  сумм любого разбиения справедливы неравенства

$$s \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S. \quad (5.10)$$

## V. Лемма Дарбу.

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} S = \bar{I}; \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} s = \underline{I},$$

то есть  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , такое, что для любого разбиения сегмента  $[a, b]$ , у которого  $\Delta < \delta$ , выполняются неравенства

$$S - \bar{I} < \varepsilon \quad \text{и} \quad \underline{I} - s < \varepsilon.$$

Доказательство. Проведем доказательство для верхних сумм. Пусть

$$M = \sup_{[a,b]} f(x), \quad m = \inf_{[a,b]} f(x).$$

Если  $M = m$ , то  $f(x) = \text{const} = M = m$ , и для любого разбиения сегмента  $[a, b]$  имеем:  $S = m(b - a)$ ,  $\bar{I} = m(b - a)$  и, следовательно,  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} S = \bar{I}$ .

Пусть  $M > m$ . Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$ . Так как  $\bar{I} = \inf_{[a,b]} S$ , то существует разбиение  $T_1$  сегмента  $[a, b]$ , такое, что

его верхняя сумма  $S_1$  удовлетворяет неравенству  $S_1 < \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2}$ .

Пусть разбиение  $T_1$  содержит  $p$  точек разбиения. Возьмем

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2p(M - m)}$$

и докажем, что верхняя сумма  $S$  любого разбиения  $T$ , у которого  $\Delta < \delta$ , удовлетворяет неравенству  $S - \bar{I} < \varepsilon$ . Это и будет означать, что

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} S = \bar{I}.$$

Рассмотрим произвольное разбиение  $T$ , у которого  $\Delta < \delta$ . Объединим его с разбиением  $T_1$ . Получим разбиение  $T_2 = T \cup T_1$ . Его верхнюю сумму обозначим  $S_2$ . Согласно первому неравенству в (5.9)  $S - S_2 \leq p(M - m)\Delta$ , а поскольку

$$\Delta < \delta = \frac{\varepsilon}{2p(M - m)},$$

то

$$S - S_2 < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.11)$$

С другой стороны, согласно свойству II,  $S_2 \leq S_1$ , а поскольку  $S_1 < \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2}$ , то  $S_2 < \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2}$ , или

$$S_2 - \bar{I} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.12)$$

Складывая неравенства (5.11) и (5.12), приходим к неравенству  $S - \bar{I} < \varepsilon$ , что и требовалось доказать.

### § 7. Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции

**Теорема 4.** Для того, чтобы ограниченная на сегменте функция была интегрируемой на этом сегменте, необходимо и достаточно, чтобы  $\underline{I} = \bar{I}$ .

Доказательство. а) Необходимость. Пусть функция  $f(x)$  интегрируема на сегменте  $[a, b]$ , то есть существует  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} I(x_i, \xi_i) = I$ .

Тогда, согласно определению предела интегральных сумм,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , такое, что для любого разбиения сегмента  $[a, b]$ , у которого  $\Delta < \delta$ , и для любого выбора промежуточных точек  $\xi_i$  выполняется неравенство  $|I(x_i, \xi_i) - I| < \frac{\varepsilon}{4}$ . Зафиксируем какое-нибудь одно из таких разбиений. Пусть его суммы Дарбу равны  $s$  и  $S$ .

В силу свойства I (см. равенства (5.7)) можно так выбрать точки  $\xi_i$  (обозначим их  $\xi'_i$ ), что будет выполнено неравенство  $I(x_i, \xi'_i) - s < \frac{\varepsilon}{4}$ , и можно выбрать их так, что (обозначим этот выбор через  $\xi''_i$ ), что  $S - I(x_i, \xi''_i) < \frac{\varepsilon}{4}$ .

Используя эти неравенства, получаем, что для зафиксированного нами разбиения справедливы соотношения

$$\begin{aligned} S - s &= [S - I(x_i, \xi''_i)] + [I(x_i, \xi''_i) - I] + [I - I(x_i, \xi'_i)] + \\ &+ [I(x_i, \xi'_i) - s] < \varepsilon, \end{aligned}$$

поскольку каждое из выражений в квадратных скобках меньше  $\frac{\varepsilon}{4}$ .

Воспользуемся теперь неравенствами (5.10):

$$s \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S.$$

Из этих неравенств и неравенства  $S - s < \varepsilon$  следует, что

$$0 \leq \bar{I} - \underline{I} < \varepsilon.$$

Так как  $\varepsilon$  — произвольное положительное число, то  $\bar{I} - \underline{I} = 0$ , то есть  $\underline{I} = \bar{I}$ .

Необходимость условия  $\underline{I} = \bar{I}$  для интегрируемости  $f(x)$  на сегменте  $[a, b]$  доказана.

Замечание. Попутно мы установили, что если  $f(x)$  интегрируема на сегменте  $[a, b]$ , то  $\forall \varepsilon > 0$  существует такое разбиение сегмента  $[a, b]$ , для которого  $S - s < \varepsilon$ .

б) Достаточность. Пусть  $\underline{I} = \bar{I} = I$ . По лемме Дарбу  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} s = I$  и  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} S = I$ , а так как для любого разбиения  $s \leq I(x_i, \xi_i) \leq S$  (неравенства (5.6)), то  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} I(x_i, \xi_i) = I$ . Это и означает, что  $f(x)$  интегрируема на сегменте  $[a, b]$ . Теорема 4 доказана.

**Пример.** Снова рассмотрим функцию Дирихле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \end{cases} \quad x \in [a, b].$$

Для любого разбиения сегмента  $[a, b]$  имеем:  $s = 0$ ,  $S = b - a$ . Поэтому

$$\underline{I} = \sup\{s\} = 0, \quad \bar{I} = \inf\{S\} = b - a.$$

Таким образом,  $\underline{I} \neq \bar{I}$ , поэтому, согласно теореме 4, функция Дирихле не интегрируема ни на одном сегменте.

**Теорема 5.** Для того, чтобы ограниченная на сегменте  $[a, b]$  функция была интегрируемой на этом сегменте, необходимо и достаточно, чтобы  $\forall \varepsilon > 0$  существовало такое разбиение сегмента  $[a, b]$  (хотя бы одно), для которого  $S - s < \varepsilon$ .

Доказательство. а) Необходимость. См. замечание после доказательства необходимости в теореме 4.

б) Достаточность. Пусть  $\forall \varepsilon > 0$  существует разбиение сегмента  $[a, b]$ , для которого  $S - s < \varepsilon$ . Снова воспользуемся неравенствами (5.10):

$$s \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S,$$

из которых следует, что  $0 \leq \underline{I} - \bar{I} < \varepsilon$ , откуда в силу произвольности  $\varepsilon$  получаем  $\underline{I} = \bar{I}$ . По теореме 4 функция интегрируема на сегменте  $[a, b]$ , что и требовалось доказать. Теорема 5 доказана.

Замечание. Используя обозначения

$$M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

введем величину  $w_i = M_i - m_i$  и назовем ее *колебанием функции*  $f(x)$  на частичном сегменте  $[x_{i-1}, x_i]$ . Тогда разность  $S - s$  можно записать в виде

$$S - s = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n w_i \Delta x_i.$$

## § 8. Классы интегрируемых функций

**1. Интегрируемость непрерывных функций.** Предварительно введем понятие равномерной непрерывности функции.

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется равномерно непрерывной на промежутке  $X$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , такое, что  $\forall x' \in X$  и  $\forall x'' \in X$ , удовлетворяющих условию  $|x'' - x'| < \delta$ , выполняется неравенство

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

В этом определении существенно то, что  $\delta$  — одно и то же число для всех точек из промежутка  $X$ .

Из определения следует, что равномерно непрерывная на промежутке функция является непрерывной в каждой точке этого промежутка. Обратное неверно.

**Пример.**  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in X = (0; 1]$ .

Функция  $\frac{1}{x}$  непрерывна в каждой точке промежутка  $X$ . Докажем, что она не является равномерно непрерывной на этом промежутке, то есть  $\exists \varepsilon > 0$ , такое что  $\forall \delta > 0 \exists x'$  и  $x'' \in X$ , для которых  $|x'' - x'| < \delta$ , а

$$|f(x'') - f(x')| = \left| \frac{1}{x''} - \frac{1}{x'} \right| \geq \varepsilon.$$

Возьмем  $\varepsilon = 1$  и положим  $x' = \frac{1}{n}$ ,  $x'' = \frac{1}{n+2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\forall \delta > 0 \exists n$ , такое, что  $|x'' - x'| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} < \delta$ . Но при этом

$$\left| \frac{1}{x''} - \frac{1}{x'} \right| = |n + 2 - n| = 2 > \varepsilon = 1.$$

Таким образом, функция  $f(x) = \frac{1}{x}$  не является равномерно непрерывной на промежутке  $(0; 1]$ .

Особое место среди промежутков занимает сегмент. Оказывается, что непрерывная на сегменте функция равномерно непрерывна на этом сегменте. Это утверждение называется **теоремой Кантора** и будет доказано в главе 7. Там же будут доказаны еще две теоремы о непрерывных на сегменте функциях.

**1-ая теорема Вейерштрасса.** Непрерывная на сегменте функция ограничена на этом сегменте.

**2-ая теорема Вейерштрасса.** Непрерывная на сегменте функция достигает на этом сегменте своих точных граней.

Это означает, что если  $f(x)$  непрерывна на сегменте  $[a, b]$ , то найдутся  $x'$  и  $x'' \in [a, b]$ , такие, что

$$f(x') = M = \sup_{[a,b]} f(x), \quad f(x'') = m = \inf_{[a,b]} f(x).$$

**Следствие из теоремы Кантора.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на сегменте  $[a, b]$ , то  $\forall \varepsilon > 0$  существует разбиение сегмента  $[a, b]$ , у которого каждое  $w_i < \varepsilon$  ( $w_i$  — колебание функции  $f(x)$  на частичном сегменте  $[x_{i-1}, x_i]$ ).

Доказательство. По теореме Кантора  $f(x)$  равномерно непрерывна на сегменте  $[a, b]$ . Поэтому  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , такое, что  $\forall x', x'' \in [a, b]$ , удовлетворяющих условию  $|x'' - x'| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ . Возьмем какое-нибудь разбиение сегмента  $[a, b]$ , у которого  $\Delta < \delta$ , и рассмотрим произвольный частичный сегмент  $[x_{i-1}, x_i]$ . Для этого частичного сегмента  $x_i - x_{i-1} < \delta$ ,  $w_i = M_i - m_i$ , где  $M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$ ,  $m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$ . Докажем, что  $w_i = M_i - m_i < \varepsilon$ .

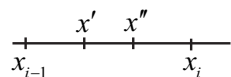


Рис. 5.6.

Согласно второй теореме Вейерштрасса  $\exists x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$  (рис. 5.6), такие, что  $f(x') = M_i$  и  $f(x'') = m_i$ . Так как

$$|x'' - x'| \leq x_i - x_{i-1} < \delta,$$

то  $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ , то есть  $M_i - m_i < \varepsilon$ , что и требовалось доказать.

**Теорема 6.** Непрерывная на сегменте функция интегрируема на этом сегменте.

Доказательство. Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на сегменте  $[a, b]$ . Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$ . В силу следствия из теоремы

Кантора существует такое разбиение сегмента  $[a, b]$ , у которого каждое  $w_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$ . Для этого разбиения

$$S - s = \sum_{i=1}^n w_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon.$$

Отсюда по теореме 5 следует, что  $f(x)$  интегрируема на сегменте  $[a, b]$ . Теорема 6 доказана.

## 2. Интегрируемость некоторых разрывных функций.

Пусть функция  $f(x)$  определена на сегменте  $[a, b]$  и имеет на этом сегменте точки разрыва (конечное число или даже бесконечно много точек разрыва).

Будем говорить, что все точки разрыва функции можно покрыть конечным числом интервалов со сколь угодно малой суммой длин, если  $\forall \varepsilon > 0$  существует конечное число интервалов, заключающих в себе все точки разрыва и имеющих сумму длин, меньшую  $\varepsilon$ .

### Примеры.

**1.** Пусть функция  $f(x)$  имеет  $n$  точек разрыва на сегменте  $[a, b]$ . Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$  и заключим каждую точку разрыва в интервал длины, меньшей  $\frac{\varepsilon}{n}$ . Тогда все точки разрыва будут заключены в конечное число интервалов с суммой длин, меньшей  $\varepsilon$ .

Таким образом, все точки разрыва функции можно покрыть в данном случае конечным числом интервалов со сколь угодно малой суммой длин.

**2.** Функция Дирихле, заданная на сегменте  $[a, b]$ . Эта функция разрывна во всех точках сегмента  $[a, b]$ , и, следовательно, все ее точки разрыва нельзя покрыть конечным числом интервалов со сколь угодно малой суммой длин.

**Теорема 7.** Если функция  $f(x)$  определена и ограничена на сегменте  $[a, b]$  и если все ее точки разрыва можно покрыть конечным числом интервалов со сколь угодно малой суммой длин, то функция  $f(x)$  интегрируема на сегменте  $[a, b]$ .

Доказательство. Пусть

$$\sup_{[a,b]} f(x) = M, \quad \inf_{[a,b]} f(x) = m, \quad M > m.$$

Отметим, что для любого разбиения сегмента  $[a, b]$  каждое  $w_i \leq M - m$ .



Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$  и покроем все точки разрыва функции конечным числом интервалов с суммой длин, меньшей  $\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$ . Остальная часть сегмента  $[a, b]$  представляет собой конечное число непересекающихся сегментов, на каждом из которых функция  $f(x)$  непрерывна. В силу следствия из теоремы Кантора каждый из этих сегментов можно разбить на частичные сегменты так, что на каждом из частичных сегментов будет выполнено неравенство  $w_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ . Объединяя эти разбиения и интервалы, покрывающие точки разрыва функции, получим разбиение сегмента  $[a, b]$ , для которого

$$S - s = \sum_i w_i \Delta x_i = \sum_i' w_i \Delta x_i + \sum_i'' w_i \Delta x_i, \quad (5.13)$$

где  $\sum_i'$  — сумма по интервалам, покрывающим точки разрыва функции,  $\sum_i''$  — сумма по сегментам, на которых функция  $f(x)$  непрерывна. Из (5.13) следует, что

$$\begin{aligned} S - s &< (M - m) \sum_i' \Delta x_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_i'' \Delta x_i < \\ &< (M - m) \frac{\varepsilon}{2(M - m)} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b - a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, для произвольного  $\varepsilon > 0$  мы построили такое разбиение сегмента  $[a, b]$ , для которого  $S - s < \varepsilon$ . Отсюда по теореме 5 следует, что  $f(x)$  интегрируема на сегменте  $[a, b]$ . Теорема 7 доказана.

**Следствие.** Если функция  $f(x)$  ограничена на сегменте  $[a, b]$  и имеет на этом сегменте конечное число точек разрыва, то она интегрируема на сегменте  $[a, b]$ .

В частности, кусочно-непрерывная функция на сегменте  $[a, b]$ , то есть имеющая на этом сегменте конечное число точек разрыва первого рода, интегрируема на сегменте  $[a, b]$ .

### 3. Интегрируемость монотонных функций.

**Теорема 8.** Монотонная на сегменте функция интегрируема на этом сегменте.

Доказательство. Пусть для определенности  $f(x)$  не убывает на сегменте  $[a, b]$  и не является постоянной. Тогда  $f(b) > f(a)$ . Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$  и разобьем сегмент  $[a, b]$  на равные частичные сегменты, у которых длина меньше  $\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ . Для

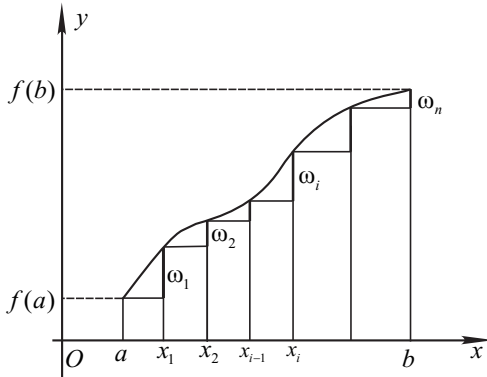


Рис. 5.7.

этого разбиения

$$S - s = \sum_{i=1}^n w_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^n w_i.$$

Но для неубывающей функции  $\sum_{i=1}^n w_i = f(b) - f(a)$  (см. рис. 5.7).

Поэтому  $S - s < \varepsilon$ , а отсюда по теореме 5 следует, что функция  $f(x)$  интегрируема на сегменте  $[a, b]$ . Теорема 8 доказана.

## § 9. Свойства определенного интеграла

1. Мы ввели определенный интеграл по сегменту  $[a, b]$  при условии  $a < b$ .

Положим по определению:

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Следующие свойства будем рассматривать при условии  $a < b$ .

### 2. Линейное свойство.

Если  $f(x)$  и  $g(x)$  — интегрируемые функции на сегменте  $[a, b]$ , а  $\alpha$  и  $\beta$  — любые вещественные числа, то функция  $\alpha f(x) + \beta g(x)$  также интегрируема на сегменте  $[a, b]$  и справедливо равенство

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx. \quad (5.14)$$

Доказательство. Составим интегральную сумму для функции  $\alpha f(x) + \beta g(x)$  и запишем ее в виде

$$\sum_{i=1}^n (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) \Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i + \beta \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i.$$

Переходя к пределу при  $\Delta \rightarrow 0$ , получаем формулу (5.14).

Отметим два частных случая формулы (5.14).

Если  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$  или  $\beta = -1$ , то

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

(интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций);

если  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta = 0$ , то из (5.14) получаем:

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

(постоянный множитель можно выносить за знак интеграла).

3. Если функция  $f(x)$  интегрируема на сегменте  $[a, b]$ , то она интегрируема на любом сегменте  $[c, d] \subset [a, b]$ . Докажите это утверждение самостоятельно, опираясь на теорему 5.

4. Аддитивность интеграла.

Пусть функция  $f(x)$  интегрируема на сегменте  $[a, b]$  и точка  $c \in (a, b)$ . Тогда

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (5.15)$$

Свойство интеграла, выраженное формулой (5.15), и называется аддитивностью интеграла.

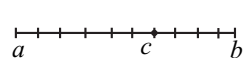


Рис. 5.8.

Доказательство. Рассмотрим такие разбиения сегмента  $[a, b]$ , для которых точка  $c$  является точкой разбиения (см. рис. 5.8). Для таких разбиений

$$\sum_{[a,c]} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{[a,b]} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Переходя к пределу при  $\Delta \rightarrow 0$ , получаем равенство (5.15).

Отметим, что равенство (5.15) справедливо и в том случае, когда точка  $c$  лежит вне сегмента  $[a, b]$ . Пусть, например,  $a < b < c$  (рис. 5.9), и функция  $f(x)$  интегрируема на сегменте  $[a, c]$ . Тогда, согласно доказанному, справедливо равенство

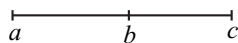


Рис. 5.9.

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

Отсюда следует, что

$$\int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

а так как

$$-\int_b^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx,$$

(свойство 1), то

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

то есть формула (5.15) верна и в этом случае.

5. Если функция  $f(x)$  интегрируема на сегменте  $[a, b]$  и  $f(x) \geq 0$

на  $[a, b]$ , то  $I = \int_a^b f(x)dx \geq 0$ .

Доказательство. Так как  $f(x) \geq 0$ , то любая интегральная сумма неотрицательна:

$$I(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0. \quad (5.16)$$

По определению  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} I(x_i, \xi_i) = I$ , то есть  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , такое, что для любого разбиения сегмента  $[a, b]$ , у которого  $\Delta < \delta$ , выполняется неравенство  $|I(x_i, \xi_i) - I| < \varepsilon$ , или

$$I - \varepsilon < I(x_i, \xi_i) < I + \varepsilon. \quad (5.17)$$

Предположим, что  $I < 0$ , и возьмем  $\varepsilon = -I$ . Тогда правое неравенство в (5.17) примет вид  $I(x_i, \xi_i) < 0$ , что противоречит неравенству (5.16). Полученное противоречие доказывает, что  $I \geq 0$ .

**Следствие.** Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на сегменте  $[a, b]$  и  $f(x) \geq g(x)$ , то  $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ .

В самом деле, так как  $f(x) - g(x) \geq 0$ , то  $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \geq 0$ ,

откуда следует искомое неравенство  $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ .

6. Если функция  $f(x)$  интегрируема на сегменте  $[a, b]$ , то функция  $|f(x)|$  также интегрируема на этом сегменте, и справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Докажите это самостоятельно, опираясь на теорему 5.

Замечание. Обратное утверждение неверно, то есть из интегрируемости функции  $|f(x)|$  на сегменте  $[a, b]$  не следует интегрируемость  $f(x)$  на этом сегменте.

**Пример.**

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ -1, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \end{cases} \quad x \in [a, b].$$

Так как  $|f(x)| = 1$ , то  $|f(x)|$  — интегрируемая функция, но при этом  $f(x)$  — неинтегрируемая функция (это доказывается так же, как для функции Дирихле).

7. Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на сегменте  $[a, b]$ , то:  
а) функция  $f(x)g(x)$  также интегрируема на сегменте  $[a, b]$ ;  
б) если, кроме того,  $\inf_{[a,b]} g(x) > 0$  (либо  $\sup_{[a,b]} g(x) < 0$ ), то функция

$\frac{f(x)}{g(x)}$  также интегрируема на сегменте  $[a, b]$ .

Докажите это самостоятельно, опираясь на теорему 5.

## § 10. Формулы среднего значения

**Теорема 9.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на сегменте  $[a, b]$ ,  $g(x) \geq 0$  (либо  $\leq 0$ )  $\forall x \in [a, b]$ ,  $M = \sup_{[a,b]} f(x)$ ,  $m = \inf_{[a,b]} f(x)$ . Тогда существует число  $\mu \in [m, M]$ , для которого справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx. \quad (5.18)$$

Доказательство. Пусть (для определенности)  $g(x) \geq 0$  на  $[a, b]$ . Так как  $m \leq f(x) \leq M$ , то  $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ . Отсюда следует, что

$$\int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b Mg(x)dx$$

или

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx. \quad (5.19)$$

Так как  $g(x) \geq 0$ , то  $\int_a^b g(x)dx \geq 0$  (свойство 5). Если  $\int_a^b g(x)dx = 0$ ,

то из (5.19) получаем, что  $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ , и, следовательно,

равенство (5.18) справедливо для любого  $\mu$ . Если  $\int_a^b g(x)dx > 0$ ,

то, разделив на  $\int_a^b g(x)dx$ , получим неравенства

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M.$$

Дробь, стоящая в средней части неравенства, является некоторым числом из сегмента  $[m, M]$ . Обозначив это число буквой  $\mu$ , приходим к равенству (5.18). Теорема 9 доказана.

### Следствия.

1. Если выполнены условия теоремы 9, и, кроме того, функция  $f(x)$  непрерывна на сегменте  $[a, b]$ , то  $\exists \xi \in [a, b]$ , такая, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx. \quad (5.20)$$

Доказательство. В силу непрерывности функция  $f(x)$  принимает все значения из сегмента  $[m, M]$ , в частности, для числа  $\mu$  из формулы (5.18) найдется такая точка  $\xi \in [a, b]$ , для которой  $f(\xi) = \mu$ . Подставляя в формулу (5.18)  $f(\xi)$  вместо  $\mu$ , приходим к равенству (5.20).

2. Если  $g(x) = 1$  на  $[a, b]$ , то формулы 5.18) и (5.20) дают равенства

$$\int_a^b f(x)dx = \mu \int_a^b dx = \mu(b - a), \quad (5.21)$$

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a). \quad (5.22)$$

Формулы (5.18), (5.20)-(5.22) называются формулами среднего значения.

**Задача.** Пусть  $f(x) = \cos x$ ,  $g(x) = \cos x$ ,  $a = 0$ ,  $b = \pi$ .

1. Докажите, что в этом случае равенство (5.18)) не выполняется ни для какого числа  $\mu$ .
2. Какое условие теоремы 9 не выполнено в этом случае?

## § 11. Формула Ньютона–Лейбница

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на сегменте  $[a, b]$ . Тогда она интегрируема на этом сегменте, а также на любом сегменте, содержащемся в сегменте  $[a, b]$ . Отметим на сегменте  $[a, b]$  произвольную точку  $x$

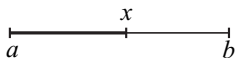


Рис. 5.10.

(рис. 5.10). Числовую переменную, изменяющуюся от  $a$  до  $x$ ,

обозначим буквой  $t$ , и рассмотрим интеграл  $\int_a^x f(t)dt$ . Он называется *интегралом с переменным верхним пределом*. Обозначим его  $F(x)$ :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

**Теорема 10.** Непрерывная на сегменте  $[a, b]$  функция  $f(x)$  имеет первообразную на этом сегменте. Одной из первообразных является функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Доказательство. Согласно определению первообразной нужно доказать, что  $\forall x \in [a, b]$  существует  $F'(x)$ , равная  $f(x)$ , то есть

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x).$$

Используя выражение для  $F(x)$  и свойства определенного интеграла, получаем:

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x) - F(x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt + \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi) \cdot \Delta x, \end{aligned}$$

где  $\xi \in [x, x + \Delta x]$ .

Последнее равенство получено с помощью формулы среднего значения.

Следовательно,

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(\xi).$$

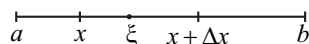


Рис. 5.11.

Перейдем в этом равенстве к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Поскольку  $\xi \rightarrow x$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  (см. рис. 5.11), а функция  $f(x)$  непрерывна в любой точке сегмента  $[a, b]$ , то  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x)$ . Таким образом,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x),$$



что и требовалось доказать. Теорема 10 доказана.

Любые две первообразные данной функции  $f(x)$  отличаются на постоянную, поэтому в силу теоремы 10 любая первообразная  $\Phi(x)$  функции  $f(x)$ , непрерывной на сегменте  $[a, b]$ , имеет вид

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + C,$$

где  $C$  — некоторое число.

Положив в этом равенстве  $x = a$ , получим  $\Phi(a) = C$ . Положив теперь  $x = b$ , приходим к равенству  $\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt + \Phi(a)$ , откуда следует, что

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a). \quad (5.23)$$

Таким образом, *интеграл от непрерывной функции  $f(x)$  по сегменту  $[a, b]$  равен разности значений любой первообразной функции  $f(x)$ , взятых в точках  $b$  и  $a$ .*

Формула (5.23) называется *формулой Ньютона-Лейбница* и считается основной формулой интегрального исчисления. Она связывает определенный интеграл с неопределенным. Разность  $\Phi(b) - \Phi(a)$  часто записывают в виде  $\Phi(x)|_a^b$ .

**Примеры.** 1).

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2.$$

2)

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{+1} = \left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

**Задача.** Найдите первообразную функции  $e^{|x|}$  на сегменте  $[-1, 1]$  с помощью интеграла с переменным верхним пределом.

Замечание. Рассмотрим интеграл, у которого нижний и верхний пределы являются функциями аргумента  $x$ ,

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt.$$

Пусть  $f(t)$  — непрерывная функция,  $F(t)$  — ее первообразная,  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  — дифференцируемые функции.

По формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt = F(t) \Big|_{\varphi(x)}^{\psi(x)} = F(\psi(x)) - F(\varphi(x)).$$

Отсюда получаем, учитывая, что  $F'(t) = f(t)$ ,

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt = F'(\psi(x)) \cdot \psi'(x) - F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),$$

то есть

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt = f(\psi(x)) \cdot \psi'(x) - f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

## § 12. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

**Теорема 11.** Пусть: 1) функция  $f(x)$  определена и непрерывна на сегменте  $[a, b]$ ; 2) функция  $g(t)$  определена и имеет непрерывную производную на сегменте  $[\alpha, \beta]$ , причем  $a \leq g(t) \leq b$  при  $t \in [\alpha, \beta]$ ,  $g(\alpha) = a$ ,  $g(\beta) = b$ .

Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt$$

(оно называется *формулой замены переменной в определенном интеграле*).

Доказательство. Пусть  $F(x)$  — первообразная для функции  $f(x)$  на  $[a, b]$ , то есть  $F'(x) = f(x)$ . По формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (5.24)$$

Функция  $F(g(t))$  является первообразной для функции  $f(g(t))g'(t)$  на сегменте  $[\alpha, \beta]$ , так как

$$\frac{d}{dt} F(g(t)) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t))g'(t).$$

Применяя снова формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt = F(g(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a). \quad (5.25)$$

Сравнивая (5.24) и (5.25), приходим к искомому равенству.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt$$

Теорема 11 доказана.

Пример. Вычислить  $I = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2} dx$ .

Сделаем замену переменной  $x = \cos t$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ . Тогда

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sin t, \quad dx = -\sin t dt,$$

$$I = \int_{\pi}^0 (-\sin^2 t) dt = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \left( \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Геометрический смысл этого интеграла: функция  $y = \sqrt{1-x^2}$  задает на сегменте  $[-1, 1]$  полуокружность (см. рис. 5.12) с радиусом  $R = 1$ . По-

этому  $I = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2} dx$  есть площадь полукруга:

$$I = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

**Теорема 12.** Пусть функции  $u(x)$  и  $v(x)$  имеют на сегменте  $[a, b]$  непрерывные производные. Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \quad (5.26)$$

Это равенство называется *формулой интегрирования по частям в определенном интеграле*.

Доказательство. Так как функция  $u(x)v(x)$  является первообразной для непрерывной функции  $[u(x)v(x)]' = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$ , то, согласно формуле Ньютона–Лейбница, справедливо равенство

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b v(x)u'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b,$$

откуда следует искомое равенство (5.26). Теорема доказана.

Замечание. Так как  $v'(x)dx = dv$ ,  $u'(x)dx = du$ , то равенство (5.26) можно записать в виде

$$\int_a^b u(x)dv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du.$$

Пример.  $\int_0^\pi x \sin x dx = \int_0^\pi x d(-\cos x) = -x \cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi - 0 + \sin x\Big|_0^\pi = \pi.$

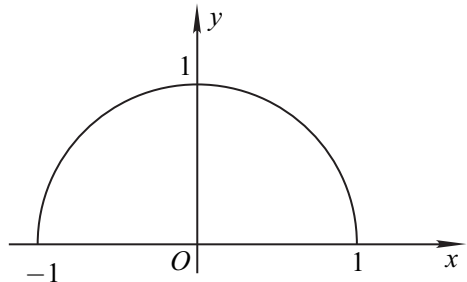


Рис. 5.12.

### § 13. Геометрические приложения определенного интеграла

1. **Длина кривой.** Рассмотрим кривую на плоскости, координаты точек которой в прямоугольной системе координат  $Oxy$  заданы уравнениями (см. рис. 5.13):

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (5.27)$$

Переменная  $t$  называется *параметром*, а уравнения (5.27) — *параметрическими уравнениями кривой*. Если различным зна-

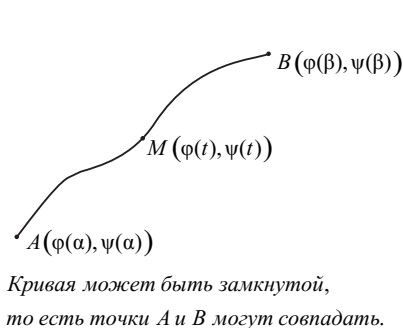


Рис. 5.13.

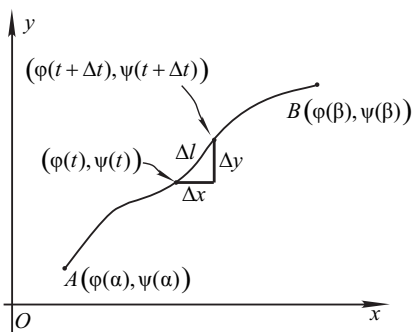


Рис. 5.14.

чениям  $t \in [\alpha, \beta]$  соответствуют различные точки  $(\varphi(t), \psi(t))$ , то есть нет кратных точек, то кривая называется *простой незамкнутой кривой*. Если точки  $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$  и  $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$  совпадают, а остальные точки не являются кратными, то кривая называется *простой замкнутой кривой*.

Для простой (незамкнутой или замкнутой) кривой, заданной уравнениями (5.27), рассмотрим произвольное разбиение сегмента  $[\alpha, \beta]$  точками  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ . Ему соответствует разбиение кривой точками  $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$ , где  $M_i = M(\varphi(t_i), \psi(t_i))$ . Впишем в кривую ломаную  $A, M_1, M_2, \dots, B$ . Обозначим длину ломаной через  $l(M_i)$  и положим  $\Delta t = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$ .

**Определение.** Число  $l$  называется пределом длин ломаных  $l(M_i)$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , такое, что для любого разбиения сегмента  $[\alpha, \beta]$ , у которого  $\Delta < \delta$ , выполняется неравенство

$$l - l(M_i) < \varepsilon$$

Если существует  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} l(M_i) = l$ , то кривая называется *спрямляемой*, а число  $l$  — *длиной кривой* (или *длиной дуги кривой*).

Если простая кривая задана уравнениями (5.27), причем функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  имеют непрерывные производные  $\varphi'(t)$  и  $\psi'(t)$  на сегменте  $[\alpha, \beta]$ , то кривая спрямляема, а ее длина выражается формулой

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \quad (5.28)$$

Обоснование этой формулы будет проведено в главе 12. Для того, чтобы наглядно представить себе, как получается формула (5.28), рассмотрим рис. 5.14. На этом рисунке

$$\Delta l \approx \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

$$\Delta x \approx dx = \varphi'(t)\Delta t, \quad \Delta y \approx dy = \psi'(t)\Delta t.$$

Отсюда получаем

$$\Delta l = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \Delta t \implies l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

Если кривая задана уравнением  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , то, полагая  $x = t$ ,  $y = f(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  и применяя формулу (5.28), получаем выражение для длины кривой в декартовых координатах:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)} dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (5.29)$$

Пусть кривая задана в полярных координатах уравнением (рис. 5.15)

$$r = r(\varphi), \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2.$$

Переходя к декартовым координатам, получим параметрические уравнения кривой (роль параметра играет  $\varphi$ ):

$$x = r(\varphi) \cos \varphi, \quad y = r(\varphi) \sin \varphi, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2.$$

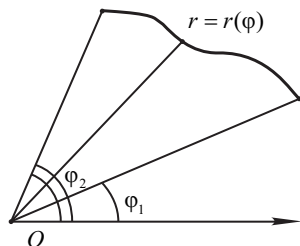


Рис. 5.15.

Применяя формулу (5.28), приходим к формуле длины кривой в полярных координатах (проделайте вычисления самостоятельно):

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi. \quad (5.30)$$

**Примеры. 1)**  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  (окружность радиуса  $R$  с центром в начале координат). По формуле (5.28) получаем

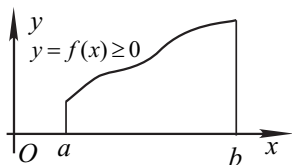
$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

**2)**  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$  (отрезок параболы).

По формуле (5.29) находим:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + (2x)^2)} dx = \left( x\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \ln \left( x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} \right) \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}). \end{aligned}$$

**2. Площадь криволинейной трапеции** (рис. 5.16).

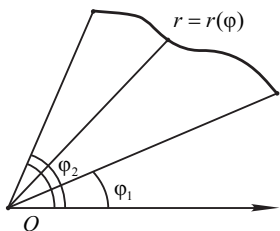


$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Рис. 5.16.

Обоснование этой формулы будет дано в главе 11.

## 2. Площадь криволинейного сектора (рис. 5.17).



$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Рис. 5.17.

## 3. Объем тела с известными поперечными сечениями (рис. 5.18).

Площадь сечения тела плоскостью  $x = \text{const}$  обозначим  $S(x)$ , тогда объем тонкого тела, заключенного между двумя близкими плоскостями  $x = \text{const}$  и  $x + dx = \text{const}$ , равен  $S(x)dx$ , поэтому

для объема  $V$  тела получается формула  $V = \int_a^b S(x)dx$ .

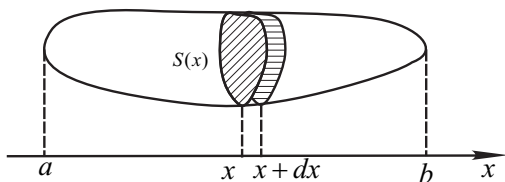


Рис. 5.18.

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

## Объем тела вращения (рис. 5.19).

### 4. Площадь поверхности вращения (рис. 5.19).

Элемент площади поверхности тела вращения равен

$$dS = 2\pi r \cdot dl = 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx,$$

поэтому для площади  $S$  поверхности тела получается формула

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$



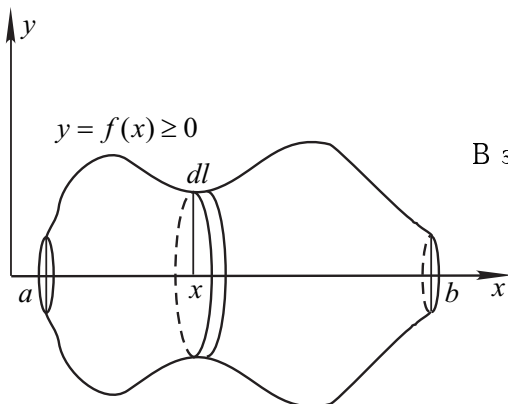


Рис. 5.19.

В этом случае  $S(x) = \pi f^2(x)$ ,

поэтому

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

## § 14. Физические приложения определенного интеграла

**1. Масса, координаты центра тяжести и моменты инерции плоской кривой.** Пусть простая кривая задана параметрическими уравнениями (5.27), причем  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  имеют непрерывные производные  $\varphi'(t)$  и  $\psi'(t)$  на сегменте  $[\alpha, \beta]$ , и пусть  $\rho(x, y)$  — линейная плотность массы в точке  $(x, y)$  кривой. Тогда масса  $m$  кривой выражается формулой

$$m = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

Аналогичная формула для массы кривой, заданной в декартовых координатах уравнением  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , имеет вид

$$m = \int_a^b \rho(x, f(x)) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Статические моменты (или моменты первого порядка) кривой относительно координатных осей в случае постоянной линейной плотности  $\rho \equiv 1$  вычисляются для кривой, заданной уравнениями (5.27), по формулам

$$M_x = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (\text{момент относительно оси } x),$$

$$M_y = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (\text{момент относительно оси } y),$$

а для кривой, заданной в декартовых координатах уравнением  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , по формулам

$$M_x = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \quad M_y = \int_a^b x \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Координаты  $(x_0, y_0)$  центра тяжести кривой выражаются формулами

$$x_0 = \frac{M_y}{l}, \quad y_0 = \frac{M_x}{l},$$

где  $l$  — длина кривой (см. формулы (5.28) и (5.29)).

Моменты инерции (или моменты второго порядка) кривой относительно осей координат в случае  $\rho \equiv 1$  вычисляются по формулам

$$I_x = \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (\text{относительно оси } x),$$

$$I_y = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (\text{относительно оси } y)$$

или (в декартовых координатах)

$$I_x = \int_a^b f^2(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \quad I_y = \int_a^b x^2 \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

## 2. Координаты центра тяжести и моменты инерции плоской фигуры.

Пусть плоская фигура  $G$  ограничена непрерывными кривыми  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , (причем  $f_1(x) \leq f_2(x)$ ) и отрезками прямых  $x = a$  и  $x = b$ , а поверхностная плотность  $\rho \equiv 1$ . Тогда статические моменты фигуры  $G$  выражаются формулами

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx \quad (\text{относительно оси } x),$$

$$M_y = \int_a^b x [f_2(x) - f_1(x)] dx \quad (\text{относительно оси } y),$$

а координаты  $(x_0, y_0)$  центра тяжести фигуры вычисляются по формулам

$$x_0 = \frac{M_y}{S}, \quad y_0 = \frac{M_x}{S},$$

где  $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$  — площадь фигуры  $G$ .

Моменты инерции фигуры  $G$  относительно осей координат выражаются формулами

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b [f_2^3(x) - f_1^3(x)] dx \quad (\text{относительно оси } x),$$

$$I_y = \int_a^b x^2 [f_2(x) - f_1(x)] dx \quad (\text{относительно оси } y).$$

**Задание.** Объясните (на эвристическом уровне), как получаются эти формулы.

## § 15. Методы приближенного вычисления определенных интегралов

В примерах, с которыми мы имели дело в этой главе, для вычисления определенных интегралов использовалась формула Ньютона-Лейбница. Ее удобно применять тогда, когда первообразная подынтегральной функции является элементарной функцией. Но это не всегда так. Примером может служить интеграл  $\int_a^b e^{-x^2} dx$ , который встречается во многих задачах математической физики.

В таких случаях пользуются приближенным вычислением интегралов. Мы рассмотрим три метода приближенного вычисления определенных интегралов — *метод прямоугольников*, *метод трапеций* и *метод парабол*.

Суть каждого из этих методов состоит в том, что сегмент интегрирования разбивается на несколько равных частичных сег-

ментов, на каждом из которых подынтегральная функция заменяется более простой функцией: постоянной (то есть многочленом нулевой степени) в методе прямоугольников, линейной функцией (то есть многочленом первой степени) в методе трапеций, квадратичной функцией (то есть многочленом второй степени) в методе парабол. Затем вычисляются интегралы по частичным сегментам от этих более простых функций, и их сумма дает приближенное значение для исходного определенного интеграла.

1. **Метод прямоугольников.** Требуется вычислить интеграл

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (5.31)$$

Разобьем сегмент  $[a, b]$  на  $n$  равных частичных сегментов точками

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Ведем обозначение:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = h.$$

Величина  $h$  называется *шагом* приближенного интегрирования.

Пусть  $\xi_i$  – середина частичного сегмента  $[x_{i-1}, x_i]$ . На каждом частичном сегменте  $[x_{i-1}, x_i]$  заменим функцию  $f(x)$  постоянной функцией, равной  $f(\xi_i)$  (см. рис. 5.20). Тогда

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i) dx = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot h, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.32)$$

С геометрической точки зрения это равенство означает, что если  $f(x) > 0$ , то площадь криволинейной трапеции, одной из сторон которой является сегмент  $[x_{i-1}, x_i]$ , заменяется площадью прямоугольника со сторонами, равными  $h$  и  $f(\xi_i)$ .

Просуммировав приближенные равенства (5.32) по  $i$

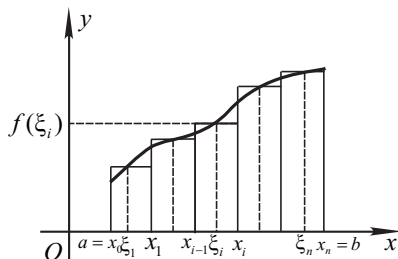


Рис. 5.20.

от 1 до  $n$ , приходим к приближенному равенству для интеграла (5.31):

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^n f(\xi_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i). \quad (5.33)$$

Обозначим разность между левой и правой частями этого равенства через  $R_n$ . Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) + R_n. \quad (5.34)$$

Равенство (5.34) называется *формулой прямоугольников*, а величина  $R_n$  — остаточным членом в этой формуле.

Если функция  $f(x)$  интегрируема на сегменте  $[a, b]$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) = \int_a^b f(x)dx$$

(предел интегральных сумм равен интегралу), поэтому  $R_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Таким образом, приближенные формулы (5.33) тем точнее, чем больше  $n$ . При конкретных вычислениях берут какое-то определенное  $n$  и вычисляют приближенное значение интеграла по формуле (5.33). Чтобы оценить погрешность этой формулы, нужно знать, как остаточный член  $R_n$  зависит от  $n$ .

**Теорема 13.** Если функция  $f(x)$  имеет на сегменте  $[a, b]$  непрерывную производную второго порядка, то найдется точка  $\eta \in [a, b]$ , такая, что

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot f''(\eta) = \frac{b-a}{24} f''(\eta) h^2. \quad (5.35)$$

Доказательство. Пусть  $F(x)$  — первообразная функции  $f(x)$  на сегменте  $[a, b]$ , то есть

$$F'(x) = f(x) \implies F''(x) = f'(x), \quad F'''(x) = f''(x), \quad x \in [a, b]. \quad (5.36)$$

Применяя формулу Ньютона-Лейбница и учитывая, что  $x_i = \xi_i + \frac{h}{2}$ ,  $x_{i-1} = \xi_i - \frac{h}{2}$ , получаем:

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx &= F(x)|_{x_{i-1}}^{x_i} = F(x_i) - F(x_{i-1}) = \\ &= F\left(\xi_i + \frac{h}{2}\right) - F\left(\xi_i - \frac{h}{2}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Разложим  $F\left(\xi_i + \frac{h}{2}\right)$  и  $F\left(\xi_i - \frac{h}{2}\right)$  по формуле Тейлора с центром разложения в точке  $\xi_i$  и остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\begin{aligned} F\left(\xi_i + \frac{h}{2}\right) &= F(\xi_i) + F'(\xi_i) \cdot \frac{h}{2} + \frac{1}{2} F''(\xi_i) \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} F'''(\eta_i) \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^3, \\ F\left(\xi_i - \frac{h}{2}\right) &= F(\xi_i) + F'(\xi_i) \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2} F''(\xi_i) \cdot \left(-\frac{h}{2}\right)^2 + \\ &+ \frac{1}{6} F'''(-\eta_i^*) \cdot \left(-\frac{h}{2}\right)^3, \end{aligned}$$

где  $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$  и  $\eta_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ . Подставляя эти выражения в правую часть (5.37), и учитывая (5.36), приходим к равенству

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx &= F'(\xi_i)h + \frac{1}{48} (F'''(\eta_i) + F'''(\eta_i^*)) h^3 = \\ &= f(\xi_i)h + \frac{1}{48} (f''(\eta_i) + f''(\eta_i^*)) h^3 = \\ &= \frac{b-a}{n} f(\xi_i) + \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \frac{f''(\eta_i) + f''(\eta_i^*)}{2n}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Просуммируем полученные равенства по  $i$  от 1 до  $n$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) + \\ &+ \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (f''(\eta_i) + f''(\eta_i^*))}{2n}. \end{aligned}$$

Сравнивая это равенство с равенством (5.34), получаем выражение для остаточного члена  $R_n$ :

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (f''(\eta_i) + f''(\eta_i^*))}{2n}.$$

Для доказательства справедливости равенства (5.35) остается доказать, что найдется точка  $\eta \in [a, b]$ , такая, что

$$\frac{\sum_{i=1}^n (f''(\eta_i) + f''(\eta_i^*))}{2n} = f''(\eta) \quad (5.38)$$

Заметим, что левая часть в равенстве (5.38) является средним арифметическим  $2n$  значений непрерывной на сегменте  $[a, b]$  функции  $f''(x)$ . Поэтому справедливость равенства (5.35) вытекает из следующего утверждения.

**Лемма.** Если  $g(x)$  — непрерывная функция на сегменте  $[a, b]$ , и  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — произвольные точки этого сегмента, то найдется точка  $\eta \in [a, b]$ , такая, что среднее арифметическое значений  $g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_n)$  равно  $g(\eta)$ , то есть

$$\frac{\sum_{i=1}^n g(x_i)}{n} = g(\eta).$$

Докажем эту лемму. Пусть  $m = \min_{[a,b]} g(x)$ ,  $M = \max_{[a,b]} g(x)$ . Тогда  $\forall x_i \in [a, b]: m \leq g(x_i) \leq M$ . Суммируя эти неравенства по  $i$  от 1 до  $n$  и деля на  $n$ , получаем:

$$m \leq \frac{\sum_{i=1}^n g(x_i)}{n} \leq M.$$

Мы видим, что дробь в средней части неравенств заключена между минимальным и максимальным значениями непрерывной функции  $f(x)$  на сегменте  $[a, b]$ . Согласно теореме о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение

найдется точка  $\eta \in [a, b]$ , такая, что  $g(\eta) = \frac{\sum_{i=1}^n g(x_i)}{n}$ , и тем самым

лемма доказана. Применяя лемму к непрерывной функции  $g''(x)$  (с заменой  $n$  на  $2n$ ), приходим к равенству (5.38).

Замечание. Равенство (5.35) показывает, что при вычислении интеграла по приближенной формуле (5.33) ошибка является величиной порядка  $h^2$  ( $R_n = O(h^2)$ ).

**2. Метод трапеций.** Сначала рассматриваем интеграл (5.31). Разобьем сегмент  $[a, b]$  на  $n$  равных частичных сегментов (см. рис. 5.21) точками

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

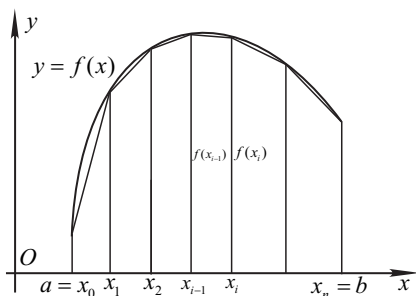


Рис. 5.21.

Как и в п.1, положим

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b - a}{n} = h.$$

На каждом частичном сегменте  $[x_{i-1}, x_i]$  заменим функцию  $f(x)$  линейной функцией  $A_i \cdot x + B_i$ , график которой проходит через точки  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$  и  $(x_i, f(x_i))$  (см. рис. 5.21). Тогда

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} (A_i \cdot x + B_i) dx = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{5.39}$$

С геометрической точки зрения это равенство означает, что если  $f(x) > 0$ , то площадь криволинейной трапеции заменяется площадью обычной трапеции с основаниями, равными  $f(x_{i-1})$  и  $f(x_i)$ , и высотой  $h$ .

Просуммировав приближенные равенства (5.39) по  $i$  от 1 до  $n$ , получим

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h = \frac{b - a}{2n} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]. \tag{5.40}$$



Точное значение интеграла  $\int_a^b f(x)dx$  отличается от правой части в равенстве (5.40) на некоторую величину  $R_n$ , то есть имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right] + R_n.$$

Это равенство называется *формулой трапеций*.

**Теорема 14.** Если функция  $f(x)$  имеет на сегменте  $[a, b]$  непрерывную производную второго порядка, то найдется точка  $\eta \in [a, b]$ , такая, что

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\eta) = -\frac{b-a}{12} f''(\eta)h^2.$$

Таким образом, как и в формуле прямоугольников, остаточный член в формуле трапеций является величиной порядка  $h^2$ .

Доказательство теоремы 14 проводится аналогично доказательству теоремы 13.

**3. Метод парабол.** Снова рассмотрим интеграл (5.31). Разобьем сегмент  $[a, b]$  на четное число  $2n$  равных частичных сегментов точками (см. рис. 5.22)  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2n} = b$ . Введем обозначения:

$$\Delta x_i = x_{2i} - x_{2i-2} = \frac{b-a}{n} = h.$$

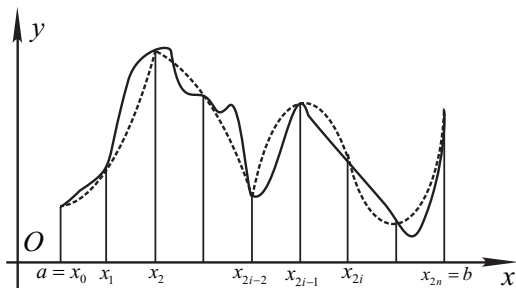


Рис. 5.22.

Рассмотрим сначала сегмент  $[x_0, x_2]$ . Заменим на этом сегменте функцию  $f(x)$  квадратичной функцией  $Ax^2 + Bx + C$ , причем коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  выберем так, чтобы график этой функции проходил через точки  $(x_0, f(x_0))$ ,  $(x_1, f(x_1))$  и  $(x_2, f(x_2))$ . Дока-

жем, что такой выбор коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$  возможен, и притом единственным способом.

Нужно доказать, что существуют такие числа  $A$ ,  $B$  и  $C$ , для которых выполнены равенства

$$\begin{cases} Ax_0^2 + Bx_0 + C = f(x_0), \\ Ax_1^2 + Bx_1 + C = f(x_1), \\ Ax_2^2 + Bx_2 + C = f(x_2). \end{cases} \quad (5.41)$$

Система (5.41) — это система трех линейных уравнений относительно  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_1 - x_2) = -\frac{h^3}{4},$$

поскольку  $x_0 - x_1 = x_1 - x_2 = -\frac{h}{2}$ ,  $x_0 - x_2 = -h$ . Так как определитель отличен от нуля, то система уравнений (5.41) имеет единственное решение. График функции

$$y = Ax^2 + Bx + C, \quad x \in [x_0, x_2]$$

(«отрезок» параболы) изображен на рисунке пунктирной линией. Отметим, что в частном случае, когда точки  $(x_0, f(x_0))$ ,  $(x_1, f(x_1))$  и  $(x_2, f(x_2))$  лежат на одной прямой, получится  $A = 0$ , и вместо «отрезка» параболы будет отрезок прямой.

Найдя  $A$ ,  $B$  и  $C$  из системы (5.41) и вычислив интеграл от функции  $Ax^2 + Bx + C$  по сегменту  $[x_0, x_2]$ , получим (проделайте вычисления самостоятельно):

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_1} (Ax^2 + Bx + C) dx = \frac{b-a}{6n} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)].$$

Аналогичное приближенное равенство имеет место для любого сегмента  $[x_{i-2}, x_{2i}]$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$  (соответствующие «отрезки» параболы изображены на рисунке пунктирными линиями):

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})].$$

Суммируя эти равенства по  $i$  от 1 до  $n$ , приходим к приближенному равенству для исходного интеграла:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \sum_{i=1}^n [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] = \quad (5.42)$$

$$= \frac{b-a}{6n} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) \right],$$

а обозначив разность между левой и правой частями приближенного равенства (5.42) через  $R_n$ , получаем формулу

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6n} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) \right] + R_n,$$

которая называется *формулой парабол* или *формулой Симпсона*.

**Теорема 15.** Если функция  $f(x)$  имеет на сегменте  $[a, b]$  непрерывную производную четвертого порядка, то найдется точка  $\eta \in [a, b]$ , такая, что

$$R_n = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\eta) = -\frac{b-a}{2880} f^{(4)}(\eta) h^4.$$

Таким образом, остаточный член в формуле парабол является величиной порядка  $h^4$ . Это означает, что приближенная формула (5.42) метода парабол является при малом  $h$  (то есть при больших  $n$ ) более точной, чем приближенные формулы (5.33) и (5.40) метода прямоугольников и метода трапеций. (Доказательство теоремы 15 см. в [1]).

**Пример.** Применим формулу парабол для приближенного вычисления интеграла  $\int_0^{\pi} \sin x dx$ . Его точное значение равно 2. Посмотрим, что получится по формуле парабол при самом минимальном значении  $n$ , то есть при  $n = 1$ .

Полагая в формуле (5.42)  $a = 0$ ,  $b = \pi$ ,  $n = 1$  и учитывая, что  $f(0) = f(\pi) = 0$ ,  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ , получим:

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \approx \frac{\pi}{6} \left[ f(0) + f(\pi) + 4f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{2}{3}\pi = 2 + \varepsilon,$$

где  $\varepsilon = 2 \left( \frac{\pi}{3} - 1 \right) < 0,1$ . Таким образом, уже при  $n = 1$  приближенное значение данного интеграла, вычисленное по формуле парабол, отличается от точного значения меньше, чем на 0,1. Этот пример свидетельствует о высокой эффективности метода парабол.

## ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Ранее было дано определение предела числовой последовательности:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad \text{если } \forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon.$$

Неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$  означает, что все члены последовательности с номерами, большими  $N$ , лежат в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$ . Было доказано, что *монотонная ограниченная последовательность сходится* (следствие из теоремы о пределе монотонной ограниченной функции). Кроме того, отмечалось, что если все  $x_n \in [a, b]$ , т.е.  $a \leq x_n \leq b$ , и при этом существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c,$$

то  $c \in [a, b]$ , т.е.  $a \leq c \leq b$ .

### § 1. Теорема о стягивающейся системе сегментов

Рассмотрим последовательность сегментов

$$[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n], \dots,$$

такую, что каждый следующий сегмент содержится в предыдущем, т.е. для любого номера  $n$  справедливы неравенства

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n,$$

и, кроме того,  $(b_n - a_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Такая последовательность сегментов называется *стягивающейся системой сегментов*.

**Теорема 1.** Существует единственная точка, принадлежащая всем сегментам стягивающейся системы.

Доказательство. Из неравенств  $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$  следует, что последовательность  $\{a_n\}$  — неубывающая, а последовательность  $\{b_n\}$  — невозрастающая. Кроме того, эти последова-

тельности ограничены, так как все их члены лежат на сегменте  $[a_1, b_1]$ . Следовательно, обе эти последовательности сходятся, а поскольку  $(b_n - a_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Обозначим этот предел буквой  $c$ . Так как  $\{a_n\}$  — неубывающая последовательность, то  $a_n \leq c$ , и так как  $\{b_n\}$  — невозрастающая последовательность, то  $b_n \geq c$ . Таким образом, для любого номера  $n$  справедливы неравенства  $a_n \leq c \leq b_n$ , то есть точка  $c$  принадлежит всем сегментам стягивающейся системы. Докажем теперь единственность такой точки.

Предположим противное, то есть предположим, что существует другая точка  $d \neq c$ , принадлежащая всем сегментам стягивающейся системы. Пусть, например,  $d > c$  (случай  $d < c$  рассматривается аналогично). Тогда  $\forall n : a_n \leq c < d \leq b_n$ , откуда  $b_n - a_n \geq d - c > 0$ . Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) \geq d - c > 0,$$

что противоречит условию  $(b_n - a_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Теорема 1 доказана.

Теорема 1 выражает свойство, которое называется *непрерывностью множества вещественных чисел*. Множество рациональных чисел этим свойством не обладает.

## § 2. Предельные точки последовательности

Пусть  $\{x_n\}$  — некоторая числовая последовательность. Рассмотрим произвольную возрастающую последовательность целых положительных чисел  $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ , например,  $5, 12, 27, 38, \dots$ . Отметим, что  $k_n \geq n$ . Выберем из последовательности  $\{x_n\}$  члены с номерами  $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ :

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}, \dots$$

Полученная таким образом последовательность называется *подпоследовательностью* последовательности  $\{x_n\}$ .

### Примеры:

- 1)  $\{x_{2n}\} = x_2, x_4, \dots, x_{2n}, \dots$
- 2)  $\{x_{k_n}\} = x_5, x_{12}, x_{27}, x_{38}, \dots$
- 3) сама последовательность  $\{x_n\}$  является своей подпоследовательностью ( $k_n = n$ ).

**Лемма 1.** Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

то любая подпоследовательность  $\{x_{k_n}\}$  сходится и имеет своим пределом число  $a$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Доказательство. Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$ . Начиная с некоторого номера  $N$  все  $x_n$  лежат в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$ . Следовательно, и все члены подпоследовательности  $\{x_{k_n}\}$  с номерами, большими  $N$ , лежат в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$ , а это и означает, что  $x_{k_n} \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ . Лемма 1 доказана.

Может случиться так, что сама последовательность расходится, но у нее есть сходящиеся подпоследовательности. Например, последовательность  $\{x_n\} = 1, 1/2, 1, 1/3, \dots, 1, 1/n, \dots$  расходится, однако ее подпоследовательности

$$\{x_{2n-1}\} = 1, 1, \dots, 1, \dots$$

и

$$\{x_{2n}\} = 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$$

сходятся: первая сходится к единице, а вторая — к нулю.

**Теорема 2 (Больцано–Вейерштрасса).** Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть  $\{x_n\}$  — ограниченная последовательность, то есть существуют числа  $a$  и  $b$ , такие, что  $\forall n: a \leq x_n \leq b$ . Разделим сегмент  $[a, b]$  пополам. По крайней мере один из двух получившихся сегментов содержит бесконечно много членов последовательности. Обозначим его  $[a_1, b_1]$ . Пусть  $x_{k_1}$  — какой-нибудь член последовательности, лежащий на сегменте  $[a_1, b_1]$ :  $a_1 \leq x_{k_1} \leq b_1$ .

Разделим теперь сегмент  $[a_1, b_1]$  пополам и обозначим через  $[a_2, b_2]$  ту половину, на которой лежит бесконечно много членов последовательности. Пусть  $x_{k_2}$  — какой-нибудь член последовательности с номером  $k_2 > k_1$ , лежащий на сегменте  $[a_2, b_2]$ :  $a_2 \leq x_{k_2} \leq b_2$ .

Продолжая этот процесс неограниченно, получим стягивающуюся систему сегментов  $\{[a_n, b_n]\}$ , так как  $b_n - a_n = (b - a)/2^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , и последовательность  $\{x_{k_n}\}$ , являющаяся подпоследовательностью последовательности  $\{x_n\}$ , причем  $\forall n: a_n \leq x_{k_n} \leq b_n$ . Согласно теореме 1 существует единственная точка  $c$ , такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c,$$

а в силу неравенств  $a_n \leq x_{k_n} \leq b_n$  имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = c.$$

Таким образом, мы выделили сходящуюся подпоследовательность  $\{x_{k_n}\}$  последовательности  $\{x_n\}$ . Теорема Больцано–Вейерштрасса доказана.

**Замечание.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *неограниченной*, если  $\forall A \exists x_n: |x_n| > A$ . Для неограниченных последовательностей теорема Больцано–Вейерштрасса не верна.

**Пример.** У неограниченной последовательности  $\{x_n\} = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$  нет сходящихся подпоследовательностей.

Последовательность  $\{x_n\}$  называется *бесконечно большой*, если  $\forall A \exists N, \forall n > N: |x_n| > A$ . Любая бесконечно большая последовательность является неограниченной. Обратное неверно.

**Пример.** Последовательность  $\{x_n\} = 0, 1, 0, 2, \dots, 0, n, \dots$  является неограниченной, но не является бесконечно большой.

**Задание.** Докажите, что из любой неограниченной последовательности можно выделить бесконечно большую подпоследовательность.

**Определение 1.** Число  $a$  называется *предельной точкой* последовательности  $\{x_n\}$ , если из  $\{x_n\}$  можно выделить подпоследовательность  $\{x_{k_n}\}$ , сходящуюся к  $a$ .

Из теоремы Больцано–Вейерштрасса следует, что всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы одну предельную точку.

**Определение 2.** Число  $a$  называется *предельной точкой* последовательности  $\{x_n\}$ , если в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$  содержится бесконечно много членов последовательности  $\{x_n\}$ .

**Утверждение.** Определения 1 и 2 эквивалентны.

Докажем, что если число  $a$  является предельной точкой последовательности  $\{x_n\}$  по определению 1, то оно является предельной точкой этой последовательности и по определению 2 (в обратную сторону доказательство проведите самостоятельно).

Итак, пусть число  $a$  — предельная точка последовательности  $\{x_n\}$  по определению 1, то есть существует такая подпоследовательность  $\{x_{k_n}\}$  последовательности  $\{x_n\}$ , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = a.$$

Тогда в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$  содержится бесконечно много членов подпоследовательности  $\{x_{k_n}\}$ , а значит, и бесконечно много членов последовательности  $\{x_n\}$ . Это означает,



что число  $a$  — предельная точка последовательности  $\{x_n\}$  по определению 2, что и требовалось доказать.

Поставим вопрос: сколько предельных точек может быть у ограниченной последовательности?

Ответ: сколько угодно и даже *несчетное множество*. Чтобы разъяснить этот ответ, поговорим о множествах.

### Некоторые сведения о множествах.

Говорят, что между элементами двух множеств установлено *взаимно-однозначное соответствие*, если каждому элементу первого множества поставлен в соответствие некоторый элемент второго множества так, что при этом каждый элемент второго множества соответствует только одному элементу первого множества.

Два множества называются *эквивалентными*, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие. Если два множества эквивалентны, то говорят, что они имеют *одинаковую мощность*.

Множество называется *счетным*, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел. Иными словами, множество называется счетным, если его элементы можно занумеровать с помощью натуральных чисел, т.е. составить из них последовательность.

*Множество всех рациональных чисел сегмента  $[0, 1]$  счетно.* В самом деле, из них можно составить числовую последовательность, например, следующим образом:

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

*Множество всех вещественных чисел сегмента  $[0, 1]$  несчетно* (докажите это самостоятельно). Если множество эквивалентно множеству всех вещественных чисел сегмента  $[0, 1]$ , то говорят, что оно имеет *мощность континуума*.

Вернемся к вопросу о том, сколько предельных точек может быть у ограниченной последовательности, и рассмотрим примеры.

1) Если последовательность  $\{x_n\}$  сходится к числу  $a$ , то число  $a$  — единственная предельная точка этой последовательности.

2) Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_m$  — произвольные различные числа. Последовательность

$$a_1, a_2, \dots, a_m, a_1, a_2, \dots, a_m, \dots, a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$$

имеет  $m$  предельных точек:  $a_1, a_2, \dots, a_m$ .

3) Последовательность (составленная из всех рациональных чисел сегмента  $[0; 1]$ )

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

имеет континуум предельных точек: любое число из сегмента  $[0, 1]$  является предельной точкой этой последовательности, так как в любой  $\varepsilon$ -окрестности этого числа содержится бесконечно много членов данной последовательности.

**Задание.** Придумайте пример последовательности, у которой счетное множество предельных точек.

Пусть  $\{x_n\}$  — ограниченная последовательность. Тогда у нее есть по крайней мере одна предельная точка.

**Определение.** Наибольшая (наименьшая) предельная точка ограниченной числовой последовательности  $\{x_n\}$  называется *верхним (нижним) пределом* этой последовательности и обозначается так:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \left( \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \right).$$

Если последовательность  $\{x_n\}$  сходится, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Если ограниченная последовательность имеет конечное число предельных точек, то она, очевидно, имеет верхний и нижний пределы. Если же ограниченная последовательность имеет бесконечное множество предельных точек, то существование верхнего и нижнего пределов не является очевидным, поскольку ограниченное бесконечное числовое множество может не иметь наибольшего и наименьшего элементов.

**Теорема 3.** Ограниченная последовательность имеет верхний и нижний пределы.

Доказательство. Пусть  $\{x_n\}$  — ограниченная числовая последовательность и  $A$  — множество ее предельных точек. Поскольку  $A$  — ограниченное и непустое множество, то существуют его точные грани

$$\sup A = \bar{a} \quad \text{и} \quad \inf A = \underline{a}.$$

Остается доказать, что  $\bar{a}$  и  $\underline{a}$  — предельные точки последовательности  $\{x_n\}$ . Докажем это для  $\bar{a}$  (для  $\underline{a}$  доказательство проводится аналогично).

Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$ . Докажем, что в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $\bar{a}$  содержится бесконечно много членов последовательно-

сти  $\{x_n\}$  (тем самым и будет доказано, что  $\bar{a}$  — предельная точка  $\{x_n\}$ ).

По определению точной верхней грани существует предельная точка  $c$  последовательности  $\{x_n\}$ , такая, что

$$\bar{a} - \frac{\varepsilon}{2} < c \leq \bar{a}.$$

Рассмотрим  $\varepsilon/2$ -окрестность точки  $c$ . Она расположена в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $\bar{a}$ . По определению 2 предельной точки в  $\varepsilon/2$ -окрестности точки  $c$  содержится бесконечно много членов последовательности  $\{x_n\}$ . Но все они содержатся в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $\bar{a}$ . Таким образом, в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $\bar{a}$  содержится бесконечно много членов последовательности  $\{x_n\}$ , что и требовалось доказать. Теорема 3 доказана.

**Замечание.** Если  $\{x_n\}$  — неограниченная сверху (снизу) последовательность, то пишут

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \quad \left( \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \right).$$

**Пример.** Рассмотрим последовательность

$$\{x_n\} = 0, 1, 0, 2, 0, \dots, n, 0, \dots$$

Очевидно, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

### § 3. Критерий Коши сходимости последовательности.

**Определение.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *фундаментальной*, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ , такой, что  $\forall n > N$  и  $\forall p \in \mathbb{N}$ :  $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ .

В силу произвольности  $p$  число  $m = n + p$  является произвольным номером, большим  $N$ . Поэтому определение фундаментальной последовательности можно сформулировать так: последовательность  $\{x_n\}$  называется фундаментальной, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall n > N$  и  $\forall m > N$ :  $|x_m - x_n| < \varepsilon$ .

**Пример.** Рассмотрим последовательность  $\{x_n\} = \{1/n\}$ . Для любого  $\varepsilon > 0$  возьмем  $N > 1/\varepsilon$ , т.е.  $1/N < \varepsilon$ . Тогда  $\forall n > N$  и  $\forall p \in \mathbb{N}$  имеем:

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

а это и означает, что последовательность  $\{x_n\} = 1/n$  является фундаментальной.

**Задание.** Сформулируйте определение нефундаментальной последовательности.

**Лемма 2.** Фундаментальная последовательность ограничена (доказательство проведите самостоятельно).

**Теорема 4 (критерий Коши сходимости последовательности).** Для того, чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Доказательство.

а) Необходимость. Пусть последовательность  $\{x_n\}$  сходится и имеет своим пределом при  $n \rightarrow \infty$  число  $a$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall n > N: |x_n - a| < \varepsilon/2$ , и также  $\forall m > N: |x_m - a| < \varepsilon/2$ . Отсюда получаем, что для любых  $n$  и  $m$ , больших  $N$ , справедливо неравенство

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon,$$

то есть последовательность  $\{x_n\}$  — фундаментальная.

б) Достаточность. Пусть  $\{x_n\}$  — фундаментальная последовательность. Согласно лемме 2  $\{x_n\}$  — ограниченная последовательность, и, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Пусть  $\{x_{k_n}\} \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ . Докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$  и рассмотрим  $\varepsilon$ - и  $\varepsilon/2$ -окрестности точки  $a$ . Начиная с некоторого номера  $N_1$  все члены подпоследовательности  $\{x_{k_n}\}$  лежат в  $\varepsilon/2$ -окрестности точки  $a$ , а начиная с некоторого номера  $N_2$  все члены последовательности  $\{x_n\}$  отстоят друг от друга не более, чем на  $\varepsilon/2$  (так как  $\{x_n\}$  — фундаментальная последовательность). Поэтому, начиная с  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , все члены  $\{x_n\}$  лежат в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$ . Это и означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Теорема 4 доказана.

**Пример.** Докажем с помощью критерия Коши, что последовательность  $\{\sin n\}$  расходится. Для этого достаточно доказать, что она не является фундаментальной.

Предположим противное. Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall n > N$  и  $\forall p \in \mathbb{N}$ :

$$|\sin(n + p) - \sin n| < \varepsilon.$$

Возьмем  $p = 2$ . Получим

$$|2 \sin 1 \cdot \cos(n+1)| < \varepsilon \implies |\cos(n+1)| < \frac{\varepsilon}{2 \sin 1} \quad \forall n > N,$$

откуда следует, что последовательность  $\{\cos n\}$  — бесконечно малая. Далее воспользуемся равенством

$$\cos(n+1) = \cos n \cdot \cos 1 - \sin n \cdot \sin 1,$$

из которого имеем

$$\sin n = \frac{\cos n \cdot \cos 1 - \cos(n+1)}{\sin 1} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Итак, мы получили:

$$\cos n \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \sin n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

что противоречит тождеству  $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$ . Полученное противоречие доказывает, что последовательность  $\{\sin n\}$  расходится.

#### § 4. Второе определение предела функции.

Пусть функция  $f(x)$  определена на множестве  $X$  и  $a$  — предельная точка этого множества, то есть в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$  содержатся точки из  $X$ , отличные от  $a$ .

Отметим, что понятия *предельной точки числового множества* и *предельной точки числовой последовательности* — различные понятия. Поясняющий пример: рассмотрим числовое множество  $X = \{1; 2\}$  и последовательность

$$\{x_n\} = 1, 2, 1, 2, \dots, 1, 2, \dots$$

У множества  $X$ , состоящего из двух чисел, нет предельных точек, тогда как у последовательности  $\{x_n\}$ , очевидно, их две:  $a_1 = 1$  и  $a_2 = 2$ .

**Определение 1 (по Коши).** Число  $b$  называется *пределом функции*  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , такое, что  $\forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\}: |f(x) - b| < \varepsilon$ .

Это определение было дано в разделе 2.2. Дадим другое определение предела функции в точке.

**Определение 2 (по Гейне).** Число  $b$  называется *пределом функции*  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$ , если для любой последовательности

значений аргумента  $\{x_n\}$ , сходящейся к  $a$  и такой, что  $x_n \neq a$ , соответствующая последовательность значений функции  $\{f(x_n)\}$  сходится к  $b$ .

**Задание.** Сформулируйте отрицание определения предела функции по Гейне, то есть сформулируйте определение того, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq b.$$

**Теорема 5.** Определения 1 и 2 эквивалентны.

Доказательство.

1) Пусть

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{по Коши.} \quad (6.1)$$

Требуется доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{по Гейне,} \quad (6.2)$$

то есть

$$\forall \{x_n\} \rightarrow a (x_n \neq a) : \{f(x_n)\} \rightarrow b.$$

Рассмотрим произвольную последовательность  $\{x_n\} \rightarrow a$  ( $x_n \neq a$ ) и возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$ . В силу условия (6.1) найдется  $\delta > 0$  такое, что

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < |x - a| < \delta, \quad (6.3)$$

а поскольку  $\{x_n\} \rightarrow a$  и  $x_n \neq a$ , то существует такое  $N$ , что

$$\forall n > N : 0 < |x_n - a| < \delta. \quad (6.4)$$

Из (6.3) и (6.4) следует, что  $\forall n > N : |f(x_n) - b| < \varepsilon$ , а это и означает, что  $\{f(x_n)\} \rightarrow b$ . Таким образом, справедливость (6.2) доказана.

2) Пусть выполнено условие (6.2).

Предположим, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq b \quad \text{по Коши.} \quad (6.5)$$

Это означает, что  $\exists \varepsilon > 0$ , такое, что

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in \{0 < |x - a| < \delta\} : |f(x) - b| \geq \varepsilon.$$

Рассмотрим произвольную последовательность

$$\{\delta_n\} \rightarrow +0 \quad (\delta_n > 0).$$

Согласно нашему предположению, для любого  $\delta_n$  существует число  $x_n$ , удовлетворяющее условию

$$0 < |x_n - a| < \delta_n, \quad (6.6)$$

для которого

$$|f(x_n) - b| \geq \varepsilon. \quad (6.7)$$

Поскольку  $\{\delta_n\} \rightarrow +0$ , то из (6.6) следует, что  $\{x_n\} \rightarrow a$  и  $x_n \neq a$ . Отсюда в силу условия (6.2) получаем:  $\{f(x_n)\} \rightarrow b$  и, значит,  $|f(x_n) - b| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . С другой стороны, в силу неравенства (6.7) имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - b| \geq \varepsilon > 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что наше предположение (6.5) неверно, и, следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{по Коши.}$$

Теорема 5 доказана.

**Примеры.** 1) Пусть  $f(x) = x$ . Докажем, пользуясь определением предела функции по Гейне, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a.$$

Для любой последовательности  $\{x_n\} \rightarrow a$  имеем:  $\{f(x_n)\} = \{x_n\} \rightarrow a$ . Согласно определению предела функции по Гейне это означает, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a.$$

2) Пусть  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ . Докажем, что  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  не существует. Возьмем

$$x_n = \frac{1}{\pi n}, \quad \text{тогда} \quad \{x_n\} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad x_n \neq 0.$$

При этом  $\{f(x_n)\} = \{\sin \pi n\} = \{0\} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Возьмем теперь

$$x'_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, \quad \text{тогда} \quad \{x'_n\} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad x'_n \neq 0.$$

При этом  $\{f(x'_n)\} = \{\sin(2\pi n + \pi/2)\} = \{1\} \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Итак, для последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{x'_n\}$ , сходящихся к нулю и таких, что  $x_n \neq 0$  и  $x'_n \neq 0$ , соответствующие последовательности  $\{f(x_n)\}$  и  $\{f(x'_n)\}$  имеют разные пределы. Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  не существует.

### Определение предела функции при $x \rightarrow \infty$ по Гейне.

Если  $\{x_n\}$  — бесконечно большая последовательность и, начиная с некоторого номера,  $x_n > 0$ , то будем писать  $\{x_n\} \rightarrow +\infty$  (в этом случае говорят, что последовательность сходится к  $+\infty$ ).

**Определение (по Гейне).** Число  $b$  называется *пределом функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$* , если для любой последовательности значений аргумента  $\{x_n\}$ , сходящейся к  $+\infty$ , соответствующая последовательность значений функции  $\{f(x_n)\}$  сходится к  $b$ .

**Задание.** Докажите эквивалентность двух определений (по Коши и по Гейне) предела функции при  $x \rightarrow +\infty$ .

## § 5. Критерий Коши существования предела функции.

Пусть функция  $f(x)$  определена на множестве  $X$  и  $a$  — предельная точка этого множества.

**Определение.** Говорят, что  $f(x)$  удовлетворяет в точке  $a$  *условию Коши*, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что для любых значений аргумента  $x'$  и  $x''$ , удовлетворяющих условию  $0 < |x' - a| < \delta$ ,  $0 < |x'' - a| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ .

Заметим, что условие Коши для функции аналогично свойству фундаментальности для числовой последовательности.

**Задание.** Сформулируйте определение того факта, что  $f(x)$  не удовлетворяет в точке  $a$  условию Коши.

Докажем теорему о *критерии Коши существования предела функции в точке*.

**Теорема 6.** Для того, чтобы функция  $f(x)$  имела предел в точке  $a$ , необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла в этой точке условию Коши.

Доказательство.

1) Необходимость. Пусть

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$



Тогда, согласно определению предела функции по Коши,  $\forall \varepsilon > 0$   $\exists \delta > 0$ , такое, что

$$|f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad 0 < |x' - a| < \delta,$$

$$|f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad 0 < |x'' - a| < \delta.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &= |(f(x') - b) + (b - f(x''))| \leq \\ &\leq |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \varepsilon \end{aligned}$$

при  $0 < |x' - a| < \delta$ ,  $0 < |x'' - a| < \delta$ . Таким образом, функция  $f(x)$  удовлетворяет в точке  $a$  условию Коши. Утверждение о необходимости условия Коши доказано.

2) Достаточность. Пусть  $f(x)$  удовлетворяет в точке  $a$  условию Коши. Пусть  $\{x_n\}$  — произвольная последовательность значений аргумента, сходящаяся к  $a$  (при этом  $x_n \neq a$ ). В соответствии с определением предела функции по Гейне нужно доказать, что  $\{f(x_n)\}$  сходится к некоторому числу  $b$ , причем это число одно и то же для всех  $\{x_n\} \rightarrow a$  ( $x_n \neq a$ ). С этой целью докажем сначала фундаментальность последовательности  $\{f(x_n)\}$ .

Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$ . Согласно условию Коши  $\exists \delta > 0$  такое, что

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < |x' - a| < \delta, \quad 0 < |x'' - a| < \delta. \quad (6.8)$$

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  и  $x_n \neq a$ , то для указанного  $\delta$  найдется номер  $N$ , такой, что

$$\forall n > N : \quad 0 < |x_n - a| < \delta,$$

и также

$$\forall m > N : \quad 0 < |x_m - a| < \delta.$$

Из этих неравенств в силу (6.8) следует, что

$$\forall n > N \quad \text{и} \quad \forall m > N : \quad |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon,$$

то есть  $\{f(x_n)\}$  — фундаментальная последовательность. Следовательно,  $\{f(x_n)\}$  сходится к некоторому числу  $b$ .

Итак, мы доказали, что  $\forall \{x_n\} \rightarrow a$  ( $x_n \neq a$ ) соответствующая последовательность  $\{f(x_n)\}$  сходится к некоторому числу  $b$ . Остается доказать, что число  $b$  будет одно и то же для всех последовательностей  $\{x_n\}$ , сходящихся к  $a$  (и таких, что  $x_n \neq a$ ).

Пусть для  $\{x_n\} \rightarrow a$  ( $x_n \neq a$ ) соответствующая последовательность  $\{f(x_n)\}$  сходится к  $b$ , а для  $\{x'_n\} \rightarrow a$  ( $x'_n \neq a$ ) соответствующая ей последовательность  $\{f(x'_n)\}$  сходится к  $b'$ . Составим последовательность

$$\{x''_n\} = x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots, x_n, x'_n, \dots$$

Ясно, что  $\{x''_n\} \rightarrow a$  ( $x''_n \neq a$ ), и поэтому  $\{f(x''_n)\}$  сходится к некоторому числу  $b''$ . Следовательно, и подпоследовательности  $\{f(x_n)\}$  и  $\{f(x'_n)\}$  последовательности  $\{f(x''_n)\}$  сходятся к этому числу  $b''$ . Но  $\{f(x_n)\} \rightarrow b$ ,  $\{f(x'_n)\} \rightarrow b'$ . Таким образом,  $b = b' = b''$ , что и требовалось доказать. Теорема 6 доказана.

**Задание.** Сформулируйте условие Коши для функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  и докажите теорему о критерии Коши существования предела функции при  $x \rightarrow +\infty$ .

# ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

## § 1. Теоремы об ограниченности непрерывных функций

**Теорема 1 (о локальной ограниченности непрерывной функции).** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $a$ , то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Доказательство. Зададим какое-нибудь  $\varepsilon > 0$  (например,  $\varepsilon = 1$ ). По определению непрерывности функции  $\exists \delta > 0$ , такое, что

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - a| < \delta,$$

т.е.  $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$  в  $\delta$ -окрестности точки  $a$ . Это и означает, что функция  $y = f(x)$  ограничена в  $\delta$ -окрестности точки  $a$ . Теорема 1 доказана.

Пусть теперь функция  $f(x)$  непрерывна на множестве  $X$ , т.е. непрерывна в каждой точке этого множества. Будет ли  $f(x)$  ограниченной на множестве  $X$ ? Ответ неоднозначен.

**Пример.** Функция  $f(x) = 1/x$  непрерывна на интервале  $0 < x < 1$ , но не ограничена на этом интервале.

Если же множество  $X$  — сегмент, то ответ на поставленный вопрос — положительный.

### Теорема 2 (1-ая теорема Вейерштрасса).

Непрерывная на сегменте функция ограничена на этом сегменте.

Доказательство. Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на сегменте  $[a, b]$ . Допустим, что  $f(x)$  не ограничена на  $[a, b]$ . Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n. \quad (7.1)$$

Рассмотрим последовательность  $\{x_n\}$ . Она ограничена, поскольку все  $x_n$  лежат на сегменте  $[a, b]$ , и, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{x_{k_n}\}$  (теорема Больцано–Вейерштрасса). Пусть  $\{x_{k_n}\} \rightarrow c$ . Поскольку все

$x_{k_n} \in [a, b]$ , то  $c \in [a, b]$  и поэтому  $f(x)$  непрерывна в точке  $c$ . Отсюда следует, что  $f(x_{k_n}) \rightarrow f(c)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

С другой стороны,  $|f(x_{k_n})| > k_n$  в силу (7.1), т.е.  $\{f(x_{k_n})\}$  — бесконечно большая последовательность и, следовательно, расходится. Полученное противоречие доказывает теорему 2.

Замечание. Для интервала теорема 2 не верна (см. пример выше).

**Задание.** Установите, в каком месте не пройдет доказательство теоремы, если сегмент  $[a, b]$  заменить на интервал  $(a, b)$ .

Пусть функция  $f(x)$  определена и ограничена сверху (снизу) на множестве  $X$ . Тогда она имеет на множестве  $X$  точную верхнюю (нижнюю) грань:

$$M = \sup_X f(x) \quad (m = \inf_X f(x)).$$

При этом функция  $f(x)$  может принимать, а может и не принимать значения, равного  $M$  (соответственно,  $m$ ).

**Пример.** Рассмотрим функцию (рис. 7.1)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Очевидно,

$$\sup_{[0,1]} f(x) = 1 = f(1), \quad \inf_{[0,1]} f(x) = 0,$$

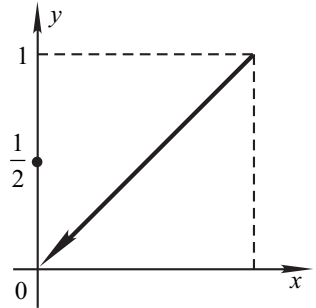


Рис. 7.1.

но при этом  $f(x)$  не имеет значения, равного нулю.

Если функция  $f(x)$  принимает в какой-то точке значение, равное

$$\sup_X f(x) \quad (\inf_X f(x)),$$

то говорят, что она *достигает на множестве  $X$  своей точной верхней (нижней) грани*. Подчеркнем, что *иметь* точные грани и *достигать* их — разные свойства функции.

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на сегменте  $[a, b]$ . Тогда она ограничена на  $[a, b]$  и поэтому имеет

$$M = \sup_{[a,b]} f(x) \quad \text{и} \quad m = \inf_{[a,b]} f(x).$$

**Теорема 3 (2-ая теорема Вейерштрасса).** Непрерывная на сегменте функция достигает на этом сегменте своих точных граней.

Доказательство. Пусть  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ . Докажем теорему 3 для точной верхней грани.

Допустим, что функция  $f(x)$  не принимает на  $[a, b]$  значения  $M = \sup_{[a,b]} f(x)$ . Тогда  $\forall x \in [a, b]: f(x) < M$ . Введем функцию

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Она непрерывна на сегменте  $[a, b]$  (поскольку  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$  и  $M - f(x) \neq 0$ ) и положительна. По теореме 2  $F(x)$  ограничена на  $[a, b]$ , поэтому  $\exists A > 0$  такое, что

$$0 < F(x) < A \quad \forall x \in [a, b],$$

или

$$0 < \frac{1}{M - f(x)} < A \quad \forall x \in [a, b],$$

откуда следует, что

$$f(x) < M - \frac{1}{A} \quad \forall x \in [a, b].$$

Получилось, что число  $M - 1/A$ , которое меньше  $M$ , является верхней гранью  $f(x)$  на  $[a, b]$ . Но это противоречит тому, что  $M$  — наименьшая из верхних граней  $f(x)$  на  $[a, b]$ . Полученное противоречие доказывает теорему 3.

Замечание. Если функция  $f(x)$  достигает на множестве  $X$  своей точной верхней (нижней) грани, то она имеет на этом множестве максимальное (минимальное) значение:

$$\max_X f(x) = \sup_X f(x) \quad \left( \min_X f(x) = \inf_X f(x) \right).$$

Если же  $f(x)$  не достигает на множестве  $X$  своей точной верхней (нижней) грани, то она не имеет на  $X$  максимального (минимального) значения. Из второй теоремы Вейерштрасса следует, что *непрерывная на сегменте функция имеет на этом сегменте максимальное и минимальное значения.*

## § 2. Равномерная непрерывность функции

Пусть функция  $f(x)$  определена на промежутке  $X$ . Напомним определение равномерно непрерывной функции.

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется *равномерно непрерывной на промежутке  $X$* , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , такое, что  $\forall x', x'' \in X$  и удовлетворяющих условию  $|x'' - x'| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ .

Из определения следует, что если  $f(x)$  равномерно непрерывна на промежутке  $X$ , то она непрерывна в каждой точке  $x' \in X$ . Отличие равномерной непрерывности на промежутке  $X$  от «просто непрерывности» на этом промежутке состоит в том, что в случае равномерной непрерывности  $\forall \varepsilon > 0$  существует «нужное»  $\delta > 0$ , общее для всех точек  $x' \in X$  ( $\delta$  зависит от  $\varepsilon$ , но не зависит от  $x'$ ), а в случае «просто непрерывности»  $\forall x' \in X$  по заданному  $\varepsilon > 0$  найдется «нужное»  $\delta > 0$ , но это  $\delta = \delta(\varepsilon, x')$  (т.е.  $\delta$  в данном случае зависит и от  $\varepsilon$ , и от  $x'$ ), и может не существовать общего  $\delta(\varepsilon) > 0$  для всех  $x' \in X$ .

### Геометрическая иллюстрация равномерной непрерывности функции

Если функция  $y = f(x)$  равномерно непрерывна на промежутке  $X$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ , такое, что прямоугольник со сторонами  $\delta(\varepsilon)$  и  $\varepsilon$ , параллельными осям  $Ox$  и  $Oy$ , можно так переместить вдоль графика функции, что график не будет пересекать сторон прямоугольника, параллельных оси  $Ox$ , а будет пересекать лишь стороны, параллельные оси  $Oy$ .

**Теорема 4 (теорема Кантора).** Непрерывная на сегменте функция равномерно непрерывна на этом сегменте.

Доказательство. Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на сегменте  $[a, b]$ . Допустим, что  $f(x)$  не является равномерно непрерывной на  $[a, b]$ . Тогда  $\exists \varepsilon > 0$ , такое, что  $\forall \delta > 0 \exists x', x'' \in [a, b]$ , для которых  $|x'' - x'| < \delta$ , а  $|f(x'') - f(x')| \geq \varepsilon$ .

Возьмем последовательность  $\{\delta_n\} \rightarrow +0$  ( $\delta_n > 0$ ). Согласно нашему предположению,  $\forall \delta_n > 0 \exists x'_n, x''_n \in [a, b]$ , для которых

$$|x''_n - x'_n| < \delta_n, \quad \text{а} \quad |f(x''_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon. \quad (7.2)$$

Рассмотрим последовательность  $\{x'_n\}$ . Она ограничена, поскольку все ее члены лежат на сегменте  $[a, b]$ , и поэтому из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{x'_{k_n}\}$ . Пусть  $x'_{k_n} \rightarrow c$  при  $n \rightarrow \infty$ . Так как  $|x''_{k_n} - x'_{k_n}| < \delta_{k_n}$  и  $\delta_{k_n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то последовательность  $x''_{k_n} \rightarrow c$ , а поскольку все

$x'_{k_n} \in [a, b]$ , то  $c \in [a, b]$  и, следовательно,  $f(x)$  непрерывна в точке  $c$ . Поэтому  $f(x'_{k_n}) \rightarrow f(c)$ ,  $f(x''_{k_n}) \rightarrow f(c)$  при  $n \rightarrow \infty$ , откуда следует, что  $|f(x''_{k_n}) - f(x'_{k_n})| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

С другой стороны, в силу неравенства (7.2) имеем неравенство

$$|f(x''_{k_n}) - f(x'_{k_n})| \geq \varepsilon,$$

и поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x''_{k_n}) - f(x'_{k_n})| \geq \varepsilon > 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

**Замечание.** Для интервала теорема Кантора не верна. Например, функция  $f(x) = \frac{1}{x}$  непрерывна на интервале  $(0, 1)$ , но не является равномерно непрерывной на этом интервале.

### § 3. Возрастание и убывание функции в точке. Локальный экстремум

Пусть функция  $f(x)$  определена на интервале  $(a, b)$  и  $c \in (a, b)$ .

**Определение.** Говорят, что  $f(x)$  *возрастает в точке  $c$* , если существует окрестность точки  $c$ , в которой  $f(x) > f(c)$  при  $x > c$  и  $f(x) < f(c)$  при  $x < c$ .

Аналогично определяется *убывание функции в точке  $c$* .

**Теорема 5.** Если функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $c$  и  $f'(c) > 0$  ( $< 0$ ), то  $f(x)$  возрастает (убывает) в точке  $c$ .

**Доказательство.** Пусть  $f'(c) > 0$  (случай  $f'(c) < 0$  рассматривается аналогично). По определению производной

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Отсюда следует, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , такое, что

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < |x - c| < \delta,$$

то есть

$$f'(c) - \varepsilon < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < f'(c) + \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < |x - c| < \delta.$$

Возьмем  $\varepsilon = f'(c)$ . Тогда получим:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0 \quad \text{при} \quad 0 < |x - c| < \delta,$$

откуда следует, что в  $\delta$ -окрестности точки  $c$   $f(x) > f(c)$  при  $x > c$  и  $f(x) < f(c)$  при  $x < c$ . Это и означает, что  $f(x)$  возрастает в точке  $c$ . Теорема 5 доказана.

**Замечание.** Положительность  $f'(c)$  — только достаточное, но не необходимое условие возрастания дифференцируемой функции  $f(x)$  в точке  $c$ . Например, функция  $f(x) = x^3$  возрастает в точке  $x = 0$ , но  $f'(0) = 0$ .

Пусть снова  $f(x)$  определена на  $(a, b)$  и  $c \in (a, b)$ .

**Определение.** Говорят, что в точке  $c$  функция  $f(x)$  имеет *локальный максимум (минимум)*, если существует такая окрестность точки  $c$ , в которой  $f(x) < f(c)$  (соответственно,  $f(x) > f(c)$ ) при  $x \neq c$ .

Локальный максимум и локальный минимум объединяются общим названием: *локальный экстремум*.

**Теорема 6 (теорема Ферма).** Если функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $c$  и имеет в этой точке локальный экстремум, то  $f'(c) = 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $f(x)$  имеет в точке  $c$  локальный максимум (для случая локального минимума рассуждения аналогичные), т.е. существует такая окрестность точки  $c$ , в которой  $f(x) < f(c)$  при  $x \neq c$ . Предположим, что  $f'(c) \neq 0$ . Допустим, что  $f'(c) > 0$ . Тогда по теореме 5 функция  $f(x)$  возрастает в точке  $c$  и, следовательно, существует окрестность точки  $c$ , в которой  $f(x) > f(c)$  при  $x > c$ . Но это противоречит неравенству  $f(x) < f(c)$  при  $x \neq c$ . Следовательно,  $f'(c)$  не может быть больше 0. Аналогично доказывается, что  $f'(c)$  не может быть меньше 0. Поэтому  $f'(c) = 0$ , что и требовалось доказать.

**Геометрический смысл теоремы.** Если дифференцируемая в точке  $c$  функция  $y = f(x)$  имеет локальный экстремум в этой точке, то касательная к графику функции в точке  $(c, f(c))$  параллельна оси  $Ox$ .

**Замечание.** Условие  $f'(c) = 0$  — только необходимое, но не достаточное условие локального экстремума функции  $f(x)$  в точке  $c$ . Например, функция  $f(x) = x^3$  удовлетворяет условию  $f'(0) = 0$ , но в точке  $x = 0$  экстремума у функции нет.

## § 4. Теоремы Ролля и Лагранжа

**Теорема 7 (теорема Ролля).** Пусть выполнены условия:

- 1) функция  $f(x)$  определена и непрерывна на сегменте  $[a, b]$ ;
- 2)  $f(x)$  дифференцируема в интервале  $(a, b)$ ;
- 3)  $f(a) = f(b)$ .



Тогда  $\exists c \in (a, b): f'(c) = 0$ .

Доказательство. Поскольку функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то она имеет на  $[a, b]$  максимальное и минимальное значения (это было отмечено после доказательства 2-ой теоремы Вейерштрасса). Положим

$$M = \max_{[a,b]} f(x), \quad m = \min_{[a,b]} f(x).$$

Возможны 2 случая.

1)  $M = m$ . Тогда  $f(x) = M = m = \text{const}$  и  $\forall c \in (a, b): f'(c) = 0$ .

2)  $M > m$ . Тогда по крайней мере одно из значений  $M$  и  $m$  функция принимает во внутренней точке  $c$  сегмента  $[a, b]$ . Рассмотрим возможные подслучаи.

а) Значение  $M$  принимается во внутренней точке  $c$ , а  $m = f(a) = f(b)$ .

б) Значение  $m$  принимается во внутренней точке  $c$ , а  $M = f(a) = f(b)$ .

в) Оба значения  $M$  и  $m$  принимаются во внутренних точках  $[a, b]$  (пусть, например, значение  $M$  принимается во внутренней точке  $c$ ).

В любом случае по теореме Ферма  $f'(c) = 0$ , что и требовалось доказать.

### Физический смысл теоремы Ролля

Пусть  $x$  — время,  $y = f(x)$  — координата точки, движущейся по оси  $Oy$ , в момент времени  $x$ . Тогда в моменты времени  $a$  и  $b$  точка имеет одну и ту же координату  $f(a) = f(b)$ , т.е. занимает на оси  $Oy$  одно и то же положение. В промежутке времени от  $a$  до  $b$  точка каким-то образом движется и в момент  $b$  возвращается в исходное положение. Ясно, что для того, чтобы вернуться назад, она должна в некоторый момент времени  $c$  остановиться, то есть ее скорость в этот момент равна нулю:  $f'(c) = 0$ .

**Теорема 8 (теорема Лагранжа).** Пусть выполнены условия:

- 1) функция  $f(x)$  определена и непрерывна на сегменте  $[a, b]$ ;
- 2)  $f(x)$  дифференцируема в интервале  $(a, b)$ .

Тогда  $\exists c \in (a, b)$ , такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Эта формула называется *формулой Лагранжа*.

Доказательство. Введем функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля:

- 1)  $F(x)$  определена и непрерывна на  $[a, b]$ ;
- 2)  $F(x)$  дифференцируема в интервале  $(a, b)$ ;
- 3)  $F(a) = F(b) = f(a)$ .

По теореме Ролля  $\exists c \in (a, b)$ :  $F'(c) = 0$ , то есть

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

откуда следует равенство  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ , что и требовалось доказать.

### Физический смысл теоремы Лагранжа

Пусть  $x$  — время,  $y = f(x)$  — координата точки, движущейся по оси  $Oy$ , в момент времени  $x$ . Тогда  $f'(c)$  — мгновенная скорость точки в момент  $c$ , а  $(f(b) - f(a))/(b - a)$  — средняя скорость точки на временном промежутке  $[a, b]$ .

Формула Лагранжа, записанная в виде

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

показывает, что существует такой момент времени  $c$ , в который мгновенная скорость точки равна ее средней скорости на промежутке времени  $[a, b]$ .

Замечание. Рассмотрим на сегменте  $[a, b]$  две точки:  $x_0$  и  $x_0 + \Delta x$ . Применим формулу Лагранжа к сегменту  $[x_0, x_0 + \Delta x]$ :

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(\xi)\Delta x.$$

Точку  $\xi$  можно представить в виде  $\xi = x_0 + (\xi - x_0) = x_0 + \theta \cdot \Delta x$ , где  $0 < \theta < 1$ . Таким образом, для приращения функции в точке  $x_0$  справедливо равенство:

$$\Delta f \Big|_{x_0} = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x.$$

Оно называется *формулой конечных приращений*. Отметим, что главная часть приращения функции в точке  $x_0$ , то есть дифференциал функции в точке  $x_0$ , выражается формулой

$$df \Big|_{x_0} = f'(x_0)\Delta x.$$

### Некоторые теоремы, доказываемые с помощью формулы Лагранжа

Пусть  $X$  — промежуток, т.е. интервал, сегмент, полупрямая или вся прямая.

**Теорема 9.** Если функция  $f(x)$  дифференцируема на промежутке  $X$  и  $\forall x \in X: f'(x) = 0$ , то  $f(x) = \text{const}$  на  $X$ .

Доказательство. Пусть  $x_0$  — фиксированная точка, а  $x$  — произвольная точка из  $X$ . По формуле Лагранжа:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) = 0,$$

т.к.  $f'(c) = 0$ . Отсюда следует, что  $f(x) = f(x_0) = \text{const} \forall x \in X$ , что и требовалось доказать.

**Следствие.** В главе 5 была сформулирована теорема 1 (основная теорема интегрального исчисления): если  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  — любые две первообразные для функции  $f(x)$  на промежутке  $X$ , то  $F_1(x) - F_2(x) = \text{const}$  на  $X$ . Было показано, что  $(F_1(x) - F_2(x))' = 0 \forall x \in X$ . В силу доказанной сейчас теоремы 9 отсюда следует, что  $F_1(x) - F_2(x) = \text{const}$  на  $X$ , и тем самым теорема 1 из главы 5 доказана.

Докажем теорему, устанавливающую необходимое и достаточное условие монотонности дифференцируемой функции.

**Теорема 10.** Для того, чтобы дифференцируемая на промежутке  $X$  функция  $f(x)$  не убывала (не возрастала) на  $X$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\forall x \in X: f'(x) \geq 0$  ( $\leq 0$ ).

Доказательство.

Достаточность. Пусть  $f'(x) \geq 0 \forall x \in X$ . Докажем, что  $f(x)$  не убывает на промежутке  $X$ . Рассмотрим две произвольные точки  $x_1, x_2 \in X$ . Пусть для определенности  $x_2 > x_1$ . По формуле Лагранжа:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Так как  $f'(\xi) \geq 0$  и  $x_2 - x_1 > 0$ , то  $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ , откуда следует, что

$$f(x_2) \geq f(x_1) \quad \text{при} \quad x_2 > x_1,$$

а это и означает, что функция  $f(x)$  не убывает на промежутке  $X$ .

Необходимость. Пусть  $f(x)$  не убывает на  $X$ , т.е.

$$f(x_2) \geq f(x_1) \quad \text{при} \quad x_2 > x_1, \quad x_1, x_2 \in X.$$

Докажем, что  $f'(x) \geq 0 \forall x \in X$ . Допустим противное, т.е. что  $\exists c \in X: f'(c) < 0$ . Тогда по теореме 5  $f(x)$  убывает в точке  $c$ , то есть существует такая окрестность точки  $c$ , в которой

$$f(x) < f(c) \text{ при } x > c \text{ и } f(x) > f(c) \text{ при } x < c.$$

Первое из этих неравенств противоречит условию неубывания функции:  $f(x_2) \geq f(x_1)$  при  $x_2 > x_1$ . Следовательно, наше предположение неверно, и  $f'(x) \geq 0 \forall x \in X$ . Теорема 10 доказана.

**Замечание.** Для возрастания функции  $f(x)$  на промежутке  $X$  достаточно, но не необходимо, чтобы выполнялось неравенство  $f'(x) > 0 \forall x \in X$  (докажите это самостоятельно).

Поставим вопрос: как связаны возрастание функции в точке и возрастание на промежутке?

**Утверждение 1.** Из возрастания функции в данной точке следует ее возрастание в какой-нибудь окрестности этой точки.

**Пример.** Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Эта функция возрастает в точке  $x = 0$  (это следует из того, что  $f'(0) = 1 > 0$ ), но при этом она не является возрастающей ни в какой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x = 0$  (это следует из того, что в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x = 0$  производная  $f'(x)$  имеет в каких-то точках отрицательные значения; докажите это).

**Утверждение 2.** Если  $f(x)$  возрастает на некотором интервале, то она возрастает в каждой точке этого интервала (докажите самостоятельно).

**Утверждение 3 (обратное к утверждению 2).** Если  $f(x)$  возрастает в каждой точке данного интервала, то она возрастает на этом интервале (докажите самостоятельно). При всей очевидности утверждения 3 его строгое доказательство — не очень простое.

Сформулируем и докажем теорему о достаточном условии равномерной непрерывности функции.

**Теорема 11.** Если функция  $f(x)$  имеет на промежутке  $X$  ограниченную производную  $f'(x)$ , то  $f(x)$  равномерно непрерывна на  $X$ .

**Доказательство.** Пусть  $|f'(x)| \leq M \forall x \in X$ , где  $M > 0$  — некоторое число. Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$  и возьмем  $\delta = \varepsilon/M$ .

Тогда  $\forall x', x''$ , удовлетворяющих неравенству  $|x'' - x'| < \delta = \varepsilon/M$ , получаем:

$$|f(x'') - f(x')| = |f'(\xi)(x'' - x')| \leq M \cdot |x'' - x'| < M\delta = \varepsilon,$$

а это и означает, что  $f(x)$  равномерно непрерывна на промежутке  $X$ . Теорема 11 доказана.

**Пример.**  $f(x) = \ln x$ ,  $X = (a, +\infty)$ , где  $a > 0$ . Имеем:

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad \left| f'(x) \right| \leq \frac{1}{a} \quad \forall x \in (a, +\infty),$$

откуда вытекает равномерная непрерывность функции  $f(x) = \ln x$  на полупрямой  $X = (a, +\infty)$ .

**Задания.** 1) Докажите, что функция  $f(x) = \ln x$  не является равномерно непрерывной на полупрямой  $(0, +\infty)$ .

2) Приведите пример функции  $f(x)$ , которая равномерно непрерывна на промежутке  $X$ , но  $f'(x)$  не ограничена на  $X$ .

## § 5. Формула Коши. Правило Лопиталья

**Теорема 12.** Пусть выполнены условия:

1) функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены и непрерывны на сегменте  $[a, b]$ ;

2)  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы в интервале  $(a, b)$ ;

3)  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ .

Тогда  $\exists c \in (a, b)$ , такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (\text{формула Коши}).$$

Замечание. Отметим, что в формуле Коши знаменатель в левой части равенства не равен 0, т.е.  $g(a) \neq g(b)$ . В самом деле, если допустить, что  $g(a) = g(b)$ , то для  $g(x)$  будут выполнены все условия теоремы Ролля и тогда должна существовать точка  $x \in (a, b)$ , такая, что  $g'(x) = 0$ , что противоречит условию 3 теоремы.

Доказательство.

1-ая попытка. По формуле Лагранжа

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \quad g(b) - g(a) = g'(c)(b - a),$$

откуда следует, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)(b - a)}{g'(c)(b - a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Но такое «доказательство» не состоятельно! (подумайте, почему).

2-ая попытка. Введем функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a)).$$

Она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля:

- 1)  $F(x)$  определена и непрерывна на  $[a, b]$ ;
- 2)  $F(x)$  дифференцируема в интервале  $(a, b)$ ;
- 3)  $F(a) = F(b) = f(a)$ .

По теореме Ролля  $\exists c \in (a, b)$ :  $F'(c) = 0$ , то есть

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Формула Лагранжа является частным случаем формулы Коши при  $g(x) = x$ . В этом случае  $g(a) = a$ ,  $g(b) = b$ ,  $g'(c) = 1$  и формула Коши переходит в формулу Лагранжа.

### Правило Лопиталя

Пусть

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

то есть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  являются бесконечно малыми при  $x \rightarrow a$ . Рассмотрим

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Он называется *неопределенностью типа 0/0*.

Правило Лопиталя позволяет в определенных случаях раскрыть эту неопределенность, т.е. вычислить данный предел.

**Теорема 13.** Пусть выполнены условия:

1) функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены и дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности точки  $a$  (при этом в самой точке  $a$  они могут быть даже не определены);

2)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0;$$

3)  $g'(x) \neq 0$  для любого  $x$  из указанной проколотой окрестности точки  $a$  (в самой точке  $a$  может быть  $g'(a) = 0$ );

4) существует

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогда существует  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  и справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Эта формула называется *правилом Лопиталья*.

Доказательство. Доопределим функции  $f(x)$  и  $g(x)$  в точке  $a$  по непрерывности, т.е. положим  $f(a) = g(a) = 0$ . Тогда  $f(x)$  и  $g(x)$  станут непрерывными во всей указанной окрестности точки  $a$ . Пусть  $x$  — произвольная точка из этой окрестности, отличная от  $a$ . По формуле Коши

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

где  $\xi$  — некоторая точка из интервала  $(a, x)$ . Так как  $f(a) = g(a) = 0$ , то

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при  $x \rightarrow a$ . Тогда  $\xi \rightarrow a$ , и предел правой части равенства существует по условию теоремы. Следовательно, существует предел левой части и он равен пределу правой части, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема 13 доказана.

### Примеры.

1) Применим правило Лопиталья к первому замечательному пределу:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

(отметим, что такой способ обоснования первого замечательного предела *некорректен*, так как при выводе формулы  $(\sin x)' = \cos x$  использовался первый замечательный предел).

2)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x \ln a - a x^{a-1}}{1} = a^a \ln a - a^a = a^a (\ln a - 1).$$

3)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)'}{(3x^2)'} = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \cos^{-3} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Здесь правило Лопиталья применялось дважды.

Заметим, что из рассмотренного примера можно получить полезную асимптотическую формулу. Так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\frac{1}{3}x^3} = 1,$$

то

$$\operatorname{tg} x - x \sim \frac{1}{3}x^3 \quad \text{при } x \rightarrow 0,$$

и, следовательно,

$$\operatorname{tg} x - x - \frac{1}{3}x^3 = o(x^3) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

Замечания.

1) Если в теореме 13 условие 4) заменить условием

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty,$$

означающим, что  $f'(x)/g'(x)$  — бесконечно большая функция при  $x \rightarrow a$ , то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

2) Если в теореме 13 условие 2) заменить условием

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty,$$

то теорема остается в силе, т.е. правило Лопиталья имеет место и для неопределенности типа  $\infty/\infty$ .



3) Правило Лопиталья имеет место для односторонних пределов и для пределов при  $x \rightarrow \infty$ .

**Теорема 13-а** (без доказательства). Пусть выполнены условия:

1) функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены и дифференцируемы при  $x > c$ ;

2)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  (либо  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$ );

3)  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (c, +\infty)$ ;

4) существует

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогда существует  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  и выполняется равенство

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Примеры.**

1) Вычислить  $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$ .

Так как  $x^x = e^{x \ln x}$  и  $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = 0$

(здесь мы воспользовались правилом Лопиталья), то  $\lim_{x \rightarrow +0} x^x = 1$ .

2) Вычислить  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$ , где  $\alpha$  — положительное число. Применяя правило Лопиталья, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0,$$

то есть функция  $\ln x$  растет при  $x \rightarrow +\infty$  медленнее, чем степенная функция  $x^\alpha$  с любым  $\alpha > 0$ . Иногда это записывают так:

$$\ln x \ll x^\alpha \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

3) Вычислить  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x}$ , где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a > 1$ . Применяя правило Лопиталья  $n$  раз, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{a^x (\ln a)^n} = 0,$$

т.е. степенная функция  $x^n$  растет при  $x \rightarrow +\infty$  медленнее, чем показательная функция  $a^x$  (то же самое относится к  $x^\alpha$  с любым  $\alpha > 0$ ):

$$x^\alpha \ll a^x \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.$$

4) Если не существует  $\lim[f'(x)/g'(x)]$ , то отсюда не следует, что не существует  $\lim[f(x)/g(x)]$ .

Рассмотрим в качестве примера предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{2x + \sin x} \quad \left( \text{неопределенность типа } \frac{\infty}{\infty} \right).$$

Имеем:

$$\frac{(x + \sin x)'}{(2x + \sin x)'} = \frac{1 + \cos x}{2 + \cos x} = \left( 1 - \frac{1}{2 + \cos x} \right).$$

Предел функции  $\left( 1 - \frac{1}{2 + \cos x} \right)$  (то есть предел отношения производных функций  $x + \sin x$  и  $2x + \sin x$ ) при  $x \rightarrow +\infty$  не существует, так как эта функция является периодической с периодом  $2\pi$ , причем ее значения изменяются от 0 до  $2/3$ . Вместе с тем, предел отношения самих функций  $x + \sin x$  и  $2x + \sin x$  существует:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{2x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{2 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{2}.$$

## § 6. Формула Тейлора

Пусть функция  $f(x)$  имеет непрерывную производную  $(n+1)$ -го порядка в окрестности точки  $x_0$  (в таком случае говорят, что функция  $n+1$  раз непрерывно дифференцируема в окрестности точки  $x_0$ ). Пусть  $x$  — любая (фиксированная) точка из этой окрестности. Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt \quad (7.3)$$

Применим к интегралу  $\int_{x_0}^x f'(t)dt$  формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x f'(t)dt &= - \int_{x_0}^x f'(t)d(x-t) = -f'(t)(x-t)|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x (x-t)df'(t) = \\ &= f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^x f''(t)(x-t)dt. \end{aligned}$$

К интегралу в правой части последнего равенства снова применим формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x f''(t)(x-t)dt &= - \int_{x_0}^x f''(t)d\frac{(x-t)^2}{2} = -f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}|_{x_0}^x + \\ &+ \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^2}{2}df''(t) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \int_{x_0}^x f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2!}dt. \end{aligned}$$

Используя эти равенства, из (7.3) получаем:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \\ &+ \frac{1}{2!} \int_{x_0}^x f'''(t)(x-t)^2 dt. \end{aligned}$$

Применяя формулу интегрирования по частям к интегралу в правой части последнего равенства и продолжая далее процесс интегрирования по частям, после  $n$  шагов придем к равенству

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\ &\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Введем обозначение

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \quad (7.5)$$

Тогда равенство (7.4) можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_{n+1}(x), \quad (7.6)$$

где  $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ ,  $0! = 1$ .

Равенство (7.6) называется *формулой Тейлора* для функции  $f(x)$  с *центром разложения в точке  $x_0$* , многочлен  $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$  называется *многочленом Тейлора* функции  $f(x)$ , а функция  $R_{n+1}(x)$  называется *остаточным членом* формулы Тейлора. Выражение (7.5) называется *остаточным членом в интегральной форме*.

Нетрудно проверить, что для многочлена Тейлора  $P_n(x)$  справедливы равенства  $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  (убедитесь в этом самостоятельно).

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

**Теорема 14.** Если функция  $f(x)$   $n+1$  раз непрерывно дифференцируема в окрестности точки  $x_0$ , то для любого  $x$  из этой окрестности справедливо равенство (7.6), где  $R_{n+1}(x)$  выражается формулой (7.5).

**Следствие 1.** Применяя к интегралу (7.5) формулу среднего значения, получаем

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \left( -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_{x_0}^x = \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \quad \text{где } \xi \in [x_0, x]. \end{aligned}$$

Таким образом, для остаточного члена формулы Тейлора получилось выражение

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \quad (7.7)$$

где  $\xi$  — некоторая точка сегмента  $[x_0, x]$ , ее можно представить в виде  $\xi = x_0 + \theta \cdot (x - x_0)$ ,  $0 < \theta < 1$ .

Выражение (7.7) называется *остаточным членом в форме Лагранжа*.

**Следствие 2.** Так как  $f^{(n+1)}(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  и так как  $\xi \rightarrow x_0$  при  $x \rightarrow x_0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(x_0).$$

Поэтому  $f^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(x_0) + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$ , и равенство (7.7) принимает вид

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} + \frac{\alpha(x)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} + o((x-x_0)^{n+1}) \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (7.6), приходим к равенству

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^{n+1}) = \\ &= P_{n+1}(x) + R_{n+2}(x), \end{aligned} \tag{7.8}$$

где

$$R_{n+2}(x) = o((x-x_0)^{n+1}). \tag{7.9}$$

Равенства (7.8) и (7.9) получены нами при условии, что функция  $f(x)$   $n+1$  раз непрерывно дифференцируема в окрестности точки  $x_0$ . Заменяя  $n+1$  на  $n$ , получим следующее утверждение.

**Теорема 15.** Если функция  $f(x)$   $n$  раз непрерывно дифференцируема в окрестности точки  $x_0$ , то справедливо равенство

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x),$$

где

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k, \quad R_{n+1}(x) = o((x-x_0)^n) \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

Выражение

$$R_{n+1}(x) = o((x-x_0)^n)$$

называется *остаточным членом в форме Пеано*.

Замечание. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеет место при меньших требованиях к функции  $f(x)$ , чем в теореме 14, а именно, можно отказаться от требования непрерывности производной  $(n+1)$ -ого порядка. И также формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеет место при меньших требованиях к функции  $f(x)$ , чем в теореме 15, а именно, достаточно потребовать, чтобы  $f(x)$  имела производную  $n$ -го порядка в точке  $x_0$  (см. [1]).

## § 7. Формула Маклорена и ее применения

Рассмотрим формулу Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x)$$

при  $x_0 = 0$  (в этом случае формулу Тейлора принято называть *формулой Маклорена*):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

где

$$R_{n+1}(x) = o(x^n) \text{ при } x \rightarrow 0 \text{ (форма Пеано),}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \text{ (форма Лагранжа).}$$

Выведем разложения по формуле Маклорена для некоторых элементарных функций.

1)  $f(x) = e^x$ . Так как  $f^{(n)}(x) = e^x$  и  $\forall n f^{(n)}(0) = 1$ , то

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x),$$

где

$$R_{n+1}(x) = o(x^n) \text{ при } x \rightarrow 0 \text{ (форма Пеано),}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1 \text{ (форма Лагранжа). (7.10)}$$

Из (7.10) для любого фиксированного значения  $x$  получаем оценку:

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Это позволяет вычислить  $e^x$  с произвольной точностью, если взять многочлен Тейлора  $P_n(x)$  для  $e^x$  с достаточно большим  $n$ . В частности, полагая  $x = 1$ , получаем:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + R_{n+1}(1), \text{ откуда } e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Поставим вопрос: сколько слагаемых (то есть какое  $n$ ) нужно взять, чтобы найти приближенное значение числа  $e$  с точностью до  $10^{-6}$ ? Из (7.10) следует:

$$|R_{n+1}(1)| \leq \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Так как  $10! > 3 \cdot 10^6$ , то  $|R_{10}(1)| < 10^{-6}$ , то есть достаточно взять  $n = 9$ :

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{9!} \text{ с точностью до } 10^{-6}.$$

2)  $f(x) = \sin x$ . Так как

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(0) = \sin \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ (-1)^k, & \text{если } n = 2k + 1, \end{cases}$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , то общий член формулы Маклорена для  $\sin x$  имеет вид

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, & \text{если } n = 2k + 1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1}(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+1}(x), \end{aligned}$$

где

$$R_{2n+1}(x) = o(x^{2n}) \quad \text{при } x \rightarrow 0 \quad (\text{форма Пеано}),$$

$$R_{2n+1}(x) = \frac{\sin(\theta x + (2n+1)\pi/2)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad 0 < \theta < 1$$

(форма Лагранжа).

Отсюда для любого фиксированного значения  $x$  получаем оценку:

$$|R_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Это позволяет вычислить  $\sin x$  для любого  $x$  с произвольной точностью, если взять многочлен Тейлора  $P_n(x)$  для  $\sin x$  с достаточно большим  $n$ .

Например, для приближенного вычисления  $\sin x$  при  $0 \leq x \leq \pi/4$  с точностью  $10^{-4}$  (т.е. для получения четырехзначных таблиц Брадиса) достаточно взять  $n = 3$ . В самом деле, полагая  $x = \pi/4$ ,  $n = 3$ , получаем:

$$|R_7(x)| \leq \frac{(\pi/4)^7}{7!} < 10^{-4}.$$

Следовательно, для любого  $x \in [0; \pi/4]$  с точностью до  $10^{-4}$  имеем:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Отметим, что чем ближе  $x$  к нулю, тем большую точность дает эта приближенная формула; для  $x$ , достаточно близких к нулю, погрешность этой формулы существенно меньше, чем  $10^{-4}$ .

**Задание.** Постройте и сравните графики функций

$$f(x) = \sin x, \quad P_1(x) = x, \quad P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}, \quad P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

3)  $f(x) = \cos x$ . Так как

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \cos \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k + 1, \\ (-1)^k, & \text{если } n = 2k, \end{cases}$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , то общий член формулы Маклорена для  $\cos x$  имеет вид



$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k + 1, \\ \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, & \text{если } n = 2k. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+2}(x) = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+2}(x), \end{aligned}$$

где

$$R_{2n+2}(x) = o(x^{2n+1}) \quad \text{при } x \rightarrow 0 \quad (\text{форма Пеано}),$$

$$R_{2n+2}(x) = \frac{\cos(\theta x + (2n+2)\pi/2)}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad 0 < \theta < 1$$

(форма Лагранжа). Отсюда для любого фиксированного значения  $x$  получаем оценку:

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x^{2n+2}|}{(2n+2)!} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, для любого  $x$  можно вычислить  $\cos x$  с произвольной точностью, если взять многочлен Тейлора  $P_n(x)$  для  $\cos x$  с достаточно большим  $n$ .

**Задание.** Постройте и сравните графики функций

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, \quad P_0(x) = 1, \quad P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \\ P_6(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}. \end{aligned}$$

### Связь между функциями $e^x$ , $\sin x$ , $\cos x$

Выпишем еще раз разложения по формуле Маклорена функций  $e^x$ ,  $\sin x$  и  $\cos x$ :

$$\begin{cases} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \end{cases}$$

Эти формулы наводят на мысль о том, что существует связь между экспонентой, синусом и косинусом.

Ответ лежит в области функций *комплексной переменной*:

$$\begin{aligned}
 e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \\
 &+ \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \dots = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) = \\
 &= \cos x + i \sin x.
 \end{aligned}$$

Итак,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Эта формула называется *формулой Эйлера*.

4)  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $x > -1$ . Так как

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (1+x)^{-1}, \quad f''(x) = (-1)(1+x)^{-2}, \\
 f'''(x) &= (-1)(-2)(1+x)^{-3} = (-1)^2 2!(1+x)^{-3}, \dots, \\
 f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n},
 \end{aligned}$$

то  $f(0) = 0$ ,  $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  и общий член формулы Маклорена для  $\ln(1+x)$  имеет вид:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x) = \\
 &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + R_{n+1}(x),
 \end{aligned}$$

где

$$R_{n+1}(x) = o(x^n) \quad \text{при } x \rightarrow 0 \quad (\text{форма Пеано}),$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1 \quad (\text{форма Лагранжа}).$$

Пусть  $0 \leq x \leq 1$ . Тогда из формы Лагранжа для  $R_{n+1}(x)$  получаем:

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (7.11)$$

Следовательно, для любого  $x \in [0, 1]$  можно вычислить  $\ln(1+x)$  с произвольной точностью, если взять многочлен Тейлора для  $\ln(1+x)$  с достаточно большим  $n$ . В частности, при  $x = 1$  имеем:

$$\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n}.$$

Используя оценку (7.11), нетрудно сосчитать, какое нужно взять  $n$ , чтобы вычислить  $\ln 2$  с заданной точностью.

Докажем, что  $R_{n+1}(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  также для любого  $x \in (-1; 0)$ . Воспользуемся интегральной формой остаточного члена:

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

В данном случае  $f^{(n+1)}(t) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+t)^{n+1}}$ , поэтому

$$|R_{n+1}(x)| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt \right|.$$

Так как  $-1 < x < 0$ , то

$$|R_{n+1}(x)| = \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{(1+t)^{n+1}} dt \leq \frac{1}{1+x} \int_x^0 \left( \frac{t-x}{1+t} \right)^n dt.$$

Поскольку

$$\frac{t-x}{1+t} = 1 - \frac{1+x}{1+t} \leq 1 - (1+x) = -x = |x| \quad \text{при } -1 \leq x \leq 0,$$

то

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{1+x} |x|^n \int_x^0 dt = \frac{|x|^{n+1}}{1+x}.$$

Отсюда следует, поскольку  $|x| < 1$ , что  $\forall x \in (-1, 0) |R_{n+1}(x)| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , что и требовалось доказать.

Замечание. Оказывается, что  $R_{n+1}(x) \not\rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , если  $x > 1$ . Это будет доказано в курсе ТФКП.

5)  $f(x) = (1+x)^\alpha$ ,  $x > -1$ , где  $\alpha$  — произвольное вещественное число. Так как

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \quad \text{то}$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1), \quad f(0) = 1.$$

Поэтому

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

где

$$R_{n+1}(x) = o(x^n) \quad \text{при } x \rightarrow 0 \quad (\text{форма Пеано}).$$

Выпишите самостоятельно  $R_{n+1}(x)$  в форме Лагранжа.

Можно доказать, что при любом фиксированном значении  $x \in (-1, 1)$   $R_{n+1}(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . При  $n = 1$  имеем:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

При  $\alpha = n \in \mathbb{N}$  из разложения по формуле Маклорена получаем формулу бинома Ньютона (в этом случае  $R_{n+1}(x) \equiv 0$ ).

Полученное разложение по формуле Маклорена можно использовать для приближенного вычисления корней.

**Пример.** Найти  $\sqrt[5]{35}$  с заданной точностью. Поскольку  $32 = 2^5$ , то

$$\sqrt[5]{35} = 2\sqrt[5]{\frac{35}{32}} = 2\left(1 + \frac{3}{32}\right)^{1/5} = \\ = 2\left(1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{32} + \frac{1}{5} \frac{\left(\frac{1}{5} - 1\right)}{2!} \left(\frac{3}{32}\right)^2 + \dots\right).$$

Используя формулу для остаточного члена в форме Лагранжа, нетрудно оценить, сколько членов разложения нужно взять, чтобы получить приближенное значение  $\sqrt[5]{35}$  с заданной точностью.

6)  $f(x) = \operatorname{tg} x$ . Так как

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}, \quad f'''(x) = \frac{6 \sin^2 x}{\cos^4 x} + \frac{2}{\cos^2 x}.$$

$$f^{(4)}(x) = \dots \text{ (вычислите самостоятельно),}$$

то

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 2, \quad f^{(4)}(0) = 0.$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

Эту формулу мы уже получили ранее, рассмотрев

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}.$$

Как получить следующие члены разложения функции  $f(x) = \operatorname{tg} x$  по формуле Маклорена? (Отметим, что разложение будет содержать только нечетные степени  $x$ , поскольку  $\operatorname{tg} x$  — нечетная функция).

1-й способ: найти  $f^{(5)}(0)$ ,  $f^{(7)}(0)$  и т.д. Но эта процедура достаточно громоздкая.

2-й способ: чтобы найти коэффициент при  $x^5$ , можно рассмотреть

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x - x^3/3}{x^5}$$

и вычислить его, например, с помощью правила Лопиталья.

Если этот предел равен  $K_5$ , то

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + K_5 \cdot x^5 + o(x^6) \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

3-й способ: воспользуемся равенством  $\sin x = \cos x \cdot \operatorname{tg} x$  и формулами Маклорена для  $\sin x$  и  $\cos x$ . Тогда

$$\begin{aligned} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots &= \\ &= \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) \left( x + \frac{x^3}{3} + K_5 \cdot x^5 + K_7 \cdot x^7 + \dots \right). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в обеих частях равенства, находим  $K_5$ ,  $K_7$ , и т.д. Вычислим  $K_5$ :

$$\frac{1}{5!} = K_5 - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4!} \Rightarrow K_5 = \frac{1}{120} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15}.$$

Итак,

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6).$$

### Вычисление пределов с помощью формулы Маклорена

1) Будем использовать обозначение  $\exp(t) = e^t$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[ \frac{1}{x^2} \ln \left( \frac{\sin x}{x} \right) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[ \frac{1}{x^2} \ln \left( \frac{x - x^3/6 + o(x^3)}{x} \right) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[ \frac{1}{x^2} \ln \left( 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[ \frac{1}{x^2} \left( -\frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) \right] = \exp(-1/6). \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + 2 \sin x - 3x}{x^5} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6) + 2\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right) - 3x}{x^5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{2}{15} + \frac{1}{60}\right)x^5 + o(x^6)}{x^5} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}. \end{aligned}$$

3) Разложить по формуле Маклорена функцию  $f(x) = \cos(\sin x)$  до члена с  $x^6$  включительно. Имеем:

$$\begin{aligned}
 \cos(\sin x) &= 1 - \frac{(\sin x)^2}{2!} + \frac{(\sin x)^4}{4!} - \frac{(\sin x)^6}{6!} + \dots = \\
 &= 1 - \frac{1}{2} \left( x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots \right)^2 + \frac{1}{24} \left( x - \frac{x^3}{6} + \dots \right)^4 - \\
 &\quad - \frac{1}{720} \left( x - \frac{x^3}{6} + \dots \right)^6 + \dots = \\
 &= 1 - \frac{1}{2} \left( x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36} + \frac{x^6}{60} + o(x^6) \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{24} \left( x^4 + 4x^3 \left( -\frac{x^3}{6} + \dots \right) + o(x^6) \right) - \frac{1}{720} (x^6 + o(x^6)) = \\
 &= 1 - \frac{x^2}{2} + \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) x^4 + \left( -\frac{1}{72} - \frac{1}{120} - \frac{1}{36} - \frac{1}{720} \right) x^6 + o(x^6) = \\
 &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24} x^4 - \frac{37}{720} x^6 + o(x^6).
 \end{aligned}$$

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

В этой главе с помощью результатов и методов предыдущей главы мы рассмотрим различные вопросы, связанные с поведением функций и их графиками: вопрос о точках локального экстремума функции, о промежутках монотонности, о направлении выпуклости графика и точках перегиба, об асимптотах графика.

### § 1. Точки локального экстремума и промежутки монотонности функции

В предыдущей главе было введено понятие локального экстремума функции.

**Определение.** Говорят, что в точке  $c$  функция  $f(x)$  имеет *локальный максимум (минимум)*, если существует такая окрестность точки  $c$ , в которой  $f(x) < f(c)$  (соответственно,  $f(x) > f(c)$ ) при  $x \neq c$ .

Там же была доказана теорема о необходимом условии локального экстремума дифференцируемой функции: *если  $f(x)$  дифференцируема в точке  $c$  и имеет в точке  $c$  локальный экстремум, то  $f'(c) = 0$* . Было отмечено, что условие  $f'(c) = 0$  является только необходимым, но не достаточным условием локального экстремума дифференцируемой функции. Например, функция  $f(x) = x^3$  удовлетворяет условию  $f'(0) = 0$ , но в точке  $x = 0$  экстремума не имеет. Отметим также, что условие  $f'(c) = 0$  является необходимым условием экстремума только для дифференцируемой в точке  $c$  функции. Иными словами, функция  $f(x)$  может иметь в точке  $c$  экстремум, но при этом не быть дифференцируемой в этой точке, и потому условие  $f'(c) = 0$  не выполнено. Например, функция  $f(x) = |x|$  имеет минимум в точке  $x = 0$ , но условие  $f'(0) = 0$  не выполнено, поскольку  $f'(0)$  не существует.

Будем называть *точками возможного экстремума* функции  $f(x)$  точки двух типов:

- 1) точки  $c$ , в которых  $f'(c) = 0$ ;
- 2) точки  $c$ , в которых  $f'(c)$  не существует, но сама функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $c$ .



Отыскав точки возможного экстремума, мы должны далее проверить с помощью каких-то условий, являются ли они на самом деле точками экстремума или нет. Этой цели служат достаточные условия экстремума.

**Теорема 1 (1-ое достаточное условие экстремума).** Пусть  $c$  — точка возможного экстремума функции  $f(x)$  и пусть  $f(x)$  является дифференцируемой в некоторой проколотой окрестности точки  $c$ . Тогда если в указанной окрестности:

1)

$$\begin{cases} f'(x) > 0 (< 0) & \text{при } x < c, \\ f'(x) < 0 (> 0) & \text{при } x > c, \end{cases}$$

то в точке  $c$  функция  $f(x)$  имеет локальный максимум (минимум);

2)  $f'(x)$  одного знака при  $x < c$  и при  $x > c$ , то в точке  $c$  экстремума нет.

Доказательство.

1) Рассмотрим случай, когда

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{при } x < c, \\ f'(x) < 0 & \text{при } x > c, \end{cases}$$

и докажем, что в точке  $c$  функция  $f(x)$  имеет локальный максимум. Для этого достаточно доказать, что в указанной окрестности точки  $c$   $f(x) < f(c)$  при  $x \neq c$ , или  $f(x) - f(c) < 0$  при  $x \neq c$ .

Возьмем произвольное  $x$  из указанной окрестности, не равное  $c$ . Тогда  $f(x)$  непрерывна на сегменте  $[c, x]$  и дифференцируема в интервале  $(c, x)$ . По формуле Лагранжа

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c).$$

Если  $x < c$ , то  $\xi < c$ ,  $x - c < 0$ ,  $f'(\xi) > 0$  и, следовательно,  $f(x) - f(c) < 0$ . Если  $x > c$ , то  $\xi > c$ ,  $x - c > 0$ ,  $f'(\xi) < 0$  и, следовательно,  $f(x) - f(c) < 0$ . Итак, в указанной окрестности точки  $c$  выполняется неравенство  $f(x) - f(c) < 0$  при  $x \neq c$ , что и требовалось доказать.

2) Пусть  $f'(x)$  одного знака при  $x < c$  и при  $x > c$ . Тогда из формулы Лагранжа следует, что в указанной окрестности  $f(x) - f(c)$  имеет разные знаки при  $x < c$  и при  $x > c$ , и, следовательно, в точке  $c$  экстремума нет. Теорема 1 доказана.

**Примеры.**

1)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$ . Имеем:

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6; \quad f'(x) = 0 \quad \text{при } x = 2 \quad \text{и} \quad x = 3.$$

При «переходе» через точку  $x = 2$  производная меняет знак с плюса на минус, а при «переходе» через точку  $x = 3$  — с минуса на плюс. Следовательно, в точке  $x = 2$  функция  $f(x)$  имеет локальный максимум, а в точке  $x = 3$  — локальный минимум.

2)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(2 - \sin \frac{1}{x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что в точке  $x = 0$  функция  $f(x)$  имеет минимум. Вычислим ее производную:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 2x \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

В любой сколь угодно малой окрестности точки  $x = 0$ , как слева, так и справа от этой точки,  $f'(x)$  имеет значения разных знаков (докажите это). Этот пример показывает, что изменение знака производной при переходе через точку  $c$  — только достаточное, но не необходимое условие экстремума функции в точке  $c$ .

**Теорема 2 (2-ое достаточное условие экстремума).** Пусть  $f(x)$  дважды дифференцируема в точке  $c$  и пусть  $f'(c) = 0$ ,  $f''(c) \neq 0$ . Тогда если  $f''(c) < 0$  ( $> 0$ ), то в точке  $c$  функция  $f(x)$  имеет локальный максимум (минимум).

Доказательство. Пусть  $f''(c) > 0$  (случай  $f''(c) < 0$  рассматривается аналогично). Тогда  $f'(x)$  возрастает в точке  $c$ , т.е. существует такая окрестность точки  $c$ , в которой  $f'(x) > f'(c) = 0$  при  $x > c$  и  $f'(x) < f'(c) = 0$  при  $x < c$ . По теореме 1 функция  $f(x)$  имеет в точке  $c$  локальный минимум. Теорема 2 доказана.

**Пример.** Рассмотрим функцию  $f(x) = x + \sin 2x$ . Имеем:

$$f'(x) = 1 + 2 \cos 2x = 0,$$

если

$$2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

так как  $f''(x) = -4 \sin 2x$ , то

$$f''\left(\frac{\pi}{3} + \pi n\right) = -4 \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right) < 0,$$

$$f''\left(-\frac{\pi}{3} + \pi n\right) = -4 \sin\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right) > 0.$$

Таким образом, согласно теореме 2, в точках  $x = \pi/3 + \pi n$  функция  $f(x)$  имеет локальный максимум, а в точках  $x = -\pi/3 + \pi n$  — локальный минимум.

В предыдущей главе была доказана теорема: для того, чтобы дифференцируемая на промежутке  $X$  функция  $f(x)$  не убывала (не возрастала) на этом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы  $\forall x \in X$  выполнялось неравенство  $f'(x) \geq 0$  ( $\leq 0$ ). Было отмечено, что для строгого возрастания (убывания) функции  $f(x)$  на промежутке  $X$  достаточно (но не необходимо), чтобы  $\forall x \in X: f'(x) > 0$  ( $< 0$ ).

Таким образом, для отыскания промежутков монотонности дифференцируемой функции  $f(x)$  нужно найти промежутки знакопостоянства  $f'(x)$ , а для этого нужно найти точки, в которых  $f'(x) = 0$ , и точки, в которых  $f'(x)$  разрывна. Тем самым можно одновременно найти точки локального экстремума.

**Пример.**  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 6x^2 + 1$ . Так как

$$f'(x) = x^3 - 7x^2 + 12x = x(x-3)(x-4),$$

то  $f'(x) < 0$  на промежутках  $(-\infty, 0)$  и  $(3, 4)$ ;  $f'(x) > 0$  на промежутках  $(0, 3)$  и  $(4, +\infty)$ . Поэтому  $f(x)$  убывает на промежутках  $(-\infty, 0)$  и  $(3, 4)$  и возрастает на промежутках  $(0, 3)$  и  $(4, +\infty)$ . При этом точка  $x = 3$  является точкой локального максимума, а точки  $x = 0$  и  $x = 4$  — точками локального минимума функции  $f(x)$ .

## § 2. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции

Пусть функция  $y = f(x)$  определена и дифференцируема на интервале  $(a, b)$ . Тогда в каждой точке  $M(x, f(x))$  существует касательная к графику функции, причем эта касательная не параллельна оси  $Oy$ .

**Определение.** Говорят, что график функции  $y = f(x)$  направлен на интервале  $(a, b)$  *выпуклостью вверх (вниз)*, если в пределах интервала  $(a, b)$  график лежит не выше (не ниже) любой своей касательной (рис. 8.1).

**Теорема 3.** Если функция  $y = f(x)$  дважды дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и  $\forall x \in (a, b): f''(x) \geq 0$  ( $\leq 0$ ), то график функции  $y = f(x)$  направлен на  $(a, b)$  выпуклостью вниз (вверх).

Доказательство. Рассмотрим случай  $f''(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$ . Пусть  $c$  — произвольная точка из  $(a, b)$ . Проведем касательную к

графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M(c, f(c))$ . Уравнение касательной имеет вид

$$Y - f(c) = f'(c)(x - c) \quad \text{или} \quad Y = f(c) + f'(c)(x - c).$$

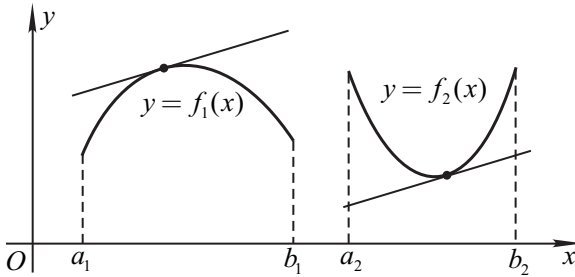


График функции  $y = f_1(x)$  направлен выпуклостью вверх, а график функции  $y = f_2(x)$  — выпуклостью вниз.

Рис. 8.1.

Требуется доказать, что график функции  $y = f(x)$  лежит на интервале  $(a, b)$  не ниже касательной, то есть  $\forall x \in (a, b): f(x) \geq Y$ .

Пусть  $x$  — произвольная точка из интервала  $(a, b)$ . По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа получаем:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - c)^2, \quad \xi \in (c, x).$$

Следовательно,

$$f(x) - Y = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - c)^2,$$

а так как  $f''(\xi) \geq 0$  ( $\forall \xi \in (a, b)$ ), то  $f(x) - Y \geq 0$ , то есть  $f(x) \geq Y$ , что и требовалось доказать.

**Замечание.** Тот факт, что знак  $f''(x)$  определяет направление выпуклости, нетрудно усмотреть непосредственно. Если  $f''(x) > 0$ , то  $f'(x)$  возрастает и, следовательно, касательная к графику функции  $y = f(x)$  при движении по графику в направлении возрастания  $x$  поворачивается так, что сам график оказывается не ниже касательной. Это можно увидеть на рисунке (8.1), если провести несколько касательных к графику функции.

**Пример.** Рассмотрим функцию  $f(x) = x^3 - 3x^2$ . Имеем:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2), \quad f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1).$$

Отсюда следует, что  $f'(x) > 0$  при  $x < 0$  и при  $x > 2$ ;  $f'(x) < 0$  при  $0 < x < 2$ ,  $f''(x) < 0$  при  $x < 1$ ,  $f''(x) > 0$  при  $x > 1$ . Следовательно, функция  $f(x)$  возрастает при  $x < 0$  и при  $x > 2$ , убывает при  $0 < x < 2$ , а график функции  $y = f(x)$  направлен выпуклостью вверх при  $x < 1$  и выпуклостью вниз при  $x > 1$  (рис. 8.2). В точке  $M(1; -2)$  происходит изменение направления выпуклости. Такую точку будем называть *точкой перегиба* графика функции.

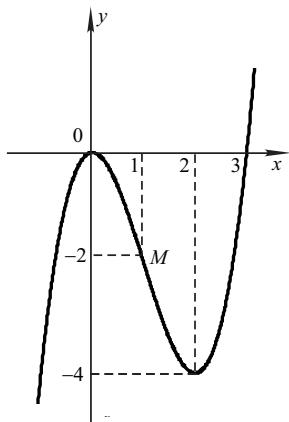


Рис. 8.2.

**Определение.** Точка  $M(a, f(a))$  графика функции  $y = f(x)$  называется *точкой перегиба* графика, если:

- 1) в точке  $M$  существует касательная к графику;
- 2) существует такая окрестность точки  $a$ , в которой слева и справа от точки  $a$  график имеет различные направления выпуклости.

Говорят также, что в точке  $M$  график функции имеет *перегиб*.

**Теорема 4 (необходимое условие перегиба).** Если функция  $y = f(x)$  имеет в точке  $a$  непрерывную вторую производную и график этой функции имеет в точке  $M(a, f(a))$  перегиб, то  $f''(a) = 0$ .

Доказательство. Предположим противное, то есть  $f''(a) \neq 0$ . Пусть  $f''(a) > 0$  (случай  $f''(a) < 0$  рассматривается аналогично).

В силу устойчивости знака непрерывной функции существует окрестность точки  $a$ , в которой  $f''(a) > 0$  и, следовательно, по теореме 3 график функции направлен выпуклостью вниз как слева, так и справа от точки  $a$ , что противоречит перегибу графика в точке  $M(a, f(a))$ . Полученное противоречие доказывает, что  $f''(a) = 0$ . Теорема 4 доказана.

Замечание. Условие  $f''(a) = 0$  является только *необходимым*, но *не достаточным* условием перегиба графика функции в точке  $M(a, f(a))$ . Например, функция  $f(x) = x^4$  удовлетворяет в точке  $x = 0$  условию  $f''(0) = 0$ , но в точке  $M(0, 0)$  перегиба графика функции  $y = x^4$  нет, поскольку  $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ , и, следовательно, график направлен выпуклостью вниз на всей прямой.

Назовем *точками возможного перегиба графика функции*  $y = f(x)$  такие точки  $M(a, f(a))$ , для которых либо  $f''(a) = 0$ , либо  $f''(a)$  не существует, но существует касательная к графику функции в точке  $M(a, f(a))$ .

Для дальнейшего исследования точек возможного перегиба графика функции требуются достаточные условия перегиба графика функции.

**Теорема 5 (первое достаточное условие перегиба).** Пусть точка  $M(a, f(a))$  является точкой возможного перегиба графика функции  $y = f(x)$  и пусть  $f(x)$  дважды дифференцируема в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ . Тогда если в указанной окрестности слева и справа от точки  $a$   $f''(x)$  имеет разные знаки, то в точке  $M(a, f(a))$  график функции  $y = f(x)$  имеет перегиб.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что в указанной окрестности слева и справа от точки  $a$  график функции  $y = f(x)$  имеет разные направления выпуклости и, следовательно,  $M(a, f(a))$  — точка перегиба графика. Теорема 5 доказана.

**Примеры.**

1)  $y = x^4 - 2x^3$ . Имеем:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3), \quad f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1).$$

Так как  $f''(x) = 0$  при  $x = 0$  и  $x = 1$  и при переходе через каждую из этих точек  $f''(x)$  меняет знак, то, согласно теореме 5, точки  $M_1(0; 0)$  и  $M_2(1; -1)$  являются точками перегиба графика функции  $y = x^4 - 2x^3$ .

**Задание.** Постройте график этой функции.

2)  $y = \sqrt[3]{x}$ . Имеем:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}, \quad x \neq 0.$$

Ясно, что  $f''(x)$  не существует в точке  $x = 0$  и имеет разные знаки при  $x < 0$  и при  $x > 0$ . В точке  $O(0, 0)$  существует касательная к графику функции  $y = \sqrt[3]{x}$  (касательной является ось  $Oy$ ). Следовательно, точка  $O(0, 0)$  является точкой перегиба графика функции  $y = \sqrt[3]{x}$ .

3) рассмотрим функцию  $y = f(x)$ , где

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \geq 0, \\ -x^2, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

Докажите, что  $f''(0)$  не существует, но точка  $O(0, 0)$  является точкой перегиба графика данной функции.

**Теорема 6 (второе достаточное условие перегиба).** Если функция  $y = f(x)$  имеет непрерывную вторую производную в окрестности точки  $a$  и третью производную в самой точке  $a$ , причем  $f''(a) = 0$ ,  $f'''(a) \neq 0$ , то график функции  $y = f(x)$  имеет в точке  $M(a, f(a))$  перегиб.

Доказательство. Пусть  $f'''(a) > 0$  (случай  $f'''(a) < 0$  рассматривается аналогично). Тогда  $f''(x)$  возрастает в точке  $a$ , то есть существует такая окрестность точки  $a$ , в которой  $f''(x) < f''(a) = 0$  при  $x < a$  и  $f''(x) > f''(a) = 0$  при  $x > a$ . Таким образом,  $f''(x)$  в указанной окрестности имеет разные знаки слева и справа от точки  $a$ . По теореме 5 точка  $M(a, f(a))$  является точкой перегиба графика функции  $y = f(x)$ . Теорема 6 доказана.

**Пример.**  $y = x^2 + \cos 2x$ . Имеем:

$$f'(x) = 2x - 2 \sin 2x,$$

$$f''(x) = 2 - 4 \cos 2x = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$f'''(x) = 8 \sin 2x, \quad f''' \left( \pm \frac{\pi}{6} + \pi n \right) = 8 \sin \left( \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right) \neq 0.$$

Следовательно, в точках

$$M_n^\pm \left( \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \left( \pm \frac{\pi}{6} + \pi n \right)^2 + 1/2 \right)$$

график данной функции имеет перегибы.

### § 3. Асимптоты графика функции

**Определение.** Прямая  $x = a$  называется *вертикальной асимптотой* графика функции  $y = f(x)$ , если хотя бы один из односторонних пределов

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

равен  $+\infty$  или  $-\infty$ .

**Примеры.**

1)  $y = 1/x$ . Прямая  $x = 0$  (ось  $Oy$ ) является вертикальной асимптотой графика данной функции, поскольку

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty.$$

2)  $y = 2^{1/(x-1)}$ . Прямая  $x = 1$  — вертикальная асимптота графика этой функции (рис. 8.3), так как

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = +\infty.$$

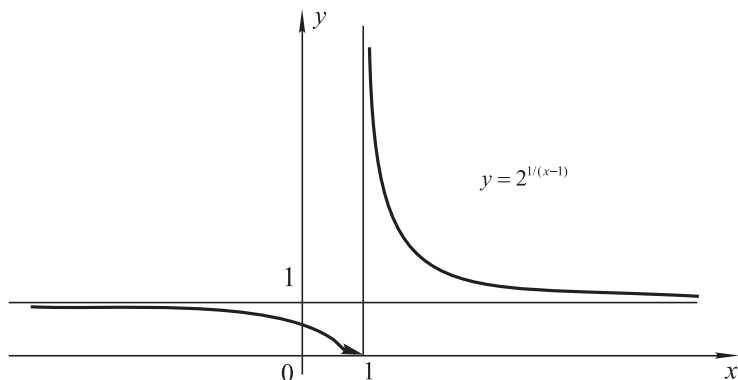


Рис. 8.3.

Отметим, что

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0.$$

Заметим, что прямая  $y = 1$  также является асимптотой графика функции, но это асимптота другого типа.

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на полупрямой  $(a, +\infty)$ .

**Определение.** Прямая  $Y = kx + b$  называется *наклонной асимптотой* графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , если  $f(x)$  представима в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где  $\alpha(x)$  — бесконечно малая функция при  $x \rightarrow +\infty$ , то есть

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0.$$

Аналогично определяется наклонная асимптота графика функции при  $x \rightarrow -\infty$ .

**Пример.**

$$y = \frac{x^2 + \sin x}{x}.$$



Так как

$$\frac{x^2 + \sin x}{x} = x + \frac{\sin x}{x} = x + \alpha(x),$$

где  $\alpha(x) = \sin x/x$  — бесконечно малая функция при  $x \rightarrow +\infty$  (и также при  $x \rightarrow -\infty$ ), то прямая  $Y = x$  — наклонная асимптота графика данной функции при  $x \rightarrow +\infty$  (и также при  $x \rightarrow -\infty$ ).

**Задание.** Изобразите график этой функции.

**Теорема 7.** Для того, чтобы прямая  $Y = kx + b$  была наклонной асимптотой графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , необходимо и достаточно, чтобы существовали два предела:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b.$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть прямая  $Y = kx + b$  является наклонной асимптотой графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , то есть

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right] = k, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [b + \alpha(x)] = b, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b.$$

Положим  $\alpha(x) = f(x) - kx - b$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx - b] = 0.$$

Таким образом,  $f(x) = kx + b + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Это и означает по определению, что прямая  $Y = kx + b$  — наклонная асимптота графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Теорема 7 доказана.

**Примеры.**

1) Рассмотрим *гиперболу*, заданную уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Возьмем ее ветвь, лежащую в 1-ом квадранте:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad \text{здесь} \quad f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \geq a.$$

Имеем:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{b}{a} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \frac{b}{a}x] = 0.$$

Таким образом, прямая

$$Y = \frac{b}{a}x$$

является асимптотой графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Аналогично рассматриваются 3 другие ветви гиперболы, каждая из которых имеет асимптоту.

2) Рассмотрим *параболу*, заданную уравнением

$$y^2 = 2px.$$

Возьмем ее ветвь, лежащую в 1-ом квадранте:

$$y = \sqrt{2px}, \quad x \geq 0.$$

Докажите, что эта ветвь параболы не имеет асимптоты при  $x \rightarrow +\infty$  (аналогично, не имеет асимптоты при  $x \rightarrow +\infty$  и другая ветвь).

## § 4. Построение графиков функций

Общая схема исследования поведения функции  $y = f(x)$  и построения ее графика.

- 1) Находим область определения функции  $y = f(x)$ .
- 2) Находим асимптоты графика функции.
- 3) Находим промежутки монотонности и точки локального экстремума функции (с помощью  $f'(x)$ ).
- 4) Находим промежутки, на которых сохраняется направление выпуклости графика функции, и точки перегиба графика (с помощью  $f''(x)$ ).
- 5) Исследуем другие особенности графика функции (точки пересечения графика с осями координат, четность или нечетность  $f(x)$ , периодичность  $f(x)$ , оси симметрии графика и т.д.)
- 6) Строим график функции, опираясь на результаты исследования.

**Пример.**  $y = x^2 e^{-x}$ .

1) Область определения:  $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ .

2) Асимптоты: а) вертикальных нет, поскольку  $f(x) = x^2 e^{-x}$  непрерывна во всех точках; б) наклонные:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = 0 \Rightarrow k = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0 \Rightarrow b = 0.$$

Итак,  $y = 0$  (ось  $Ox$ ) — асимптота графика функции при  $x \rightarrow +\infty$ .

Наклонной асимптоты при  $x \rightarrow -\infty$  нет, поскольку

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = -\infty.$$

Отметим также, что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty.$$

3) Промежутки монотонности и точки локального экстремума функции.

Так как

$$f'(x) = (2x - x^2)e^{-x} = x(2 - x)e^{-x},$$

то

$$f'(x) = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = 2,$$

$$f'(x) > 0 \text{ при } 0 < x < 2, \quad f'(x) < 0 \text{ при } x < 0 \text{ и при } x > 2.$$

Следовательно,  $f(x)$  убывает на промежутках  $(-\infty, 0]$  и  $[2, +\infty)$  и возрастает на интервале  $(0, 2)$ . Поэтому  $x = 0$  — точка локального минимума, а  $x = 2$  — точка локального максимума функции, и  $f_{\min}(0) = 0$ ,  $f_{\max}(2) = 4e^{-2} < 1$ .

4) Направление выпуклости и точки перегиба графика функции.

Так как

$$f''(x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x}; \text{ то } f''(x) = 0 \text{ при } x = 2 \pm \sqrt{2},$$

$f''(x) > 0$  при  $x < 2 - \sqrt{2}$  и при  $x > 2 + \sqrt{2}$ ,  $f''(x) < 0$  при  $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$ . Следовательно, график функции направлен выпуклостью вниз на промежутках  $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$  и  $(2 + \sqrt{2}, +\infty)$  и выпуклостью вверх на интервале

$(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ . Таким образом, точки  $M_1$  и  $M_2$  графика с абсциссами  $2 - \sqrt{2}$  и  $2 + \sqrt{2}$  являются точками перегиба. График функции представлен на рисунке 8.4.

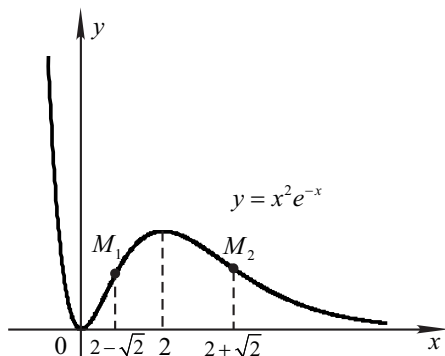


Рис. 8.4.

## § 5. Приближенное вычисление корней уравнений

Рассмотрим уравнение

$$f(x) = 0. \quad (8.1)$$

Число  $c$  называется *корнем* уравнения (8.1) если  $f(c) = 0$ . Мы будем рассматривать только вещественные корни.

Корень  $c$  называется *изолированным* корнем уравнения (8.1), если существует такой сегмент  $[a, b]$ , что  $a < c < b$  и на  $[a, b]$  нет других корней этого уравнения.

В большинстве случаев точное значение корня  $c$  найти не удается. Например, уравнение

$$x + \sin x - 2 = 0$$

имеет ровно 1 корень, но точное значение этого корня — иррациональное число, поэтому можно найти только приближенное значение корня.

Мы будем рассматривать *методы приближенного вычисления изолированных корней* уравнения (8.1). В каждом из методов будет строиться последовательность  $\{x_n\}$ , сходящаяся к  $c$ , где  $c$  — изолированный корень уравнения. Члены этой последовательности и будут приближенными значениями корня  $c$ .

### Метод «вилки»

Пусть выполнены следующие условия:

- а) функция  $f(x)$  непрерывна на сегменте  $[a, b]$ ;
- б)  $f(a)f(b) < 0$  (в этом случае сегмент  $[a, b]$  называется «вилкой»);
- в) на  $[a, b]$  имеется только один корень уравнения (8.1).

Метод «вилки» — это метод приближенного вычисления корня с помощью процедуры деления сегментов пополам.

Пусть ради определенности  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ . Разделим сегмент  $[a, b]$  пополам: либо  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$  и тогда найдено точное значение корня  $\left(c = \frac{a+b}{2}\right)$ , либо  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$  и тогда одна из половин сегмента  $[a, b]$  образует вилку, которую обозначим  $[a_1, b_1]$ . При этом  $f(a_1) < 0$ ,  $f(b_1) > 0$ . Далее разделим сегмент  $[a_1, b_1]$  пополам и т.д. Либо на некотором шаге получим точное значение корня (если середина очередного сегмента совпадет с корнем), либо процесс продолжится неограниченно. Во втором случае получим *стягивающуюся систему вилок*

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots,$$

причем  $f(a_n) < 0$ ,  $f(b_n) > 0$ . По теореме о стягивающейся системе сегментов существует единственная точка  $c \in [a_n, b_n] \forall n$ , причем  $\{a_n\} \rightarrow c$  и  $\{b_n\} \rightarrow c$ . В силу непрерывности  $f(x)$  последовательности  $\{f(a_n)\}$  и  $\{f(b_n)\}$  сходятся к  $f(c)$ , а в силу неравенств  $f(a_n) < 0$  и  $f(b_n) > 0$  имеем:

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \leq 0, \quad f(c) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) \geq 0.$$

Следовательно,  $f(c) = 0$ , т.е. *последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  сходятся к корню уравнения (8.1)*.

В качестве приближенного значения корня  $c$  можно брать как  $a_n$  или  $b_n$ , так и  $(a_n + b_n)/2$ . Оценка погрешности:

$$|a_n - c| \leq |b_n - a_n| = \frac{b - a}{2^n},$$

$$|b_n - c| \leq |b_n - a_n| = \frac{b - a}{2^n},$$

$$\left| \frac{a_n + b_n}{2} - c \right| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}.$$

**Метод последовательных приближений (метод итераций)**

Уравнение (8.1)

$$f(x) = 0,$$

где  $f(x)$  — непрерывная функция на сегменте  $[a, b]$ , эквивалентно на этом сегменте уравнению

$$x = F(x), \quad (8.2)$$

где  $F(x) = x + k(x)f(x)$ ,  $k(x)$  — произвольная непрерывная функция, не равная нулю в точках сегмента  $[a, b]$ .

Вместо уравнения (8.1) будем рассматривать уравнение (8.2). Для нахождения приближенных значений корня применим метод, который называется *методом последовательных приближений (или методом итераций)*.

Пусть  $x_0 \in [a, b]$ . Положим  $x_1 = F(x_0)$ . Если  $x_1 \in [a, b]$ , то положим  $x_2 = F(x_1)$ , и т.д. Если  $x_n \in [a, b]$ , то положим

$$x_{n+1} = F(x_n). \quad (8.3)$$

Отметим, что при этом  $F(x_n) = x_n + k(x_n)f(x_n)$ . Последовательность  $\{x_n\}$ , определенная таким образом, называется *итерационной последовательностью*.

Пусть последовательность  $\{x_n\}$  сходится к некоторому числу  $c$ . Тогда в силу непрерывности  $F(x)$   $\{F(x_n)\} \rightarrow F(c)$ . Переходя к пределу при  $n \rightarrow +\infty$  в равенстве (8.3), получим

$$c = F(c),$$

т.е. число  $c$  является корнем уравнения  $x = F(x)$ , и, следовательно, корнем уравнения  $f(x) = 0$ .

Итак, *если итерационная последовательность сходится, то она сходится к корню уравнения (8.1), и потому ее члены  $x_n$  служат приближенными значениями корня.*

Возникает вопрос: при каких условиях итерационная последовательность сходится?

**Теорема 8.** Пусть:

- 1)  $c$  — корень уравнения  $x = F(x)$ , т.е.  $c = F(c)$ ;
- 2)  $F(x)$  дифференцируема в некоторой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $c$ , причем  $|F'(x)| \leq \alpha < 1 \quad \forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ , где  $\alpha$  — некоторое положительное число;

3)  $x_0$  — произвольное число из интервала  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ .

Тогда итерационная последовательность существует и сходится к  $c$ .

Доказательство. Докажем прежде всего, что все  $x_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ . Это и будет означать, что последовательность  $\{x_n\}$  существует.

По условию  $x_0 \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ . Допустим, что

$$x_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon), \text{ т.е. } |x_n - c| < \varepsilon.$$

Тогда  $x_{n+1} = F(x_n)$ . Вычитая из этого равенства равенство  $c = F(c)$  и применяя формулу Лагранжа, получаем

$$x_{n+1} - c = F(x_n) - F(c) = F'(\xi)(x_n - c).$$

Отсюда следует, что

$$|x_{n+1} - c| = |F'(\xi)| \cdot |x_n - c| \leq \alpha |x_n - c| \leq |x_n - c|, \quad (8.4)$$

и, следовательно,  $x_{n+1} \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ .

Остается доказать, что  $\{x_n\} \rightarrow c$ . Применяя неравенство (8.4) последовательно несколько раз и учитывая, что  $0 < \alpha < 1$ , получаем:

$$|x_n - c| \leq \alpha |x_{n-1} - c| \leq \alpha^2 |x_{n-2} - c| \leq \dots \leq \alpha^n |x_0 - c| \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow +\infty$ . Поэтому  $\{x_n\} \rightarrow c$  при  $n \rightarrow +\infty$ . Теорема 8 доказана.

Оценка погрешности. Так как  $|x_n - c| \leq \alpha^n |x_0 - c|$ , то чем больше  $n$ , тем меньше  $x_n$  отличается от  $c$ . Удачный выбор  $x_0$  (нулевого приближения) также важен.

Выбирая различные функции  $k(x) \neq 0$  в выражении

$$F(x) = x + k(x)f(x),$$

будем получать различные уравнения вида (8.2), эквивалентные уравнению (8.1). Мы рассмотрим два специальных выбора функции  $k(x)$ , которые соответствуют *методу хорд* и *методу касательных*.

### Метод хорд

Снова рассматриваем уравнение (8.1):

$$f(x) = 0, \quad x \in [a, b].$$

Изобразим график функции  $f(x)$  и дадим *геометрическую интерпретацию метода хорд* (рис. 8.5). Отметим какую-нибудь точку  $x_0$  на отрезке  $[a, b]$ . Ей соответствует точка  $A_0$  на гра-

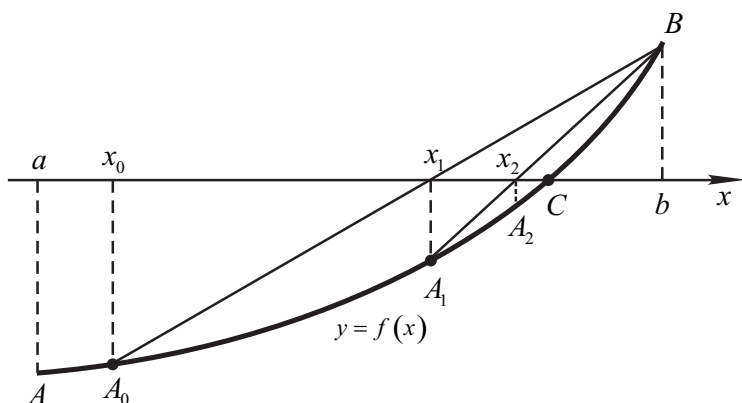


Рис. 8.5.

фике функции  $y = f(x)$ . Проведем отрезок  $A_0B$ , он называется *хордой*. Хорда  $A_0B$  пересекается с осью  $x$  в точке  $x_1$ , которой соответствует точка  $A_1$  на графике функции. Проведя хорду  $A_1B$ , получим точку  $x_2$  на оси  $x$  и т.д. В результате получается последовательность  $\{x_n\}$ .

Выведем рекуррентную формулу, выражающую  $x_{n+1}$  через  $x_n$ . С этой целью напишем уравнение прямой, проходящей через точки  $A_n(x_n; f(x_n))$  и  $B(b; f(b))$  (рис. 8.6):

$$\frac{Y - f(x_n)}{x - x_n} = \frac{f(b) - f(x_n)}{b - x_n}.$$

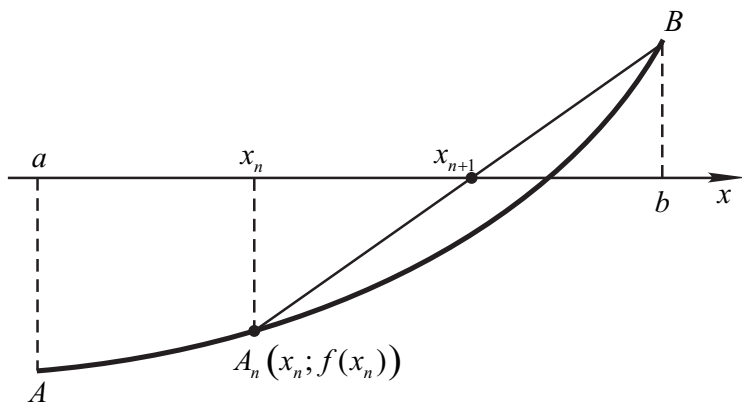


Рис. 8.6.



Положим в этом уравнении  $x = x_{n+1}$ , тогда  $Y = 0$ , и мы получаем рекуррентную формулу метода хорд:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n)f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}. \quad (8.5)$$

Метод хорд является методом итераций, где

$$k(x) = -\frac{b - x}{f(b) - f(x)},$$

а итерационная последовательность  $\{x_n\}$  определяется рекуррентной формулой (8.5).

При каких условиях итерационная последовательность  $\{x_n\}$  сходится к корню  $c$  уравнения  $f(x) = 0$ ? Ответ дает следующая теорема.

**Теорема 9.** Пусть:

1)  $c$  — изолированный корень уравнения (8.1) на сегменте  $[a, b]$ :  $f(c) = 0$ ;

2) функция  $f(x)$  имеет на  $[a, b]$  производные  $f'(x)$  и  $f''(x)$ , каждая из которых имеет определенный знак во всех точках  $[a, b]$ . Будем ради определенности рассматривать случай, когда  $f'(x) > 0$  и  $f''(x) > 0$  на сегменте  $[a, b]$ .

Тогда если взять  $x_0 = a$ , то последовательность  $\{x_n\}$ , определенная формулой (8.5), сходится к корню  $c$ .

Доказательство. Так как  $f'(x) > 0$ , то функция  $f(x)$  возрастает на сегменте  $[a, b]$  и, следовательно,  $f(a) < 0$  и  $f(b) > 0$ . Поскольку  $f''(x) > 0$  на  $[a, b]$ , то график направлен выпуклостью вниз и потому лежит ниже хорды  $AB$  (см. рис. 8.5). Отсюда следует, что  $x_0 < x_1 < c$ ,  $f(x_1) < 0$ . На сегменте  $[x_1, b]$  график функции  $y = f(x)$  также лежит ниже хорды  $A_1B$ , а хорда  $A_1B$  — ниже хорды  $AB$ , и поэтому  $x_1 < x_2 < c$ . И так далее. Для любого номера  $n$  выполняются неравенства

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < c,$$

т.е.  $\{x_n\}$  — монотонная ограниченная последовательность. Следовательно, она сходится, а поскольку это — итерационная последовательность, то она сходится к корню  $c$  уравнения  $f(x) = 0$ . Теорема 9 доказана.

Замечание 1. Тот факт, что  $\{x_n\} \rightarrow c$ , можно установить и непосредственно с помощью формулы (8.5). В самом деле, пусть  $\{x_n\} \rightarrow c'$ . Переходя в равенстве (8.5) к пределу при  $n \rightarrow +\infty$ , получим

$$c' = c' - \frac{(b - c')f(c')}{f(b) - f(c')},$$

откуда следует, что  $f(c') = 0$  и, следовательно,  $c' = c$ .

Замечание 2. Мы рассмотрели случай, когда  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) > 0$ . В случае, когда  $f'(x) < 0$ ,  $f''(x) < 0$ , нужно использовать ту же рекуррентную формулу (8.5), а в случаях  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) < 0$  и  $f'(x) < 0$ ,  $f''(x) > 0$  нужно  $a$  и  $b$  поменять ролями, то есть итерационная последовательность имеет вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(a - x_n)f(x_n)}{f(a) - f(x_n)}, \quad x_0 = b.$$

### Метод касательных (метод Ньютона)

Мы вновь рассматриваем уравнение (8.1):

$$f(x) = 0.$$

Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на сегменте  $[a, b]$ . Рассмотрим геометрическую иллюстрацию метода касательных. Проведем касательную к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $B_0(x_0; f(x_0))$  (рис. 8.7). Она пересекается с осью  $x$  в точке  $x_1$ . Проведем теперь касательную к графику функции в точке  $B_1(x_1, f(x_1))$ . Получим на оси  $x$  точку  $x_2$ . И так далее.

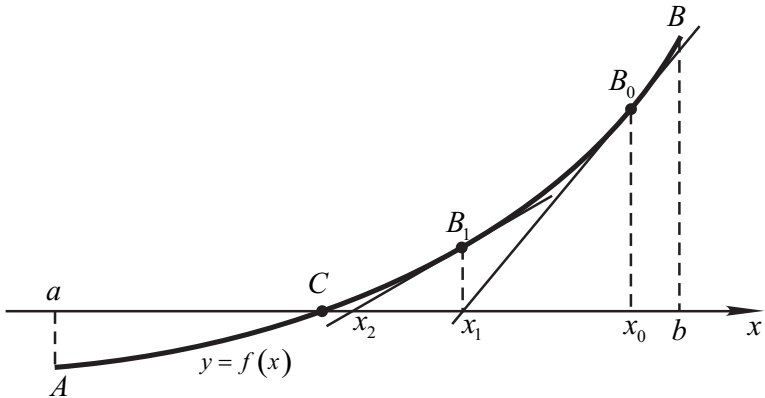


Рис. 8.7.

Напишем уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $B_n(x_n, f(x_n))$ :

$$Y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Полагая  $x = x_{n+1}$  и учитывая, что при этом  $Y = 0$  (рис. 8.8), приходим к рекуррентной формуле метода касательных:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (8.6)$$

Метод касательных является методом итераций, где

$$k(x) = -\frac{1}{f'(x)},$$

а последовательность  $\{x_n\}$ , определяемая рекуррентной формулой (8.6), является итерационной последовательностью.

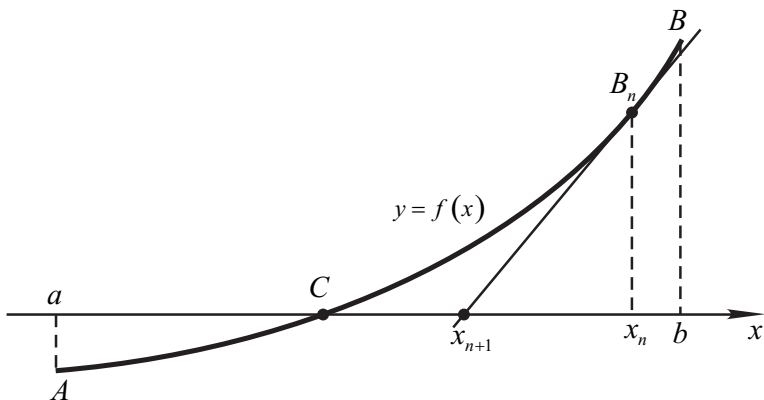


Рис. 8.8.

Заметим, что если взять  $x_0$  близко к точке  $a$ , то  $x_1$  может оказаться вне сегмента  $[a, b]$  и итерационный процесс прервется. Как выбирать  $x_0$ ? Ответ содержится в следующей теореме.

**Теорема 10.** Пусть выполнены условия теоремы 9 (рассматриваем случай, когда  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) > 0$  на  $[a, b]$ ).

Тогда если взять  $x_0 = b$ , то последовательность  $\{x_n\}$ , определенная формулой (8.6), сходится к корню  $c$ .

Доказательство. Так как  $f'(x) > 0$ , то функция  $y = f(x)$  возрастает на  $[a, b]$ , в частности,  $f(a) < 0$  и  $f(b) > 0$ , а поскольку  $f''(x) > 0$ , то график функции направлен выпуклостью вниз и, следовательно, лежит не ниже любой касательной. Отсюда следует, что  $x_1 > c$ , а из формулы (8.6) получаем:

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b = x_0.$$

Итак,  $c < x_1 < x_0$ .

Далее аналогично получаем, что для любого номера  $n$

$$c < x_n < \dots < x_1 < x_0,$$

т.е.  $\{x_n\}$  — монотонная ограниченная последовательность. Следовательно,  $\{x_n\}$  сходится, а так как эта последовательность является итерационной, то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = c.$$

Теорема 10 доказана.

Замечание 1. В случаях  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) < 0$  и  $f'(x) < 0$ ,  $f''(x) > 0$  нужно брать  $x_0 = a$ , а в случае  $f'(x) < 0$ ,  $f''(x) < 0$  нужно брать  $x_0 = b$ .

Замечание 2. Метод касательных — наиболее эффективный метод из рассмотренных нами.

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$x^2 - a = 0, \quad \text{где } a > 0.$$

Оно имеет 2 изолированных корня:  $\sqrt{a}$  и  $-\sqrt{a}$ . Для отыскания корня  $\sqrt{a}$  применим метод касательных. Так как  $f'(x) = 2x$ , то по формуле (8.6) получаем:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - a}{2x_n} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad x_0 > 0.$$

Пусть  $a = 25$ . Тогда  $\sqrt{a} = 5$ .

Возьмем  $x_0 = 10$ . Тогда

$$x_1 = \frac{1}{2} \left( 10 + \frac{25}{10} \right) = 6,25;$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( 6,25 + \frac{25}{6,25} \right) = 5,125.$$

Таким образом, начав с весьма далекого от  $\sqrt{a} = 5$  значения  $x_0 = 10$ , мы уже на второй итерации получаем хорошую точность:  $x_2 - \sqrt{a} = 0,125$ . Оказывается, что

$$x_3 \approx 5,002, \quad \text{а } x_4 \approx 5 + 2 \cdot 10^{-7}.$$

## Список литературы

1. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы математического анализа. М.: Физматлит, 2009.
2. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа. М.: Дрофа, 2006.
3. С.М. Никольский. Курс математического анализа. М.: Физматлит, 2001.
4. В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин. Математический анализ в вопросах и задачах. СПб.: Лань, 2008.
5. Б.П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Астрель, 2009.



ФИЗИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА