

ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ И СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ФОМЕНКО
АНАТОЛИЙ ТИМОФЕЕВИЧ

—
МЕХМАТ МГУ



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

АКАДЕМИК А. Т. ФОМЕНКО
ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ И СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ
Годовой спецкурс для студентов, начиная с 1 курса - до аспирантов.
1. Осенний семестр

ВВЕДЕНИЕ

Кривые на плоскости и в пространстве.

Тема 1. ДВУМЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Двумерные поверхности. Погружения и вложения двумерных поверхностей в евклидово пространство. Сфера Александера. Теорема классификации двумерных поверхностей. Связная сумма. Ориентируемость и неориентируемость. Свойства проективной плоскости, бутылки Клейна, сфер с ручками.

Тема 2. МНОГОМЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ (МНОГООБРАЗИЯ)

Многомерные многообразия как поверхности в евклидовом пространстве. Задание гладкого многообразия при помощи локальных карт и атласа. Теоремы Уитни и вложения и погружения многообразий в евклидово пространство. Трехмерные многообразия. Разложение трехмерной сферы в сумму двух полноторий. Расслоение Хопфа. Многомерные проективные пространства. Матричные группы как гладкие многообразия.

Тема 3. КЛЕТОЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА (КОМПЛЕКСЫ)

Симплициальные пространства. Триангуляции и клетки. Гомотопия, гомотопическая эквивалентность. Изотопия. Теория накрытий. Степень отображения гладких многообразий. Фундаментальная группа клеточного комплекса (образующие и соотношения). Накрытия и фундаментальная группа. Теорема о накрывающей гомотопии. Универсальные накрытия. Теорема ван Кампена (без док-ва). Разветвленные накрытия. Римановы поверхности алгебраических функций и их связь с накрытиями и двумерными многообразиями.

Тема 4. ГОМОЛОГИИ

Симплициальные гомологии. Клеточные гомологии. Теорема об их совпадении для "хороших пространств" (без док-ва). Эйлерова характеристика. Основные свойства групп гомологий. Примеры вычисления. Точная гомологическая последовательность пары.

Тема 5. ТЕОРИЯ МОРСА

Невырожденные критические точки, их индекс. Лемма Морса. Основные свойства функций Морса. Перестройки поверхностей уровня функций Морса. Операция приклейки ручек. Основная теорема теории Морса (связь между клеточной структурой многообразия и критическими точками функции). Простые и сложные функции Морса. Понятие атома-бифуркации. Молекулы и функции Морса. Послойная классификация функций Морса на двумерных поверхностях. Категория Люстерника-Шнирельмана. Точки бифуркаций функций. Теорема Люстерника-Шнирельмана (связь между категорией и числом точек бифуркации функции).

2. Весенний семестр

Тема 6. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ГРУППАХ ЛИ И АЛГЕБРАХ ЛИ

Матричные группы как гладкие многообразия и как группы Ли. Алгебра Ли и ее связь с группой Ли. Матричные группы малых размерностей.

Тема 7. СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Линейная симплектическая структура. Изотропность, лагранжевость. Группа симплектических преобразований.

Тема 8. СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Симплектическая структура на многообразии. Теорема Дарбу. Канонические симплектические координаты. Примеры симплектических многообразий (касательные расслоения и т.п.). Косой градиент и гамильтоновы векторные поля (динамические системы). Связь с потенциальными векторными полями. Лемма Пуанкаре. Несжимаемые потоки идеальной жидкости. Комплексные потенциалы. Скобка Пуассона и ее основные свойства. Тожество Якоби для скобки Пуассона.

Тема 9. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Интегралы гамильтоновых полей. Инволютивность. Теорема Лиувилля. Полная интегрируемость по Лиувиллю. Отображение момента интегрируемой системы. Бифуркации торов Лиувилля и топология интегрируемой системы. Уравнения движения тяжелого твердого тела в трехмерном пространстве (уравнения Эйлера-Пуассона). Знаменитые случаи интегрируемости: случаи Эйлера, Лагранжа, Ковалевской.

• Напомним. о классич. теории Морса:

$M^n, f(x), C^\infty(M)$, крит. точки: $df(x_0) = 0$, невырожд. крит. точка: $d^2f|_{x_0}$ - невыр. т. е. $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$ - невырожд. квадрат. матрица. Индекс λ невыр. крит. точки.

• Теор. (Морса). Рассм. M^n и $f(x)$; пусть все "срезы" $(f(x) \leq c = const)$ - компактны. Пусть f - ф-я Морса. Тогда: 1) M гомотоп. эквивал. клеточн. комплексу:

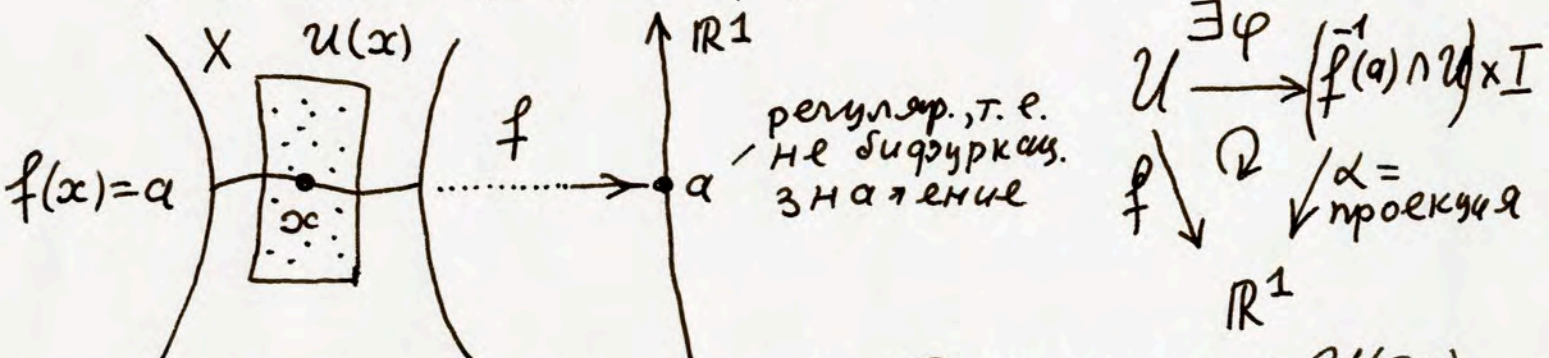
$M^n \sim \bigcup_{i, \lambda} \sigma_i^\lambda$, где клетки $\sigma_i^\lambda \longleftrightarrow x_i$ (крит. т. $ind = \lambda$).

2) M гомеоморфно объедин. ручек $M^n \approx \bigcup_{i, \lambda} H_{i, \lambda}^n$, где $H_\lambda^n = \mathbb{D}^\lambda \times \mathbb{D}^{n-\lambda}$ и ручки $H_{i, \lambda}^n \longleftrightarrow x_i = \text{крит. т. } ind = \lambda$.

• Однако в прилож. (физика, биология, химия) далеко не всегда крит. точки невырожд. А тем не менее получить информ. о топологии M - надо. Оказав., есть красивое обобщение теор. Морса - это теория Люстерника-Шнирельмана.

• Отказ от невырожд. крит. точек. Более общо: точки бифуркации. Опред. точки бифуркации: сначала - регул. точка: качим.

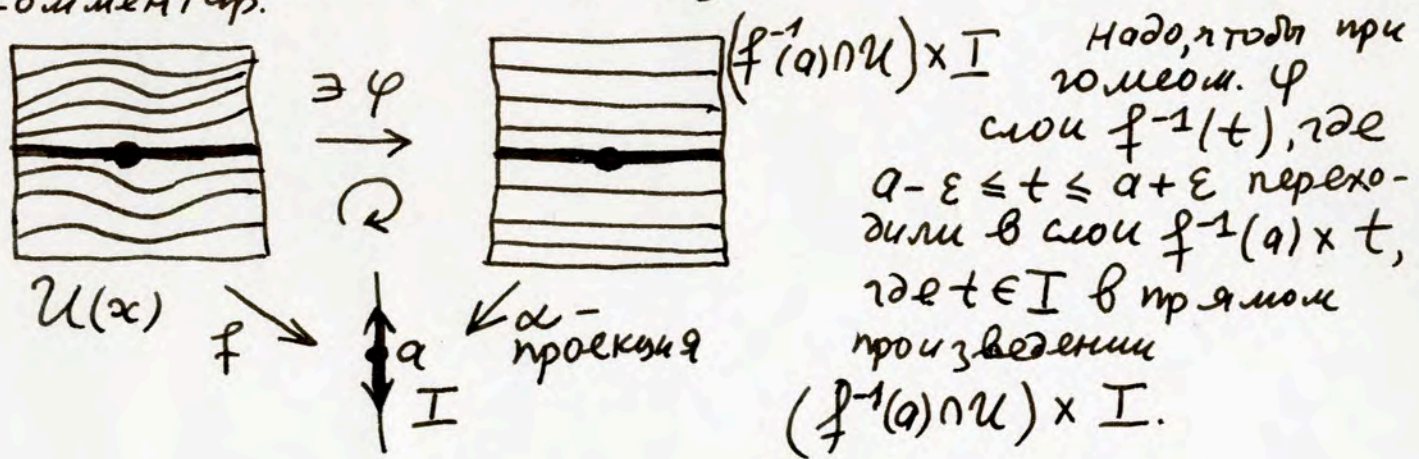
$f: X \rightarrow \mathbb{R}^1$, где f - непрер. отобр. хаусд. топол. пр-ва X в \mathbb{R}^1



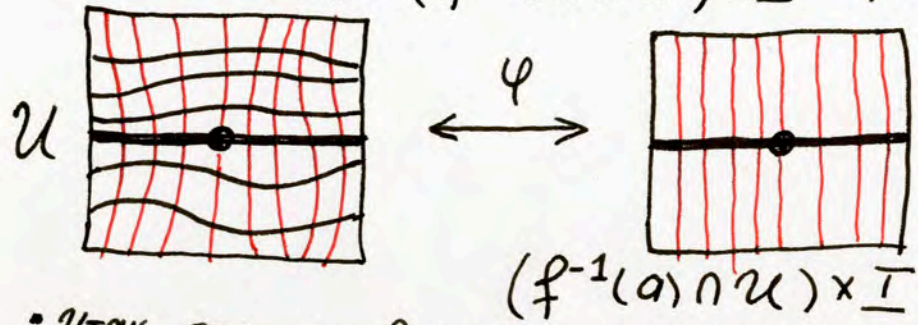
точка x назыв. регулярной, если \exists ее откp. окр. $U(x)$ и гомеоморф. $\varphi: U(x) \rightarrow (f^{-1}(a) \cap U) \times I$ таки, что диаграмма коммут., т. е. $f = \alpha \circ \varphi$ (см. выше).

• В противн. случае точка x назыв. точкой бифуркации.

• Комментар.



Теперь мы можем "нарисовать" в U "вертикальные" одномерные слои. Это - прообразы вертикальных слоев в прямом произв. $(f^{-1}(a) \cap U) \times I$ при гомеоморф. φ :

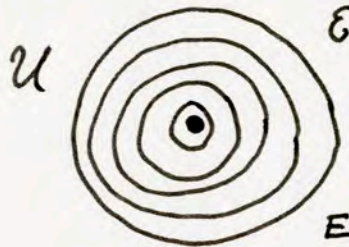


Эти "вертикальные слои" - аналоги линий тока вект. поля $\text{grad } f$ на малом окр. M . Они ортогональны поверхн. уровня $f^{-1}(t), t \in I$.

Итак, это - правильные точки x . Все остальные - это точки бифуркации, "плохие".

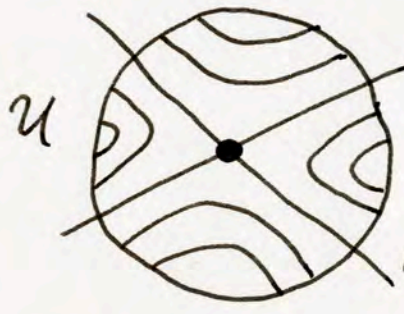
Пример. Пусть $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ - ϕ -я морса. Тогда ее крит. точки авл. точк. бифуркации (в новом смысле). ϕ -во.

Пусть x - точка \min или \max . Тогда окрестн. U такова:



Если c - это знач. f в такой точке, то $x = f^{-1}(c) = \text{точка}$. Ясно, что $U \neq f^{-1}(c) \times I$, т.к. $\dim U = n$, а $\dim(x \times I) = 1$. Здесь $n \geq 2$.

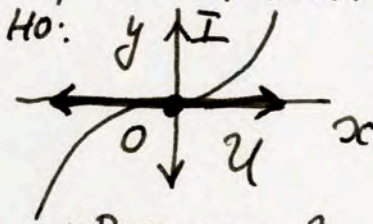
Если же x - седлов. крит. т. для f , то U имеет вид:



Очевидно, что $U \neq f^{-1}(c) \times I$. Здесь $f^{-1}(c) = \text{"конус"}$. Потому что $f^{-1}(c) \times I$ - не многообр.

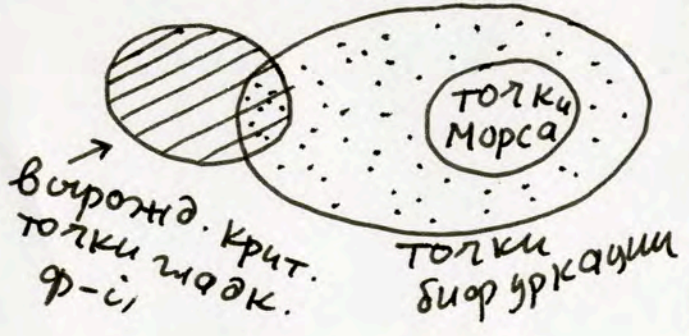
Если же x - вырожд. крит. точка макс. f на M , то x может не быть

точк. бифурк. (в новом смысле), т.е. может оказаться правил. (регул.) точкой. Пример: $y = x^3$. Здесь $x=0$ - вырожд. крит. т.: $df = 3x^2 dx, f'' = 6x$ и $= 0$ при $x=0$.



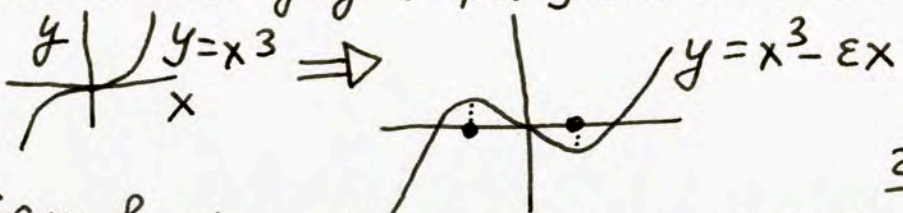
здесь $U \simeq f^{-1}(0) \times I$, т.к. $f^{-1}(0) = 0$ (точка). Т.е. $x=0$ - правил. точка (в новом смысле). Т.е. $f: U \rightarrow I$ - это гомеоморф: $x \rightarrow x^3$.

Вот условн. схема взаимод. крит. точек макс. ϕ -и и точек бифуркации:



В дальнейшем мы будем рассматривать в основном $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, где M и f - гладкие, но f не обязат. ϕ -я морса. Но будем предполагать, что f имеет лишь конечное число точек бифурк. на M .

• При малой деформации (гомотопии) функции точки Ляпуна могут сливаться и расходиться. Пример: $y = x^3 - \epsilon x$, $y' = 3x^2 - \epsilon = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\epsilon/3}$, т.е. две невыр. крит. точки могут сливаться в одну вырожд. особенность:



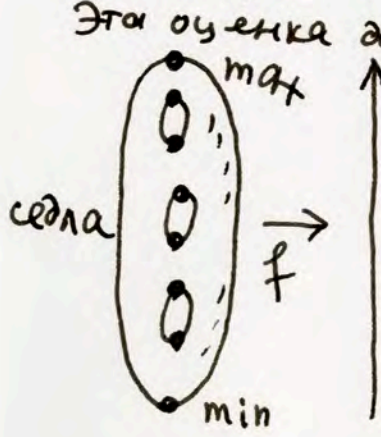
Как оценить снизу число

крит. точек функции на данном многообр.?

• Если f - ϕ -я Морса, то такие оценки есть. По теор. Морса $M = \bigcup_{i, \lambda} \sigma_i^\lambda$, где $\sigma_i^\lambda \leftrightarrow x_i$ ($\text{ind} = \lambda$). Рассматриваем число $\mu_\lambda = \#(\text{крит. точек } \text{ind} = \lambda)$. Тогда $\mu_\lambda(f) = \text{кол-во образующих в группе клеточн. цепей } C_\lambda(M, \mathbb{Z})$, т.к. клетки σ_i^λ - это образующие. Но тогда $\mu_\lambda(f) \geq \text{ранг } H_\lambda(M, \mathbb{Z}) = \beta_\lambda$ - число Бетти в размерн. $= \lambda$.

• Теор. $\mu_\lambda(f) \geq \beta_\lambda$ для \forall ϕ -числ Морса f на M , $\Rightarrow \mu(f) = \sum_\lambda \mu_\lambda(f) \geq \sum_\lambda \beta_\lambda$.

• Это - оценка снизу на число крит. тог. \forall ϕ -числ Морса f на данном M . Оценка - через топологию многоб. M . Такие оценки важны в физике для оценки снизу числа положений равновесия физич. систем. Пример: рассм. $M^2 = S^2 + g$ (ручек), ориент. 2-поверхн. Тогда $\beta_0 = 1, \beta_1 = 2g, \beta_2 = 1$ и $\mu(f) \geq 1 + 2g + 1 = 2(1+g)$.



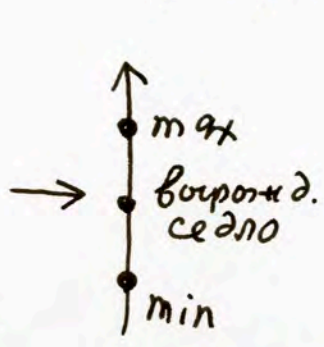
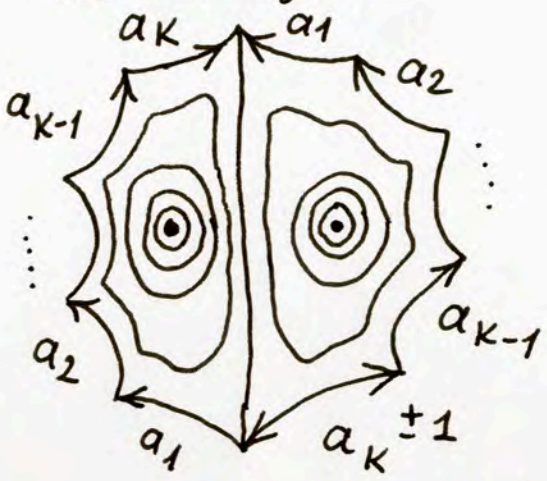
Эта оценка достигается для ϕ -числ высоты в \mathbb{R}^3 , как показано: 1 min, 2g седел, 1 max. Здесь $\mu(f) = 2 + 2g$. И так, на данном M^2 нельзя найти ϕ -ю Морса с меньшим числом крит. точек.

• А теперь разрешим крит. точким вырожд. даются (например, сливаются). Тогда их число может уменьшиться. Остается ли некая другая оценка снизу на их кол-во, через топологию M ? Рассматриваем пример с вырожд. особенн. на M_g^2 .

• Зададим M^2 (ориент. или неориент.) симметричным "словом" = фундам. множит. $W = a_1 a_2 \dots a_k a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k^{\pm 1}$, где -1 отвечает ориент. M^2 , а $+1$ ответ. неориент. M^2 .

Утв. На M^2 всегда \exists гладк. ϕ -я с ровно 3 крит. тог. 1 min, 1 max, 1 седло - вырожденное. Здесь $g \geq 1$ (род).

2-во. Задана функц. f на M^2 ее линиями уровня
на многуу. W : Три крит. точки: (4)



и так, для такой функции $\mu(f) = 3$, а $\sum \beta_k = 2 + 2g$
и при $g \geq 1$: $3 < 4$, т.е. аналог нер-ва здесь нарушен.

• Замечание. Построить на M^2_g , $g \geq 1$, φ -ю с ровно 2 крит. точками нельзя.

• Теор. Если на гладк. замкн. мног. M^2 есть φ -я с 2 крит. точками, то M^2 — сфера.

2-во несложное, но мы его опустим.

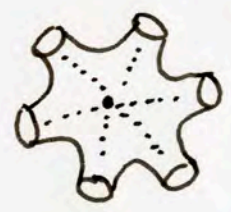
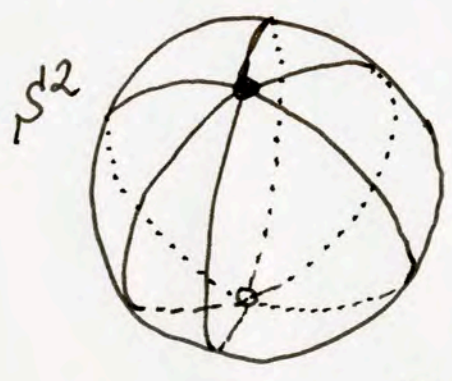
• Утв. Если $g \geq 1$, то построенн. на M^2_g φ -я с 3 крит. точк. не может быть реализована как φ -я высоты при вложении (погружении) M^2_g в \mathbb{R}^3 . (Докажите!)

• Утв. Если f — φ -я высоты на M^2_g , $g \geq 1$, при погружении в \mathbb{R}^3 , то $\mu(f) \geq 4$. (Докажите!). Эта оценка достигается.

Для 2-ва можно рассмотреть малую трубку окрестн. набора меридианов на сфере, и взять границу этой окрестн.

Получится φ -я с 4 крит. точк. на M^2_g , т.е. $\mu(f) = 4$.

1 min, 1 max, 2 вырожд. седла.



• и так, задача: оценить снизу $\mu(f)$ (т.е. число точек бифуркации) для φ -лодк. φ -ии на M^n с изолированн. критич. точками (быть может, вырожден.). Это можно

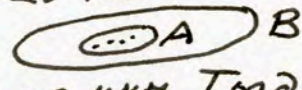
сделать при помощи нового понятия — $\text{cat } M$ — категории Люстернака-Шнирельмана.


• Определ. Пусть X — топол. хаусд. пр-во и $A \subset X$ — замкн. подмн-во в X . Тогда категория л.ц. $\text{cat}_X A$ — это наименьшее число замкн. множеств A_i в X такит, что: $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$ и

каждое A_i стягн. в точку по X : $A_i \rightarrow *$. При этом A_i не предполагаг. связности. Если $A = X$, то $\text{cat}_X X = \text{cat } X$ и называется категорией X .

• Теор. (Люст.-Шнирел.) Пусть M — связное глад. мног. и f — гладк. φ -я на M с изолиров. точками бифуркации. Тогда $\mu(f) \geq \text{cat } M$. (крит. точки могут быть вырожд.).

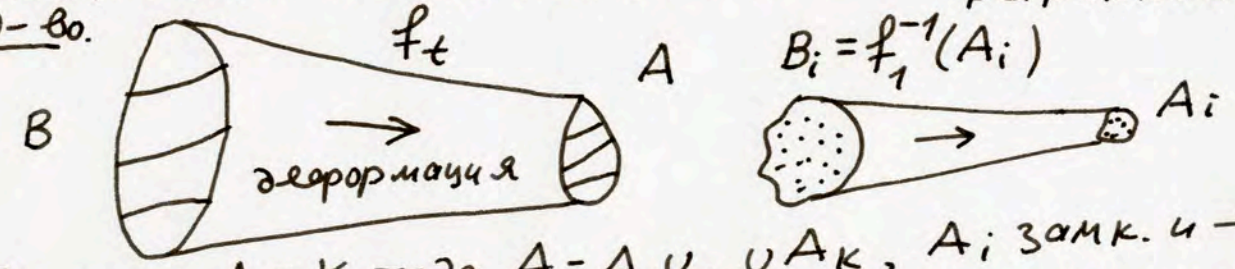
\mathcal{L} -во - это цепочка лемм, раскрыв св-ва категории $\text{cat}_X A$. (5)

• Лемма 1. Пусть $X \supset B \supset A$ - замкнуты. Тогда $\text{cat}_X A \leq \text{cat}_X B$.
до-во. Пусть $\text{cat}_X B = k$, тогда $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$,
 где B_i все замкн. и $\rightarrow *$ по X . Положим $A_i = B_i \cap A$.
 Тогда $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$, все A_i замкн. и все $A_i \rightarrow *$ по X .
 Но такое покрытие A может быть не оптимально, а потому
 $\text{cat}_X A \leq k = \text{cat}_X B$. Читрэд. 

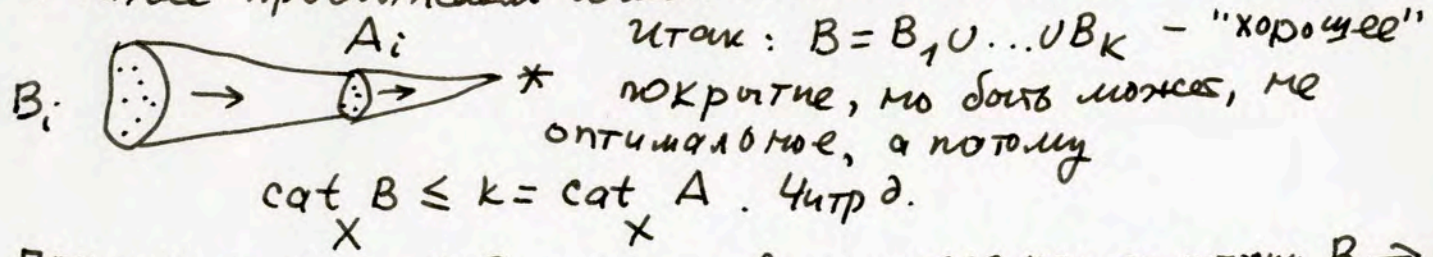
• Лемма 2. Пусть $A, B \subset X$, оба замкн. Тогда
 $\text{cat}_X (A \cup B) \leq \text{cat}_X A + \text{cat}_X B$.
до-во. Пусть $k = \text{cat}_X A$ и $p = \text{cat}_X B$, тогда
 $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$ и $B = B_1 \cup \dots \cup B_p$, где
 $A_i \rightarrow *, B_i \rightarrow *$. Тогда $A \cup B = A_1 \cup \dots \cup A_k \cup B_1 \cup \dots \cup B_p$ и мы
 получили "хорошее" покрытие. Но оно может быть не оптимально,
 а потому $\text{cat}_X (A \cup B) \leq k + p = \text{cat}_X A + \text{cat}_X B$. Читрэд.

• Лемма 3. Пусть $B \supset A$, тогда $\text{cat}_X (B \setminus A) \geq \text{cat}_X B - \text{cat}_X A$.
до-во. Так как $B = A \cup (B \setminus A)$, то из леммы 2 имеем:
 $\text{cat}_X B \leq \text{cat}_X A + \text{cat}_X (B \setminus A)$. Читрэд.

• Лемма 4. Пусть $B \subset X$ и задана гомотопия $f_t: B \rightarrow X$, где
 $f_0 = \text{id}, f_0(B) \equiv B; f_1(B) = A \subset X$. Тогда $\text{cat}_X A \geq \text{cat}_X B$.
 т.е. при гомотопии замкн. подмн-ва в X его категория
 может только увеличиться. (A назыв. деформационным
 ретрактом B).
до-во.

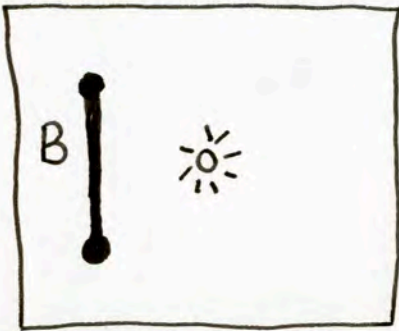


Пусть $\text{cat}_X A = k$, тогда $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$, A_i замкн. и $\rightarrow *$ по X .
 Положим $B_i = f_1^{-1}(A_i)$. Тогда все B_i - замкн, т.к.
 f_1 - непрер. отображ. Прообраз замкнутого - замкнут. Далее:
 $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$. И далее: $B_i \rightarrow *$ по X , т.к. $A_i \rightarrow *$ по X .
 т.е. B_i стягив. в точку по X при гомотопии $f_t: B_i \rightarrow A_i$
 и далее продолжая гомотопию, стягивая A_i в точку.

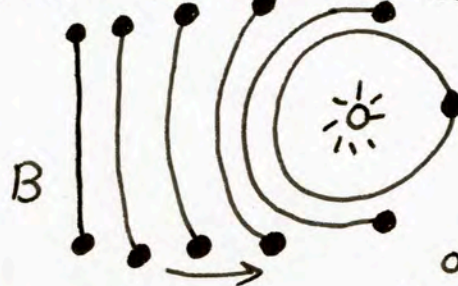


• Пример, когда $\text{cat}_X B$ может увеличиться при гомотопии $B \rightarrow A$.

$X = \mathbb{R}^2 \setminus \ast$ (плоск. с проколом)



B -отрезок



это - гомотопия B по плоскости с проколом.

$A = S^1 = f_1(B)$

отрезок B охватывает дырку и превращ. в окружн.

6

Есть, что $\text{cat}_X B = 1$ (отрезок стягив. в точку), а $\text{cat}_X A = 2$, т.к. $A = S^1$ не стягив. в точку на плоск. с проколом. И так, $\text{cat}_X A > \text{cat}_X B$.

• Лемма 5. Пусть теперь X -многообр. и $A \subset X$ замкн. мн-во.

Тогда $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\text{cat}_X(\overline{U_\varepsilon A}) = \text{cat}_X A$.

д-во. В одну сторону, имеем нер-во: $\text{cat}_X A \leq \text{cat}_X \overline{U_\varepsilon A}$, т.к. $A \subset \overline{U_\varepsilon A}$. Обратное сложнее. Пусть $\text{cat}_X A = k$, т.е.

