Домашнее задание №1

1. Выразить постоянную σ в законе Стефана-Больцмана через фундаментальные постоянные (из соображений размерности) и найти ее числовое значение (использовать формулу Планка).

2. Найти значение постоянной в законе смещения Вина и определить длину волны, соответствующую максимуму спектра солнечного света.

3. До какой максимальной температуры может нагреться тело на солнцепеке? (Тело считать абсолютно черным, интенсивность излучения Солнца на поверхности Земли – $I_S \approx 1.4 \cdot 10^6$ эрг·см$^{-2}$·с$^{-1}$).

4. Определить скорость электрона, выбитого с поверхности алюминиевого катода (работа выхода $A_{out} = 3.74$ эВ) квантом света ближнего УФ-диапазона: $\lambda = 300$ нм.

5. В *планковской системе единиц* в качестве масштабов используются скорость света c, постоянная Планка $\hbar$ и гравитационная постоянная G. Определить масштабы массы, длины и времени в этой системе единиц - *планковские масштабы.*

Домашнее задание №2

1. Найти выражение для спектральной амплитуды гауссова импульса: $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right) e^{i\omega_0 t}$ и прямоугольного импульса $\mathcal{E} = \begin{cases} \mathcal{E}_0 e^{i\omega_0 t}, & |t| \le \tau; \\ 0, & |t| > \tau. \end{cases}$
   Проверить выполнение соотношения $\Delta\omega\tau \sim 1$

2. Фотон с энергией $E = \hbar\omega$ несет импульс $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, где $\vec{k}$ - волновой вектор. При поглощении фотона этот импульс передается поглощающему телу. Оцените давление солнечного света на Земле.

3. Оценить долю квантов в солнечном излучении, энергии которых достаточно для ионизации атома гелия (энергия ионизации $E_i = 24.47$ эВ).

4. Как мы выяснили на семинаре, радиус когерентности для солнечного света $r_c \sim 100\lambda$. Для света удаленных звезд он может быть гораздо больше. Измеряя радиус когерентности можно оценить угловой размер звезды, а зная ее *годичный параллакс* (видимое угловое смещение звезды на небосводе, вызванное движением земли по орбите) можно определить и ее диаметр. В 1920 г. Майкельсон измерил на длине волны $\lambda = 575$ нм радиус когерентности для Бетельгейзе: $r_c \approx 3$ м. По современным данным, годичный параллакс Бетельгейзе составляет $0.005''$. Оцените диаметр Бетельгейзе по этим данным, сравните с диаметром Солнца.

Домашнее задание №3

1. Дифракционная решетка характеризуется коэффициентом пропускания $T(x) = \mathcal{E}_t(x)/\mathcal{E}_0$, где $\mathcal{E}_0$ - амплитуда падающей волны, $\mathcal{E}_t(x)$ - амплитуда волны, прошедшей через решетку. Какой вид будет иметь распределение поля в дальней зоне при дифракции плоской волны на *синусоидальной решетке* – решетке с коэффициентом пропускания $T(x) = \cos(qx)$, где $q = \frac{2\pi}{d}$ – вектор обратной решетки?

2. С помощью соотношения неопределенностей оценить минимальную энергию гармонического осциллятора.

3. Масса нейтрона известна с точностью до 8-го знака после запятой: $m_n = (1.674927351 \pm 0.000000074) \times 10^{-24}$ г. Учитывая, что период полураспада нейтрона $\tau \approx 611$ с, определить, насколько в принципе возможно улучшить точность измерения этой константы.

4. С помощью соотношения неопределенностей оценить энергию ионизации атома гелия.

Домашнее задание №4

1. Найти разность частот между соседними модами электромагнитного поля в резонаторе в форме тора прямоугольного сечения очень большого радиуса: $R \gg a, b$, где a и b - стороны прямоугольника в сечении.

2. Энергия электростатического поля $W = \frac{1}{8\pi} \int \vec{E}^2(\vec{r}) d\vec{r}$ двух точечных зарядов e_1 и e_2 покоящихся в вакууме на расстоянии r_{12} друг от друга, бесконечна. Показать, что за вычетом из W бесконечных вкладов от энергии собственного электростатического поля каждого из зарядов, остаток W' равен энергии кулоновского взаимодействия зарядов $W' = e_1 e_2 / r_{12}$.

Домашнее задание №5

1. Найти попарные коммутаторы $[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j]$ *матриц Паули:*

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Найти их собственные значения и соответствующие собственные векторы.

2. Доказать *тождество Якоби* для коммутаторов:

$$[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] = 0.$$

3. Экспонента от оператора $\hat{A}$ определяется следующим образом:

$$\exp \hat{A} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^n}{n!}.$$

   Покажите, что если оператор $\hat{A}$ эрмитов, то оператор $\hat{U} = \exp(i\hat{A})$ — унитарный.

4. Найдите $\hat{U}_j = \exp\left(-i\varphi\hat{\sigma}_j\right)$ для всех матриц Паули $\hat{\sigma}_j$.

5. В пространстве $\mathbb{L}_2$ квадратично интегрируемых функций $\psi(x)$ оператор импульса $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$, а оператор координаты $\hat{x} = x$. Найти собственные функции и собственные значения оператора $\hat{f} = \alpha\hat{x} + i\beta\hat{p}$, где α и β - действительные числа.

Домашнее задание №6

1. Получить выражения для коэффициентов пропускания и отражения от прямоугольного потенциального барьера

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ U_0, & 0 \le x < d, \\ 0, & x \ge d. \end{cases}$$

   (Соответствующая система уравнений была получена на семинаре).

2. При $E < U_0$ коэффициент пропускания для прямоугольного потенциального барьера из предыдущей задачи можно получить и из приближенной формулы

$$T(E) \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int_0^d \left|\sqrt{2m(E-U(x))}\right| dx\right]$$

   (см. лекции). Сравните результат с точным решением: при каком условии ошибка приближения будет малой?

3. Рассмотрим потенциальный барьер вида $U(x) = U_0\delta(x)$, где δ-функция определяется условиями

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \ne 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad ; \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0).$$

   Для уравнения Шредингера с таким потенциалом условие непрерывности производной для волновой функции *не выполняется.* Найти скачок производной волновой функции в точке разрыва потенциала и определить коэффициент прохождения частицы через такой барьер.

Домашнее задание №7

1. Частица в потенциальном ящике

$$U(x) = \begin{cases} 0, & |x| < d \\ \infty, & |x| > d \end{cases}$$

   находится в состоянии с волновой функцией $\psi(x) = \xi(d^2 - x^2), \quad |x| < d$, где ξ - нормировочный множитель. Вычислить среднее значение энергии $\langle E \rangle$ в этом состоянии.

2. Найти положения уровней энергии в потенциальной яме

$$U(x) = W\delta(x) + \begin{cases} 0, & |x| < d \\ \infty, & |x| > d. \end{cases}$$

3. (*) Определить коэффициент прохождения частицы через потенциальный барьер вида

$$U(x) = -W\delta(x) + \begin{cases} 0, & |x| > d, \\ U_0, & |x| < d. \end{cases}$$

   Нарисовать график для параметров $B = 1.5; W = 0.5U_0 d$.

Домашнее задание №8

1. Вычислить средние значения и дисперсии операторов координаты $\hat{x}$ и импульса $\hat{p}$ в n-м стационарном состоянии гармонического осциллятора $\varphi_n(x)$.

2. При $t = 0$ гармонический осциллятор находится в состоянии

$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\varphi_1(x) + i\frac{2}{\sqrt{3}}\varphi_2(x),$$

   где $\varphi_n(x)$ - волновые функции n-го стационарного состояния. Вычислить $\langle x(t) \rangle$.

3. Найти уровни энергии гармонического осциллятора, на который действует постоянная внешняя сила F - системы с гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 - F\hat{x}.$$

Домашнее задание №9

1. Рассмотрим собственный базис оператора $\hat{s}_z$ для спина $s = 1/2$:

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   В этом базисе операторы проекций спина описываются матрицами Паули:

$$\hat{s}_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Для спина $s = 1$ найти явный вид матриц операторов $\hat{s}_x, \hat{s}_y, \hat{s}_z$ в собственном базисе оператора $\hat{s}_z$.

2. Пусть операторы a и b такие, что $[a, a^\dagger] = 1, [b, b^\dagger] = 1, [a, b] = [a, b^\dagger] = 0$. Тогда для компонент углового момента можно получить выражения:

$$\hat{l}_x = \frac{a^\dagger b + b^\dagger a}{2}, \quad \hat{l}_y = \frac{a^\dagger b - b^\dagger a}{2i}.$$

   Как выражаются через a и b операторы $\hat{l}_z$ и $\hat{l}^2$?

Домашнее задание №10

1. Для основного состояния атома водорода найти наиболее вероятное расстояние между электроном и ядром.

2. Найти для $1s$ и $2s$ состояний атома водорода среднее расстояние $\langle r \rangle$ и дисперсию расстояния $\langle (\Delta r)^2 \rangle$ между электроном и ядром.