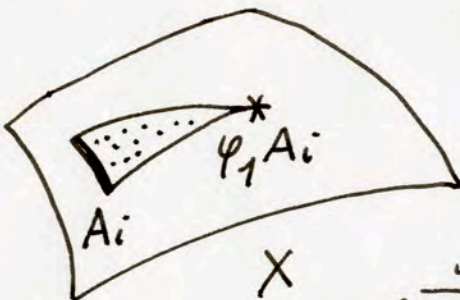
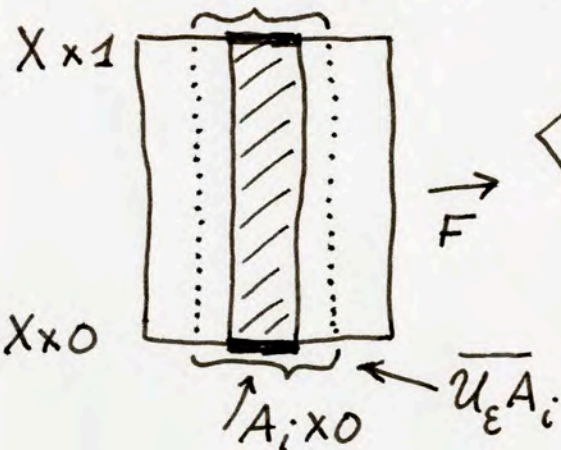
$A = A_1 \cup \dots \cup A_k$, все $A_i \rightarrow \ast$ по X и замкн.

Спас мы докажем, что $\exists \varepsilon > 0 : \overline{U_\varepsilon A_i} \rightarrow \ast$ по X влед за A_i . Если это уже доказано, то $\overline{U_\varepsilon A} = \bigcup_{i=1}^k \overline{U_\varepsilon A_i}$

а потому $\text{cat}_X \overline{U_\varepsilon A} \leq k = \text{cat}_X A$. Чтрд.

Остается доказать для каждого A_i . Дана гомотопия

$\varphi_t : A_i \rightarrow X$, где $\varphi_0 = \text{id}$, а $\varphi_1 A_i = \ast$. То есть: $F : A_i \times I \rightarrow X$



По теореме Титса отображ. F можно (в случае многообразия X) продолжить до непрер. отображ. на малую окрестность $(\overline{U_\varepsilon A_i}) \times I$. Тогда

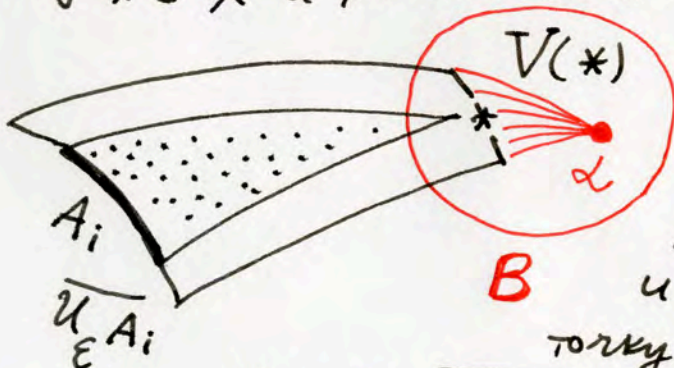
образ $\varphi_1((\overline{U_\varepsilon A_i}) \times I)$ содержит

точку $\ast \in X$ и расположен в малой окрест. $V(\ast)$ в X :

Но так как X -много., то окрестн. $V(\ast)$ можно

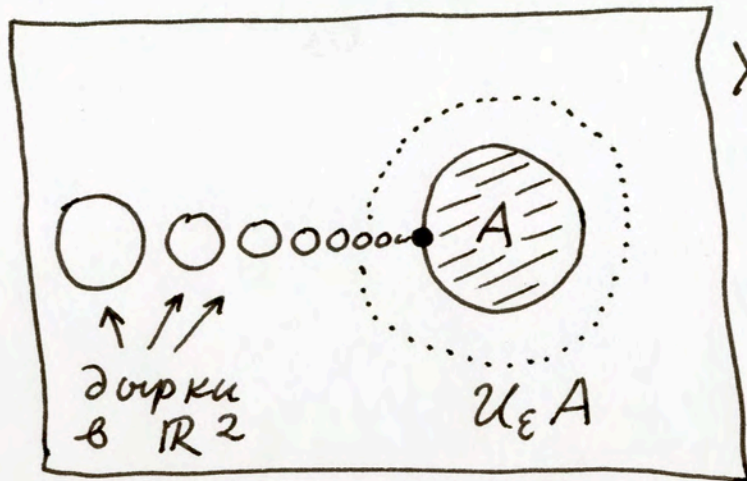
считать лежащей внутри диска $B \subset X$. Поэтому эту гомотопию можно продолжить и стянуть $\varphi_1((\overline{U_\varepsilon A_i}) \times I)$ в

точку $\alpha \in B$. Тем самым, вся окрестн. $\overline{U_\varepsilon A_i}$ стянулася в точку по X . Чтрд.



Если X — не много, то лемма 5 неверна. Контрпример.

7



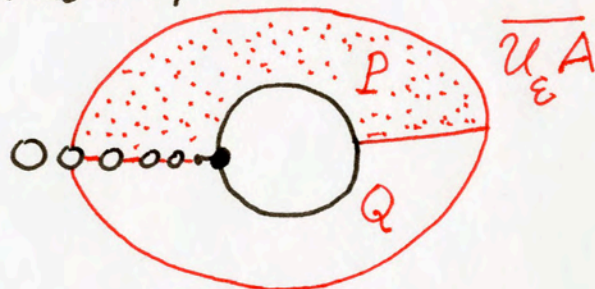
$$X = \mathbb{R}^2 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i^2$$

т.е. выстроим из плоскости счетное число дисков так, чтобы дырки накатывались к точке на границе диска A .
 Т.к. A — диск, то $\text{cat}_X A = 1$, диск стягивается.
 Но для $\forall \epsilon > 0$ $\text{cat}_X \overline{U_\epsilon A} > 1$.

т.к. в $U_\epsilon A$ всегда есть счетное число дырок.

Кстати, $\text{cat}_X \overline{U_\epsilon A} = 2$, так как

$\overline{U_\epsilon A} = P \cup Q$, где P и Q замкн. и очевидно $P \rightarrow *$ и $Q \rightarrow *$ по X .



Лекция 2.

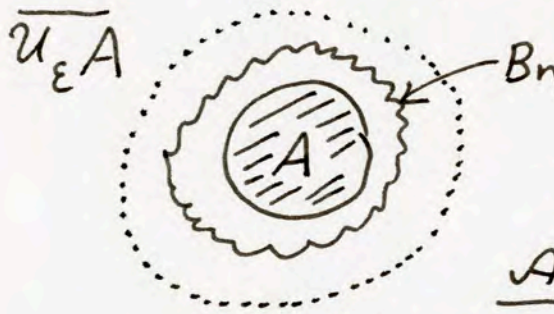
Пусть $X = M$ - гладк. много. и $\Theta(M)$ - мн-во всех замкнутых подмнож. в M . Пусть на M задана метрика r (расстояние). Тогда $\Theta(M)$ превращ. в метрич. пр-во введенной метрикой ρ Хаусдорфа. Пусть $A, B \subset M$. Тогда

$$\rho(A, B) = \sup_{a \in A} (\inf_{b \in B} r(a, b)) + \sup_{b \in B} (\inf_{a \in A} r(b, a))$$

- утв. (без ∂ -ва). ρ удовл. аксиомам метрики:
 - 1) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$; 2) $\rho(A, B) = 0 \iff A = B$;
 - 3) $\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C) \quad \forall A, B, C \in \Theta(M)$

• лемма 6. Пусть $B_n \subset M$ все замкн., $\forall n = 1, 2, \dots$ и пусть $A = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$, т.е. $\rho(B_n, A) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть $\text{cat}_M B_n \geq i$ при всех n . Тогда $\text{cat}_M A \geq i$.

∂ -во. В силу леммы 5 $\exists \epsilon > 0 : \text{cat}_M \overline{U_\epsilon A} = \text{cat}_M A$.
 Т.к. $A = \lim B_n$, то $\exists N$: при $n > N$ имеем: $B_n \subset \overline{U_\epsilon A}$.



Тогда $\text{cat}_M A = \text{cat}_M \overline{U_\epsilon A} \geq \text{cat}_M B_n \geq i$.
 Читр ∂ .

• Теперь на время отойдем от катег. л.ц. и обсудим "аналогия".

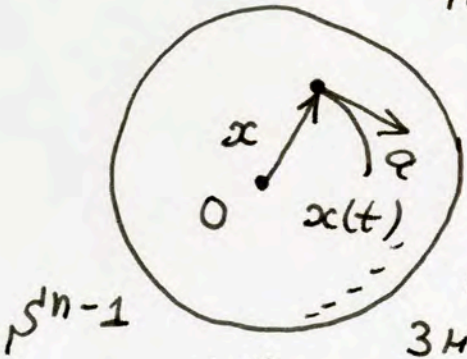
Аналогия. Пусть $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ - станд.

сфера и $f(x) = B(x, x) = \langle Bx, x \rangle$ - квадрат. (билин.) симметр. форма в \mathbb{R}^n . Здесь \langle, \rangle - евкл. скал. произв., а $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ лин. операт. (матр.), ответ. форме B .

Рассм. огранич. ф-ции f на S^{n-1} и найдем ее крит. точ.

утв. $x \in S^{n-1}$ явл. крит. точк. ф-ции $f = B(x, x) \iff Bx = \lambda x$, т.е. x - собств. в-р формы (операт.) B .

∂ -во. точк. x явл. крит. для $f \iff d f / d a |_x = 0$ для \forall касат. в-ра $a \in T_x S^{n-1}$. Рассм. на сфере маж. путь $x(t)$ такой, что $x(0) = x$ (крит. т.) и $\dot{x}(0) = a$.



$$\begin{aligned} \text{Тогда } 0 &= \left. \frac{df}{da} \right|_x = \left. \frac{d}{dt} f(x(t)) \right|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} \langle Bx, x \rangle = \langle B\dot{x}, x \rangle + \langle x, B\dot{x} \rangle = \\ &= 2 \langle Bx, \dot{x} \rangle = 2 \langle Bx, a \rangle, \quad \forall a \in T_x S^{n-1}. \end{aligned}$$

Значит в-р Bx ортогонален касат. пл-ти $T_x S^{n-1}$, а потому коллинеарен в-ру x , т.е. $Bx = \lambda x$. Читр ∂ .

• Из собств. векторов формируем ортобазис в \mathbb{R}^n . (9)

$e_0, e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$. Упорядочим их по возрастанию λ_i , т.е. $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$. Пусть $S^i \subset S^{n-1}$, где $0 \leq i \leq n-1$ — всевозм. экваторы $\dim = i$, т.е. плоские сечения S^{n-1} плоскостями Π^{i+1} через центр сферы. Пусть $E_i = \{S^i\}$ — класс (совокуп.) всех S^i .

[Утв. Верно равенство: $\lambda_i = \inf_{S^i \in E_i} (\max_{x \in S^i} f(x))$. (Докажите!)

Для примера докажем для $i=0$. Ясно, что

$S^0 \in E_0$ — это двоеточия $(x, -x)$, $x \in S^{n-1}$, $x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 1$.

Тогда $\max_{x \in S^0} f(x) = f(x) = B(x, x) = \lambda_0 x_0^2 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1}^2$.

Надо найти \inf этой суммы. Запишем так:

$$f(x) = \lambda_0 (1 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k^2 = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_0) x_k^2 \geq \lambda_0$$

$\geq \lambda_0$, т.к. $\lambda_k - \lambda_0 \geq 0$ ввиду упорядочивания. Цитр.д.

• Итак ϕ -я $f(x) = \langle Bx, x \rangle$ в случае общ. полож., т.е. когда все λ_i различны, имеет на S^{n-1} ровно $2n$ крит. точек, а именно, $\pm e_i$, $0 \leq i \leq n-1$. Но так как $f(x) = f(-x)$, то ϕ -ю f можно естеств. переместить на проект. пр-во $\mathbb{R}P^{n-1} = S^{n-1}/\mathbb{Z}_2$, т.е. $\mathbb{R}P^{n-1} = \{(x, -x), \text{ где } x \in S^{n-1}\}$.

При этом f на $\mathbb{R}P^{n-1}$ имеет ровно n крит. точек:

$(e_i, -e_i)$.

Утв. Пусть f — ϕ -я на $\mathbb{R}P^{n-1}$, порожденная $f = \langle Bx, x \rangle$.

[Тогда число точек бифурк. (крит. точек) $\mu(f) \geq \# E_i$,

т.е. $\mu(f)$ не меньше числа классов E_i , т.е. $\mu(f) \geq n$.

д-во. а) Если все λ_i различны: $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{n-1}$, то на каждом уровне $f = \lambda_i$, т.е. $\langle Bx, x \rangle = \lambda_i$, имеется ровно одна крит. точка на $\mathbb{R}P^{n-1}$, а именно: $(e_i, -e_i)$. Получаем:

$$\mu(f) = n = n = \# E_i.$$

б) Пусть теперь $\lambda_i = \lambda_{i+k}$ для $k > 0$ при каком-то i . Тогда в $\mathbb{R}^n \exists$ собственное $k \times k$ -во оператора B размерности $k+1$, состоящее из собств. векторов, отвечающих числу $\lambda_i = \dots = \lambda_{i+k}$. Его пересек. со сферой S^{n-1} есть экватор S^k , состоящий целиком из крит. точек ϕ -ции f на S^{n-1} . На $\mathbb{R}P^{n-1}$ это будет $\mathbb{R}P^k$, состоящее из крит. т. ϕ -ции f на $\mathbb{R}P^{n-1}$. Так как таких точек ∞ много, то $\infty > n = \# E_i$. Цитр.д.

- Все описанные конструк. инварианты при вращениях в \mathbb{R}^n , т.е. инвар. при действии группы $SO(n)$.
- Рассм. "аналоговую" таблицу, где описанные объекты заменяются на понятия из теории бифурк. и категории Л.Ш.

| | | | | |
|-----------------------|----------------------------------|--------------------------------|--------------------|--|
| S^{n-1} | $f=B(x,x)$ | E_i | $SO(n)$ | Теор.: $\mu(f) \gg n = \# E_i$ |
| M модк. мног. | $f(x)$ модк. Ф-я на M | M_i см. опред. ниже | гомотопии в M | Теор. Люс.-Шн.: $\mu(f) \gg \text{cat } M = \# M_i$ |

• Определ. классов M_i : $M_i = \{X \subset M, \text{ где } X\text{-замк. и } \text{cat}_M X \geq i\}$.
Тогда $M_i \subset \Theta(M)$, $i=0,1,\dots,N$, где $N = \text{cat } M$.

• Лемма 7. Имеем: $\Theta(M) = M_0 = M_1 \supseteq M_2 \dots M_i \supseteq M_{i+1} \dots \supseteq M_N$.
д-во. Очевидно вытекает из опред. $\text{cat } X$. Ясно, что для $\forall X \in \Theta(M)$: $\text{cat}_M X \geq 0$ и $\text{cat}_M X \geq 1$. И так, с ростом i классы M_i "уменьшаются".



• Лемма 8. \forall класс M_i замкнут относительно гомотопий подм-ств X в M и относит. предельных переходов, т.е. если $Y = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$, где $X_n \in M_i$, то и $Y \in M_i$.
д-во. Вытекает из лемм 4 и 6, см. выше.

• Определим теперь числа λ_i для $f(x)$ на M .

• $\lambda_i = \inf_{X \in M_i} (\max_{x \in X} f(x))$ (т.е. по аналогии с классами E_i , см. выше).
 $X \in M_i$; $x \in X$, X -фикс-
 $X \in M_i$ рован

• Лемма 9. Выполнены мер-ва: $\lambda_0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$, где $N = \text{cat } M$.

д-во. Рассм. ф-но $\bar{f}(X) = \max_{x \in X} f(x)$, где $X \in M_i$. Тогда

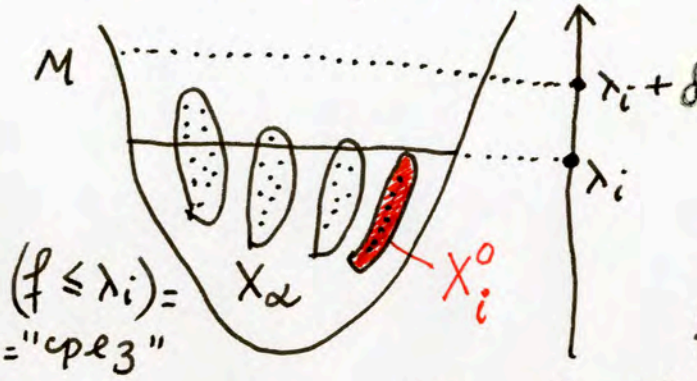
$\bar{f}(X)$ является ф-ей на всем $\Theta(M)$ и так как $\Theta(M) = M_0 = M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \supseteq M_N$, то при уменьшении мн-ва M_i с ростом i , \inf ф-ии \bar{f} может только расти.
 Цитрд.

• Лемма 10. Пусть f на M такова, что все "срезы" ($f \leq \alpha$),

т.е. $\{x \in M: f(x) \leq \alpha\}$ - компактны. Тогда в \forall классе M_i \exists замкн. мн-во X_i^0 такое, что $\lambda_i = \max_{x \in X_i^0} f(x)$. Т.е. \inf функции \bar{f} на M_i достигается на мн-ве X_i^0 .
 • таких X_i^0 может быть много.

д-во. Т.к. $\lambda_i = \inf_{x \in M_i} \bar{f}(x)$, то \exists последовател. $\{x_\alpha\} \in M_i$

таких, что $\bar{f}(x_\alpha) \rightarrow \lambda_i$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Если $\delta > 0$, то \exists номер N такой, что при $\alpha > N$ имеем: $\bar{f}(x_\alpha) < \lambda_i + \delta$:



Так как срезы $(f \leq \lambda_i + \delta)$ компактны, то при $\alpha > N$ все x_α попадают в компактную область в M . Используя стандартную идею ϵ -сетей, из последоват. $\{x_\alpha\}$ можно выбрать подпоследоват. $\{x_{\alpha_t}\}$, сходящуюся к некотор. замкн.

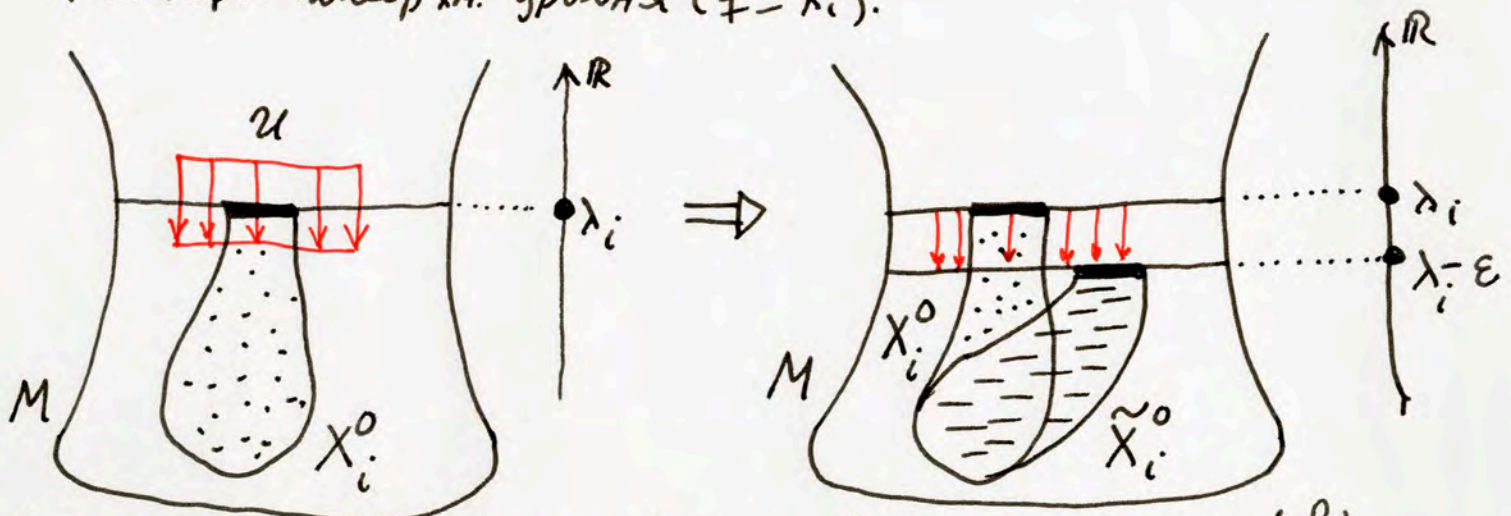
подм-ву x_i^0 в M . Если, что $\bar{f}(x_i^0) = \lambda_i$, т.е.

$\max_{x \in X_i^0} f(x) = \lambda_i$. Цитрэд.

• Лемма 11. Пусть все срезы $(f \leq a)$ компактны. Тогда на бифурк. уровне $f = \lambda_i$ обязат. лежит хотя бы одна точка бифуркации. Более того, такая точка есть на мн-ве X_i^0 .

д-во. Рассм. X_i^0 , т.е. $\max_{x \in X_i^0} (f(x)) = \lambda_i$. Допуст. противн.

т.е. что пересечение X_i^0 с уровнем $(f = \lambda_i)$ состоит только из правымн. точек. Тогда кажд. точка $x \in X_i^0 \cap (f = \lambda_i)$ имеет окрестн. $U(x)$, в которой есть "вертикальные" отрезки I , трансверс. поверхн. уровня $(f = \lambda_i)$.



Эти отрезки - аналог линий тока вект. поля $(-grad f)$. Вдоль них осуществим непрер. гомотопию (деформ.) мн-ва X_i^0 в мн-во \tilde{X}_i^0 , лежащее целиком в срезе $(f \leq \lambda_i - \epsilon)$, где $\epsilon > 0$. $\varphi_t: X_i^0 \rightarrow \tilde{X}_i^0$. Как мы знаем, $cat \tilde{X}_i^0 \geq cat X_i^0 + 1$, т.е. \tilde{X}_i^0 осталось в том же классе M_i . А потому $\max_{x \in \tilde{X}_i^0} f(x) \geq \lambda_i = \inf$. Однако, $\tilde{X}_i^0 \subset (f \leq \lambda_i - \epsilon)$, т.е. получили противоречие. Цитрэд.

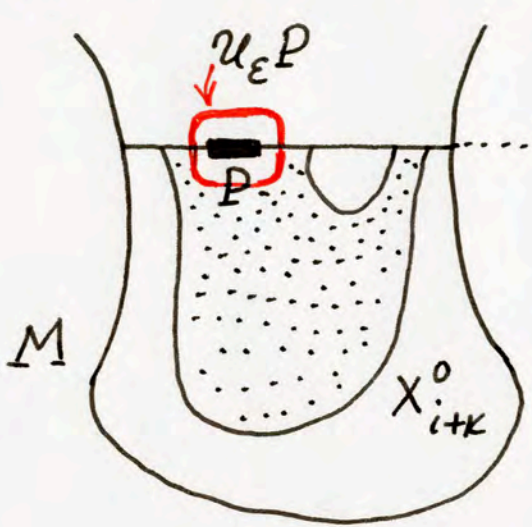
Лемма 12. Пусть среди чисел λ_i есть кратные, т.е.

$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_i = \lambda_{i+k} \leq \dots \leq \lambda_N$, где $k > 0$. Пусть X_{i+k}^0 таково, что $\max_{x \in X_{i+k}^0} f(x) = \lambda_{i+k} = \lambda_i$ и пусть P — мн-во точек

Синфуркации на уровне $\lambda_i = \lambda_{i+k}$, лежащих в X_{i+k}^0 ($P \neq \emptyset$).

Тогда $\text{cat } P \geq k+1$.

Доказ. Допус. против., т.е. что $\text{cat } P \leq k$. В силу леммы 6 $\exists \epsilon > 0$ такое, что $\text{cat } U_\epsilon P = \text{cat } P$, а потому $\text{cat } U_\epsilon P \leq k$.



Рассм. $Y = X_{i+k}^0 - U_\epsilon P$.

Тогда $\text{cat } Y = \text{cat}(X_{i+k}^0 \setminus U_\epsilon P) \geq$

$\geq \text{cat } X_{i+k}^0 - \text{cat } U_\epsilon P \geq$

$\geq i+k - k = i$. Отсюда:

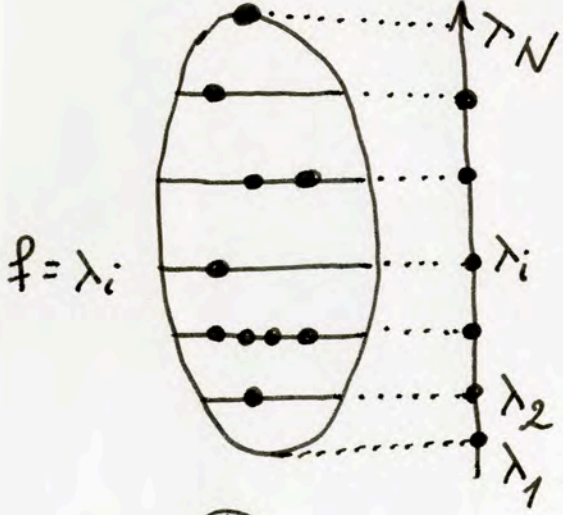
$Y \in M_i$. Но тогда:

$$\lambda_i \leq \max_{x \in Y} f(x) \leq \max_{x \in X_{i+k}^0} f(x) \leq \lambda_{i+k} = \lambda_i$$

Значит $\max_{x \in Y} f(x) = \lambda_i$, а тогда по лемме 11 на мн-ве Y обязательно есть точки синфурк. Но их нет, т.к. все они должны быть в P , а P выдрожено из $Y = X_{i+k}^0 - U_\epsilon P$. Противоречие. Цитрэд. (т.е. Y можно взять за X_i^0).

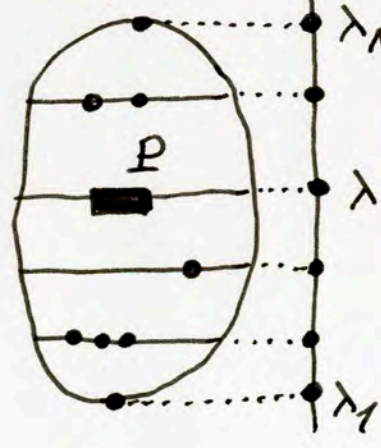
Лемма 13 = до-во теор. Люст.-Шнир.

до-во. Сначала рассм. случай общ. полож., когда все λ_i различ. т.е. $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$, где $N = \text{cat } M$. По лемме 11 на каждом уровне $f = \lambda_i$ есть точки синфурк. Значит $\mu(f) \geq N$.



1

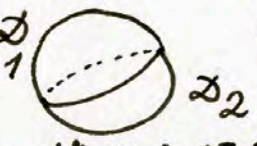
Теперь рассм. случай когда $\lambda_i = \lambda_{i+k}$. Тогда $\text{cat } P \geq k+1$ и в P есть по крайней мере $k+1$ различных точек. А потому все равно обшее число точек синфурк не меньше $N = \text{cat } M$. Цитрэд.



2

• Примеры вычисл. кателорис Л.-Ш.

[• Теор. $\text{cat } S^n = 2, n \geq 1$.
до-во. Ясно, что $\text{cat } S^n \leq 2$, т.к. $S^n = \bar{D}_1^n \cup \bar{D}_2^n$, где \bar{D}_i^n - две полусферы \bar{D}_1 и $\bar{D}_2 \rightarrow *$ по середине.



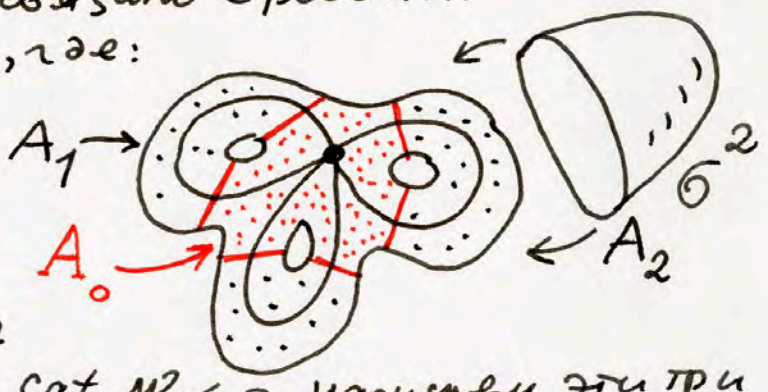
Далее:
 $\text{cat } S^n \neq 1$, т.к. S^n не стягивается по себе в точку. Это вытекает, напр., из теор. гомотопий. Мы доказали, что $H_n(S^n) = \mathbb{Z} \neq 0$ при $n \geq 1$, а потому S^n гомотоп. не эквив. точке. Читрэд.

• Замеч. На S^n есть φ -я с ровно 2 крит. (сифурк.) точками - это φ -я высота на $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Т.е. здесь оценка достигается: $\mu(\varphi) = 2 = \text{cat } S^n$.

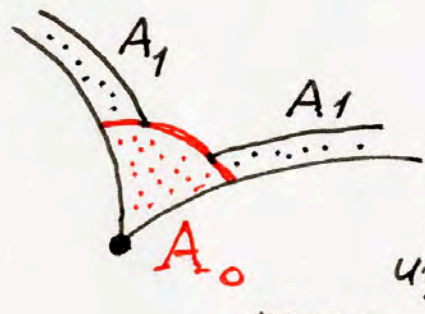
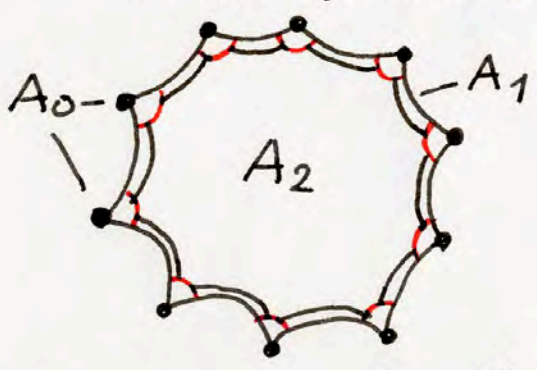
[• Теор. Пусть M^2 - связн. замкн. 2-поверхн. (ориент. или неор.) Тогда $\text{cat}(M^2) = 3$, если $M^2 \neq S^2$.
до-во. По теор. классиф. M^2 имеем: $M^2 = \sigma^0 \cup (\sigma_1^1 \cup \dots \cup \sigma_s^1) \cup \sigma^2$, где σ^α - клетки $\dim = \alpha$, а s связано с родом M .

Тогда $M^2 = A_0 \cup A_1 \cup A_2$, где:

A_0 - окрестн. клетки σ^0 (вершины), A_1 - набор "прямоугольников", а A_2 - замкн. диск в клетке σ^2 . Ясно, что A_0, A_1, A_2 стягн. в точку по M^2 . И так, $\text{cat } M^2 \leq 3$. нарисуем эти три



ин-ва на фундам. многог. W :



Далее: $\text{cat } M^2 \geq 3$ если $M \neq S^2$.

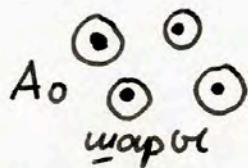
Ниже будет сериципл. теор. о "гомотопии длины" клеточн. пр-ва. Из этой теоремы и получим оценку снизу, т.к.

Кольцо когошол. $H^*(M_g^2, \mathbb{R}) = (a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 \wedge b_1 = \dots = a_g \wedge b_g = \omega^{(2)})$
 в ориент. случае, например,
 $a_i \wedge b_j = a_i \wedge a_j = b_i \wedge b_j = 0, i \neq j$
 а потому когошол. длина $M_g^2 = 2$, при $g \geq 1$. Читрэд.
 Аналог. и в неориент. случае для группы коэфф. = \mathbb{Z}_2 .

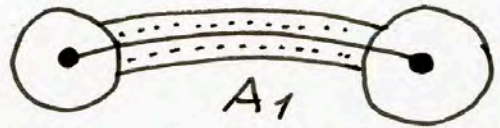
[• Теор. Пусть M^n - связн. многооб. Тогда $\text{cat } M^n \leq n+1$.
до-во. рассм. связн. триангул. M^n , т.е. его разбиение в обьедин. симплексов: $M^n = \bigcup_{i,q} \Delta_i^q$. Тогда $M = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n$,

где A_0 устроены так: A_0 - это объедин. замкн. n -мерн. (14)

шаров, окружают n -мерные симп., т.е. точки; при этом шары возмем мало радиуса, чтобы они не перекривались:

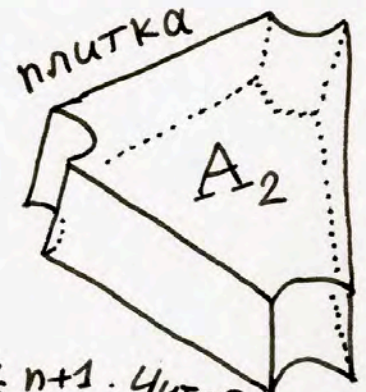
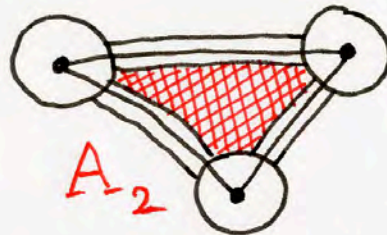
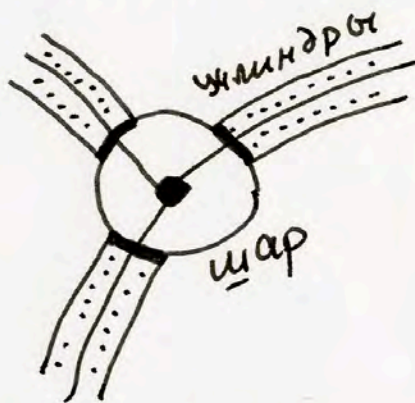


За A_1 возмем непересек. (попарно) цилиндры, окружающие дуги 1-мерн. симплексов, не попавшие в шары:



Причем цилиндры выберем "тонкими", чтобы их основания не пересекались на границе любого шара из A_0 :

За A_2 возмем n -мерные "тонкие" окрестности частей 2-мерных симплексов, не попавшие в $A_0 \cup A_1$:



ясно, что $M = A_0 \cup \dots \cup A_n$

ит.д.

и все $A_i \rightarrow *$ по M . Но т.к. покрытие

может оказаться не оптимальн., то $\text{cat} M \leq n+1$. Читрѐ.

• Теор. $\text{cat}(X \vee Y) = \max(\text{cat} X, \text{cat} Y)$, где $X \vee Y$ - это букет

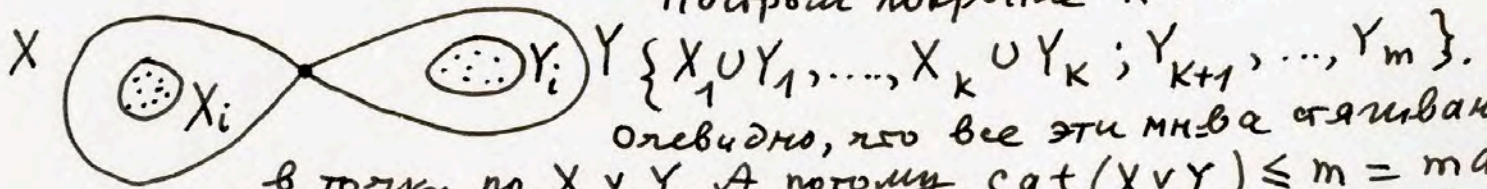
топол. пр-ств X и Y :



э-во. Пусть $\text{cat} X = k$, $\text{cat} Y = m$ и пусть $k \leq m$. Тогда

$X = X_1 \cup \dots \cup X_k$, где $X_i \rightarrow *$ и $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_m$, где $Y_i \rightarrow *$.

Построим покрытие $X \vee Y$:



$\{X_1 \cup Y_1, \dots, X_k \cup Y_k; Y_{k+1}, \dots, Y_m\}$.

Очевидно, что все эти множества стягиваются в точку по $X \vee Y$. А потому $\text{cat}(X \vee Y) \leq m = \max$.

Докажем, что меньше m быть не может. Допус. противное.

Пусть $\text{cat}(X \vee Y) < m = \max = \text{cat} Y$. Тогда

$X \vee Y = A_1 \cup \dots \cup A_p$, где $p < m$ и $A_i \rightarrow *$. Рассм. $B_i = Y \cap A_i$.

ясно, что B_i , как часть A_i , стягив.

в точку по Y , $1 \leq i \leq p$. Далее:

$Y = B_1 \cup \dots \cup B_p$, т.к. $\{A_i\}$ было

покрытием всего $X \vee Y$. Итак,

$Y = B_1 \cup \dots \cup B_p$, где B_i замк. и $B_i \rightarrow *$ по Y , а потому $\text{cat} Y \leq p < m$, что противоречит тому, что $\text{cat} Y = m$. Читрѐ.

• Следств. Если $\text{cat} X \geq 2$, то $\text{cat}(X \vee S^n) = \text{cat} X$ при $n > 0$.

• Кохомология. Длина многообразия. Определенче.
 Пусть M - м-дк. мног. и $H^*(M, G)$ - его кольцо (алгебра) кохомологий, где $G = \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2$ или \mathbb{Z}_p , где нечет. простое.
 Для $G = \mathbb{R}$ см. опредл. $H^*(M, \mathbb{R})$ в нашем обязател. курсе (кохомол. внешн. диффр. форм). В алгебре H^* есть умножение (напр. умнож. внешннх форм). Рассм. элементы a_1, \dots, a_m из $H^*(M)$ такие, что $\deg a_i > 0$ и $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_m \neq 0$.
 Тогда максимальное такое m назыв. кохомол. длиной M . (для группы коэффр. G).

[• Теор. Если M - м-дк. мног., то $\text{cat } M \geq k+1$, где k - кохомол. длина M . (без ∂ -во). См. ∂ -во в кн. А.Т. Фоменко "Диффр. геом. и топол. Дополнит. главы".

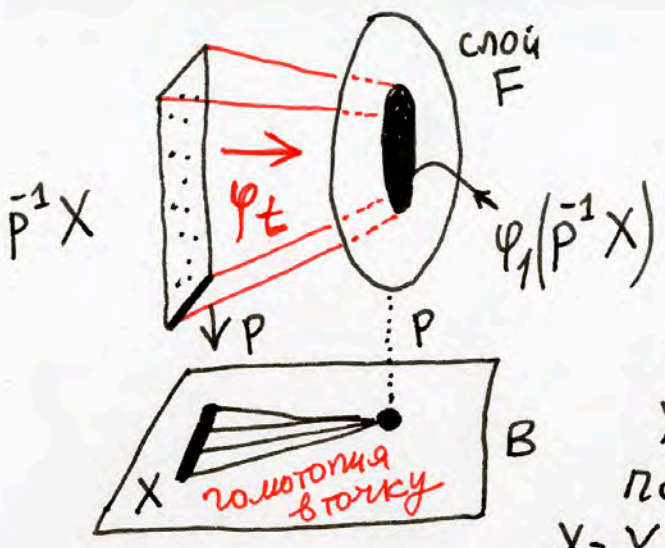
• Примеры.
 [• Теор. $\text{cat } \mathbb{R}P^n = n+1$. ∂ -во. Т.к. $\dim \mathbb{R}P^n = n$, то по теор. (см. выше): $\text{cat } \mathbb{R}P^n \leq n+1$. Далее: известно, что $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[e_1] / (e_1^{n+1})$, т.е. \cong кольцо усеченн. полиномов с образующей e_1 , где $e_1^{n+1} = 0$; т.е. $\{e_1, e_1^2, \dots, e_1^n\}$. Так как $e_1^n \neq 0$ в H^* , то кохомол. длина равна n , а потому $\text{cat } \mathbb{R}P^n \geq n+1$, т.е. $\text{cat } \mathbb{R}P^n = n+1$. Цитр ∂ .

[• Теор. $\text{cat } T^n = n+1$. ∂ -во аналогично. Т.к. $\dim T^n = n$, то $\text{cat } T^n \leq n+1$. Далее: $H^*(T^n, \mathbb{Z}) = \Lambda(e_1, \dots, e_n)$, где все $\deg(e_i) = 1$; здесь Λ - внешняя алгебра. Т.к. произведение $e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \neq 0$ в Λ , то кохомол. дл. тора $= n$, а потому $\text{cat } T^n \geq n+1$, т.е. $\text{cat } T^n = n+1$. Цитр ∂ .

• Рассм. локал. тривиал. расслоение $p: E \xrightarrow{F} B$; т.е. для \forall точки $v \in B$ \exists окр. окрест. $U = U(v)$ такая, что $p^{-1}U \cong U \times F$, где F - свой рассл.

[• Теор. Верно нер-во: $\text{cat } E \leq \text{cat } B + \text{cat } F$.
 на самом деле верно более общее нер-во:
 [• Теор. Пусть X - \forall замкн. подмн-во в базе B и $p^{-1}X \subset E$. Тогда:
 $\text{cat}_E(p^{-1}X) \leq \text{cat}_E F + \text{cat}_B X$. Если $X = B$, то получаем предидущ. теор., т.к. $p^{-1}B = E$.

∂ -во. Сначала докажем для случая: $\text{cat}_B X = 1$, т.е. $X \rightarrow *$ по B .
 Надо доказать, что $\text{cat}_E(p^{-1}X) \leq \text{cat}_E F$. Стыкнем X по B в $*$.
 По лемме о накрытв. гомотопии накроем эту деформацию гомотопией $\varphi_t: p^{-1}X \rightarrow E$, $0 \leq t \leq 1$. Т.к. при $t=1$ мн-во X в B стяжв. по B в точку, то $\varphi_1(p^{-1}X) \subset F$, т.е. $p^{-1}X$ стягивается на подмн-во в слое $F = p^{-1}(*)$. Но тогда по лемме 1 (см. выше): $\text{cat}_E(p^{-1}X) \leq \text{cat}_E(\varphi_1(p^{-1}X)) \leq \text{cat}_E F$ и лемме 4



Мы сослались на лемму о накр. гомотопии для локал. трив. расслоений. Хотя мы доказали ее ранее только для накрытий, но это д-во проходит и в общем случае (докажите!).

Шаг 2. Теперь док. для общ. случая.

Пусть $X \subset B$ и $\text{cat}_B X = k$, т.е. $X = X_1 \cup \dots \cup X_{k-1} \cup X_k$, где $X_i \rightarrow *$ по B . Положим $Y = X_1 \cup \dots \cup X_{k-1}$. Тогда $X = Y \cup X_k$, где $\text{cat}_B Y \leq k-1$, а $\text{cat}_B X_k = 1$.

Доказ. по индукции. Пусть теор. доказана для всех $Y \subset B$ таких, что $\text{cat}_B Y \leq k-1$. Т.е. верно, что $\text{cat}_E(p^{-1}Y) \leq \text{cat}_E F \cdot \text{cat}_B Y$.

Тогда: $\text{cat}_E p^{-1}X = \text{cat}_E p^{-1}(Y \cup X_k) = \text{cat}_E((p^{-1}Y) \cup p^{-1}X_k) \leq \text{cat}_E(p^{-1}Y) + \text{cat}_E(p^{-1}X_k) \leq \text{cat}_E F \cdot \text{cat}_B Y + \text{cat}_E F = (\text{cat}_B Y + 1) \cdot \text{cat}_E F \leq (k-1+1) \cdot \text{cat}_E F = k \cdot \text{cat}_E F = \text{cat}_B X \cdot \text{cat}_E F$. Здесь мы используем, что $\text{cat}_E p^{-1}X_k \leq \text{cat}_E F$.

Цитрэд.

- Оценка в теор. явл. точной, т.е. достигается в некоторых случаях. Пример. рассл. расслоение Хопфа (см. предыдущ. семестр): $p: S^3 \rightarrow S^2$ со слоем S^1 . Тогда: $\text{cat}_{S^3} S^3 \leq \text{cat}_{S^2} S^2 \cdot \text{cat}_{S^1} S^1$. Имеем: $\text{cat}_{S^3} S^3 = 2$, $\text{cat}_{S^2} S^2 = 2$, $\text{cat}_{S^3}(S^1) = 1$, т.к. слой S^1 стягив. по S^3 в точку. Итак: $2 = 2 \cdot 1 = 2$, т.е. равенство.
- Замечание. Если расслоен. явл. прямым произведением, т.е. $E = B \times F$, то мер-во в теор. не обязат. явл. равенством. Пример: тор $T^2 = S^1 \times S^1$. Тогда $\text{cat}_E E = \text{cat}_{T^2} T^2 = 3$; $\text{cat}_B B = \text{cat}_{S^1} S^1 = 2$; $\text{cat}_E F = \text{cat}_{S^1} S^1 = 2$, т.к. меридиан или параллель на торе не стягив. в точку. Итак, $3 < 2 \cdot 2 = 4$.

• Следующ. тема: элемент симплектил. геометрии. Начнем со случая линейн. пр-ва.

- Опред. линейн. симплек. пр-вом назыв. лин. пр-во $\dim = 2n$ с билин. невырожд. кососимм. формой, $(a, b) = -(b, a)$. Удобно моделировать на \mathbb{R}^{2n} , где наряду с евклидов. формой $\langle a, b \rangle$ (симмет.) задана и вторая симплектил. форма (a, b) . Для наглядн. $(\mathbb{R}^{2n}, \langle, \rangle)$ — "носитель" линейн. симплек. геометрии.
- Итак, пусть задана линейн. симпл. структура $(a, b) = \sum \omega_{ij} a^i b^j$, где матр. $\Omega = (\omega_{ij})$, $\det \Omega \neq 0$ и $\Omega^T = -\Omega$.

• Пример. Канонич. симплек. структ. в \mathbb{R}^{2n} : $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, т.е. $(a, b) = \sum_{i=1}^n p_i q_i - q_i p_i$, где $a = (p^1, \dots, p^n, q^1, \dots, q^n)$ и $b = (p^1, \dots, p^n, q^1, \dots, q^n)$. Здесь $\Omega^2 = -E_{2n}$.
 Если заменить базис в \mathbb{R}^{2n} , сделав перестановку: $p^1, q^1, \dots, p^n, q^n$, то матрица Ω преобраз. к виду:

$$I = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{array} \right), \quad I^2 = -E_{2n}$$

• Этот канонич. пример универсален. Утв. Пусть Ω — невырожд. кососимм. матр. в \mathbb{R}^{2n} . Тогда всегда \exists лин. невыр. замена базиса, что $\Omega \rightarrow I$, т.е. $A \Omega A^T = I$. Здесь A — матр. замены базиса.

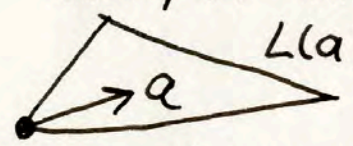
• Опред. Базис $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ в \mathbb{R}^{2n} назыв. симплектически, если попарные кососкаляр. произвед. имеют вид:

$$(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j) = 0 \text{ и } (\alpha_i, \beta_j) = -(\beta_j, \alpha_i) = \delta_{ij}$$

• Изотропность. Опред. Линей. подпр-во $L \subset \mathbb{R}^{2n}$ назыв. изотропным, если для $\forall a, b \in L$ имеем: $(a, b) = 0$. Т.е. огранич. Ω на L тождеств. $\equiv 0$. Пример: \forall в-р $a \in L$ изотропен: $(a, a) = 0$.

• Опред. Векторы a, b косортогон., если $(a, b) = 0$. Подпр-во L авт. косортогон. дополн. к подпр-ву K , если $(L, K) = 0$, т.е. $(a, b) = 0$ для $\forall a \in L$ и $\forall b \in K$. Если $L(a)$ — косортог. дополн. к в-ру a , то $a \in L(a)$, т.е. a лежит в своем косортог. дополнении.

Ясно, что $\dim L(a) = 2n - 1$, т.к. форма Ω невырожд. Вообще, плоск. L изотропна \iff она лежит в своем косортог. дополнении. Т.е. когда она сама себе косортогональна.



• Лемма. Верно равенство: $(a, b) = \langle \Omega a, b \rangle$, где Ω — линей. оператор $\Omega: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, отвел. форме Ω .

д-во. $(a, b) = \sum_{i,j} \omega_{ij} a^i b^j = \langle \sum_i \omega_{ij} a^i, b^j \rangle = \langle \Omega a, b \rangle$, где

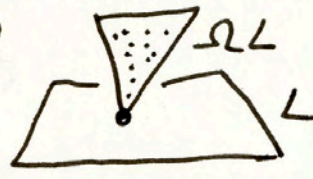
$(\Omega a)_j = \sum_i \omega_{ij} a^i$. Читра. Ясно, что $(a, b) = \langle a, -\Omega b \rangle$.

• Утв. плоскость L в симплек. пр-ве \mathbb{R}^{2n} изотропна \iff ее образ ΩL (при действии операт. Ω) ортогонален L в евклидовом смысле.

д-во. Пусть $a, b \in L$, тогда $0 = (a, b) = \langle \Omega a, b \rangle = 0$ для $\forall a, b \in L$. Т.е. независимо в пробегает все L , $a \Omega a$ пробегает все ортогон. дополн. к L . В частности, $L \cap \Omega L = 0$. Здесь мы пользуемся тем, что Ω — невырожд. матрица.

Следствие. Если L — изотропна, то $\dim L \leq n$.

2-во. Т.к. Ω невырожд., то $\dim \Omega L = \dim L$, а т.к. $\Omega L \cap L = 0$, то



$$\begin{aligned} \dim(L \oplus \Omega L) &= \\ &= \dim L + \dim \Omega L = 2 \dim L \leq 2n = \\ &= \dim \mathbb{R}^{2n}, \text{ т.е. } \dim L \leq n. \text{ ЧИТРО.} \end{aligned}$$

• Опред. Подпр-во L в \mathbb{R}^{2n}

назв. лагранжевым, если оно изотропно и $\dim L = n$, т.е. оно изотропно и имеет максим. размерность.

• Такие плоскости \exists в \mathbb{R}^{2n} . Например, координатные плоскости $\mathbb{R}^n(p) = \mathbb{R}^n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\mathbb{R}^n(q) = \mathbb{R}^n(\beta_1, \dots, \beta_n)$ — лагранжевы.

• Группа симплек. линей. веществ. преобраз. в \mathbb{R}^{2n} .
 Обознач.: $\mathcal{S}p(n, \mathbb{R})$. Определ.: $g: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, сохраняет форму $(,)$, т.е. $(ga, gb) = (a, b) \forall a, b$.

Т.е.: $g \Omega g^T = -\Omega$, где $\Omega = I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ — канонич. симплек. структура.

Т.е.: $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, отсюда имеем:

$-BA^T + AB^T = 0, -BC^T + AC^T = E, -DA^T + CB^T = -E,$
 $-DC^T + CD^T = 0$. Это — квадратичные ур-я на элементы группы $\mathcal{S}p(n, \mathbb{R})$. В явном простом виде они не решаются.

• Но если g близко к единице, то решаются: пусть $g = E + \varepsilon X$, тогда $(E + \varepsilon X) I (E + \varepsilon X^T) = I$, отсюда:

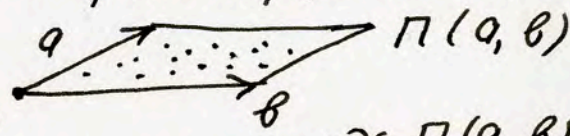
$I + \varepsilon I X^T + \varepsilon X I + \varepsilon^2 X X^T = I$, т.е. $I X^T + X I = 0$,
 если $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, то отсюда получаем: $B^T = B, C^T = C, D^T = -A$,

т.е. $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix}$, где B и C — симм. матрицы.

• Пример. Рассм. $\mathcal{S}p(1, \mathbb{R})$ на \mathbb{R}^2 .
 Утв. $\mathcal{S}p(1, \mathbb{R})$ изоморфна $\mathcal{S}L(2, \mathbb{R})$, а топологически $\mathcal{S}p(1, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1$, в частности $\pi_1(\mathcal{S}p(1, \mathbb{R})) = \mathbb{Z}$.

Д-во. На \mathbb{R}^2 имеем: $(a, b) = a^1 b^2 - a^2 b^1 = \det \begin{pmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{pmatrix} =$

= площадь $\Pi(a, b)$, где $\Pi(a, b)$ — параллелограмм, натянутый на векры $a = (a^1, a^2)$ и $b = (b^1, b^2)$:



Итак, $g \in \mathcal{S}p(1, \mathbb{R})$ если и только если $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ сохраняет площадь $\Pi(a, b)$, т.е. $\det g = 1$, т.к. площадь $\Pi(ga, gb) = \det g \cdot \text{пл.} \Pi(a, b)$.

Т.е. $g \in \mathcal{S}L(2, \mathbb{R}) = \{g: \det g = 1\}$. Далее $\mathcal{S}L(2, \mathbb{R}) \cong \mathcal{S}O(2) \times G$, где $\mathcal{S}O(2) \cong \mathcal{S}^1$ (окруж.), а $G \cong \mathbb{R}^2$ как топол. гр-во.

• Компактная группа $\mathcal{S}p(n)$. Напомним.: кватернионы.

$\mathbb{Q} = \mathbb{R}^4(1, i, j, k)$ — ассоц. алг. косокоммут, с единицей и с делением, над \mathbb{R} , где: $i \cdot j = k; -j = ik, i^2 = j^2 = k^2 = -1$ (без делителей нуля). Кватернион $q = a_0 \cdot 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$,

| | | | |
|-----|------|------|------|
| | i | j | k |
| i | -1 | k | $-j$ |
| j | $-k$ | -1 | i |
| k | j | $-i$ | -1 |

сопряжен. кватерн.: $\bar{q} = a_0 \cdot 1 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$;
 $q \cdot \bar{q} = \sum a_i^2 = \langle q, q \rangle$ — евклидово скаляр. произв. в $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{Q}$.

$q^{-1} = \bar{q} / |q|^2; \overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1$, антиинволюция.

• Рассм. $Q^n = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ - n -мерное кватерн. пр-во на алг. Q , т.е. $q_\alpha \in Q$ - кватернион. к-ты.
 Рассм. кватерн.-значную формулу $\langle s, p \rangle_Q = \sum_{\alpha=1}^n s_\alpha \bar{p}_\alpha$, где $s, p \in Q^n$, \bar{p}_α - кватерн. сопряжение.

• Опред. мн-во линейн. однород. преобраз. $g: Q^n \rightarrow Q^n$, таковы, что $\langle g s, g p \rangle_Q = \langle s, p \rangle_Q$ (т.е. сохран. формулу \langle, \rangle_Q), образует группу $Sp(n)$, назыв. компакт. симплект. группой. Она не совпадает с $Sp(n, R)$.

[• Изучим группу $Sp(1)$.
Теор. $Sp(1) \cong SU(2) \simeq S^3$.
 Сначала отождествим Q^n с C^{2n} . Пусть $q \in Q^1$, т.е. $q = a + bi + cj + dk = (a + bi) + j(c - di) = z + j\bar{w}$, где $z = a + bi, w = c + di$. Тем самым Q^1 отождеств. с C^2 и $Q^n \simeq C^{2n}$.

Поэтому $Sp(n) \hookrightarrow GL(2n, C)$.
 • 2-во теоремы. Рассм. 3-сферу $S^3 = \{|\alpha| = 1 \text{ в } Q^1 \simeq R^4\}$. Пусть $g \in Sp(1)$, т.е. $g(q) = q \cdot \alpha$, т.е. g действует как умнож. справа на α . Итак: $g = f_\alpha: q \rightarrow q \cdot \alpha$. Мы описали действие $Sp(1)$ на $Q^1 \simeq R^4$. Отождествим Q с C^2 ; тогда:

$q = a + bi + cj + dk = (a + ib) + j(c - id) = z + j\bar{w}$, где $z = a + ib, w = c + id$. Итак $q \leftrightarrow (z, w) \in C^2$.

• Пусть $\alpha = p + j\bar{t}$, $p, t \in C$; $q = z + j\bar{w}$, $z, w \in C$. Тогда $f_\alpha(q) = (z + j\bar{w}) \cdot (p + j\bar{t}) = q \cdot \alpha =$
 $= (z + j\bar{w}) \cdot (\bar{p} - tj) = z\bar{p} - ztj + j\bar{w}\bar{p} - j\bar{w}tj =$
 $= z\bar{p} - ztj + w\bar{p}j + w\bar{t} = (z\bar{p} + w\bar{t}) + j(\bar{w}\bar{p} - \bar{z}\bar{t}) =$
 $= (z\bar{p} + w\bar{t}) + j(p\bar{w} - t\bar{z}) = (z\bar{p} + w\bar{t}) + j(\overline{w\bar{p} - z\bar{t}}),$

т.к. комплекс. числа коммутируют. Итак: комплексификация $f_\alpha \in \begin{pmatrix} \bar{p} & \bar{t} \\ -t & p \end{pmatrix}$, причем $|p|^2 + |t|^2 = 1$, т.к. $\alpha \in S^3, |\alpha| = 1$.
 В самом деле, $g \in Sp(1)$ сохраняет формулу \langle, \rangle , т.е. $\langle f_\alpha q, f_\alpha q \rangle = \langle q, q \rangle$, т.е.

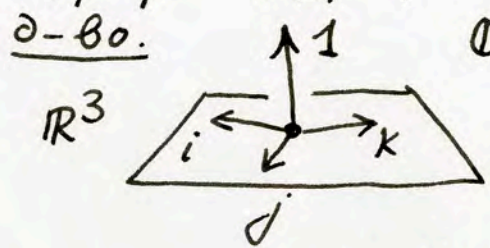
$(q\alpha)(\overline{q\alpha}) = q\bar{q}$, т.е. $q\alpha\alpha\bar{q} = q\bar{q}|\alpha|^2 = q\bar{q}$, т.е. $|\alpha| = 1$, $\alpha \in S^3 \subset R^4$, $\alpha = p + j\bar{t}$, $|p|^2 + |t|^2 = 1$.

• Далее: рассм. $s = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2) \iff s = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in C, |a|^2 + |b|^2 = 1$.
2-во: $s \in SU(2) \iff \bar{s}^T = s^{-1}$, т.е. $\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, т.е. $d = \bar{a}$, $b = -\bar{c}$, и $\det(s) = 1$. Читрэд.

Итак $f_\alpha \in SU(2)$, т.е. $Sp(1) \cong SU(2)$ и диффеоморфно

$$S^3 = \{ \alpha \in \mathbb{Q} = \mathbb{R}^4 : |\alpha| = 1 \}. \text{ Чётр } \partial.$$

• Теор. Существует эпиморф. $SU(2) \cong Sp(1) \rightarrow SO(3)$, и это есть 2-листное накрытие $S^3 \rightarrow RP^3 \cong SO(3)$. Это — универсальное накрыт. $S^3 \rightarrow RP^3$.



$\mathbb{Q}^1 = \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3(i, j, k) \oplus \mathbb{R}^1(1)$. Пусть $\alpha \in S^3 = Sp(1)$. Рассм. отобра. $\alpha \rightarrow P_\alpha: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, где $P_\alpha(q) = \alpha q \bar{\alpha} = \alpha q \alpha^{-1}$. При этом

$P_\alpha(1) = 1$ и $|P_\alpha(q)| = |\alpha q \bar{\alpha}| = |\alpha|^2 |q| = |q|$, т.е. P_α сохраняет евклид. метр. в \mathbb{R}^4 , а потому P_α переводит \mathbb{R}^3 в себя, т.е. $P_\alpha|_{\mathbb{R}^3} \in SO(3)$. В самом деле: $\langle P_\alpha q, P_\alpha q \rangle_{евкл.} =$

$$= P_\alpha q \cdot \overline{(P_\alpha q)} = (\alpha q \bar{\alpha}) \overline{(\alpha q \bar{\alpha})} = \alpha q \bar{\alpha} \alpha \bar{q} \bar{\alpha} = |\alpha|^2 |q|^2 |\alpha|^2 = |q|^2$$

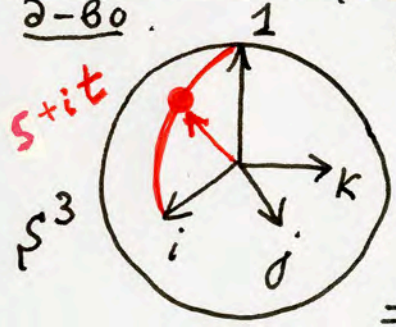
т.к. $|\alpha| = 1$. Поэтому $P_\alpha|_{\mathbb{R}^3}$ сохраняет евкл. норму в \mathbb{R}^3 , а потому принадлежит $SO(3)$. Ориентация очев. сохраняется. Итак $p: Sp(1) \rightarrow SO(3)$.

• далее: $p: Sp(1) \rightarrow SO(3)$ явл. гомоморф. ∂ -во:

$$P_{\alpha_1 \alpha_2}(q) = \alpha_1 \alpha_2 q \overline{(\alpha_1 \alpha_2)} = \alpha_1 \alpha_2 q \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_1 = \alpha_1 (\alpha_2 q \bar{\alpha}_2) \bar{\alpha}_1 = P_{\alpha_1}(P_{\alpha_2}(q)), \text{ Чётр } \partial: P_{\alpha_1 \alpha_2} = P_{\alpha_1} \circ P_{\alpha_2}$$

• далее, ищем ядро: $\text{Ker}(p)$. Пусть $P_\alpha q = q$, т.е. $P_\alpha q \equiv q$ для $\forall q \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{Q}$. Тогда: $\alpha q \bar{\alpha} \equiv q$, т.е. $\alpha q = q \alpha$, т.е. все мнимые $q \in \mathbb{R}^3(i, j, k)$ коммутируют с α , а тогда очевидно, $\alpha \in \mathbb{R}$, вещественно, а т.к. $|\alpha| = 1$, то $\alpha = \pm 1$, т.е. $\text{Ker}(p) = (\pm 1) = \mathbb{Z}_2$ и $\text{Im}(p) = SU(2) / \mathbb{Z}_2 = S^3 / \mathbb{Z}_2 = RP^3$.

• далее, докажем, что $p: SU(2) \rightarrow SO(3)$ — эпиморфизм.



Рассмот. действие P_{s+it} на векторах j и k :

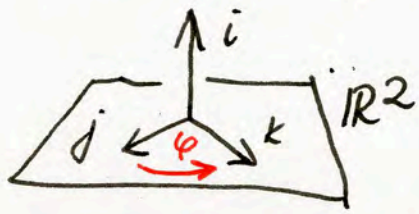
$$P_{s+it}(j) = (s+it)j(s-it) = (sj+tk)(s-it) = s^2j - sjit + tsk - t^2ki = (s^2-t^2)j + 2stk = (\cos \varphi)j + (\sin \varphi)k, \text{ где}$$

$$\cos \varphi = s^2 - t^2, \sin \varphi = 2st, \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1, \text{ т.к. } s^2 + t^2 = 1 \in S^3$$

При этом в-р 1 стоит на месте: $P_{s+it}(1) = |s+it|^2 = 1$;

а также в-р i стоит на месте: $i \rightarrow (s+it)i(s-it) = i$.

Значит P_{stit} вращает $\mathbb{R}^3(i, j, k)$ в плоскости $\mathbb{R}^2(j, k)$ поворотом на угол φ , а v -р i стоит на месте:



т.е. мы реализуем поворот \mathbb{R}^3 вокруг v -ра i на угол φ , в виде

P_{stit} , т.е. данное вращение из $SO(3)$ попарно в образ отображ. $\rho: SU(2) \rightarrow SO(3)$.

Совершенно аналогично, в образ ρ попадают и все повороты вокруг осей j и k . Но известно (из алгебры), что любое вращение $g \in SO(3)$ разлагается в композицию поворотов вокруг осей i, j, k ; т.е. вся группа $SO(3)$ лежит в образе $\rho: SU(2) \rightarrow SO(3)$. Итак, $Im(\rho) = SO(3)$, $Ker(\rho) = \mathbb{Z}_2$, а потому $SU(2)/\mathbb{Z}_2 \cong SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$. Читрэд.

Теор. Группа $SO(4) \cong (SU(2) \times SU(2))/\mathbb{Z}_2 \cong (S^3 \times S^3)/\mathbb{Z}_2$, где подгруппа \mathbb{Z}_2 вложена "по диагонали", т.е. $\rightarrow (-E, -E)$.

д-во. Аналогично предыд. теореме. Пусть

$(\alpha_1, \alpha_2) \in SU(2) \times SU(2)$; рассм. отображ.

$\rho: SU(2) \times SU(2) \rightarrow SO(4)$, где $(\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow P(\alpha_1, \alpha_2): \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

т.е. $P(\alpha_1, \alpha_2): q \rightarrow \alpha_1 q \alpha_2^{-1} = \alpha_1 q \bar{\alpha}_2, |\alpha_1| = |\alpha_2| = 1$.

Тогда операторы $P(\alpha_1, \alpha_2)$ сохран. евклид. норму в \mathbb{R}^4 , т.к.:

$|\alpha_1 q \bar{\alpha}_2|^2 = \alpha_1 q \bar{\alpha}_2 (\alpha_1 q \bar{\alpha}_2)^{-1} = \alpha_1 q \bar{\alpha}_2 \alpha_2 q^{-1} \alpha_1^{-1} = |\alpha_1|^2 |\alpha_2|^2 |q|^2 = |q|^2$, читрэд. И так, $P(\alpha_1, \alpha_2) \in SO(4)$.

Аналогично (см. выше) доказыв., что ρ - гомоморфизм и эпиморфизм на $SO(4)$. Ищем ядро ρ , т.е. $P(\alpha_1, \alpha_2) = id$, т.е.

$\alpha_1 q \bar{\alpha}_2 \equiv q \forall q \in \mathbb{Q} = \mathbb{R}^4$, т.е. $\alpha_1 q = q \alpha_2, \forall q$. Тогда при $q=1$ имеем: $\alpha_1 = \alpha_2$ и всё сводится к случаю $SO(3)$, т.е.

$Ker(\rho) = \mathbb{Z}_2 = (E_4, -E_4)$ в \mathbb{R}^4 ; а точнее:

$\{(1, 1), (-1, -1)\}$ в $SU(2) \times SU(2)$. т.е. \mathbb{Z}_2 вложена в прямое произвед. "по диагонали". В частности, $SO(4) \neq S^3 \times \mathbb{R}P^3$. Читрэд.

Симплектил. многообразия.

- опред. Гладк. мног. M^{2n} назыв. симплектил., если на нем задана симплек. структура, т.е. внешняя диффр. 2-форма $\omega = \sum \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$, где $d\omega = 0$ (т.е. форма ω -замкнута), и ω -невырожд., т.е. $\det \Omega \neq 0$, где $\Omega = (\omega_{ij})$, $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$.
- Напомним о формах: $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$, т.е. умнож. Кососимм. Условие замкнутости:

$$d\omega = \sum \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j = 0, \text{ что эквивал. условию:}$$

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i} = 0, \forall i, j, k. \text{ Это условие можно взять за опред. замкн. форм.}$$

В самом деле, соберем мономы в $d\omega$ с произведением $dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$, т.е. $\sim (i, j, k)$; тогда:

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i} \cdot dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \\ \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x^j} \cdot dx^j \wedge dx^i \wedge dx^k \\ \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} \cdot dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j \end{array} \right\} = \left(\frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} \right) dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \quad \text{Читрд.}$$

• теор. Дарбу. (M^{2n}, ω) -симпл. мног. Тогда у \forall точки $x \in M$ всегда \exists откр. окрестн. $U(x)$, а в ней \exists локальн. регулярн. координаты $(p, q) = (p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n)$ такие, что

$$\omega = \sum dp_i \wedge dq_i, \text{ т.е. } \Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \text{ в } \forall \text{ точке из } U(x).$$

т.е. симпл. структура приводится к канонич. виду сразу в целой окрестн. точки x .
 В этом - важное отличие от риманов. метрики $ds^2 = \sum g_{ij} dx^i dx^j$.
 Например, риман. метр. с $\neq 0$ тензором кривизны не приводится к виду E в целой окрестности.

• полное ∂ -во теор. Дарбу см. ниже. А пока для $n=1$, т.е. на M^2 :
 $\omega = f(x, y) dx \wedge dy = dp \wedge dq = dp(x, y) \wedge dq(x, y) = (p_x dx + p_y dy) \wedge (q_x dx + q_y dy) = (p_x q_y - p_y q_x) dx \wedge dy$, т.е. получили ур-е: $f = p_x q_y - p_y q_x$. Решений много. Например: $q = y$, тогда $f = p_x$ и $p(x, y) = \int_0^x f(x, y) dx + \text{const}$. Читрд.

- Градиент и косой градиент. См. ниже.
- Задание форма ω на M означает, что задано кососимм. скаляр. произведение: $\langle a, b \rangle = \sum \omega_{ij} a^i b^j$, $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$; $\langle a, b \rangle = -\langle b, a \rangle$.

Риманова метрика
(симмет. скаляр. произвед.)

Градиент

$v = \text{grad } f$, если для $\forall w$:

$$\langle w, \text{grad } f \rangle = w(f), \text{ т.е.}$$

производная f вдоль w . Это — определ. градиента. Здесь w — произв. вект. поле на M . Тогда

$$\sum g_{ij} w^i (\text{grad } f)^j = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} w^i$$

$$\text{т.е. } \sum g_{ij} (\text{grad } f)^j = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \text{ т.е.}$$

$$(\text{grad } f)^i = \sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}, \text{ где}$$

$$(g^{ij}) = G^{-1}, \text{ обратн. матриц.}$$

Симплект. форма ω
(косо симм. скаляр. произвед.)

(24)

Косой градиент

$v = s\text{grad } f$, если для $\forall w$:

$$\omega(w, s\text{grad } f) = w(f), \text{ т.е.}$$

производная f вдоль w . Это — определ. косого градиента. т.е.

$$\sum \omega_{ij} (s\text{grad } f)^j = \frac{\partial f}{\partial x^i} w^i,$$

т.е. аналогично градиенту именов.

$$(s\text{grad } f)^i = \sum_j \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}, \text{ где}$$

$$(\omega^{ij}) = \Omega^{-1}, \text{ обратная матриц. к}$$

$$\Omega = (\omega_{ij}) - \text{невырожд.}$$

- Опред. Вект. поле v на симпл. мног. M^{2n} называется гамильтоновым, если $v = s\text{grad}(H)$ для некотор. модкль H на M . Тогда H назыв. гамильтоном.
- по теор. Дарбу $\forall x \in M \exists$ откр. окрест. $U(x)$, в которой можно ввести канонич. к-ты (координ. Дарбу) $(p, q) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$, в которых $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$. Тогда гамильтон. вект. поле v примет вид:
 $v = s\text{grad } H = (-\partial H / \partial q_1, \dots, -\partial H / \partial q_n; \partial H / \partial p_1, \dots, \partial H / \partial p_n)$, т.е.
 $\dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i; \dot{q}_i = \partial H / \partial p_i, 1 \leq i \leq n$. Это — канонич. форма гамильтон. ур-й.
- Если на M одноврем. заданос как риман. метр. $(g_{ij}) = G$, так и симпл. структура $(\omega_{ij}) = \Omega$, то имеем:
 $w(H) = \langle w, \text{grad } H \rangle = \omega(w, s\text{grad } H)$, т.е.
 $\frac{\partial H}{\partial x^i} = \sum_j g_{ij} (\text{grad } H)^j = \sum_j \omega_{ij} (s\text{grad } H)^j$.
- Если $M = \mathbb{R}^{2n}$ и $g_{ij} = \delta_{ij}$, то $(\text{grad } H)^i = \sum_j \omega_{ij} (s\text{grad } H)^j$, т.е. $\text{grad } H = \Omega (s\text{grad } H)$, т.е. $s\text{grad } H = \Omega^{-1} (\text{grad } H)$.
- Если $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ — канонич., то $\text{grad } H = \Omega (s\text{grad } H)$ и $s\text{grad } H = -\Omega (\text{grad } H)$. Здесь $\text{grad } H = (\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, \frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_n})$.
- Важно: многие законы физики и механики записываются в виде гамильтон. ур-й:
 $\dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i; \dot{q}_i = \partial H / \partial p_i, 1 \leq i \leq n$. Поэтому исследование таких ур-й важно и популярно.

• Примеры симп. много-й.

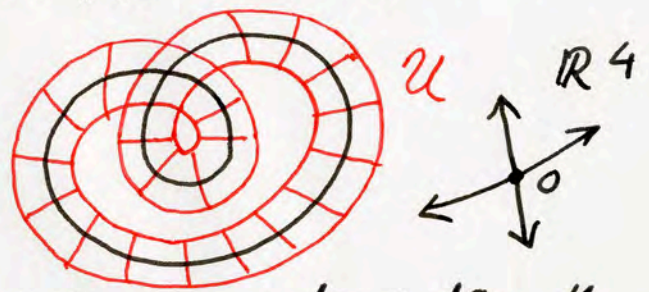
1) $M^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$, $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$, т.е. $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$.

2) M^2 - двумер. глад. много, где $\omega = f dx \wedge dy$ - форма площади на ориент. M^2 , где $f > 0$. Эта 2-форма замкнута и невырожд., т.к. $f(x, y) > 0$. Заменой локал. к-т можно привести к виду $\omega = dr \wedge d\theta$; см. д-во выше.

3) Утв. Пусть M^3 - глад. комп. ориент. замкн. мн-е. Тогда по теор. Уитни (усиление) M^3 гладко погруж. в \mathbb{R}^4 ; $\exists \lambda: M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$.

Утв. Прямое произв. $M^3 \times I$ явл. симп. многообр. ∂ -во. Рассм. погруж. $\lambda: M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ и малую трубчатую окрестн. $\mathcal{U}(\lambda M^3)$ в \mathbb{R}^4 .

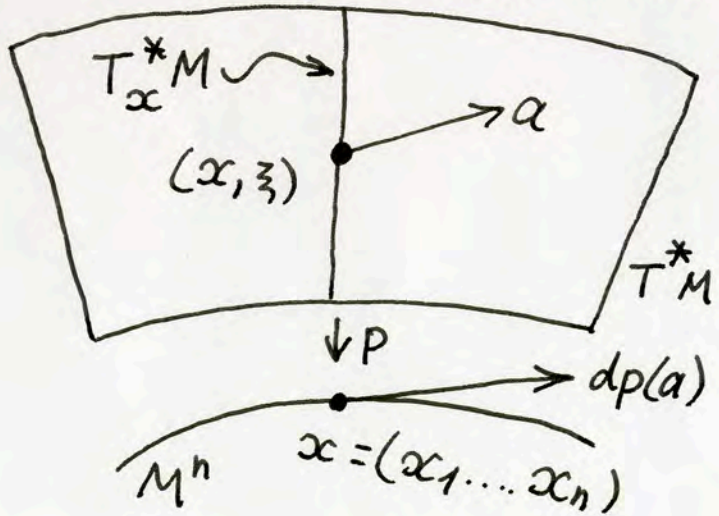
Ясно, что \exists гладкое погруж. $\mu: M^3 \times I \rightarrow \mathcal{U}(\lambda M^3)$, см. рис. Рассм. в \mathbb{R}^4 канонич. форму $\omega = dr \wedge d\theta = dr_1 \wedge d\theta_1 + dr_2 \wedge d\theta_2$ и



ограничим ее на $\mathcal{U}(\lambda M^3)$, после чего возьмем преобраз этой формы на $M^3 \times I$ при отображ. μ . Очевидно получим симплек. форму на $M^3 \times I$. Читр д.

4) Кокасат. рассм. T^*M^n к гладк. много. M^n - это гладкое $2n$ -мерн. много, образован. парами (x, ζ) , где $x \in M^n$, $\zeta \in T_x^* M^n$, т.е. лин. ф-я (ковектор) на касат. тр-ве $T_x M$, т.е. $\zeta(v) \in \mathbb{R}$, где $v \in T_x M$ - касат. в-р.

[Теор. Кокасат. рассм. T^*M^n для \forall гладк. M^n явл. симплек. $2n$ -мерн. многообр. Это - важный класс много. д-во. Здесь ζ - лин. функционал на $T_x M$; пусть $v \in T_x M$; тогда пара $(x, \zeta) \in T_x^* M$ и пусть $\alpha \in T_{(x, \zeta)}(T^*M)$ - касат. в-р к много. T^*M в точке (x, ζ) ; пусть



$p: T^*M \rightarrow M$ - естествен. проекция, $p(x, \zeta) = x \in M$.

Тогда дифференциал $dp: T_{(x, \zeta)}(T^*M) \rightarrow T_x M$.

Пусть (x_1, \dots, x_n) - локал. р-отул. к-той в окрестн. точки $x \in M$ и пусть $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ - гладк. кривая в M такая, что:

$x(0) = x$ и $\left. \frac{dx^i}{dt} \right|_{t=0} = (dp(a))^i$, т.е. $\dot{x}(0) = dp(a)$. (26)

Здесь $dp(a)$ — образ в-ра a при отображ. $T_{(x, \xi)}(T^*M) \rightarrow T_x M$.

Рассмотрим 1-форму α на многог. T^*M , т.е. лин. дифф. форма

$\alpha: T_{(x, \xi)}(T^*M) \rightarrow \mathbb{R}$, где $\alpha(a) = \xi(dp(a))$, т.к. ξ —

лин. ф-я на $T_x M$, т.е. имеет вид $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in T_x^* M$.

Тогда $\alpha(a) = \sum_i \xi_i (dp(a))^i = \sum_i \xi_i \left. \frac{dx^i}{dt} \right|_{t=0}$, т.е.

$\alpha = \sum_{i=1}^n \xi_i dx^i$. Положим $\omega = d\alpha = \sum d\xi_i \wedge dx^i$. Это и есть

симплек. структура на T^*M , т.к. $d\omega = d(\sum d\xi_i \wedge dx^i) = 0$, т.к. $d^2 \equiv 0$ (св-во внешнего дифференциала), и матрица Ω форм ω постоянна и имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, т.е. невырождена.

Цитр д.

• Комплект. Наряду с кокасат. рассл. T^*M рассматривают и касат. рассл. $T_x M = \{(x, v), \text{ где } x \in M, v \in T_x M\}$. Это тоже

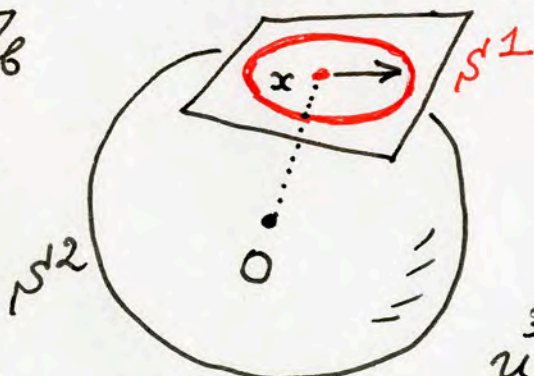
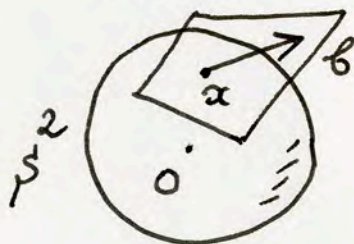
$2n$ -мерн. многог. и оно диффеоморфно кокасат. рассл. T^*M .

Важное отличие в том, что на T^*M всегда есть симплек. форма ω , а на $T_x M$ ее в "общем случае" нет. Поэтому в симп. топологии и гамильт. геом. большую роль играют именно кокасат. рассл. (как симплек. многог.).

• Примеры касат. рассл. $T_x M$.

• $T_x S^1$ гомеоморфно цилиндру $S^1 \times I^1$ ($I^1 = I$ — интервал).

• Утв. $T_x S^2 \neq S^2 \times \mathbb{R}^2$, т.е. не гомеомор. прямому произвед. В самом деле, рассл. касат. единичных векторов к 2-сфере, т.е. $S(T_x S^2) = \{(x, v), x \in S^2, |v|=1\}$



Тогда задание (x, v) однозначно определяет 3-мерер в \mathbb{R}^3 :

$(x, v, x \times v)$, т.е. вект. произв.

элемент группы $SO(3)$. и обратно.

т.е. $S(T_x S^2) \cong SO(3)$, а согласно курсу дифф. геом. и топол.:

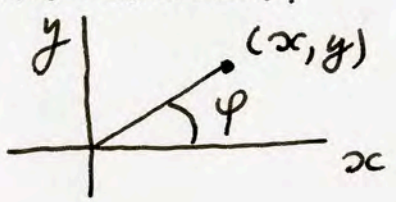
$SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$, а $\mathbb{R}P^3 \neq S^1 \times S^2$. Поэтому и $T_x S^2 \supset$

$\supset S(T_x S^2)$ не явл. прямым произв. Цитр д.

$S(T_x S^2) =$ мн-во всех возможных ориентир. ортобазисов в \mathbb{R}^3 , а это и есть группа $SO(3)$.

- Вернемся к гамильт. вект. полям на симп. M^{2n} .
- Опред. Гладк. вект. поле v на M^{2n} назыв. локально гамильтон., если \exists откр. покрытие $M = \cup U_i$, где на каждом откр. $U_i \exists$ гладк. ф-я H_i такая, что $v|_{U_i} = \text{sgrad } H_i|_{U_i}$, т.е. $\{H_i\}$ - это локал. гамильтонианы.
- Важно, что эти локал. ф-ции $\{H_i\}$ могут "не сшиваться" в одну гладк. однозначную ф-ю H на всем M^{2n} .
- Утв. \forall глобал. гамильтон. поле $v = \text{sgrad } H$ явл. локально гамильт., но "не наоборот", т.е. \exists локально гамильтон., но не глобал. гамильт. вект. поля.

З-во. В одну сторону - очевидно. обратно: построим пример. Рассм. симплект. $M^2 = \mathbb{R}^2 \setminus 0$ с симп. формой $\omega = dx \wedge dy$ и вект. поле $v = \text{sgrad } \varphi$, где $\varphi = \varphi(x, y)$ - полярн. угол на плоскости:



$$\varphi = \arctan(y/x); \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $w = \text{grad } \varphi = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ и т.д.

$\text{grad } \varphi = \Omega(\text{sgrad } \varphi)$, то:

$$v = \text{sgrad } \varphi = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right) = r/|r|^2, \text{ т.е.}$$

Здесь w - поле вращения вокруг начала к-т на \mathbb{R}^2 , а v - радиальное поле.



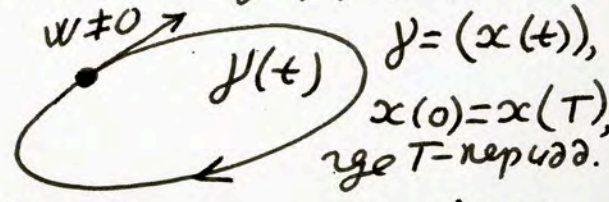
- Утв. Это поле v на $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ явл. локально гамильт., но не глобал. гамильт.
- З-во. локал. гамильт. мы доказали. Докажем, что - не глоб. гамильт. Пока мы видим только, что ф-я $\varphi(x, y)$ не явл. глоб. однознач. ф-ей на $\mathbb{R}^2 \setminus 0$. Но может быть, \exists другая гладк. ф-я ψ на $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ такая, что $v = \text{sgrad } \psi$. Окажется, такой ф-ции ψ нет. Докажем.

Утв. Пусть $\Omega = E$ на $\mathbb{R}^2 \setminus 0$; тогда поле $v = \text{sgrad } H$ глобально гамильт., \Leftrightarrow поле $w = \text{grad } H = \Omega(\text{sgrad } H)$, т.е. $w = \Omega(v)$. В нашем примере у поля $w = \text{grad } H$ есть замкн. инт-ер. траектория (окружн.). В данном примере вообще все инт-ер. траектории поля w замкнуты. Докажем, что потенциал не может иметь замкн. инт-ер. траекторий, отличных от точки.

Теор. Рассмот. риман. мнот. (M, g_{ij}) и пусть \langle, \rangle - симп. скал. произв., т.е. $\langle a, b \rangle = \sum g_{ij} a^i b^j$. Пусть гладк. вект. поле w на M имеет хотя бы одну замкн. инт-ер. траект. (т.е. периодич. решение), на которой \exists точка, где $w \neq 0$.

Тогда поле W — не тожд. потенц. на M .

З-во. Допус. против. Пусть \exists замк. одност. на всем M ф-я H такая, что $W = \text{grad } H$. Тогда рассм. дифференциал dH на замкн. интер. траект. γ :



и $\dot{x}(t) = W(x(t))$. Имеем:

$$\int dH = \int_0^T dH(x(t)) = H(x(T)) - H(x(0)) = 0, \text{ т.к. } H - \text{одност.}$$

γ ф-я и $x(0) = x(T)$. Далее: $\frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum g_{ij} (\text{grad } H)^j$;

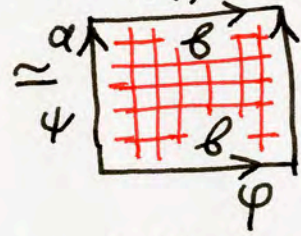
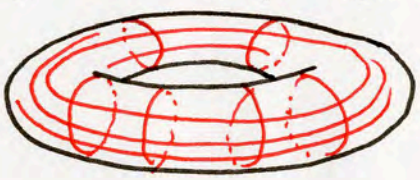
$$\int_{\gamma_T} dH = \int_0^T \sum \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} dt = \int_0^T \sum g_{ij} (\text{grad } H)^j \frac{dx_i}{dt} dt =$$

$$= \int_0^T \sum g_{ij} W^j W^i dt = \int_0^T |W|^2 dt > 0, \text{ т.к. хотя } g_{ii} \text{ вадной}$$

точке $W \neq 0$ на γ . Противоречие. Цитрд.

• Возвращ. к нашему примеру: W на $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ имеет замкн. интер. траект., а потому W не потенц., а потому $v = s \text{grad } H$ не тожд. гамильтоново. Цитрд.

• Такие примеры есть и на компакт. многообр. Например, на торе $T^2 = S^1 \times S^1$. $T^2(\varphi, \psi) = S^1(\varphi) \times S^1(\psi)$.



Рассм. два вект. поля $v = (0, 1)$ и $w = (1, 0)$, т.е. поля = потоки, текущие по параллелям тора и по меридианам.

На модели тора на квадрате $a \times a^{-1} b^{-1}$ эти поля — это плоские паралл. потоки вдоль координ. линий. Оба эти поля имеют замкн. интер. траектории. Поэтому они — не тожд. потенциалы. А т.к. $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (как и на \mathbb{R}^2), то оба поля и не тожд. гамильт., хотя — они локал. гамильтон.

• Сдвиги вдоль траект. вект. поля на M . Пусть v — вект. поле и $x(t)$ — его интер. траектории, т.е. $\dot{x} = v(x(t))$.

Рассм. сдвиги $g_t: M \rightarrow M$, где $g_t(x) = x(t)$ вдоль

траект. γ , где $x = x(0)$:



Тогда g_t — это диффеом. M на себя. Все $\{g_t\}$ образуют однопарам. группу $G = \{g_t\}$, действ. на M . Группа сдвигов.

• Теорема. Рассм. симп. мнот. (M^{2n}, ω) и гладкое вект. поле v на M . Тогда поле v локал. гамильт., если оно сохраняет форму ω , т.е. $\frac{d\omega}{dv} \equiv 0$, т.е. $\frac{d\omega}{dt} \equiv 0$ вдоль v .

До-во. Что такое $\frac{d\omega}{dv}$? Рассм. группу сдвигов $g_t: M \rightarrow M$, тогда она действует на ω , т.е. $\omega \rightarrow g_t^* \omega$, где $(g_t^*(\omega))(a, b) = \omega(dg_t(a), dg_t(b))$. Здесь $a, b \in T_x M$; $dg_t: T_x M \rightarrow T_{y=g_t(x)}(M)$ — дифференциал g_t .

• Итак, пусть v — поле, тогда $\frac{d\omega}{dv} = \frac{d}{dt}(g_t^* \omega)|_{t=0}$. Докажем, что если $\frac{d\omega}{dv} \equiv 0$, то v — локал. гамильт.

• По теор. Дарбу в окрестн. \forall точки x можно ввести такие локал. к-ты (p, q) , что $\omega = dp \wedge dq = \sum_i dp_i \wedge dq_i$.

Пусть $v = (X_i(p, q), Y_i(p, q))$ в окрестн. точки x . Тогда

$$v: \begin{cases} \dot{p}_i = X_i \\ \dot{q}_i = Y_i \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{Имеем: } \dot{\omega}_t = \frac{d\omega}{dt} = \left(\sum dp_i \wedge dq_i \right)' =$$

$$= \sum dX_i \wedge dq_i + dp_i \wedge dY_i = \sum_{i,k} \frac{\partial X_i}{\partial p_k} dp_k \wedge dq_i + \frac{\partial X_i}{\partial q_k} dq_k \wedge dq_i +$$

$$+ \frac{\partial Y_i}{\partial p_k} dp_i \wedge dp_k + \frac{\partial Y_i}{\partial q_k} dp_i \wedge dq_k =$$

$$= \sum \left(\frac{\partial X_i}{\partial p_k} + \frac{\partial Y_k}{\partial q_i} \right) dp_k \wedge dq_i + \left(\frac{\partial Y_i}{\partial p_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial p_i} \right) dp_i \wedge dp_k + \left(\frac{\partial X_i}{\partial q_k} - \frac{\partial X_k}{\partial q_i} \right) dq_k \wedge dq_i$$

$$\equiv 0; \iff \frac{\partial X_i}{\partial p_k} + \frac{\partial Y_k}{\partial q_i} = 0; \frac{\partial Y_i}{\partial p_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial p_i} = 0; \frac{\partial X_i}{\partial q_k} - \frac{\partial X_k}{\partial q_i} = 0.$$

Теперь рассм. 1-форму $\alpha = \sum_i -Y_i dp_i + X_i dq_i$ и найдем

$$d\alpha = \sum_{i,k} -\frac{\partial Y_i}{\partial p_k} dp_k \wedge dp_i - \frac{\partial Y_i}{\partial q_k} dq_k \wedge dp_i + \frac{\partial X_i}{\partial p_k} dp_k \wedge dq_i +$$

$$+ \frac{\partial X_i}{\partial q_k} dq_k \wedge dq_i = \sum \left(\frac{\partial X_i}{\partial p_k} + \frac{\partial Y_k}{\partial q_i} \right) dp_k \wedge dq_i +$$

$$+ \left(\frac{\partial Y_i}{\partial p_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial p_i} \right) dp_i \wedge dp_k + \left(\frac{\partial X_i}{\partial q_k} - \frac{\partial X_k}{\partial q_i} \right) dq_k \wedge dq_i = 0, \text{ т.к.}$$

эти же коэфф. появились выше как условие: $d\omega/dv \equiv 0$.

Итак, если $\frac{d\omega}{dv} = 0$, то $\implies d\alpha = 0$.

• Но в силу леммы Пуанкаре, локально любая замкн. форма точна, т.е.

в данном случае \exists макс. ф-я $H(p, q)$ на окрестн. $U(x)$ точки x , т.е. $\omega = dH$, т.е. $\omega = \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i = \sum -Y_i dp_i + X_i dq_i$, т.е. $\Leftrightarrow X_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}$; $Y_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}$, что и означает, что v - локал. гамил. поле. Цитрл.

Рассм. гамильт. вект. поля на M^2 , где M^2 ориент. и ω - форма площади.
 • теор. Вект. поле v на M^2 локал. гамильтон. \Leftrightarrow оно несжимаемо, т.е. $\text{div}(v) = 0$.

д-во. Докажем для случая локал. евклид. метрики на M^2 . Пусть обл. $U \subset \mathbb{R}^2(x, y)$, $v = (P, Q)$; $\omega = dx \wedge dy$ в декарт. к-тах x, y . Тогда $\text{div} v = P_x + Q_y$;

$\omega(a, b) = \text{площадь } \Pi(a, b)$, где $\Pi(a, b) = \begin{matrix} a & \nearrow & b \\ & \text{---} & \\ & \nwarrow & \end{matrix}$ параллелограм
 Тогда по предыдущ. теореме v - локал. гамильт. \Leftrightarrow

v сохраняет форму ω , т.е. площадь $\Pi(a, b)$. Рассмотрим макс. отображ. $f_\epsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, где f_ϵ - сдвиг вдоль инт-гр. траектории поля v . Тогда $f_\epsilon : (x, y) \rightarrow (x + \epsilon P + \dots; y + \epsilon Q + \dots)$ и

пл. $(df_\epsilon \Pi) = \text{пл. } \Pi \cdot \det(\text{матр. Якоби отображ. } f_\epsilon)$, а так как $\text{пл. } (df_\epsilon \Pi) = \text{пл. } \Pi = \omega(a, b)$, то f_ϵ сохран. пл. $\Leftrightarrow \det(df_\epsilon) = 1$. Ищем df_ϵ :

$$df_\epsilon = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon P_x & \epsilon P_y \\ \epsilon Q_x & 1 + \epsilon Q_y \end{pmatrix}; \quad \det(df_\epsilon) = 1 + \epsilon(P_x + Q_y) + \dots \equiv 1, \quad \text{т.е. } \Leftrightarrow P_x + Q_y = 0 = \text{div}(v).$$

Цитрл.
 • Пришлери локал. гамил. вект. полей \cong несжима. поля на \mathbb{R}^2 .
 Рассм. компл. анал. ф-ю $f(z) = a(x, y) + i b(x, y)$ и два вект. поля: $v = \text{grad}(a)$, $w = \text{grad}(b)$; $v = (a_x, a_y)$ и $w = (b_x, b_y)$. Условия Коши-Римана: $a_x = b_y$; $a_y = -b_x$.
 Отсюда: поля v и w ортогональны на \mathbb{R}^2 , т.к. $\langle v, w \rangle = a_x b_x + a_y b_y = 0$ в силу усл. Коши-Римана.

В декарт. коорд. $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, а потому $\Omega v = w = (-a_y, a_x)$, т.е. $w = s \text{grad}(a)$ и $v = s \text{grad}(b)$, т.е. v и w - локал. гамил. поля.

• утв. Интегралом v явл. ф-я $b(x, y)$, а интегралом w явл. ф-я $a(x, y)$; т.е. $v(b) = 0$ и $w(a) = 0$.

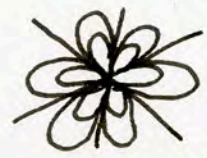
д-во. $v(b) = v_x b_x + v_y b_y = a_x b_x + a_y b_y = 0$; и $w(a) = 0$, т.е. линии тока поля v - это линии уровня $b(x, y)$, а линии тока поля w - это линии уровня $a(x, y)$.

• Примеры. 1. $f = z^n = r^n \cos n\varphi + i r^n \sin n\varphi$, где $n > 0$. Тогда $a = r^n \cos(n\varphi)$, $b = r^n \sin(n\varphi)$, т.е. линии тока таковы:



ноль порядка $n > 0$. 2. $f = z^{-n}$, $n > 0$, полюс поряд. n .

здесь $a = r^{-n} \cos(n\varphi)$, $b = r^{-n} \sin(n\varphi)$, т.е.



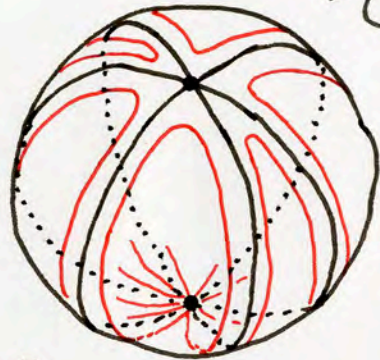
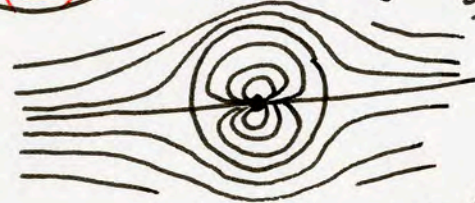
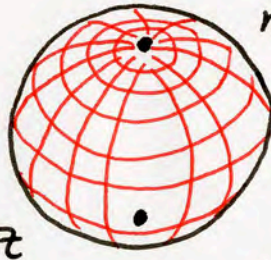
3. $f = \ln(z) = \ln r + i\varphi$, т.е.



Эти потоки можно изобразить на сфере $S^2 = \mathbb{C}^1(z) \cup \infty$, т.е.

параллели и мерид. на сфере.

4. φ -я Жуковского $f = z + \frac{1}{z}$; обтекание шара (диска)



z^n и z^{-n}

$\ln z$

Задача: нарисовать на сфере.

• Скобка Пуассона. Пусть f и g - функции на симпл. мнот. (M, ω) .

$$\{f, g\} = \omega(\text{sgрад } f, \text{sgрад } g) = \sum \omega_{ij} (sf)^i (sg)^j =$$

обозначим $\text{sgрад } f$ через sf ; и $\Omega^{-1} = (\omega^{ij})$ (индекс вверх)

$$= \sum \omega_{ij} \omega^{i\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \omega^{j\beta} \frac{\partial g}{\partial x^\beta} = \sum \delta_j^\alpha \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g}{\partial x^\beta} = \omega^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g}{\partial x^\beta}$$

• $\{f, g\}$ - скобка Пуассона: $\sum \omega^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g}{\partial x^\beta}$.

Здесь мы воспольз. тем, что ω - невырожд. а потому \exists matr.

$$\Omega^{-1} = (\omega^{ij})$$

• Утв. $\{f, g\} = (\text{sgрад } f)g = -(\text{sgрад } g)f$. Вытекает из

определ. sgрад , т.к. $\{f, g\} = \omega(sf, sg) = (sf)g = -(sg)f$.

• Теор. 1) Скобка Пуасс. билин. опер. (над \mathbb{R}) и косо сим метр.

2) Формула Лейбница: $\{h, f \cdot g\} = \{h, f\} \cdot g + f \cdot \{h, g\}$;

3) тождество Якоби: $\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} \equiv 0$.

Св-во. Св-во 1 вытекает из билин. и косо сим. формул ω .

Св-во 2: $\{h, f \cdot g\} = (sh)(f \cdot g) = ((sh)f)g + f((sh)g) =$
 $= \{h, f\}g + f\{h, g\}$, итдр.

Св-во 3 сложнее. Именнотут используется, что $d\omega = 0$. Сопремся на изв. формулу Картана:

$$(d\omega)(\xi, \eta, \zeta) = \xi \omega(\eta, \zeta) - \omega([\xi, \eta], \zeta) + \dots$$

(без ∂ -ва)

\odot циклически еще два раза

положим: $\xi = s \text{grad} f = sf$; $\eta = sg$; $\zeta = sh$. Так как $dw = 0$, то:

$$0 = sf(\omega(sg, sh)) - \omega([sf, sg], sh) + G$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{сокращаются}} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{сокращаются}} \\ & \underbrace{(sf)\{g, h\}}_{\text{сокращаются}} - [sf, sg]h - sf(sg(h)) + sg(sf(h)) - \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{f, h\}\} + G = 0 \end{aligned}$$

а это и есть тожд-во Якоби.

Цитрд.
 Дополн. обшая формула Картамэ:

$$dw(a_1, \dots, a_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} a_i \omega(a_1 \dots \hat{a}_i \dots a_{n+1}) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([a_i, a_j], a_1 \dots \hat{a}_i \dots \hat{a}_j \dots a_{n+1}).$$

без ∂ -ва.

св-ва скобки Пуассона на симпл. мног. (M, ω) .
 рассм. пр-во $C^\infty(M, \omega)$ над. ф-и с билин. операци. $\{, \}$, т.е.
 $f, g \rightarrow \{f, g\}$. Теорема. Пр-во $C^\infty(M, \omega)$ превращается в ал. лм, где $[,] = \{, \}$. ∂ -во сразу вытекает из предидущ. теор. т.к. $\{, \}$ билин, кососимм., и т-во Якоби. Цитрд, так как это и есть определение ал. лм.

Пусть $V(M)$ — линей. ∞ -мерное пр-во всех тандк. вект. полей на M .
 Это — тоже ал. лм с операц.-коммутатор вект. полей:
 $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$, где X, Y — лин. диффр. опер. \simeq вект. поля,
 т.е. $[X, Y]^k = \sum_i X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^k}{\partial x^i}$. Итак, имеем две ал. лм:

$C^\infty(M)$ и $V(M)$. Рассмот. отобра. $\alpha: C^\infty(M) \rightarrow V(M)$, где $\alpha(f) = s \text{grad} f$.

Теор. 1) α — гомоморф. ал. лм, т.е. $\alpha\{f, g\} = [\alpha f, \alpha g] = [\alpha f, \alpha g]$.

2) $\text{Im}(\alpha) = \text{Im}(C^\infty(M))$ в $V(M)$ — это все тандк. лемилл. вект. поля на M ; обозначим: $\text{Ham}(M)$; т.е. $\alpha C^\infty(M) = \text{Ham}(M)$.

3) Если M — связна, то $\text{Ham}(M) \simeq C^\infty(M) / \mathbb{R}1$.

4) Пусть $\text{Ham}^{\text{loc}}(M)$ — пр-во всех локал. темилл. полей на M . Тогда: $\text{Ham}(M) \subset \text{Ham}^{\text{loc}}(M)$ и $\text{Ham}(M)$ явл. идеалом в $\text{Ham}^{\text{loc}}(M)$.

∂ -во. ① α — гомоморф.? Т.е. $s\{f, g\} \stackrel{?}{=} [sf, sg]$, где $sf = s \text{grad} f$. Рассм. \forall тандк. ф-ю h на M . Надо проверить:

$(S\{f, g\})h \stackrel{?}{=} [Sf, Sg]h$. Имеем:

$$(S\{f, g\})h = \{\{f, g\}, h\} = (\text{по тожд. Якоби}) = -\{\{h, f\}, g\} - \{\{g, h\}, f\} = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} = Sf(Sg(h)) - Sg(Sf(h)) = [Sf, Sg]h. \text{ Читрѐ.}$$

② $\text{Im}(\alpha) = \text{Ham}(M)$ — по определению.

③ Рассм. $\text{Ker}(\alpha)$; тогда $\text{Ham}(M) = C^\infty(M)/\text{Ker} \alpha$. Далее: $f \in \text{Ker} \alpha \iff \text{sgrad} f = 0$, т.е. все $\partial f / \partial x_i = 0$, а так как M связно, то $f = \text{const}$; т.е. $\text{Ker} \alpha = (\text{const}) = \mathbb{R}^1$. Читрѐ.

④ Докажем, что $\text{Ham}(M)$ -идеал в $\text{Ham}^{\text{loc}}(M)$. Рассм. поля v и w из $\text{Ham}^{\text{loc}}(M)$, т.е. $v = S(f_u)$ и $w = S(g_u)$ на \forall открытой малой окрестн. $U \subset M$. Операция $S = \text{sgrad}$ определена всюду на M , глобально, т.к. форма ω задана глобально. Надо док., что $[v, w] \in \text{Ham}(M)$, т.е. $\text{Ham}(M)$ -идеал. Имеем:

$$[v, w] = [Sf_u, Sg_u] = S\{f_u, g_u\} = \text{sgrad} \omega(Sf_u, Sg_u) = \text{sgrad} \omega(v, w) = \text{sgrad} H, \text{ где } \varphi\text{-я } H = \omega(v, w) \text{ — глобально определена, т.к. поля } v \text{ и } w \text{ глобально определены и гладки.}$$

Читрѐ.

• Теор. 1) Пусть $v = \text{sgrad} H$. Тогда $\varphi\text{-я } f$ явл. интегралом v (т.е. $v(f) = 0$) $\iff \{H, f\} = 0$.
2) Если f и g — два интеграла поля $v = S H$, то скобка $\{f, g\}$ — тоже интеграл v .

① $v(f) = (\text{sgrad} H)f = \{H, f\}$; $v(f) = \{H, f\} = 0$. В частности, $\varphi\text{-я } H$ — всегда интеграл $v = S H$, т.к. $\{H, H\} = 0$.

② $(\text{sgrad} H)\{f, g\} = \{H, \{f, g\}\} = -\{g, \{H, f\}\} - \{f, \{g, H\}\}$
в силу т-ва Якоби $\{H, f\} = \{g, H\} = 0$. Читрѐ.

• Однако эта теор. редко позволяет находить новые интегралы, т.к. часто скобка $\{f, g\}$ функционально зависима с f и g , а потому новый независимый интеграл не получается.

ЛЕКЦИЯ 7.

Определение . Пусть (M^{2n}, ω) — симплектическое многообразие. Гладкое подмногообразие $N \subset M$ называется

- 1) *симплектическим*, если ограничение формы ω на N невырождено;
- 2) *лагранжевым*, если $\dim N = n$ и ограничение формы ω на N тождественно равно нулю.

ПРИМЕР . Рассмотрим каноническую систему координат $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ и произвольную гладкую функцию $S = S(q_1, \dots, q_n)$. Тогда подмногообразие N , заданное как график

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1},$$

...

$$p_n = \frac{\partial S}{\partial q_n},$$

является лагранжевым. Верно и обратное: если лагранжево подмногообразие N можно в канонических координатах представить как график $p_i = P_i(q_1, \dots, q_n)$, то (по крайней мере локально) найдется функция $S = S(q_1, \dots, q_n)$ такая, что $P_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$.

Еще одним примером лагранжевых подмногообразий являются торы Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем, о которых речь идет в следующем параграфе.

Интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы. Теорема Лиувилля

Пусть M^{2n} — симплектическое многообразие и $v = \text{sgrad } H$ — гамильтонова система с гладким гамильтонианом H .

Определение . Гамильтонова система v называется *вполне интегрируемой по Лиувиллю*, если существует набор гладких функций f_1, \dots, f_n таких, что:

- 1) f_1, \dots, f_n — первые интегралы v ,
- 2) они функционально независимы на M , то есть почти всюду на M их градиенты линейно независимы,
- 3) $\{f_i, f_j\} = 0$ при любых i и j ,
- 4) векторные поля $\text{sgrad } f_i$ полны, т.е. естественный параметр на их интегральных траекториях определен на всей числовой прямой.

Определение . Слоением Лиувилля, отвечающим вполне интегрируемой системе, называется разбиение многообразия M^{2n} на связные компоненты соседних поверхностей уровня интегралов f_1, \dots, f_n .

Поскольку f_1, \dots, f_n сохраняются потоком v , то каждый слой слоения Лиувилля — инвариантная поверхность.

Слоение Лиувилля состоит из регулярных слоев (которые заполняют почти все M) и особых слоев (заполняющих множество меры нуль).

Одна из целей нашей книги — описание топологии слоений Лиувилля. Формулируемая ниже теорема Лиувилля описывает их структуру в окрестности регулярного слоя.

Рассмотрим совместную регулярную поверхность уровня функций f_1, \dots, f_n :

$$T_\xi = \{x \in M \mid f_i(x) = \xi_i, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Регулярность означает, что дифференциалы df_i линейно независимы на T_ξ .

Теорема (Теорема Лиувилля).

Пусть на M^{2n} задана вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система $v = \text{sgrad } H$ и T_ξ — регулярная поверхность уровня интегралов f_1, \dots, f_n . Тогда:

- 1) T_ξ — гладкое лагранжево подмногообразие, инвариантное относительно потоков $v = \text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } f_1, \dots, \text{sgrad } f_n$.
- 2) Если подмногообразие T_ξ связно и компактно, то T_ξ диффеоморфно n -мерному тору T^n . Этот тор называется тором Лиувилля.
- 3) Слоение Лиувилля в некоторой окрестности U тора Лиувилля T_ξ тривиально, т. е. диффеоморфно прямому произведению тора T^n на диск D^n .
- 4) В окрестности $U = T^n \times D^n$ существует система координат $s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, называемых переменными действие-угол, со следующими свойствами:

а) s_1, \dots, s_n — координаты на диске D^n , $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — стандартные угловые координаты на торе T^n , $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

б) $\omega = \sum d\varphi_i \wedge ds_i$.

в) Переменные действия s_i являются функциями от интегралов f_1, \dots, f_n .

г) В переменных действие-угол гамильтонов поток v выпрямляется на каждом торе Лиувилля из окрестности U , т. е. гамильтоновы уравнения принимают вид

$$\dot{s}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = q_i(s_1, \dots, s_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Это означает, что на каждом торе поток v задает условно-периодическое движение, а траектории являются прямолинейными обмотками тора (рациональными или иррациональными).

Доказательство.

1) Поскольку функции f_1, \dots, f_n попарно коммутируют, они являются первыми интегралами не только потока $v = \text{sgrad } H$, но и каждого из потоков $\text{sgrad } f_i$. Следовательно, их совместная поверхность уровня T_ξ инвариантна относительно этих потоков и, более того, векторные поля $\text{sgrad } f_1, \dots, \text{sgrad } f_n$ в силу своей независимости образуют базис в каждой касательной плоскости к T_ξ . Лагранжевость подмногообразия T_ξ следует теперь из формулы $\omega(\text{sgrad } f_i, \text{sgrad } f_j) = \{f_i, f_j\} = 0$.

2) Потоки $\text{sgrad } f_1, \dots, \text{sgrad } f_n$ попарно коммутируют, поскольку

$$\{\text{sgrad } f_i, \text{sgrad } f_j\} = \text{sgrad}\{f_i, f_j\} = 0,$$

и являются полными. Это позволяет определить на многообразии M^{2n} действие Φ абелевой группы \mathbb{R}^n , порожденное сдвигами вдоль потоков $\text{sgrad } f_1, \dots, \text{sgrad } f_n$. Это действие можно задать явной формулой. Пусть g_i^t — диффеоморфизм, сдвигающий все точки многообразия вдоль интегральных траекторий поля $\text{sgrad } f_i$ на время t . Пусть (t_1, \dots, t_n) — точка \mathbb{R}^n . Тогда

$$\Phi(t_1, \dots, t_n) = g_1^{t_1} g_2^{t_2} \dots g_n^{t_n}.$$

Лемма . Если подмногообразие T_ξ связно, то оно является орбитой действия Φ группы \mathbb{R}^n .

Доказательство.

Рассмотрим образ группы \mathbb{R}^n в M при следующем отображении

$$A_x: (t_1, \dots, t_n) \rightarrow \Phi(t_1, \dots, t_n)(x),$$

где x — некоторая фиксированная точка из T_ξ . Поскольку поля $\text{sgrad } f_i$ независимы, то это отображение является погружением, т.е. локальным диффеоморфизмом на образ. Итак, образ \mathbb{R}^n (то есть орбита точки x) открыт в T_ξ . Если допустить, что подмногообразии T_ξ не является орбитой группы \mathbb{R}^n , то оно является объединением по крайней мере двух орбит. Но так как каждая из них открыта, то T_ξ оказывается несвязным, что противоречит условию. Лемма доказана. ■

Лемма . Орбита действия группы \mathbb{R}^n , имеющая размерность n , является фактор-пространством \mathbb{R}^n по некоторой решетке \mathbb{Z}^k . Если орбита компактна, то $k = n$ и орбита является n -мерным тором.

Доказательство.

Каждая орбита $O(x)$ гладкого действия группы является фактор-пространством (= однородным пространством) группы по стационарной подгруппе H_x точки x . Ясно, что подгруппа H_x дискретна, поскольку отображение A_x локально является диффеоморфизмом. Напомним, что дискретная подгруппа не имеет точек накопления. В частности, внутри любого ограниченного множества всегда находится лишь конечное число элементов этой подгруппы. Утверждается далее, что H_x является решеткой \mathbb{Z}^k . Доказательство проведем индукцией по n .

Пусть $n = 1$. Возьмем на прямой ненулевой элемент e_1 из H_x , ближайший к нулю. Тогда все остальные элементы из H_x ему кратны. В самом деле, если элемент e не кратен e_1 , то для некоторого k имеем:

$$ke_1 < e < (k+1)e_1.$$

Но тогда элемент $e - ke_1$, ближе к нулю, чем e_1 . Получили противоречие.

Пусть $n = 2$. В качестве e_1 выберем ненулевой элемент, ближайший к нулю на плоскости \mathbb{R}^2 и рассмотрим порожденную им прямую $l(e_1)$ (рис. 1.1). Все элементы из H_x , лежащие на ней, кратны e_1 . Далее возникают две возможности. Может оказаться, что все элементы из H_x уже лежат на прямой $l(e_1)$. Тогда доказательство завершается. Вторая возможность:

существуют элементы группы H_x , не лежащие на $l(e_1)$. Тогда в качестве e_2 возьмем ненулевой элемент, ближайший к прямой $l(e_1)$. Легко видеть, что такой элемент существует. Утверждается, что все элементы группы H_x , оказавшиеся в плоскости, натянутой на e_1 и e_2 , являются их линейными комбинациями с

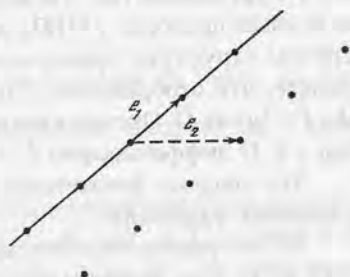


Рис. 1.1

целыми коэффициентами. Допустим противное и пусть h — элемент из H_x , не разлагающийся по e_1 и e_2 с целыми коэффициентами. Тогда разобьем плоскость на параллелограммы, порожденные e_1 и e_2 (рис. 1.2). Элемент h оказывается в одном из них, причем не находится в вершине параллелограмма. Ясно, что сдвинув h на подходящую целочисленную комбинацию e_1 и e_2 , мы обнаружим элемент h' , более близкий к прямой $l(e_1)$, чем e_2 . Получили противоречие.

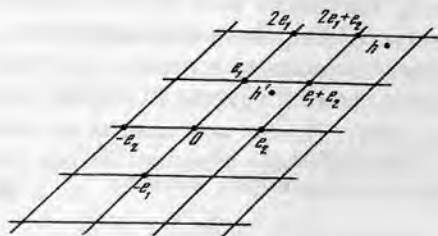


Рис. 1.2

Продолжая это рассуждение далее по индукции, мы и получаем, что существует базис e_1, \dots, e_k в подгруппе H_x такой, что каждый ее элемент является однозначной линейной комбинацией векторов базиса с целыми коэффициентами.

Если $k < n$, то фактор-пространство $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^k$ является цилиндром, т. е. прямым произведением $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, где T^k — k -мерный тор. В частности, только при $n = k$ орбита компактна, и тогда она диффеоморфна тору T^n .

Лемма доказана. ■

Следовательно, доказан пункт 2 теоремы.

3) Докажем, что окрестность U тора T_ξ является прямым произведением тора T^n на диск D^n .

Этот факт следует из следующей более общей и хорошо известной теоремы. Пусть $f: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий и y из N — регулярное значение для f , то есть во всех точках прообраза $f^{-1}(y)$ ранг df равен размерности N . В частности, $\dim M \geq \dim N$. Пусть, кроме того, множество $f^{-1}(y)$ компактно. Тогда существует окрестность D точки y в N такая, что ее полный прообраз $f^{-1}(D)$ диффеоморфен прямому произведению $D \times f^{-1}(y)$. Причем структура прямого произведения согласована с отображением f в том смысле, что отображение f на $D \times f^{-1}(y)$ совпадает с естественной проекцией $D \times f^{-1}(y)$ на D . Отсюда следует, в частности, что каждое множество вида $f^{-1}(z)$ при $z \in D$ диффеоморфно $f^{-1}(y)$.

Эта теорема фактически является переформулировкой известной теоремы о неявных функциях.

Лемма . В окрестности $U(T_\xi)$ форма ω является точной, т. е. существует 1-форма α такая, что $d\alpha = \omega$.

Доказательство.

Эта лемма является следствием следующего общего утверждения. Пусть Y — подмногообразие в X , причем существует отображение $f: X \rightarrow Y \subset X$, гомотопное тождественному отображению $\text{id}: X \rightarrow X$. Тогда замкнутая дифференциальная форма \varkappa точна на X тогда и только тогда, когда точна форма $\varkappa|_Y$. В

нашем случае, когда X — это окрестность тора Лиувилля, а Y — это сам тор Лиувилля, выполнено даже более сильное условие: $\omega|_{T_\xi} = 0$, поскольку тор T_ξ лагранжев. Поэтому ω точна.

т. е. постоянны на торах Лиувилля.

Теорема Лиувилля доказана. (Последние пункты я здесь не доказывал, см. книгу).

40 ■

Комментарий. Отметим, что переменные действия s_1, \dots, s_n могут быть заданы явной формулой. Пусть $U(T_\xi) = D^n \times T^n$ — окрестность лиувиллева тора. Фиксируя некоторый базис e_1, \dots, e_n в решетке, отвечающей тору T_ξ , мы тем самым однозначно определяем набор базисных циклов $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ в фундаментальной группе $\pi_1(T_\xi^n) = \mathbb{Z}^n$. По непрерывности эти циклы могут быть распространены на все лиувиллевы торы из рассматриваемой окрестности.

Сопоставим каждому тору Лиувилля набор вещественных чисел s_1, \dots, s_n по следующей формуле

$$s_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \alpha,$$

где α — дифференциальная 1-форма в окрестности $U(T_\xi)$ такая, что $d\alpha = \omega$ (обычно α называют формой действия). В результате в $U(T_\xi)$ возникает набор гладких функций

$$s_1 = s_1(f_1, \dots, f_n),$$

...

$$s_n = s_n(f_1, \dots, f_n),$$

которые совпадают (с точностью до константы) с переменными действия, построенными при доказательстве теоремы Лиувилля. Чтобы в этом убедиться достаточно рассмотреть в качестве α форму $\sum s_i d\varphi_i$ (см. доказательство теоремы).

Лекция 8

- Комментарии к теор. Лиувилля. Поскольку интегралы f_1, f_2, \dots, f_n заданы, то совместная поверхность-уровня $T_z^n = (f_i = z_i, 1 \leq i \leq n)$ задана системой уравнений. Они могут быть сложными, но, тем не менее, "они известны". Конечно, торы Лиувилля T_z^n могут располагаться в M^{2n} довольно причудливо. Но зато на каждой торе система линеаризуется (в подходящих координатах).
- 2. Любая функция $H = H(f_1, \dots, f_n)$ задает гамильтониан системы, интегрируемой по Лиувиллю.
- 3. Конкретный вид интегралов неважен в том смысле, что важно лишь пространство интегралов $\{H(f_1, \dots, f_n)\}$. Т.е. действие абелев. группы \mathbb{R}^n , порожденный полями (сглад $f_i, 1 \leq i \leq n$). Напомню, что любая ф-я от интегралов сама является интегралом.

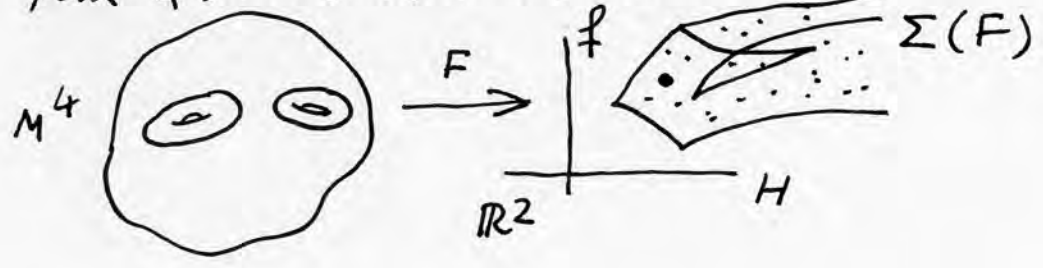
• Отображ. момента. Если на M^{2n} задана система \mathcal{U} , вполне интегрируемая по Лиувиллю, то возникает т.н. отображ. момента: $F: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, где f_i - интегралы системы. Множество особн значений $z \in \mathbb{R}^n$ для отображ. F замкнуто и называется дискретным множеством $\Sigma = \Sigma(F)$. Т.е. если $z \in \Sigma(F)$, то в полном прообразе $F^{-1}(z)$ есть критич. точки, т.е. там, где $\text{ранг}(dF) < n$.

• Если $z \in \mathbb{R}^n$ - регулярные знач. отображ. момента, то $F^{-1}(z)$ - набор торов Лиувилля, если прообраз - компактен. Если $z \in \Sigma(F)$, то $F^{-1}(z)$ содержит особые слои (с критич. точками). Тем самым, возникает слоение на торы (в компактном случае) и особые слои. Это слоение назыв. слоением Лиувилля.

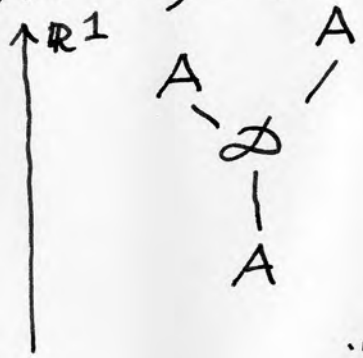
• В аналитическом случае почти все торы Лиувилля "неразрывны", т.е. являются замыканием своих интегральных траекторий. Т.е. динамика на них "условно-периодическая", т.е. траектория - "иррациональная", т.е. лассотт - несоизмеримы. Это - теорема.

• Таким образом, в аналит. случае почти все торы T^n - это замыкание интегральных траекторий. При изменении начальных данных, меняется интегр. траект., т.е. тор T^n .

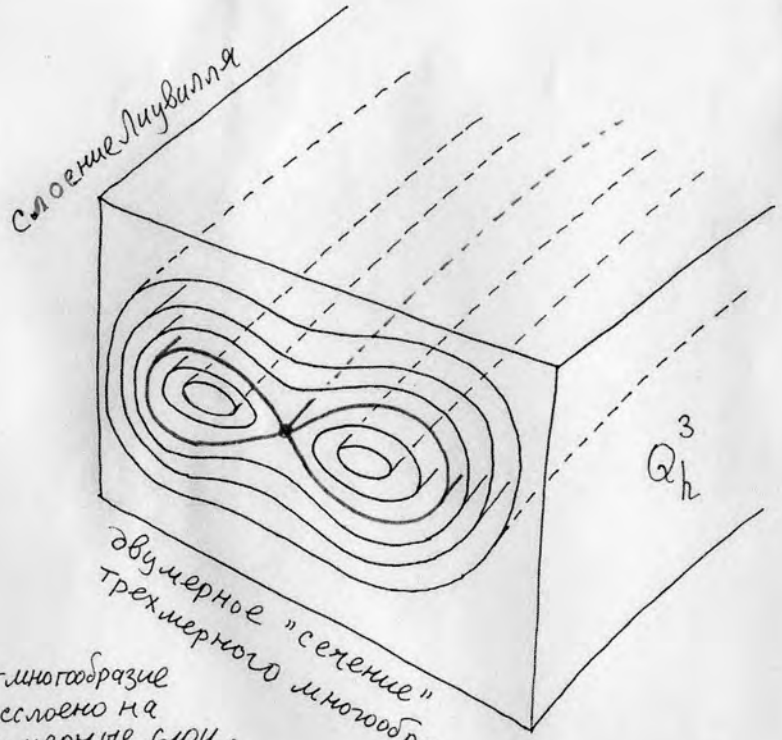
• Пусть $\mathcal{U} = \text{сглад } H$ на M^4 - вполне интегр. по Лиув., т.е. есть интеграл f , где $\{H, f\} = 0$, незав. с H . Рассмотрим отображ. момента



Мн-во $\Sigma(F)$ разбивает мн-во $F(M^4)$ с \mathbb{R}^2 на открытые области, "камеры", состоящие из регулярн. значений отобра. F . Если $z \in F(M)$ - регулярно, то $F^{-1}(z)$ состоит из торов Лиувилля. Фиксируем $H > h = \text{const}$ и пусть $dH \neq 0$ на 3-уровне $Q^3 = (H=h)$. Тогда Q^3 - такж. 3-мерн. мног., называемое h изоэнергетическим. Рассм. сечение Лиувилля на Q^3_h ; тогда $f: Q^3_h \rightarrow \mathbb{R}^1$. Пусть \mathcal{W} - граф, топками которого явл. компоненты связн. множеств $f^{-1}(z)$, где $z \in (H=h)$:



Ребра графа - это 1-параметрич. семейства 2-торов Лиувилля, а вершины графа - это особые свои сечения Лиувилля, условно обозначен. "буквами" и называемые "атомами".



3-многообразие расложено на двумерные слои. "Большинство" слоев - это 2-мерные торы. Они наглядно показывают эволюцию интегральных траекторий динамической системы.

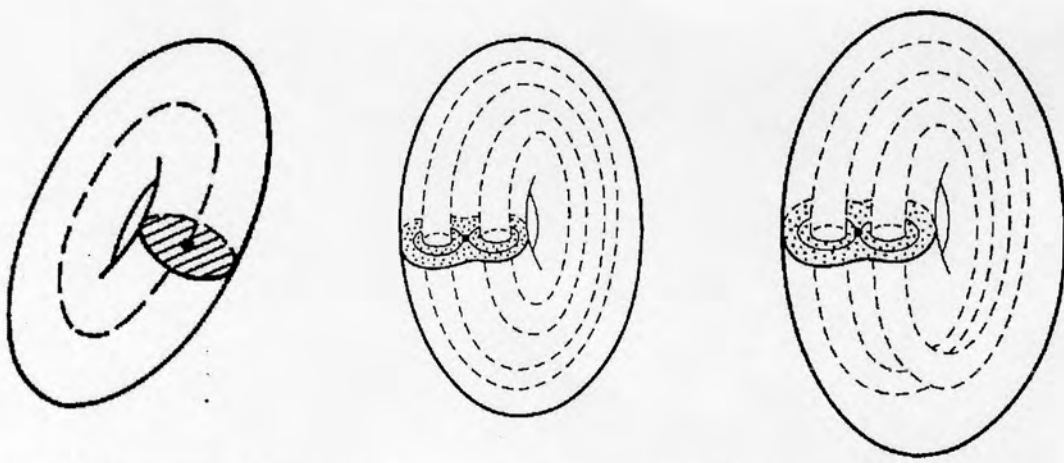
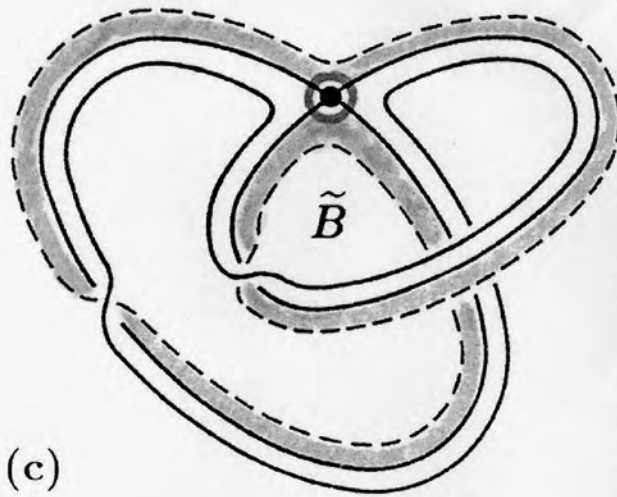
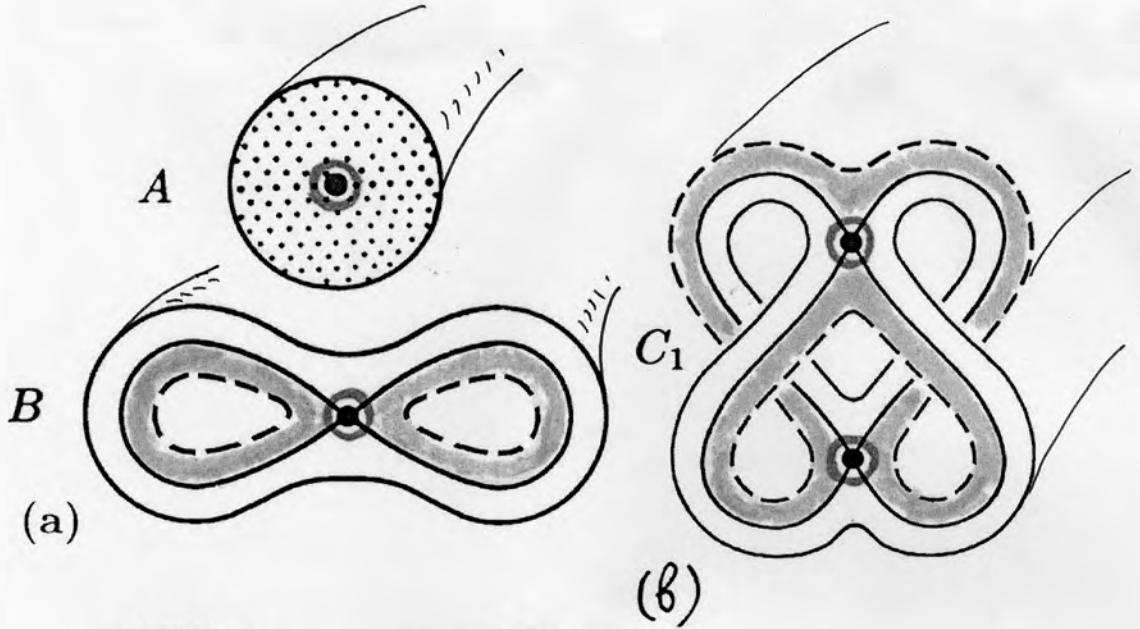
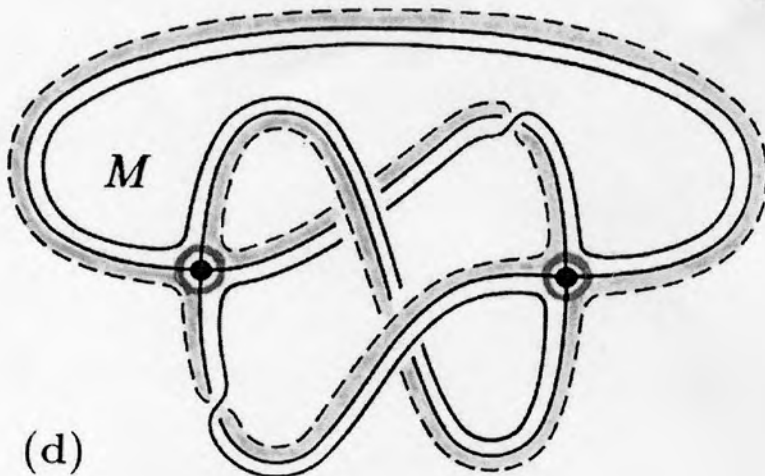


Рис.: Примеры 3-атомов – перестроек торов Лиувилля – A, B, A*



Примеры
"атомов" =
бифуркаций
сложности
один и два



Δ-во теор. Дарбу.

Рассм. симпл. мн-во. (M^{2n}, ω) . Тогда для \forall точки $P \in M$
 \exists откр. окрест. $U = U(P)$ и локал. регул. коорд. $p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n$
в $U(P)$, что: $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$, т.е. $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ в целой
окрестн. $U(P)$.

Δ-во.

Лемма 1. Достаточно построить такие локал. к-ты, что в них:
 $\{p_i, p_j\} = 0, \{q_i, q_j\} = 0, \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$. Это и дает: $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$.

Здесь скобка Пуасс. $\{, \}$ соответ. данной форме ω .

Δ-во лемма очевидно вытек. из св-в скобки Пуассона.

Лемма 2. Пусть уже найдены ф-ции p_1, \dots, p_n в инволюции,
т.е. $\{p_i, p_j\} = 0$. Тогда \exists дополнит. к ним локал. к-ты $q_1 \dots q_n$,
такие, что: $\{q_i, q_j\} = 0$ и $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$.

Δ-во. Шаг 1. Рассм. ф-ции $p_1 \dots p_n$ и $\alpha: p_i \rightarrow v_i = \text{sgrad } p_i$.

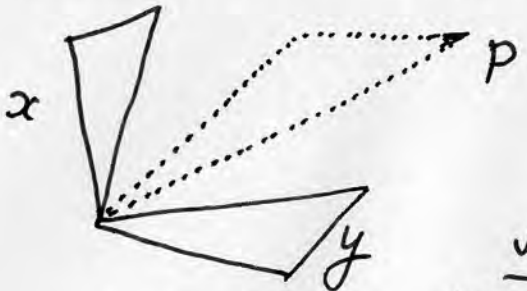
Тогда векторн. поля $v_1 \dots v_n$ коммут., т.е. $[v_i, v_j] = 0$,
так как $[v_i, v_j] = \text{sgrad } \{p_i, p_j\} = 0$.

Шаг 2. По теор. из дифф. геом. (или из Δ-ва теор. Лиувилля)
следует, что \exists новые локал. к-ты $(x, y) = (x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n)$
такие, что $v_i = \partial / \partial x_i, 1 \leq i \leq n$, т.е.

$\partial / \partial x_i = \text{sgrad } p_i$. Фактически мы доказали это при Δ-ве

теор. Лиувилля: построим макс. действие \mathbb{R}^n на M^{2n} .
Группа \mathbb{R}^n слонит M^{2n} на орбиты. При этом, поля $v_1 \dots v_n$
касаются орбит и $v_i = \text{sgrad } p_i$. За координаты $x_1 \dots x_n$
берем коорд. в \mathbb{R}^n (т.е. на орбите), а за дополнит. к-ты
 $y_1 \dots y_n$ берем коорд. на диске \mathbb{D}^n , трансверсальном
орбите группы \mathbb{R}^n .

Шаг 3. Условно изобраз. эти ф-ции в тр-ве $C^\infty(M)$:
("три плоскости, подпр-ва").

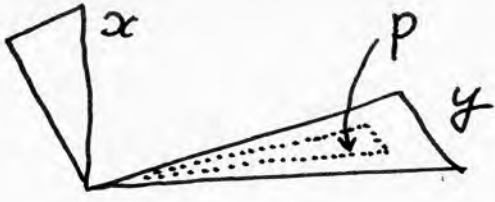


Так как (x, y) - локал. к-ты на M ,
то $p = p(x, y)$, т.е. все p_i - это
функции от (x, y) .

Лемма 3. На самом деле $p = p(y)$, т.е.
 p от x не зависят.

Δ-во. $\frac{\partial}{\partial x_i} (p_j) = (\text{sgrad } p_i) p_j = \{p_i, p_j\} = 0$, т.к. p_i
находятся в инвол.
Итак, $\partial p_j / \partial x_i = 0, \forall i, j$. Цитра.

Шаг 4. Итак, $p = p(y)$, а потому за новые координ. можно
взять (x, p) , т.е.



Переход: $(x, y) \rightarrow (x, p)$
 "подкручиваем" локал. к-ты.
 Что хотим? Хотим привести Ω к виду $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$. Надо найти попарные

скобки: $\{x, x\}, \{x, p\}$ и $\{p, p\}$. Сразу имеем: $\{p_i, p_j\} = 0$, т.к. функции p_i были в инволюции. Подсчитаем $\{x, p\}$. имеем:
 $\{x_i, p_j\} = -\text{grad}(p_j)(x_i) = -\frac{\partial}{\partial x_j}(x_i) = -\delta_{ij}$, т.е.
 $\{x_i, p_j\} = -\delta_{ij}$. Теперь: пусть $\{x_i, x_j\} = \lambda_{ij}(x, p)$. т.е. пока матрица попарных скобок такова:

| | | |
|---|----------------------|---|
| | x | p |
| x | $\lambda_{ij}(x, p)$ | E |
| p | -E | 0 |

Хотим аннулировать матрицу $(\lambda_{ij}(x, p))$.
 • Шаг 5. $\lambda_{ij}(x, p) = \lambda_{ij}(p)$, т.е. скобка функции λ от x не зависят.

До-во. имеем: $\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \{x_i, x_j\} = v_\alpha \{x_i, x_j\} =$
 $= (\text{grad } p_\alpha) \{x_i, x_j\} = \{p_\alpha, \{x_i, x_j\}\} =$ (по тожд. Якоби) =
 $= -\{x_j, \{p_\alpha, x_i\}\} - \{x_i, \{x_j, p_\alpha\}\} = 0$, т.к. $\{p_\alpha, x_i\} = -\delta_{\alpha i}$.
 $= \text{const}$ и $\{x_j, p_\alpha\} = \delta_{j\alpha} = \text{const}$ и т.к. $\{f, \text{const}\} = 0$.

Итак, $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(p)$. Читрѐ.

• Шаг 6. Итак: $\{x, x\} = \Lambda(p)$; $\{x, p\} = E$, $\{p, p\} = 0$.

Далее снова подкручиваем к-ты: $(x) \rightarrow (q)$, т.е.
 $(x, p) \rightarrow (q, p)$, где положим $q_j = x_j - f_j(p)$. Имеем f_j .
 Хотим, чтобы $\{q_i, q_j\} = 0$. Имеем:

$$\{p_j, q_i\} = \{p_i, x_j - f_j(p)\} = \{p_i, x_j\} - \{p_i, f_j(p)\} =$$

$$= \delta_{ij} - \sum (\partial f_j / \partial p_i) \cdot \{p_i, p_j\} = \delta_{ij}$$
, т.к. $\{p_i, p_j\} = 0$.

Итак, $\{p_j, q_i\} = \delta_{ij}$. Далее:

$$\{q_i, q_j\} = \{x_i - f_i(p), x_j - f_j(p)\} = \lambda_{ij}(p) - \{x_i, f_j(p)\} +$$

$$+ \{x_j, f_i(p)\} + \underbrace{\{f_i(p), f_j(p)\}}_{=0, \text{ т.к. } p_i \text{ коммутируют}}$$

$$\{x_i, f_j(p)\} = \sum_\alpha (\partial f_j / \partial p_\alpha) \cdot \{x_i, p_\alpha\} = \sum_\alpha \frac{\partial f_j}{\partial p_\alpha} \delta_{i\alpha} = \frac{\partial f_j}{\partial p_i}$$

Полезная формула: $\{x_i, f_j(p)\} = \partial f_j / \partial p_i$.

Итак: $\{g_i, g_j\} = \lambda_{ij}(p) - \frac{\partial f_j(p)}{\partial p_i} + \frac{\partial f_i(p)}{\partial p_j} \stackrel{?}{=} 0$ (46)

Приравняв к нулю, попытаем уравнения на φ -члн $f_i(p)$. Ищем т.е. решаем систему: $\lambda_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial p_j} - \frac{\partial f_j}{\partial p_i}$.

Рассм. 2-форму $\rho = \sum \lambda_{ij} dp_i \wedge dp_j$; хотим найти 1-форму $\tau = \sum f_i dp_i$ такую, что $\rho = d\tau$. Если найдем, то:

$$\rho = \sum \lambda_{ij} dp_i \wedge dp_j = d(\sum f_i dp_i) = \sum \frac{\partial f_i}{\partial p_j} dp_j \wedge dp_i = \sum \left(\frac{\partial f_i}{\partial p_j} + \frac{\partial f_j}{\partial p_i} \right) dp_i \wedge dp_j, \text{ т.е. } \lambda_{ij} = -\frac{\partial f_i}{\partial p_j} + \frac{\partial f_j}{\partial p_i} \text{ (микро с то лнх. до знака)}$$

• Но такая $\tau \exists$, т.к. верно следующее.

$$+ \begin{cases} \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial^2 f_j}{\partial p_\alpha \partial p_i} - \frac{\partial^2 f_i}{\partial p_\alpha \partial p_j} & (i \ j \ \alpha) \\ \frac{\partial \lambda_{\alpha i}}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial p_j \partial p_\alpha} - \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial p_j \partial p_i} & (\alpha \ i \ j) \\ \frac{\partial \lambda_{j\alpha}}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial p_i \partial p_j} - \frac{\partial^2 f_j}{\partial p_i \partial p_\alpha} & (j \ \alpha \ i) \end{cases}$$

$\Sigma = 0$

т.е. $\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial \lambda_{\alpha i}}{\partial p_j} + \frac{\partial \lambda_{j\alpha}}{\partial p_i} = 0$. Далее: по предыдущ. вычислению

$$\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} (\lambda_{ij}(p)) = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \{x_i, x_j\} = \{x_\alpha, \{x_i, x_j\}\}$$

Но тогда $\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial p_\alpha} + \text{цикл} = \{x_\alpha, \{x_i, x_j\}\} + \text{цикл} = \text{тож-во Якоби} = 0$.

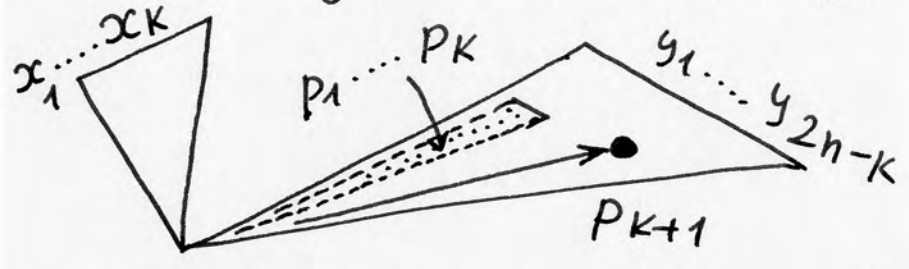
Итак: $\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial p_\alpha} + \text{цикл} = 0$. Но это означает, что $d\rho = 0$, т.к.

$$d\rho = \sum \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial p_\alpha} dp_\alpha \wedge dp_i \wedge dp_j = \sum \left(\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial p_\alpha} + \text{цикл} \right) dp_\alpha \wedge dp_i \wedge dp_j = 0, \quad \alpha < i < j$$

• Итак, $d\rho = 0$. Но тогда локал., в диске по лемме Пуанкаре: $\exists \tau$ такая, что $\rho = d\tau$, где $\tau = \sum f_i dp_i$. Мы нашли искомого φ -члн $f_i(p)$. Лемма 2 полн. доказана.

• Итак, если есть ф-ции $p_1 \dots p_n$ в имволюции, то отсюда
 → теор. Дарбу. Осталось построить ф-ции $p_1 \dots p_n$.
 по индукции.

• Лемма 3. Пусть уже заданы ф-ции $p_1 \dots p_k$, где $k < n$
 и $\{p_i, p_j\} = 0$. Тогда \exists ф-я p_{k+1} такая, что $\{p_{k+1}, p_i\} = 0$
 при $1 \leq i \leq k$, и p_{k+1} - независима с ф-ями $p_1 \dots p_k$.
д-во. Повторяем д-во предыдущ. леммы 2. Строим
 к-ты $(x, y) = (x_1 \dots x_k, y_1 \dots y_{2n-k})$:



Здесь (см. выше)
 $p = p(y), 1 \leq i \leq k$.
 Но так как $k < n$, то
 $k < 2n - k$, т.е. в

подпр-ве ф-ции $y_1 \dots y_{2n-k}$ найдется еще одна ф-я
 p_{k+1} , функц. независим. от ф-й $p_1 \dots p_k$, т.к.

$$\dim(y) > \dim(p). \text{ Тогда } \{p_{k+1}, p_i\} = \underbrace{-\text{grad } p_i}_{=v_i}(p_{k+1}) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_i}(p_{k+1}(y)) \equiv 0. \text{ Читрд.}$$

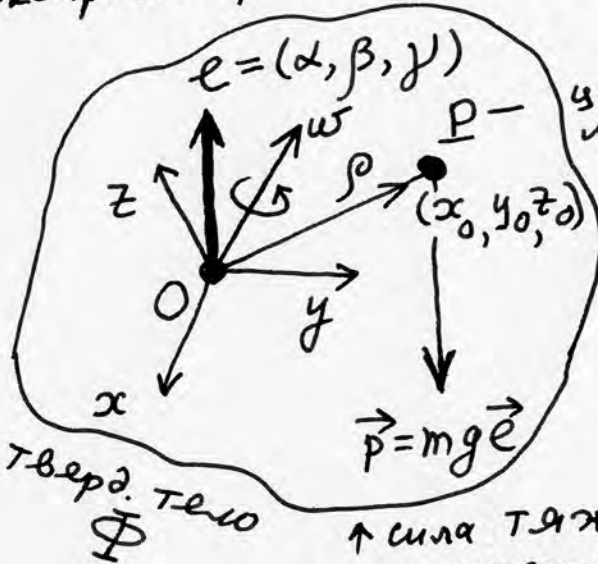
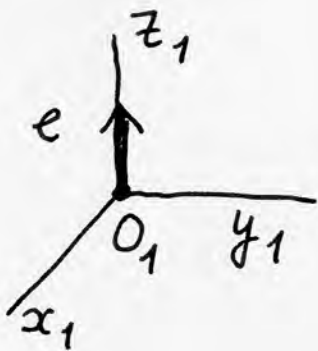
• Теор. Дарбу доказана.

Важные примеры интерпр. системы в физике и механике.
 Ур-я Эйлера-Пуассона движ. тверд. тела в \mathbb{R}^3 .

• Опред. Тверд. тело в \mathbb{R}^3 - это система точек с заданным набором расстоян. между ними.

Пусть x_1, y_1, z_1 - методв. в \mathbb{R}^3 система дек. к-т. Пусть дано тверд. тело в \mathbb{R}^3 . В нем задана "вмороженная" сис. декор. к-т x, y, z , т.е. фиксирован репер, методв. относит. тверд. тела.

Методв. в \mathbb{R}^3



$P(x_0, y_0, z_0)$ - центр масс

Φ движется в \mathbb{R}^3

\uparrow сила тяжести, m - масса, g - ускорение

Если тверд. тело - это система точек $(m_1 r_1, \dots, m_N r_N)$, где m_i - массы точек, а r_i - их радиус-векторы (из точки O), то

$\rho_{ц.масс} = \frac{1}{\sum m_i} \sum_{i=1}^N m_i r_i$ (если тело-дискретно). Если

тв. тело "непрерывно", то $\rho_{ц.масс} = \frac{1}{M} \int_{\Phi(\text{тело})} \vec{r} dm(\vec{r})$, где

$\vec{r} = r(x, y, z)$ - радиус-вектор, а $dm(\vec{r})$ - плотность тела в точке $r(x, y, z)$.

Здесь ω - в-р мгновенн. углов. скорости тела. Вектор e - единичн. в-р в \mathbb{R}^3 вверх по оси z_1 . Относит. подвижному реперу (x, y, z) ("вморожн." в тв. тело Φ) он имеет коор-ты:

$e = (\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$, а в-р ω относит. (x, y, z) имеет коор-ты:
 $\omega = (p(t), q(t), r(t))$. Положение тв. т. Φ в \mathbb{R}^3 однозначно задается дек. коор-ми в-ров e и ω :

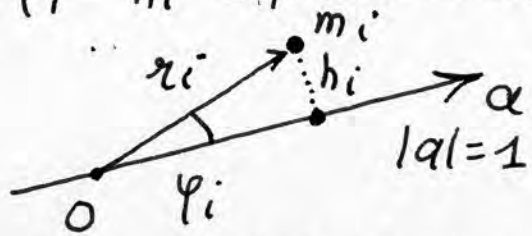
$\Phi(t) = (\alpha, \beta, \gamma, p, q, r)(t) \in \mathbb{R}^6$.

• Тензор инерции и главн. осц. Пусть $\Phi = (m_1 r_1, \dots, m_N r_N)$ - это система точек
 Тензор инерции это: $T(a, b) = \sum_{i=1}^N m_i \langle r_i \times a, r_i \times b \rangle$, где $a, b \in \mathbb{R}^3$, $r_i \times a$ и $r_i \times b$ - векторн. произвед. векторов, m_i - массы

Если $a = b$ - в радианн. длины, то $T(a, a) = \sum_{i=1}^N m_i |r_i \times a|^2$ (49)

Далее: $|r_i \times a| = |r_i| \cdot |a| \cdot \sin \varphi_i =$

$= |r_i| \cdot \sin \varphi_i = h_i =$ расстояние точки r_i до осц, определяемой в-ром a :

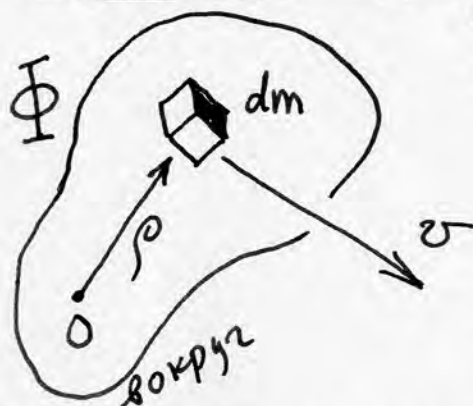


Момент точки r_i относц. осц, опредл. век-ром a , есть: $m_i \cdot h_i^2 = \{ \text{масса} \cdot \text{квадрат расстояния} \}$.

• Если тело Φ - "непрерывно", то тензор инерции имеет вид:
 $T(a, b) = \int_{\Phi} \langle r \times a, r \times b \rangle dm(r) =$ билин. форма в \mathbb{R}^3 .

Она симметр, а потому ее можно привести к главн. осям. Эти осц и назыв. главн. осями инерции твер. тела Φ , а значения $T(a, a)$ на них - это главн. моменты инерции тв.т. Φ . Эти осц мы и возьмем за базис коор-т x, y, z в Φ ("вморож." система). Если I - матр. момент. инерции, то в главн. осях она имеет вид: $I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$, где A, B, C - глав. момен. инерции тв. тела Φ .

• Кинетич. момент тв. тела (инерции). Возьмем малый "кубик" dm и пусть v - в-р его мгновенн. скорости, а ρ - радиус-в-р. Тогда



$[\rho, v] dm = (\rho \times v) dm$ - кинетич. момент вращен. кубика. А по велич Φ :
 векторн. произвед.

$K = \int_{\Phi} (\rho \times v) dm = K(t)$ - кинетич. момент вращ. твер. тела.

K - это вектор в \mathbb{R}^3 . Вот две важн. теор. из механики.

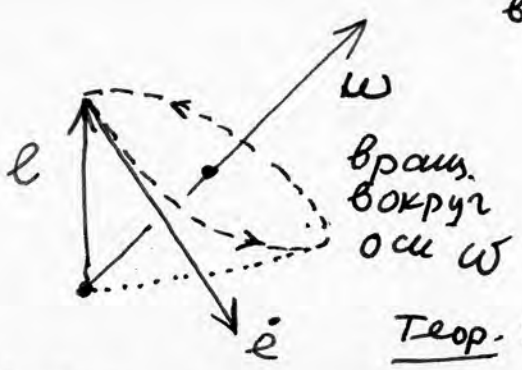
• Теор. Для движ. твер. тела в \mathbb{R}^3 выполнено: $K = I(\omega)$, где ω - век-р мгновенн. углов. скорости, I - матр. моментов инерции. В главн. осях (вморож. в тв. тело) $I = \text{diag}(A, B, C)$.
 Далее: $dK/dt =$ момент внешних сил.

Иногда вект. произв. в \mathbb{R}^3 пишут в виде коммутатора:

$a \times b = [a, b]$.

Теор. (Эйлер-Пуассон). Пусть тв. тело Φ движ. в \mathbb{R}^3 . Тогда:
 $(I\omega)' = [I\omega, \omega] + m g [e, \rho_{ц.масс}]$ - ур-я Эйлера,
 $\dot{e} = [e, \omega]$ - ур-я Пуассона. Эти ур-я записаны в сист. к-т, "вморожен." в тв. тело, т.е. (x, y, z) .

Ур-я Эйлера вытекают из предыдуц. теоремы. Ур-я Пуассона вполне понятны:



в-р e вращ. вокруг оси omega - мгновен. вращ, поэтому $\dot{e} \perp e$ и $\dot{e} \perp \omega$, $|e| = 1$, так что $\dot{e} = [e, \omega]$, чирд.

Теор.:

$$\left\{ \begin{aligned} A\dot{r} + (C-B)qr &= mg(z_0\beta - y_0\gamma) \\ B\dot{q} + (A-C)rp &= mg(x_0\gamma - z_0\alpha) \\ C\dot{r} + (B-A)pq &= mg(y_0\alpha - x_0\beta) \\ \dot{\alpha} &= r\beta - q\gamma \\ \dot{\beta} &= p\gamma - r\alpha \\ \dot{\gamma} &= q\alpha - p\beta \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Эйлер. движ. тв. тела} \\ \text{в } \mathbb{R}^3(\alpha, \beta, \gamma, \\ \quad p, q, r) \end{array}$$

Задание динамики omega и e полнос. определ.

пуассон. получаем вект. поле (поток) на \mathbb{R}^6 : $\mathcal{V}_{\text{Э.П.}} = \text{ур-я Эйлер.-Пуасс.}$

• Сделаем замену перемен.: $S_1 = Ar, S_2 = Bq, S_3 = Cr$. Тогда: $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3(\omega) \oplus \mathbb{R}^3(e) = \mathbb{R}^3(p, q, r) \oplus \mathbb{R}^3(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbb{R}^3(S_1, S_2, S_3) \oplus \mathbb{R}^3(R_1, R_2, R_3)$, где $\alpha = R_1, \beta = R_2, \gamma = R_3$.
Заддим скобку пуасс. на \mathbb{R}^6 так:

$$\{S_i, S_j\} = \epsilon_{ijk} S_k; \{R_i, S_j\} = \epsilon_{ijk} R_k; \{R_i, R_j\} = 0,$$

где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ и $\epsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$.

Эта скобка пуассона на \mathbb{R}^6 вырожд. (имеет $\neq 0$ ядро).
• Более общие уравн. Э.-П. имеют вид:
$$\begin{cases} I\dot{\omega} = [I\omega, \omega] + [e, \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial e}] \\ \dot{e} = [e, \omega] \end{cases}$$
 где $\mathcal{U}(e) = \mathcal{U}(\alpha, \beta, \gamma)$ - потенциал, гадк. ф-я от e.

• Теор. Рассм. $\mathbb{R}^6(S, R)$ с указанной скобк. пуассона и ф-ю (гамильтониан) $H = \frac{S_1^2}{A} + \frac{S_2^2}{B} + \frac{S_3^2}{C} + \mathcal{U}(R_1, R_2, R_3)$. Тогда ур-я Э.-П. запишутся в виде:
$$\dot{S}_i = \{S_i, H\} \text{ и } \dot{R}_i = \{R_i, H\} \text{ или: } \begin{cases} \dot{S} = \left[\frac{\partial H}{\partial S}, S \right] + \left[\frac{\partial H}{\partial R}, R \right], \\ \dot{R} = \left[\frac{\partial H}{\partial S}, R \right]. \end{cases}$$
 здесь $\{, \}$ - скобка пуасс. в $\mathbb{R}^6(S, R)$.

• Д-во - прямые валици. Опускаю. См. книгу Болсимова-Фоменко т. 2, с. 192-194.
• Итак, ур-я Э.-П. запишутся в Пуассоновом виде. Еще раз: эта скобка пуасс. вырожд. на \mathbb{R}^6 , потому симп. структ. на \mathbb{R}^6 не задает.
• $\mathbb{R}^6(S, R)$ изоморф. алт. Ли $so(3) + \mathbb{R}^3$ (полупрям. сумма).


• Вернемся снова к координатам $(p, q, r, \alpha, \beta, \gamma)$. Тогда:

$$H = \langle I\omega, \omega \rangle + 2mg \langle \rho_{ц.масс}, e \rangle =$$

$$= A\rho^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2mg(x_0\alpha + y_0\beta + z_0\gamma).$$

• Утвер. Ур-я Э.-п. на $\mathbb{R}^6(\omega, e)$ всегда имеют два независ. интеграла: $f_1 = \langle e, e \rangle = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, (геометрич. интеграл)
 $f_2 = \langle I\omega, \omega \rangle = A\rho\alpha + Bq\beta + Cr\gamma$ (интеграл площадей)
 Т.е. $f_1 = c = const$ и $f_2 = g = const$ вдоль потока $\psi_{Э.п.}$.

• Д-во. прямые вычисления. Геометрический интеграл f_1 очевиден, т.к. $\forall r \in \mathbb{R}^3$ единичн. т.е. $\langle e, e \rangle = 1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

• Рассм. в \mathbb{R}^6 совместн. 4-поверхн. уровня: $f_1 = c, f_2 = g$; пусть $M_{c,g}^4 \subset \mathbb{R}^6$. Рассм. также c и g , что $M_{c,g}^4$ - регуляр. подмн. в \mathbb{R}^6 . Возникает слоение  $\leftarrow M_{c,g}^4$

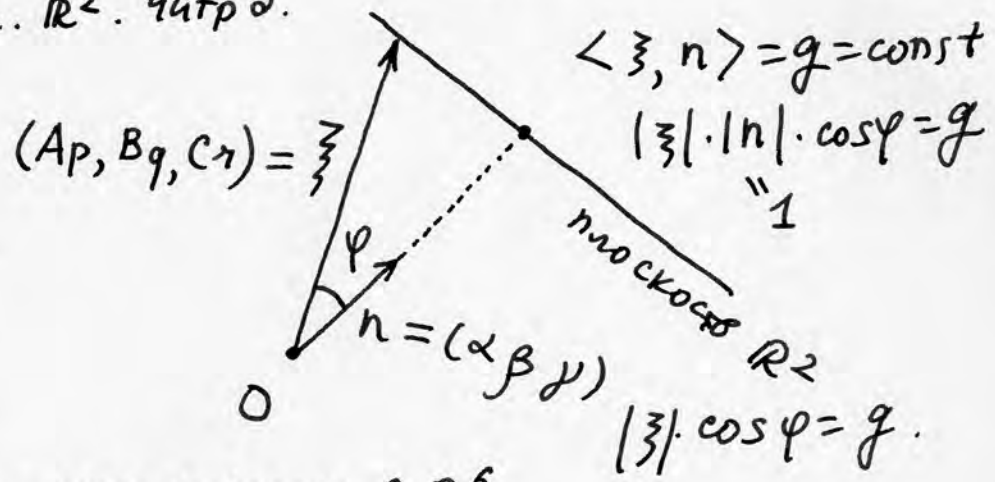
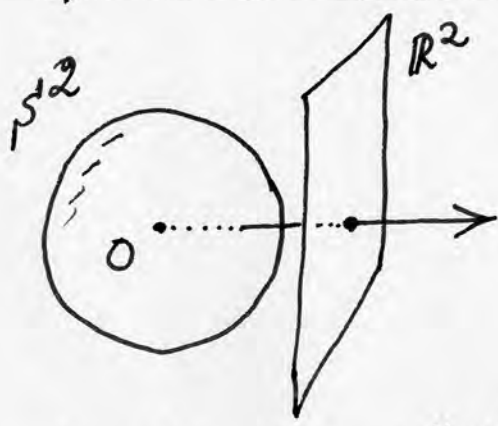
• Утв. Если $M_{c,g}^4$ - регулярно, то оно диффеоморфно $T^*\mathbb{S}^2$, т.е. касат. рассч. к сфере \mathbb{S}^2 .

Д-во. $M_{c,g}^4 = (f_1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = c; f_2 = \langle I\omega, \omega \rangle = g = const)$.

Ур-е: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = const$ - это сфера \mathbb{S}^2 в $\mathbb{R}^3(\alpha, \beta, \gamma)$; а

ур-е: $A\rho\alpha + Bq\beta + Cr\gamma = const$ - это двум. плоскость в $\mathbb{R}^3(p, q, r)$.

При фиксир. α, β, γ решение - это (p, q, r) , т.е. ковектор, пробегает \mathbb{R}^2 . Читр д.



4-поверхности $T^*\mathbb{S}^2$ - некомпактны в \mathbb{R}^6 .

• Теор. 1) Ограничение скобки Пуасс. (см. выше) с $\mathbb{R}^6(S, R) = \mathbb{R}^6(\omega, e)$ на подмн. $M_{c,g}^4$ дает невырожд. скобку Пуасс., т.е. задает симплект. структ., т.е. $M_{c,g}^4 \cong T^*\mathbb{S}^2$ оказывается симплект. мн. пообр.
 2) Ограничение потока $\psi_{Э.п.}$ на $M_{c,g}^4$ является гамильтон. вект. полем, т.е. $\psi_{Э.п.} = \text{sg} \text{grad} H$, где $\text{sg} \text{grad} \cong$ форме симпл. на $M_{c,g}^4$.

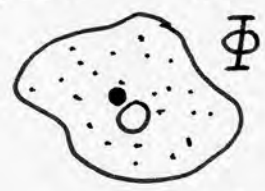
Итак, ур-я Э.-П. динамичн тв. тела в \mathbb{R}^3 оказываются гамильтоновыми на совместн. 4-уровн. геометрич. интеграла f_1 и интеграла площадей f_2 .

- 2-во. - прямое вычисл. См. книгу Болс. Фомен.
- Итак, мы имеем три независ. интеграла: H, f_1, f_2 . Они функц. незав. в общем положении.
- 3-во - прямое вычисление.

• Некоторые классич. случаи интегрируемости.
 Ур-я Э.-П. зависят от параметров: (A, B, C, x_0, y_0, z_0) . Если они произвольны, то система неинтегрируема. Но при некоторых знан. параметров появляется четвертой независ. интеграл f_4 . И тогда система \mathcal{U} Э.П. будет интегрир. по Лиувиллю. Примеры.

Поиск 4-го интеграла - это искусство. Поэтому найденные случаи интегрируемости - "именные", известные.

- Случай Эйлера. Здесь твер. тело закреплено в центре масс, т.е. $\rho_{ц.масс} = 0$, т.е. $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Тогда $H = Ar^2 + Bq^2 + Cl^2$. Ур-я Э.-П. принимают вид:

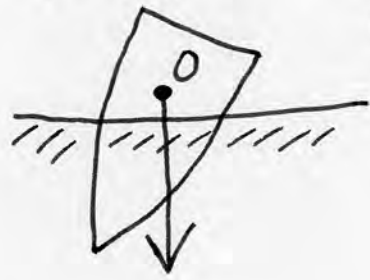


$$\begin{array}{l}
 + Ar \\
 + Bq \\
 + Cl
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 A\dot{r} + (C-B)ql = 0 \\
 B\dot{q} + (A-C)r = 0 \\
 C\dot{l} + (B-A)rq = 0
 \end{array} \right.
 \begin{array}{l}
 \text{Умножим на } Ar, Bq, Cl \text{ и} \\
 \text{сложим три ур-я. Получим:} \\
 (Ar^2 + Bq^2 + Cl^2)' = 0, \text{ т.е.}
 \end{array}$$

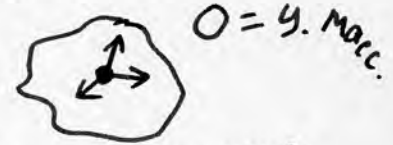
появляется интеграл $f_4 = Ar^2 + Bq^2 + Cl^2 = \langle I\omega, I\omega \rangle = |K|^2 = \text{const}$

Ур-я Пуассона: $\dot{\alpha} = \gamma\beta - q\gamma, \dot{\beta} = p\gamma - r\alpha, \dot{\gamma} = q\alpha - p\beta$. Итак, система \mathcal{U} Э.П. разделилась на ур-я Э. и ур-я Пуасс. Решая ур-я Эйл., получаем $p(t), q(t), r(t)$, затем подставляем в ур-я Пуасс. и находим $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$. Задача: доказать, что f_4 функ. независ. с H, f_1, f_2 , и все они - в инволюции.

- Примеры на "случае Эйлера". • Колебания корабля в океане:

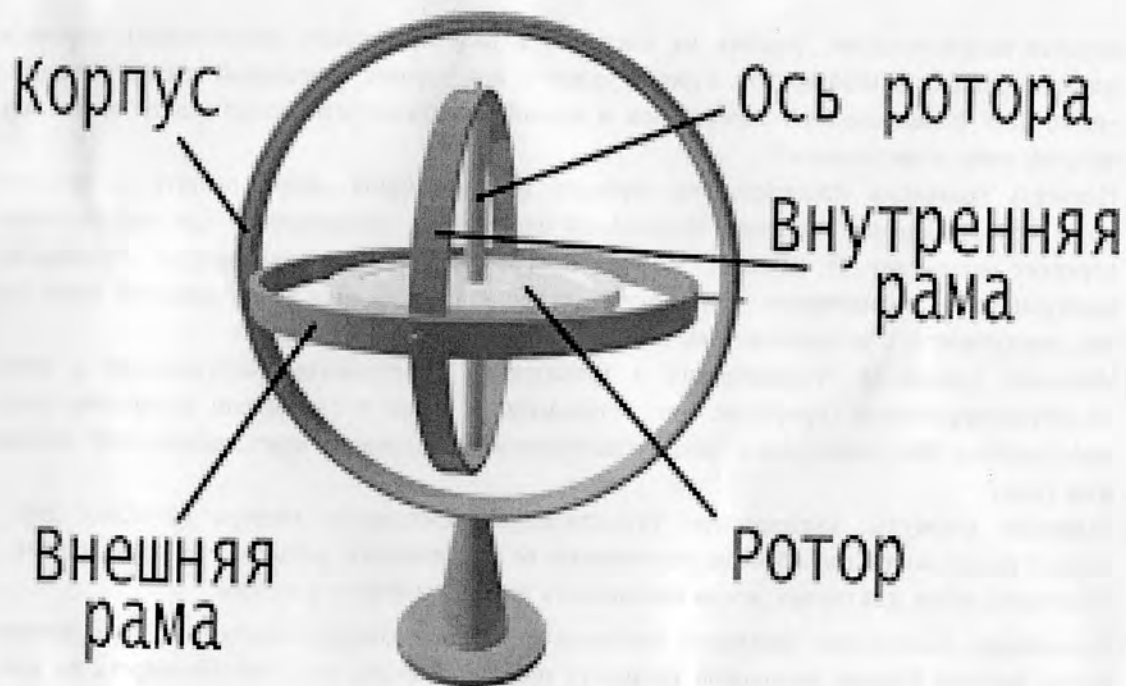


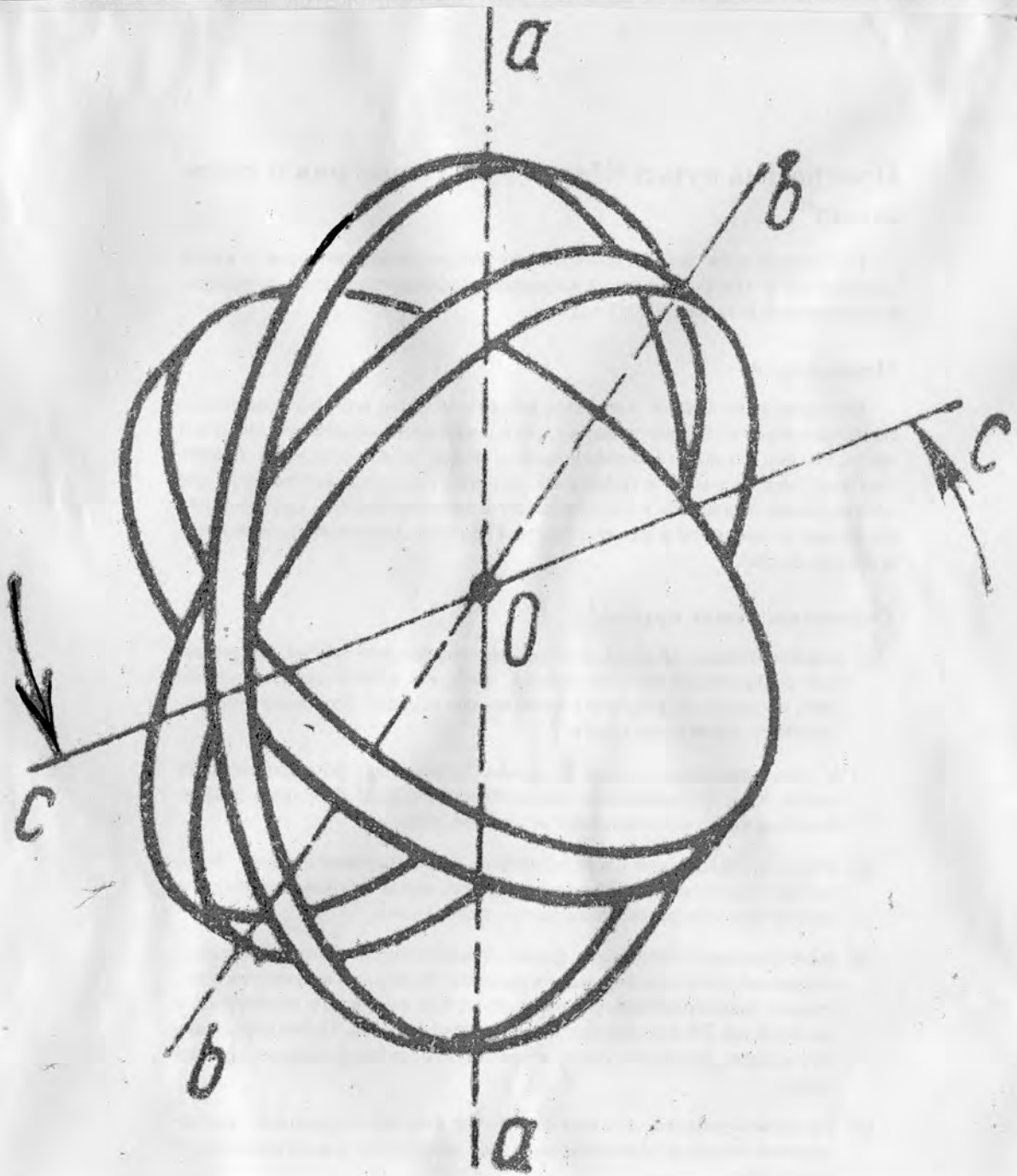
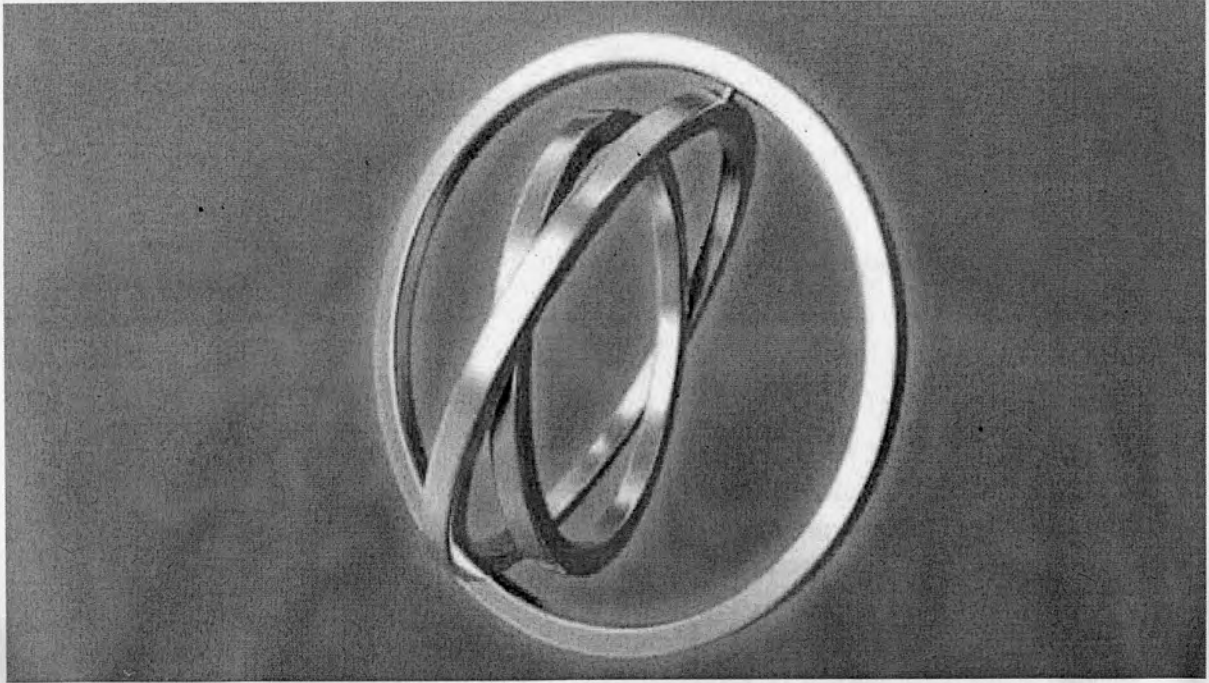
- Полет астероида в \mathbb{R}^3 :
- Карданов подвес и гироскопы. Очень важное приложение.

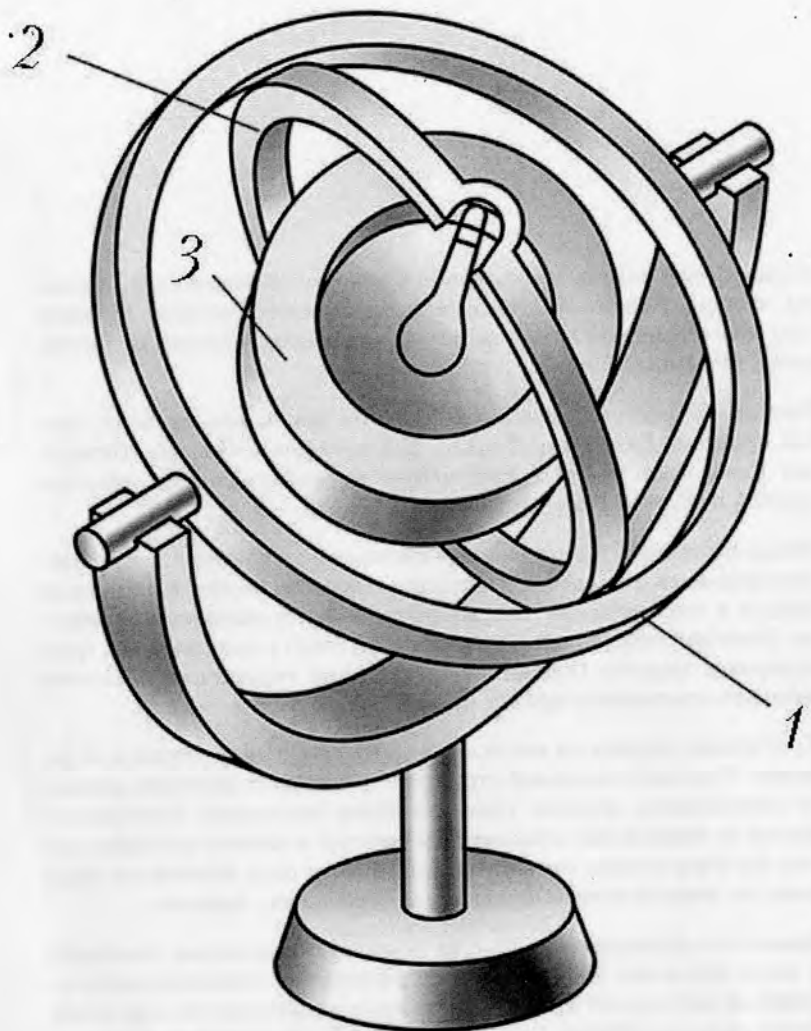


Кардánов подвѣс — универсальная шарнирная опора, позволяющая закреплѣнному в ней объекту вращаться одновременно в нескольких плоскостях. Главным свойством карданова подвеса является то, что если в него закрепить вращающееся тело, то оно будет сохранять направление оси вращения независимо от ориентации самого подвеса. Это свойство нашло применение в гироскопах, применяющихся в авиации и космонавтике. Держатели судовых компасов или просто сосудов с питьѣм в транспортных средствах тоже используют карданов подвес, который позволяет предмету находиться в вертикальном положении несмотря на толчки и тряску.

Подвес получил своё название по имени Джероламо Кардано (1501—1576), который изобрѣл его, он описал это устройство в своей получившей широкую известность книге «De subtilitate rerum» («Хитроумное устройство вещей», 1550 г.).

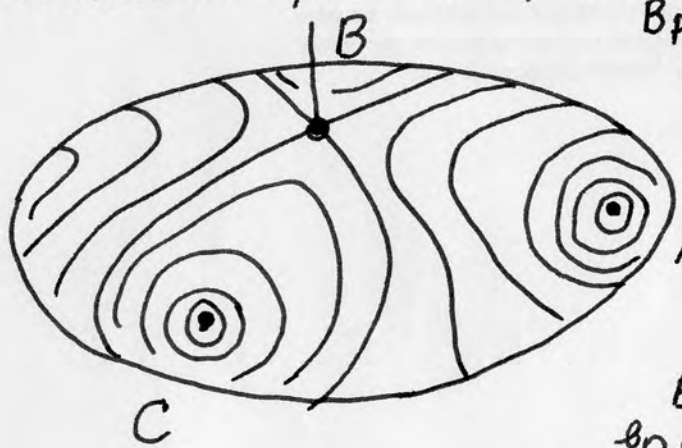






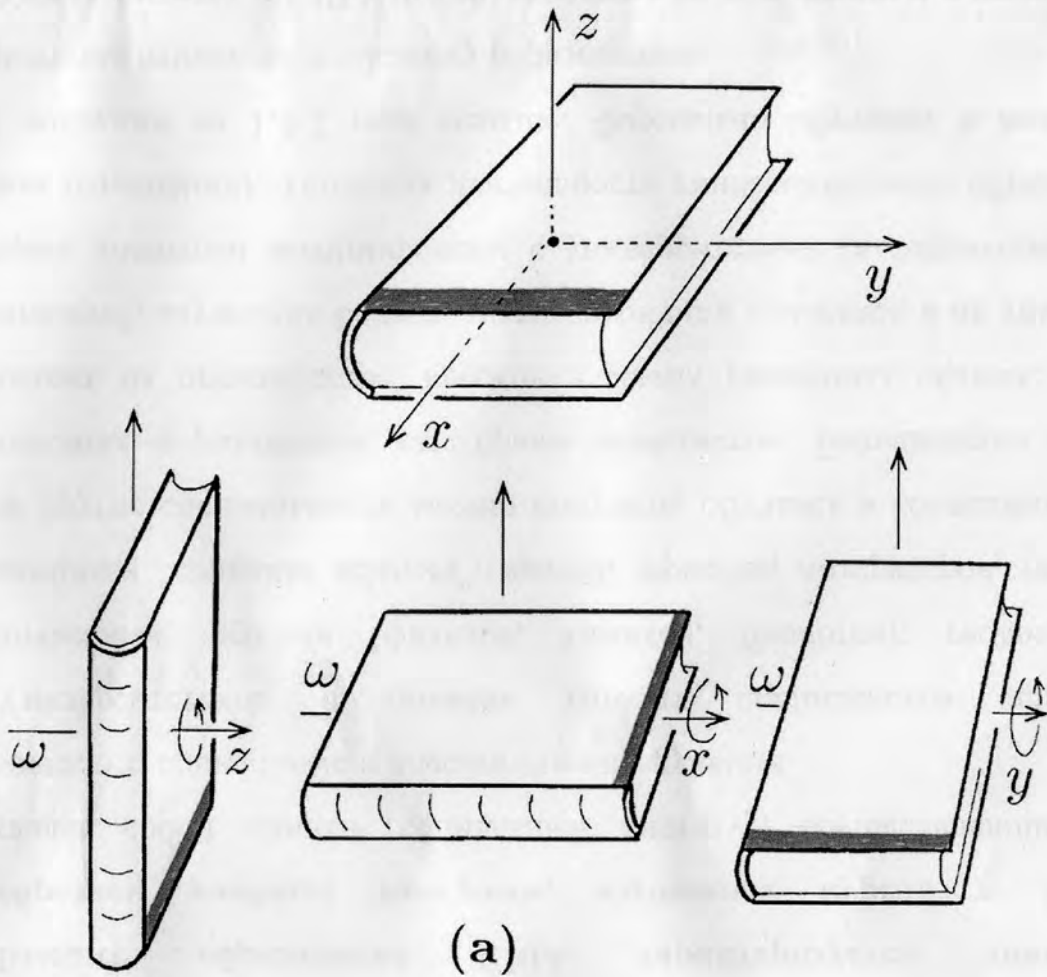
• Комментарий к устойчивости гироскопа в кардан.подвесе.

В $\mathbb{R}^3(p, q, \gamma)$ рассм. два интеграла: H и \mathcal{F}_4 , т.е.
 $H = Ar^2 + Bq^2 + C\gamma^2$, $\mathcal{F}_4 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 \gamma^2$ и их совместные
 линии уровня, т.е. интеграл. траектории ($H = const, \mathcal{F}_4 = const$).
 Эллипсы пересек. со сферами. пусть $A > B > C$.

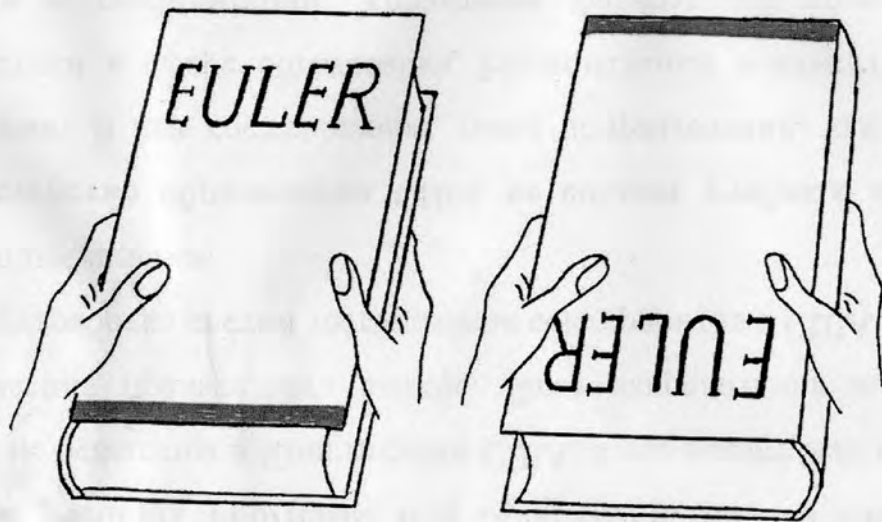


Вращение тв. тела вокруг больш.
 оси A и малой оси C — очевидно
 устойчиво. Вращение вокруг
 средней оси B очевидно
 неустойчиво.
 А гироскоп вращается
 вдоль оси A , поэтому он
 вращение устойчиво.
 Вот еще один комментарий. о
 вращен. тверд. тела вокруг осей
 A, B, C .

В заключение мы покажем, как полученная нами информация о топологии слоения Лиувилля в случае Эйлера позволяет легко объяснить следующий известный механический эксперимент. Возьмем обычную книгу, которую будем сейчас рассматривать как твердое тело. (Вместо книги можно, конечно, взять деревянную плитку в форме книги). Ориентируем ее в горизонтальной плоскости, как показано на рис. 5.28а и подбросим вверх, закрутив книгу вокруг ее горизонтальной оси симметрии, проходящей через центр книги. Затем поймаем книгу и посмотрим, в каком положении она вернулась к нам. Оказывается, результат существенно зависит от того, как именно мы ориентировали книгу перед началом броска. А именно, у книги, очевидно, есть три взаимно перпендикулярных оси симметрии. И мы можем подбросить книгу, закрутив ее вокруг любой из этих осей. Если подбросить книгу, закрутив ее вокруг оси симметрии, отвечающей



(8)



наименьшему моменту инерции, то книга вернется назад в том же положении, какое она занимала до броска. Если книга подброшена и закручена вокруг оси симметрии, отвечающей максимальному моменту инерции, то эффект будет тот же — книга, повернувшись в воздухе несколько раз, вернется в прежнее положение. См. рис. Совсем другая картина возникнет, когда мы подбросим книгу, закрутив ее вокруг оси симметрии, отвечающей среднему моменту инерции. Здесь книга *перевернется*. Более точно, если в начале броска корешок книги был у вас в левой руке, то поймав книгу в воздухе, вы с удивлением обнаружите, что ее корешок оказался в вашей правой руке. См. рис.

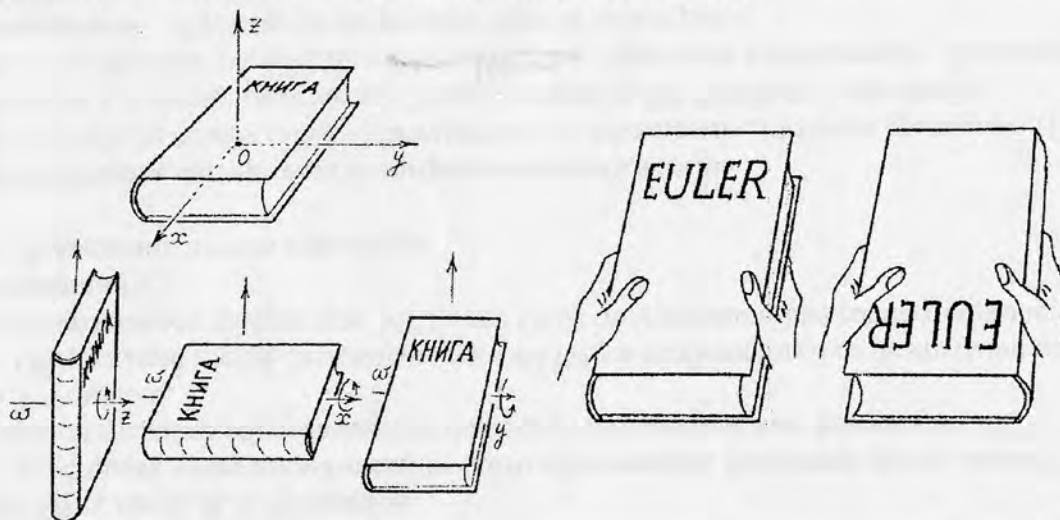


Рис.

Это любопытное обстоятельство теперь легко объяснить. В самом деле, полет книги хорошо моделирует случай Эйлера в динамике тяжелого твердого тела. Достаточно забыть о движении центра масс книги, т. е. рассматривать только ее «чистое вращение» вокруг центра масс. Кроме того, можно считать, что постоянная площадей здесь равняется нулю. Дело в том, что при каждом из трех описанных бросков мы закручиваем книгу вокруг горизонтальной оси, идущей в точности по одному из собственных направлений ее тензора инерции. Следовательно, вектор кинетического момента каждый раз пропорционален вектору угловой скорости. Сила тяжести направлена вертикально вниз, то есть ортогональна угловой скорости и, следовательно, кинетическому моменту книги. Поскольку постоянная площадей получается как скалярное произведение кинетического момента на вектор силы тяжести, следовательно, в данном эксперименте эта постоянная равна нулю. Следовательно, мы попадаем в ситуацию случая Эйлера с нулевой постоянной площадей. Поэтому полет книги можно интерпретировать как движение интегральной траектории динамической системы случая Эйлера по ее изоэнергетической трехмерной поверхности.

• Случай Лагранжа.

Здесь $A=B, x_0=y_0=0, z_0 \neq 0$

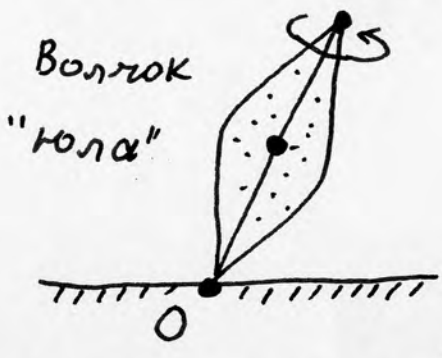
Последнее ур-е Эйлера:

$$C \dot{\gamma} + (B-A) p q = m g (y_0 \alpha - x_0 \beta) \Rightarrow$$

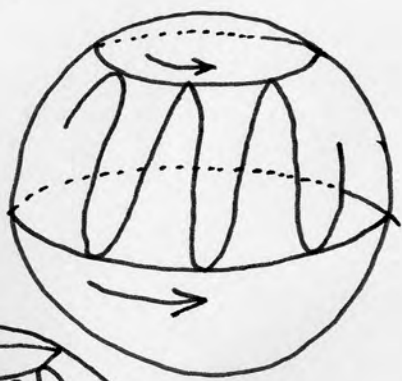
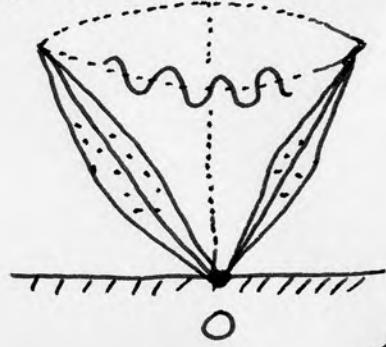
$C \dot{\gamma} = 0$, т.е. $\dot{\gamma} = 0$, т.е. $\gamma = \text{const}$

Это и есть четвертый линейный интеграл.

Движение оси волчка Лагранжа:



прецессия и нутация:



Эта система тоже вполне интегрируема по Лиувиллю.



• Другие случаи интегрируемости:

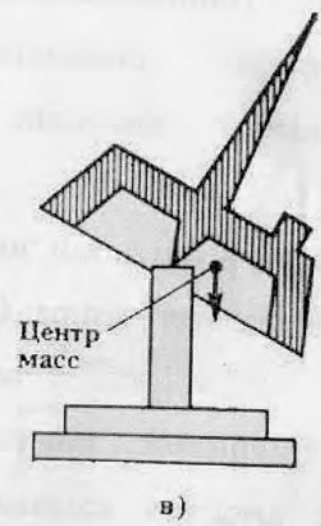
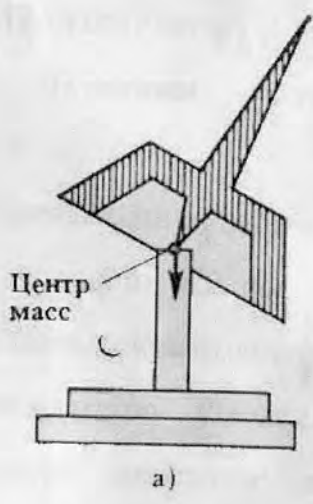


Рис. Модели вращающихся тел, имеющих одну неподвижную точку, предложенные Н. Е. Жуковским: а — случай Л. Эйлера; б — случай Ж. Лагранжа; в — случай С. В. Ковалевской (ЦМ — центр масс).

• Случай С. Ковалевской. Он нетривиален, здесь дополнит. интеграл имеет степень 4. Здесь $A=B=2C, y_0=z_0=0$. Ур-я Эйлера-Пуасс. принимают вид:

$$\begin{cases} 2\dot{p} = qz \\ 2\dot{q} + \kappa p = c\gamma \\ \dot{\alpha} = -c\beta \end{cases} \left. \begin{array}{l} + \\ \text{умнож. на } i \end{array} \right] \text{сложим} \Rightarrow$$

где $c = \text{const} \neq 0$

$$2(p+iq)\dot{} = -i\kappa(p+iq) + i c \gamma$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} = \kappa\beta - q\gamma \\ \dot{\beta} = p\gamma - \kappa\alpha \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} + \\ i \end{array} \right] \text{сложим} \Rightarrow$$

из ур-й Пуассона

$$\begin{cases} 2(p+iq)\dot{} = -i\kappa(p+iq) + i c \gamma \\ (\alpha+i\beta)\dot{} = -i\kappa(\alpha+i\beta) + i\gamma(p+iq) \end{cases} \left. \begin{array}{l} \leftarrow \text{умножим на } (p+iq) \\ \leftarrow \text{умножим на } (-c) \text{ и сложим.} \\ \text{Исключим } \gamma. \end{array} \right]$$

$$((p+iq)^2 - c(\alpha+i\beta))\dot{} = -i\kappa((p+iq)^2 - c(\alpha+i\beta)) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} [\ln((p+iq)^2 - c(\alpha+i\beta))]\dot{} = -i\kappa \\ [\ln((p-iq)^2 - c(\alpha-i\beta))]\dot{} = i\kappa \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{сделаем комплексное} \\ \text{сопряжение и сложим,} \\ \text{т.е. исключим } \kappa: \end{array} \right]$$

Получаем:

$$[\ln((p+iq)^2 - c(\alpha+i\beta)) \cdot ((p-iq)^2 - c(\alpha-i\beta))]\dot{} = 0, \Rightarrow$$

$$((p+iq)^2 - c(\alpha+i\beta)) \cdot ((p-iq)^2 - c(\alpha-i\beta)) = \text{const}; \text{ а т.к.}$$

здесь $s \cdot \bar{s} = \text{const}$, то $|s|^2 = \text{const}$, где

$$s = (p^2 - q^2 - c\alpha) + i(2pq - c\beta), \text{ т.е.}$$

$$|s|^2 = \text{const} \Rightarrow (p^2 - q^2 - c\alpha)^2 + (2pq - c\beta)^2 = \text{const},$$

т.е. мы нашли интеграл Ковалевской степени 4.

• Теорема (Болсинов, Фоменко). Степень 4 интеграла Ковалевской понизить нельзя, т.е. у этой системы нет дополнительных интегралов степени < 4 . (см. книгу Болс. Фом.)

Классическая постановка бильярдной задачи.

Пусть область Ω на плоскости \mathbb{R}^2 такова, что граница области является кусочно-гладкой кривой, причем в точках излома этой кривой углы равны $\frac{\pi}{2}$. Рассмотрим динамическую систему, описывающую движение (материальной) точки внутри области Ω с естественным отражением на границе $P = \partial\Omega$. Эту систему назовём “бильярдом в области”. Будем считать, что в точках, где граница P не гладкая (тогда, как было сказано выше, угол излома обязательно равен $\frac{\pi}{2}$) траектории системы можно доопределить по непрерывности: а именно, попав в вершину угла границы, материальная точка, не теряя скорости, отразится назад по той же траектории. Таким образом, с формальной точки зрения фазовым пространством системы является многообразие

$$M^4 := \{(x, v) \mid x \in \Omega, v \in T_x \mathbb{R}^2, |v| > 0\} / \sim$$

где отношение эквивалентности в регулярных точках граничной задаётся так

$$(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \in P, \quad |v_1| = |v_2| \quad \text{и} \quad v_1 - v_2 \perp T_{x_1} P.$$

Здесь через $T_x P$ обозначена касательная прямая к области Ω в точке x , а через $|v|$ – евклидова длина вектора v .

Если точка x является вершиной угла, то по непрерывности потребуем чтобы $v_1 = -v_2$ (как было сказано выше).

Это отношение эквивалентности иногда будем называть бильярдным законом.

Эллиптико-гиперболический бильярд.

Пусть область бильярда Ω ограничена дугами софокусных эллипсов и гипербол.

Определение Фиксируем систему координат (x, y) . Определим софокусные квадрики как квадрики семейства

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 1 \quad \lambda \in (-\infty, b) \cup (b, a)$$

и полученные из них “предельным переходом”, точнее квадрики семейства

$$(b-\lambda)x^2 + (a-\lambda)y^2 = (a-\lambda)(b-\lambda), \lambda \leq a. \quad (1.1)$$

Здесь $\infty \geq a \geq b > 0$ — фиксированная пара чисел (определяющая семейство софокусных квадратик), λ — параметр семейства (определяющий квадратик семейства).

см. рис. 1*

В классическом случае ($\infty > a > b$) при $\lambda \neq a$ или b это эллипсы или гиперболы. При $\lambda = b$ эта квадратика является парой совпадающих прямых $y = 0$, и как множество совпадает с горизонтальной осью. Далее будем также называть ее фокальной прямой, отрезок между фокусами вырожденными эллипсом, а выходящие из фокусов непересекающиеся лучи — вырожденной гиперболой. Вырожденные эллипс и гиперболы можно определить как поточечные пределы эллипсов и гипербол софокусного семейства соответственно, близких к $\lambda = b$.

Параметру $\lambda = a$ соответствует вырожденная квадратика, точки которой составляют вертикальную ось. Заметим, что для компактной бильярдной области (стола) отрезок этой прямой, попадающий в область Ω , является поточечным пределом попадающих в него дуг ветвей невырожденных гипербол. Будем называть соответствующую уровню $\lambda = a$ кривую гиперболой (а не вырожденной квадратикой) для упрощения изложения.

При $\infty = a > b$ софокусные квадратика являются софокусными парабололами.

Под осями семейства квадратик в дальнейшем будем понимать координатные оси Ox и Oy . При $a = b$ квадратика вырождаются в концентрические окружности и ортогональные им радиальные прямые.

Нетрудно показать, что софокусные квадратика ортогональны друг другу.

Замечание В дальнейших рассуждениях эллипсы и гиперболы предполагаются софокусными квадратиками семейства (1.1) (причем $\infty > a > b$), если не оговорено иного. В случае рассмотрения круговых бильярдных ($0 < a = b < \infty$) мы особо отметим это.

Определение Пусть дана компактная область в плоскости, ограниченная дугами софокусных квадратик, все углы которой в точках излома границы равны $\frac{\pi}{2}$. В этом случае граница области является либо простой замкнутой кривой, либо несвязным объединением двух эллипсов. Дуги квадратик, концами которых служат углы области, назовем *сегментами квадратик*, ограничивающих данную область (или сегментами границы данной области).

В нашей работе мы не рассматриваем бильярды с “внутренними стенками”. Т.е. мы считаем, что у каждой граничной точки любая достаточно малая окрестность разбивается на две части — внутреннюю и внешнюю.

Легко понять, что сегменты принадлежат к одному из четырёх типов: эллипс, дуга невырожденной гиперболы, заключённая между двумя эллипсами, дуга невырожденного эллипса, заключённая между двумя гиперболами, отрезок фокальной прямой.

Теорема (Якоби, Шаль) *Касательные прямые к геодезической линии на квадратике в n-мерном евклидовом пространстве, проведенные во всех точках геодезической, касаются кроме этой квадратика еще n - 2 конфокальных с ней квадратик, одних и тех же для всех точек данной геодезической.*

см. рис. 2*, рис. 3*, рис. 4*

Софокусные эллипсы и гиперболы

Семейство квадрик с параметром λ

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(b - \lambda), 0 < b < a$$

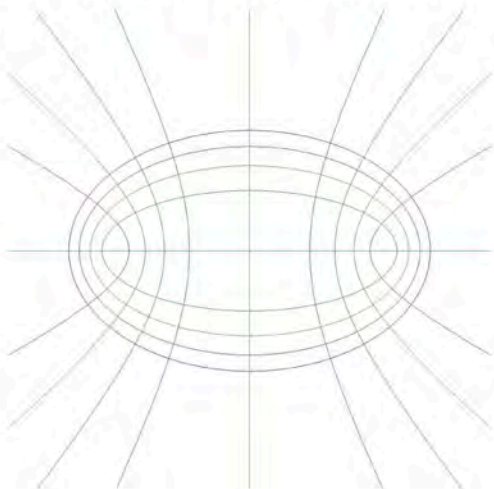
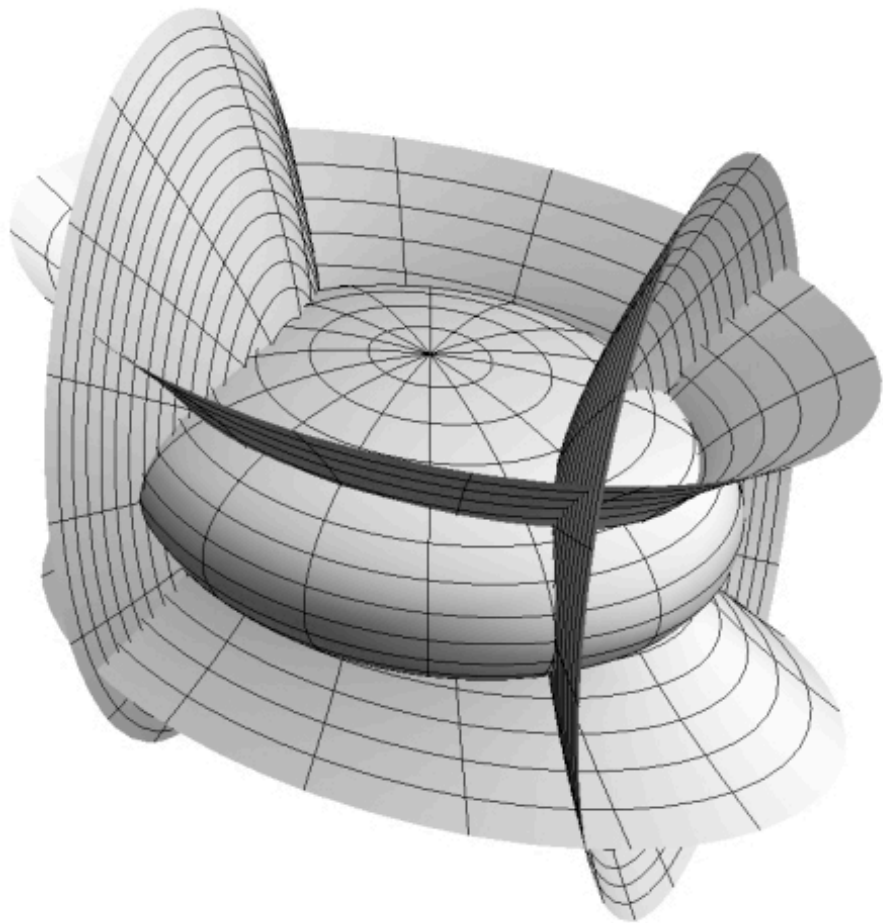


Рис.1*

Теорема (Якоби, Шаль)

Касательные прямые к геодезической линии на квадрике в n -мерном евклидовом пространстве, проведенные во всех точках геодезической, касаются кроме этой квадрики, еще $n - 2$ конфокальных с ней квадрик, одних и тех же для всех точек данной геодезической.

Рис.2*



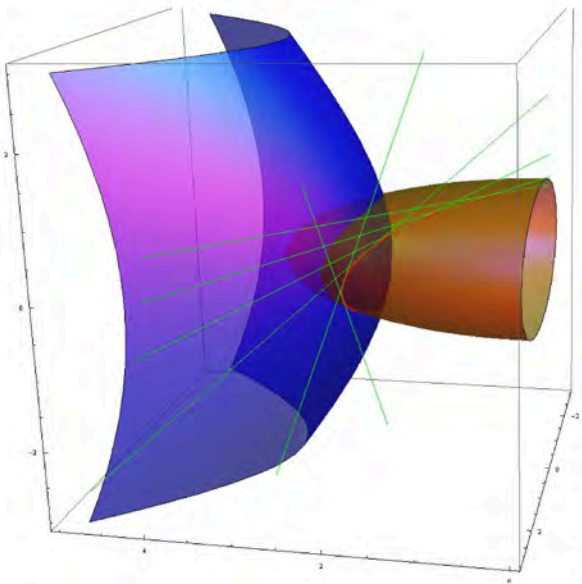


Рис.3*

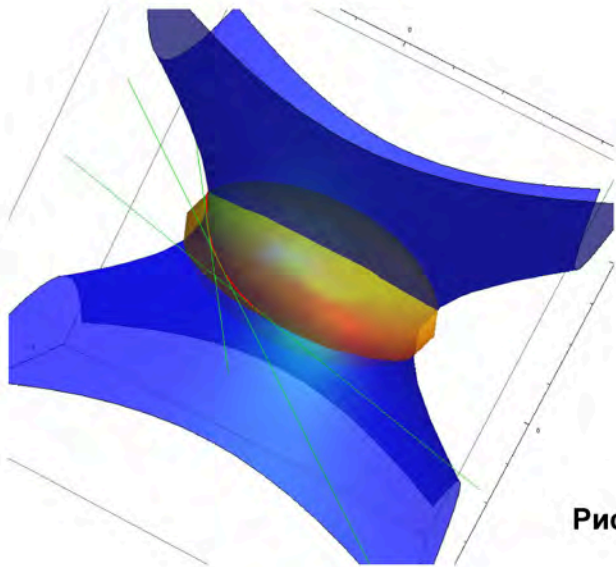


Рис.4*

Рассмотрим геодезический поток трехосного эллипсоида. Он интегрируем. Касательные прямые к фиксированной геодезической являются касательными к некоторому гиперболоиду, конфокальному с данным трехосным эллипсоидом. Дж.Д. Биркгоф заметил, что если устремить малую полуось эллипсоида к нулю, то геодезические на нём перейдут в билиардные траектории—ломанные внутри эллипса. Интегрируемость сохранится. А именно, касательные в любой точке билиардной траектории внутри эллипса касаются эллипса или гиперболы, софокусных с этим эллипсом. Далее, было замечено, что в если в качестве плоского билиарда рассмотреть область, ограниченную дугами софокусных эллипсов и гипербол, то интегрируемость сохранится. А именно, звенья любой билиардной траектории в области Ω лежат на прямых, касательных к некоторой квадратике, софокусной с семейством квадратик, образующих границу P области Ω .

Рассмотрим функции $|v|^2$ — квадрат модуля вектора скорости — и Λ — значение параметра λ софокусной квадратике—каустики, которой касается данная траектория или её продолжения.

Предложение Пусть прямая с направляющим вектором (v_1, v_2) проходит через точку с координатами (x, y) . Тогда параметр софокусной квадратике семейства (1.1), которой касается данная прямая, равен

$$\lambda = \frac{bv_1^2 + av_2^2 - (v_2x - v_1y)^2}{v_1^2 + v_2^2}. \quad (*)$$

Доказательство. Множество точек прямой с направляющим вектором (v_1, v_2) , проходящей через точку с координатами (x, y) , можно параметризовать параметром t следующим образом $(x + tv_1, y + tv_2)$. Напомним, что квадратика семейства (1.1) описывается соотношением

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(a - \lambda).$$

Если прямая имеет с этой квадратикой ровно одну точку пересечения, то подставляя координаты точки прямой в это соотношение получаем уравнение, которое имеет ровно одно решение относительно t :

$$(b - \lambda)(x + tv_1)^2 + (a - \lambda)(y + tv_2)^2 = (a - \lambda)(a - \lambda).$$

Перепишем это уравнение сгруппировав степени t :

$$t^2 ((b - \lambda)v_1^2 + (a - \lambda)v_2^2) + 2t ((b - \lambda)xv_1 + (a - \lambda)yv_2) + x^2(b - \lambda) + y^2(a - \lambda) - (a - \lambda)(b - \lambda) = 0. \quad (**)$$

Рассмотрим отдельно случай, при котором данное уравнение не является квадратным. Тогда

$$(b - \lambda)v_1^2 + (a - \lambda)v_2^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{bv_1^2 + av_2^2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

см.
рис. 5 *
рис. 6 *

Биллиард в эллипсе интегрируем:

Звенья траектории лежат на прямых, касательных к некоторому эллипсу

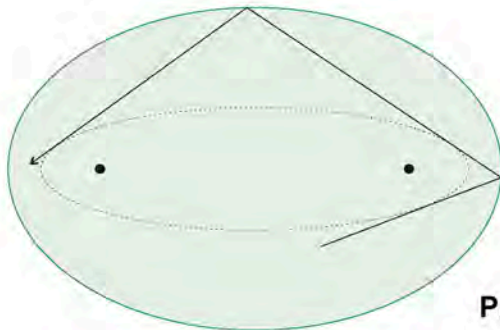


Рис.5*

или к некоторой гиперболе, софокусных с граничным эллипсом.

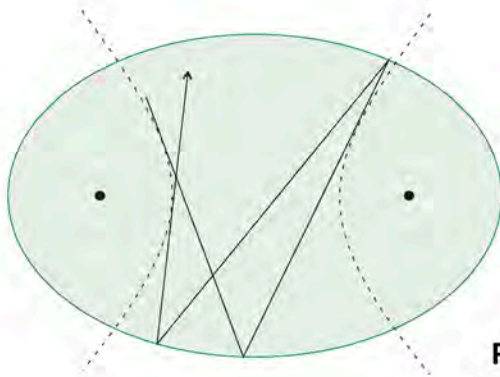


Рис.6*

В этом случае легко видеть, что $\lambda > b$ (т.е. эта квадратика — гипербола) и $\frac{v_1}{v_2} = \pm \frac{\sqrt{a-\lambda}}{\sqrt{\lambda-b}}$. Такое соотношение означает, что вектор (v_1, v_2) коллинеарен направляющему вектору асимптоты гиперболы, который задаются уравнением

$$\frac{x}{\sqrt{a-\lambda}} \pm \frac{y}{\sqrt{\lambda-b}} = 0.$$

В этом случае прямая и квадратика, конечно имеют одну общую точку, однако в этой точке они пересекаются трансверсально. Для касания (на бесконечности) необходимо чтобы прямая $(x+tv_1, y+tv_2)$ являлась асимптотой. Это означает что вектора (v_1, v_2) и (x, y) коллинеарны, т.е. $xv_2 - yv_1 = 0$. В результате формула (*) в случае, если уравнение (**) не квадратное, доказана.

Далее, пусть квадратное уравнение (**) имеет один корень, то получаем следующее соотношение на λ :

$$\begin{aligned} & ((b-\lambda)xv_1 + (a-\lambda)yv_2)^2 - ((b-\lambda)v_1^2 + (a-\lambda)v_2^2)(x^2(b-\lambda) + y^2(a-\lambda) - (a-\lambda)(b-\lambda)) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (b-\lambda)^2x^2v_1^2 + 2(a-\lambda)(b-\lambda)xyv_1v_2 + (a-\lambda)^2y^2v_2^2 - (b-\lambda)^2x^2v_1^2 - (a-\lambda)(b-\lambda)x^2v_2^2 - \\ & \quad - (a-\lambda)(b-\lambda)y^2v_1^2 - (a-\lambda)^2y^2v_2^2 + (a-\lambda)(b-\lambda)^2v_1^2 + (a-\lambda)^2(b-\lambda)v_2^2 = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 2(a-\lambda)(b-\lambda)xyv_1v_2 - (a-\lambda)(b-\lambda)x^2v_2^2 - (a-\lambda)(b-\lambda)y^2v_1^2 + (a-\lambda)(b-\lambda)^2v_1^2 + (a-\lambda)^2(b-\lambda)v_2^2 = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (a-\lambda)(b-\lambda)(2xyv_1v_2 - x^2v_2^2 - y^2v_1^2 + (b-\lambda)v_1^2 + (a-\lambda)v_2^2) = 0. \end{aligned}$$

Возникающие тривиальные решения $\lambda = a$ и $\lambda = b$, соответствующие координатным осям, всегда появляются в случае общего положения (так как любая не параллельная координатной оси прямая пересекает её в одной точке). Таким образом, выражая λ из последней скобки, получаем $\lambda = \frac{bv_1^2 + av_2^2 - (v_2x - v_1y)^2}{v_1^2 + v_2^2}$. □

Рассмотрим на открытой области $\Omega_0 = \Omega \setminus \partial\Omega$ — внутренности билиардной области Ω — следующие две функции $|v|^2$ и Λ . На области Ω_0 функции $|v|^2$ и Λ гладкие. Относительно стандартной симплектической структуры на плоской области Ω_0 функции $|v|^2$ и Λ коммутируют. Отметим, что на границе области Ω эта симплектическая структура не определена. Таким образом, данная “билиардная” система обладает двумя независимыми на Ω_0 интегралами:

1. $v_1^2 + v_2^2$ — квадрат модуля вектора скорости,
2. $\Lambda = \frac{bv_1^2 + av_2^2 - (v_2x - v_1y)^2}{v_1^2 + v_2^2}$ — параметр софокусной квадратки.



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА