

ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ И СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ФОМЕНКО
АНАТОЛИЙ ТИМОФЕЕВИЧ

—
МЕХМАТ МГУ



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

Академик А.Т.Фоменко
ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ И СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ
Спецкурс для студентов 1-3 курсов

Осенний семестр:

ВВЕДЕНИЕ

Кривые на плоскости и в пространстве. Узлы в трехмерном пространстве.

Тема 1. ДВУМЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Двумерные поверхности в евклидовом пространстве. Погружения и вложения двумерных поверхностей в евклидово пространство. Диффеоморфизмы и гомеоморфизмы. Теорема классификации двумерных поверхностей. Две серии поверхностей. Поверхности с краем и без края. Связная сумма. Ориентируемость и неориентируемость 2-поверхностей. Топологические свойства проективной плоскости, бутылки Клейна. Поверхность Боя как модель проективного пространства.

Тема 2. МНОГОМЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ (МНОГООБРАЗИЯ).

Определение многомерного гладкого многообразия как поверхности в евклидовом пространстве. Абстрактное определение гладкого многообразия (при помощи локальных карт и атласа). Ориентируемость и неориентируемость. Теоремы Уитни и вложения и погружении гладких многообразий в евклидово пространство. (Лемма Сарда). Примеры трехмерных многообразий. Разложение трехмерной сферы в сумму двух полноторий. Расслоение Хопфа. Многомерные проективные пространства как гладкие многообразия. Основные матричные группы как гладкие многообразия.

Тема 3. КЛЕТОЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА (КОМПЛЕКСЫ)

Симплициальные пространства. Триангуляции и клетки. Характеристические отображения. Основные примеры. Гомотопия, гомотопическая эквивалентность. Изотопия. Накрытия клеточных пространств. Степень отображения гладких многообразий. Регулярные и критические значения. Теорема о степени отображения. Примеры вычисления степени. Гладкие накрытия и степень отображения. Фундаментальная группа. Примеры ее вычисления. Фундаментальная группа клеточного комплекса. Накрытия и фундаментальная группа. Теорема о накрывающей гомотопии. Регулярные накрытия. Универсальные накрытия. Теорема ван Кампена. Ее применение для вычисления фундаментальных групп. Разветвленные накрытия. Римановы поверхности алгебраических функций в двумерном комплексном пространстве и их связь с накрытиями и с двумерными гладкими многообразиями.

Тема 4. ГОМОЛОГИИ

Симплициальные гомологии. Клеточные гомологии. Теорема об их совпадении для "хороших пространств". Эйлерова характеристика. Основные свойства групп гомологий (гомотопическая инвариантность и т.п.). Примеры вычисления гомологий. Точная гомологическая последовательность пары.

Тема 5. ТЕОРИЯ МОРСА

Невырожденные критические точки, их индекс. Лемма Морса. Теорема об основных свойствах функций Морса на многообразиях. Перестройки поверхностей уровня функций Морса. Ручки, операция приклейки ручек. Основная теорема теории Морса (связь между клеточной структурой многообразия и критическими точками функции). Неравенства Морса. Простые и сложные функции Морса. Понятие атома. Простые и сложные атомы. Молекулы и функции Морса. Теорема о послойной классификации функций Морса на двумерных поверхностях. Описание атомов малой сложности и простейших молекул. Категория Люстерника-Шнирельмана. Точки бифуркаций функций на многообразиях. Теорема Люстерника-Шнирельмана (связь между категорией и числом точек бифуркации функции) Примеры подсчета категории простых пространств.

Весенний семестр

Тема 6. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ГРУППАХ ЛИ И АЛГЕБРАХ ЛИ

Основные матричные группы как гладкие многообразия и как группы Ли. Алгебра Ли и ее связь с группой Ли. Экспоненциальное отображение. Пример, когда экспоненциальное отображение не покрывает всю группу Ли. Матричные группы малых размерностей и некоторые изоморфизмы между ними.

Тема 7. СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ Линейная симплектическая структура. Изотропность, лагранжевость. Матричная группа симплектических преобразований.

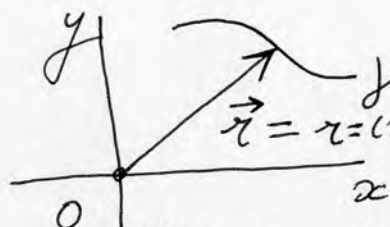
Тема 8. СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Гладкая симплектическая структура на многообразии. Теорема Дарбу. Канонические симплектические координаты. Пример: двумерные поверхности как симплектические многообразия. Другие примеры симплектических многообразий (касательные расслоения и т.п.). Косой градиент и гамильтоновы векторные поля. Локально гамильтоновы и глобально гамильтоновы поля. Связь с потенциальными векторными полями. Лемма Пуанкаре. Гамильтоновы поля на двумерных поверхностях. Несжимаемые потоки идеальной жидкости. Комплексные потенциалы. Примеры несжимаемых потоков на плоскости и сфере. Скобка Пуассона и ее основные свойства. Тождество Якоби для скобки Пуассона замкнутость симплектической структуры. Скобка Пуассона и векторные поля на симплектическом многообразии.

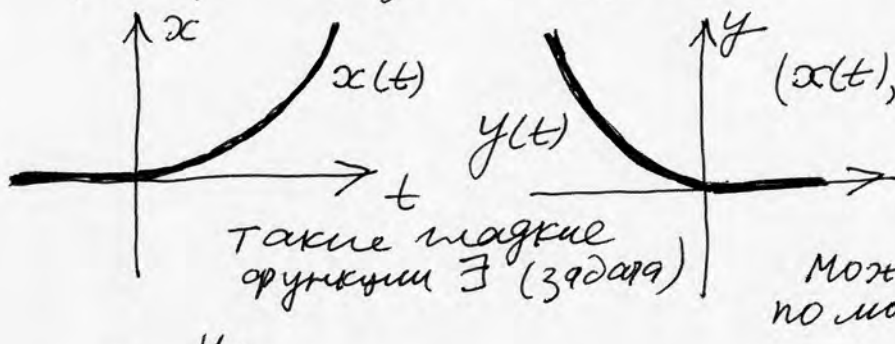
Тема 9. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Интегралы гамильтоновых полей. Инволютивность. Теорема Лиувилля. Полная интегрируемость по Лиувиллю. Отображение момента интегрируемой системы. Бифуркации торов Лиувилля и топология интегрируемой системы. Уравнения движения тяжелого твердого тела в трехмерном пространстве (уравнения Эйлера-Пуассона). Некоторые известные случаи интегрируемости: случаи Эйлера, Лагранжа, Ковалевской.

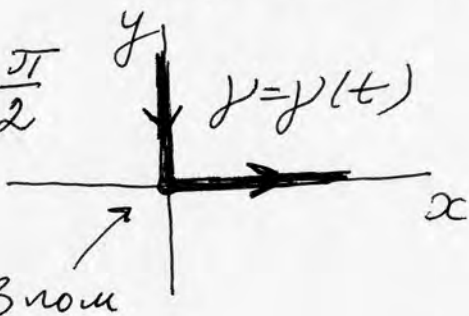
- Этот курс - дополнение к обязатель. курсу "Дифф. геом. и топология" (на 2, 3 курсах).
- Понятие поверхности (многообразия) $M^k \subset \mathbb{R}^n$.
- Шаг 1. Кривые на плоскости \mathbb{R}^2 . Гладкая кривая.

 $\vec{r} = r = (x(t), y(t))$, где $a \leq t \leq b$, а функции $x(t)$ и $y(t)$ - гладкие, $\in C^\infty$.

Однако такая кривая может иметь излом.
Пример "гладкого излома".

 $(x(t), y(t)) = r(t) = \gamma(t)$
такая кривая имеет излом (см.)
Можно сгладить с $-\frac{1}{x^2}$ по помощи функции e^{-x^2} .

Такие гладкие функции \exists (заданы)

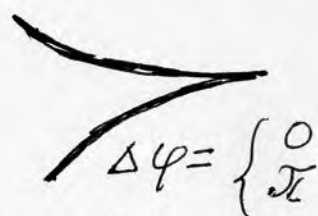
$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$
 $y = \gamma(t)$
излом

Здесь - "поворот" на $\pi/2$.

- Задача. Построить пример аналитич. кривой $r(t)$ с "кловом", т.е.

$(x(t)$ и $y(t)$ - аналит. ф-ции) \rightarrow

- Задача. может ли аналит. кривая иметь излом с $\Delta\varphi \neq 0$ или π ?
Например, "повернуть" на $\pi/2$?


 $\Delta\varphi = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$

Ответ: Нет. Доказать.

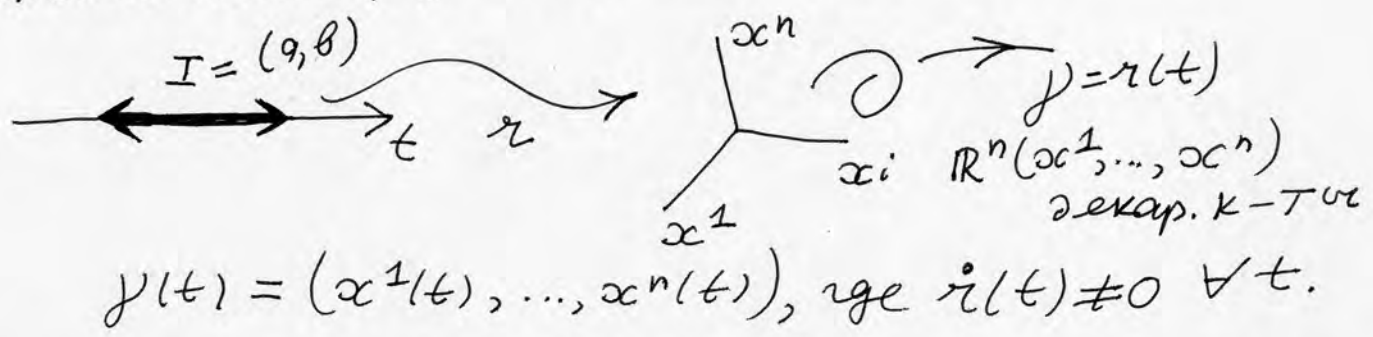
- Задача. Гладкая кривая с изломом $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ (см. выше) очевидно не аналитическая.
- Итак, в чем дело? Почему излом?

Пусть $\dot{r} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = v$ - касател. в-р к кривой γ .

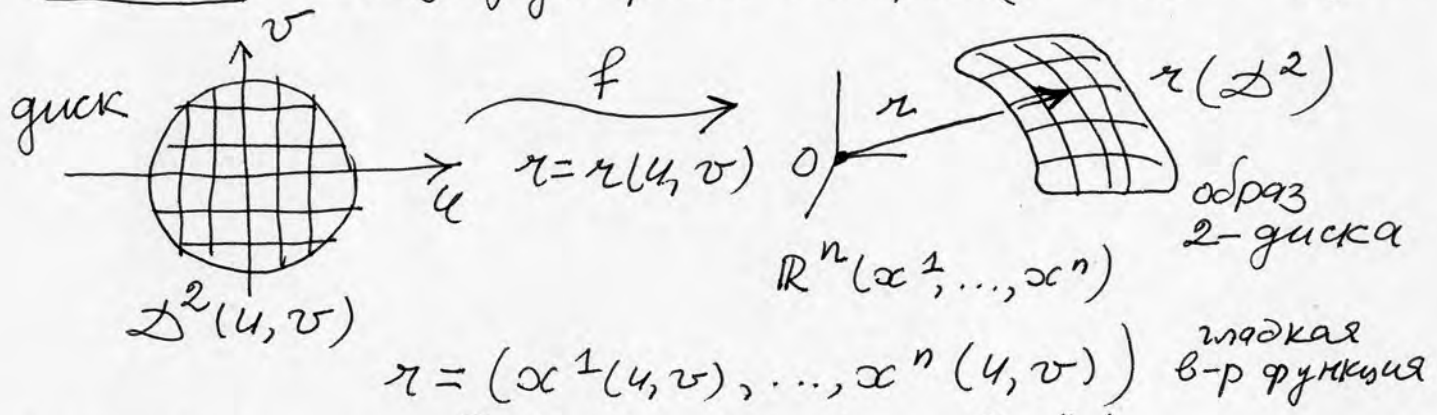
 $v = \dot{r}$

В примере выше  в точке 0 $v \dot{r} = 0$, и в это мгновение кривая резко повернула.

- Отсюда видно: нужно запретить $\dot{r}(t_0) = 0$. И так:
- Определ. Гладкая кривая назыв. регулярной, если $\dot{r}(t) \neq 0 \forall t$.
- По теор. о неявной функции \Rightarrow на такой кривой нет узлов. В v скорости (касат. в-р) поворачивается плавно.
- В дальнейшем считаем глад. кривые — регулярными.
- Аналогичное определение для кривой в \mathbb{R}^n .

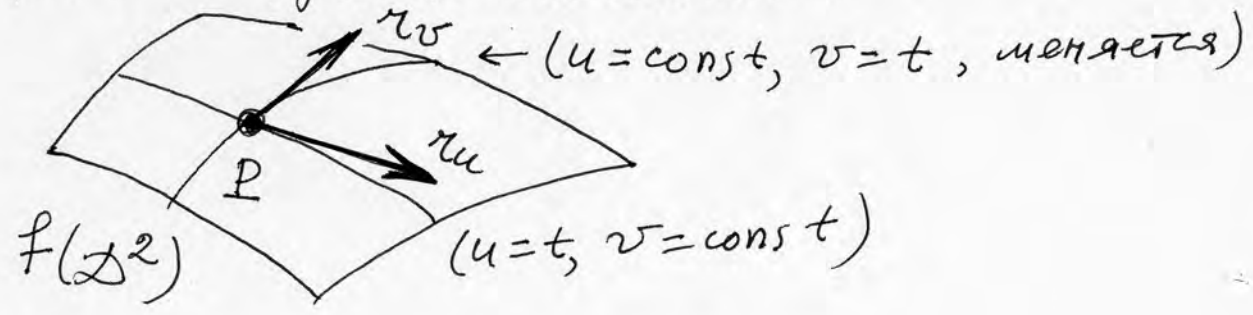


Шаг 2. Глад. двумерные поверхн. (2-многообр.) в \mathbb{R}^n .



Рассм. в-ры: $r_u = \frac{\partial r(u, v)}{\partial u} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial u} \right)$ и $r_v = \frac{\partial r(u, v)}{\partial v} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial v}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial v} \right)$. частные производные.

• Геомет. смысл в-ров r_u и r_v : это касательные в-ра к координатным линиям.



- Касат. плоскость $T_P(\gamma_u, \gamma_v)$ — натянута на векторы γ_u и γ_v , если они лин. независимы.
- По теор. о неявной функции (ан. анализ), если в-рост γ_u и γ_v лин. незав. в точке P , то локально, около точки P образ $\gamma(D^2)$ явл. гладкой 2-поверхн. в \mathbb{R}^n , в том смысле, что касат. плоскость гладко меняется от точки к точке.
- На этом основании дадим формал. определение.

→ Опред. Локальной гладкой 2-мерной поверхностью M^2 в \mathbb{R}^n (или локальным 2-мерным многообразием) назыв. мн-во точек в \mathbb{R}^n , допускающее представление

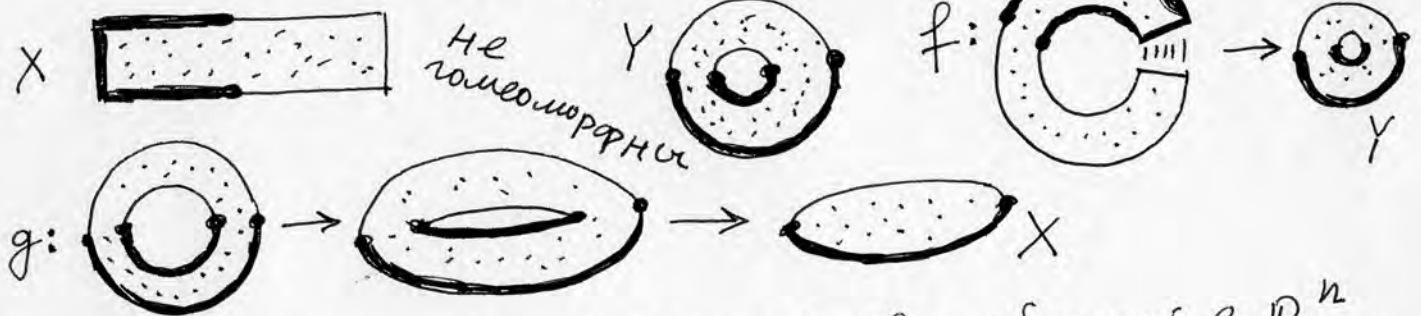
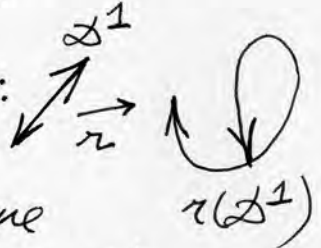
в виде:

$$1) M^2 = \{ \pi = \pi(u, v), \text{ где } \gamma_u \text{ и } \gamma_v \text{ лин. незав. встоду на } D^2(u, v), \text{ здесь } \pi: D^2(u, v) \rightarrow \mathbb{R}^n \},$$

$\pi \in C^\infty$, (в частности, $\gamma_u \neq 0$ и $\gamma_v \neq 0$ встоду на D^2).

2) $\pi: D^2 \rightarrow \pi(D^2)$ гомеоморфно образу, т.е. π — это гомеомор. D^2 и $\pi(D^2)$.

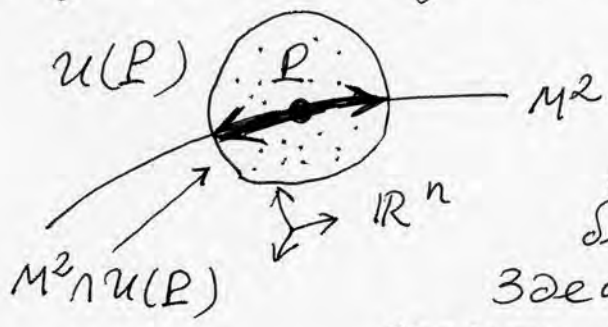
- Комент. условие 2 запрещает, например:
- Касат. плоскость $T_P M^2 \subset \mathbb{R}^n$ и натянута на в-рост γ_u и γ_v .
- По теор. о неявн. функциях такое отображение π задает гомеоморфизм между D^2 и $\pi(D^2)$, и более того, диффеоморфизм: $D^2 \approx \pi(D^2)$.
- Напоминание: $f: X \rightarrow Y$ назыв. гомеоморф., если f и f^{-1} оба взаимно-однозн., и оба непрерывны.
- Полезн. пример: $\exists X \xrightleftharpoons[f]{f} Y$, где f и g оба взаимно-однозн. и оба непрерывны, но пр-ва X и Y не гомеоморфны.



- Напоминание: отобра. $f: U \rightarrow V$ двух областей в \mathbb{R}^n назыв. диффеоморфизмом, если f — гомеоморфизм и f, f^{-1} — оба гладкие (C^∞).

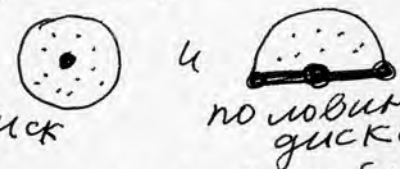
• В этом примере $\dim X = \dim Y = 2$. Задача: построить аналогичный пример в размерности 1, т.е. $\dim X = \dim Y = 1$.

• Опред. Глобальной мажорой 2-мерн. поверхностью M^2 в \mathbb{R}^n (или глобал. 2-многообразием в \mathbb{R}^n) назовем мн-во в \mathbb{R}^n такое, что для \forall точки $P \in M^2 \exists$ откр. окрестн. (шар) $U(P) \subset \mathbb{R}^n$: $U(P) \cap M^2$ допускает представление вида $\#$ (см. опред. выше), т.е. является локал. мажор. 2-поверхностью.



• Такие 2-поверхности назовем замкнутыми, = без края = без границы. Здесь \forall точка $P \in M^2$ имеет откр. окрестн., гомеоморф. 2-диску D^2 .

• Опред. Поверхн. (2-мнот.) имеет край (границу), если в ней есть точки двух типов:



(более подробное опред. см. в учебнике Мищенко, Фоменко).

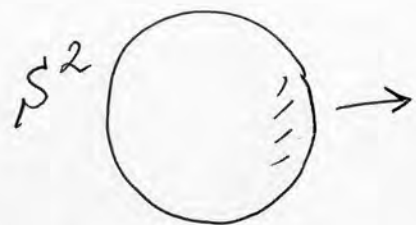
- Далее слово "глобальная" будем опускать.
- Будем говорить, что такое M^2 мажорно вложено в \mathbb{R}^n .
- Яркое отличие "мажорности" от "непрерывности". Сфера Александера = "дикая сфера".

• Теор. (без ∂ -ва). Гладкая 2-поверхность, ^{Компактная} и замкнутая (т.е. без границы), вложенная в \mathbb{R}^3 , и гомеоморфная 2-сфере, ^М уравновешивает \mathbb{R}^3 на два мн-ва A и B (т.е. $\mathbb{R}^3 - M = A \cup B$) со свойствами: 1) \bar{A} (т.е. замыкание A) гомеоморфно 3-шару D^3 , 2) \bar{B} (замыкание B) — односвязно, т.е. $\pi_1(\bar{B}) = 0$, т.е. любая "петля" γ в \bar{B} непрерывно стягивается в точку по \bar{B} .

Оказывается, если рассмотреть всю лишь топологическое (непрерывное) вложение сферы S^2 в \mathbb{R}^3 (т.е. гомеоморфизм S^2 на образ), то картина может сильно измениться.

Построим специальный гомеоморф. $h: S^2 \rightarrow h(S^2)$
сферы S^2 на ее образ $h(S^2)$ в \mathbb{R}^3 .

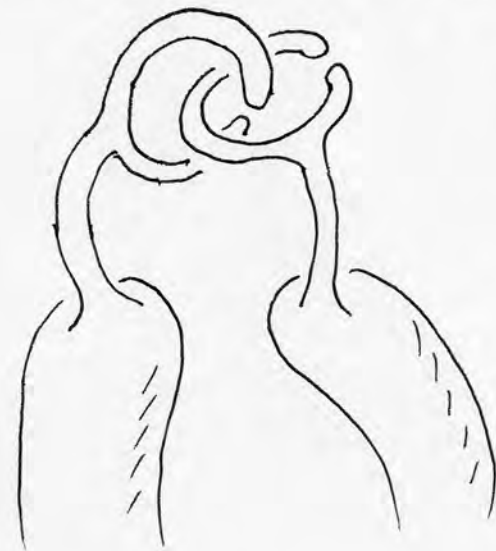
Шаг 1. Из стандартн. сферы S^2 в \mathbb{R}^3 "вырастают" два "пальца":



эти два "пальца" почти зацеплены, как показано на рис.

Шаг 2

Затем на двух концах двух "близких пальцев" повторяем процесс:



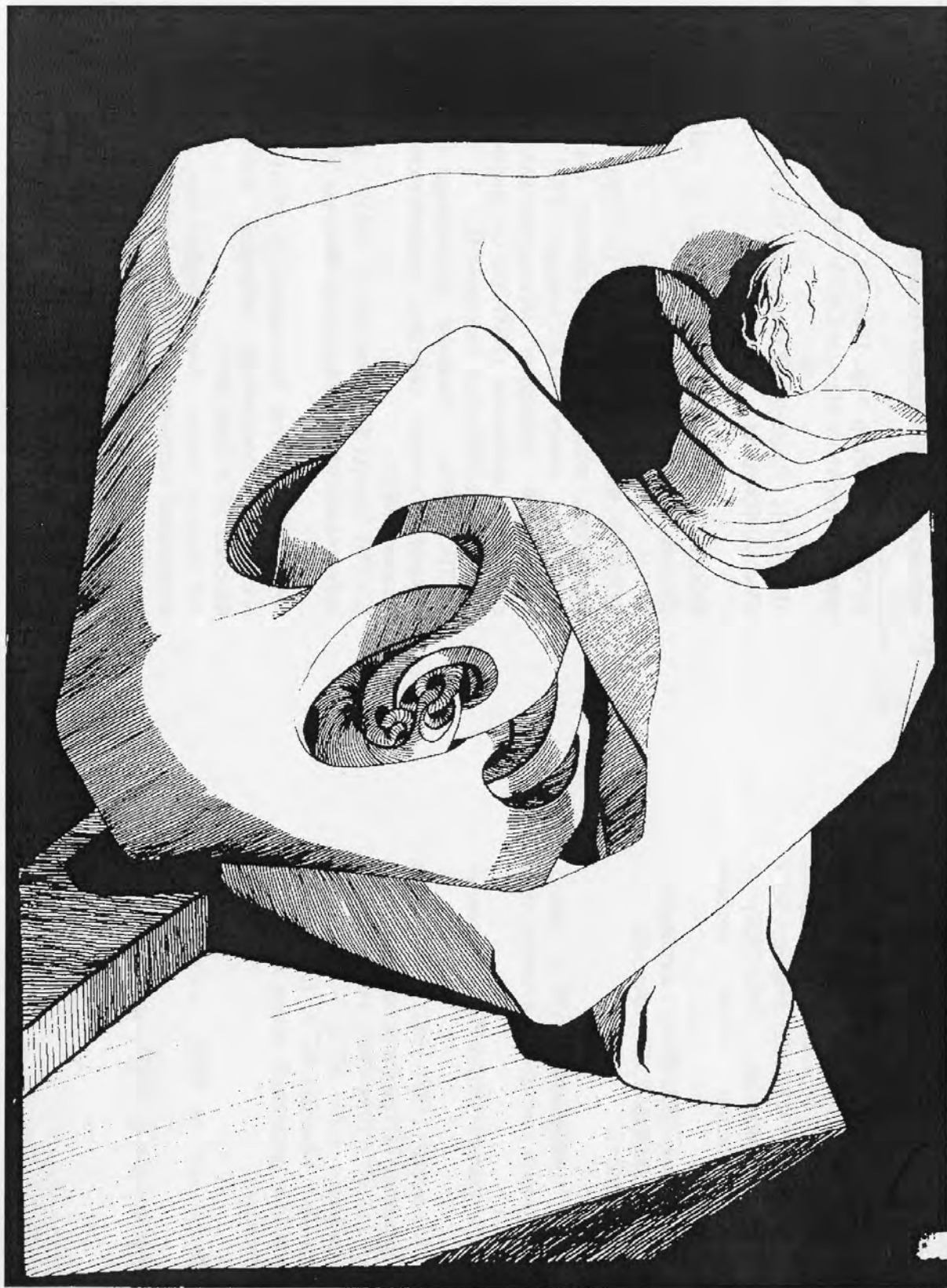
Шаг 3, ... $\rightarrow \infty$

и так далее, до бесконечности. "Пальцы" все время уменьшаются в размерах.

Можно доказать, что "в пределе" получится гомеоморфизм $h: S^2 \rightarrow h(S^2)$ сферы S^2 на ее образ $h(S^2)$.

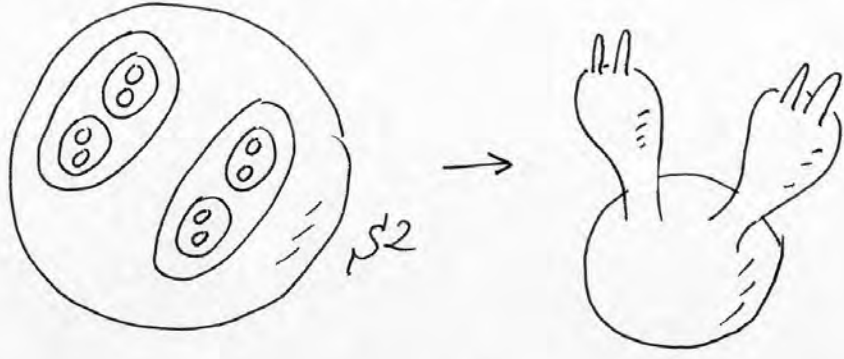
Этот образ, гомеоморфный 2-сфере, и называется сферой Александера или "дикой сферой". Этот "предел" существует.

- Теор. (Без ϵ -ва). 1) Закрытое мн-во $h(S^2)$ гомеоморфно 2-сфере.
- 2) Этот ~~не~~ гомеоморфизм h не является мягким вложением сферы в \mathbb{R}^3 . Топологическая сфера $h(S^2)$ не является "локально плоской" в своих особых точках. Такие "плохие" точек очень много: они образуют канторово множество.
- 3) $\mathbb{R}^3 \setminus h(S^2) = A \cup B$, где A гомеоморфно 3-шару D^3 (это - "внутренность" сферы $h(S^2)$), а мн-во \bar{B} - неоднотельно. Т.е. существуют петли $\gamma \subset \bar{B}$, не стягивающиеся в точку по \bar{B} .



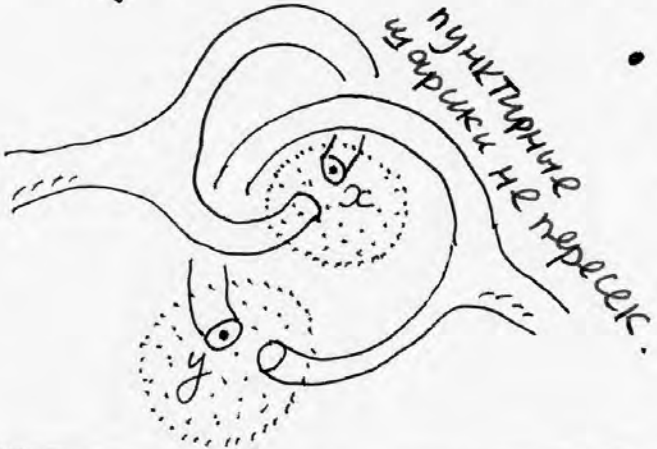
сфера Александра

- Вкратце: почему \bar{A} гомотопично шару? Потому, что "пальцы" вырастают из пар дисков на S^2 :

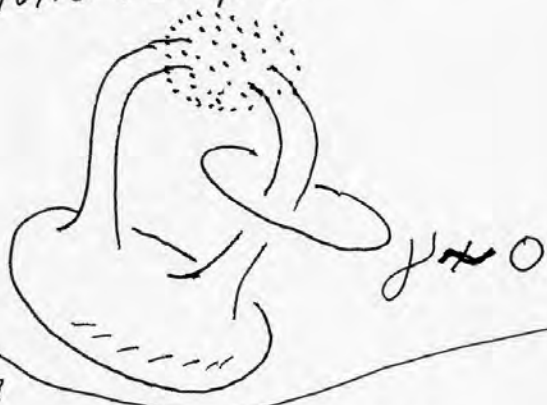


так что шар остается шаром (гомотопичен D^3). А потому \bar{A} как "предел" тоже гомотопично шару.

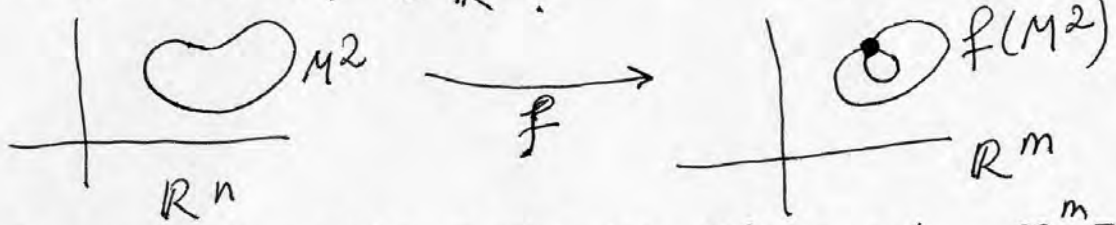
- Вкратце: почему h — это гомотопичизм. т.е. если $x \neq y$ — две разные точки на сфере, то $h(x) \neq h(y)$. В самом деле, если $x \neq y$, то в некотором моменте (при построении h) эти точки окажутся в разных дисках, а потому — на разных "рульках", а потому уже никогда "не встретятся":



- Почему \bar{B} — неоднотрассово? см. например, нестягиваемую петлю на рис.



- Теперь — понятие погружения поверхности M^2 в \mathbb{R}^m .



Пусть (u, v) — локал. к-ты на M^2 , а x^1, \dots, x^m — декарт. к-ты в \mathbb{R}^m .

Тогда $f: (x^i = x^i(u, v), 1 \leq i \leq m)$. Рассмотрим

функц. матрицу $df = \begin{pmatrix} x_u \\ x_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u^1 & \dots & x_u^m \\ \dots & \dots & \dots \\ x_v^1 & \dots & x_v^m \end{pmatrix}$, где $x_u^i = \frac{\partial x^i}{\partial u}$

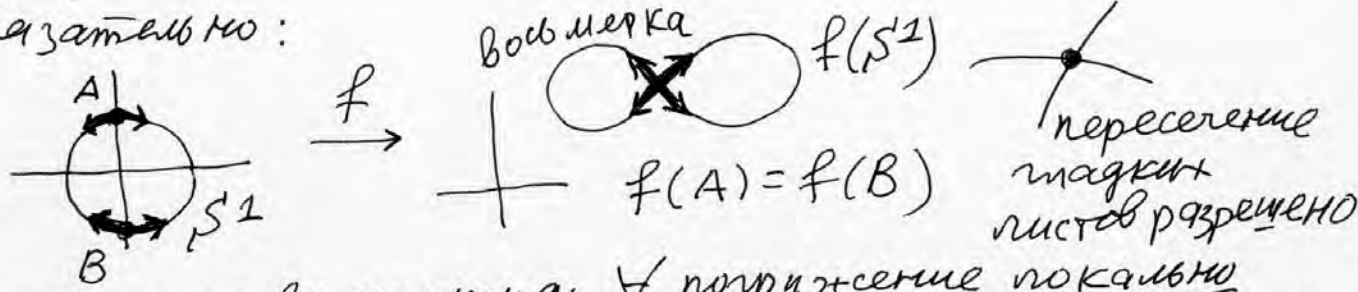
это — матрица Якоби.

Она задает дифференциал df отображения f .

$x_v^i = \frac{\partial x^i}{\partial v}$.

- Опред. $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ назыв. погружением, если f - гладко (C^∞) и $\text{rang}(df) = 2$ в $\forall P \in M^2$. т.е. векторы τ_u и τ_v лин. незав. в \forall точке $P \in M^2$.

• Комент. Не требуется гомеоморфизма M^2 образом $f(M^2)$. \forall вложение \rightarrow это погружение. обратно - не обязательно:



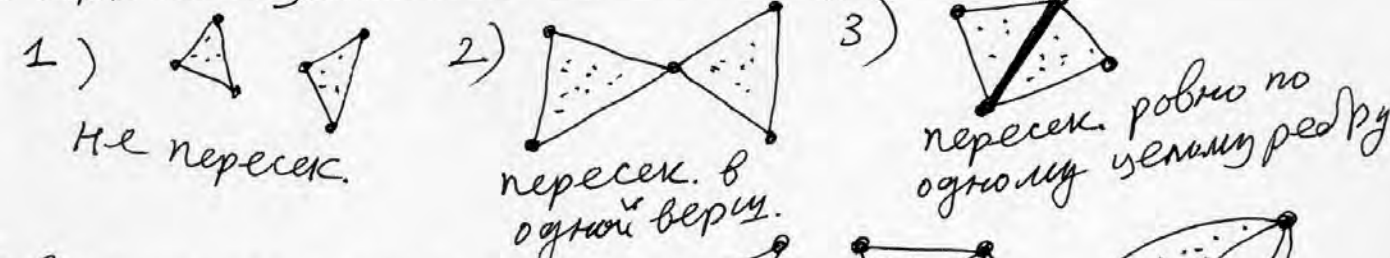
• По теор. о неявн. функциях \forall погружение локально является вложением. т.е. локально есть гомеоморфизм (и диффеоморф.) на образ.

- Опред. Две поверхн. (два 2-мнр.) назыв. гомеом. (диффеом.) если $\exists f: M_1 \rightarrow M_2$, где f - гомеоморфизм (соотв. диффеоморфизм).

• Теор. классиф. 2-мерн. поверхн. Компактные, гладкие, связные, замкнутое (т.е. без края, без границы).
 Цель: классифицировать такие M^2 ст. до гомеоморф.
 • Подробное д-во см. в: Мищенко, Фоменко, "Краткий курс дифф. геом. и топол.", стр. 180 - 191 (М., URSS, Леланд, 2016).

• Шаг 1. Триангуляция. Определение. Трианг. гладкой 2-поверхн. M^2 - это набор (конечный) вершин (точек) и гладких дуг (ребер). Условие: дуги пересекаются только в (своих) вершинах и только своими концами. Они режут M^2 на области, гомеомор. треугольникам. (считаем тр. уг. - замкн. подмн.)

- Причем возможны только след. варианты:

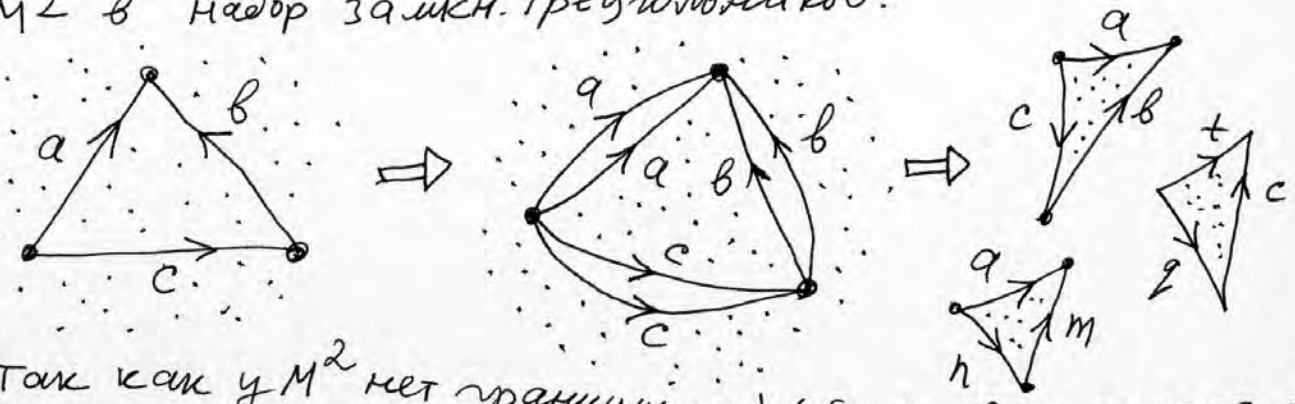


• Запрещено, например:

• Теор. (без д-ва. см. наш обязат. курс дифф. геом. и топол.) \forall гладкое 2-мерн. комп. связное, замкн. (= без края) многообр. допускает гладкую конечную триангуляцию.

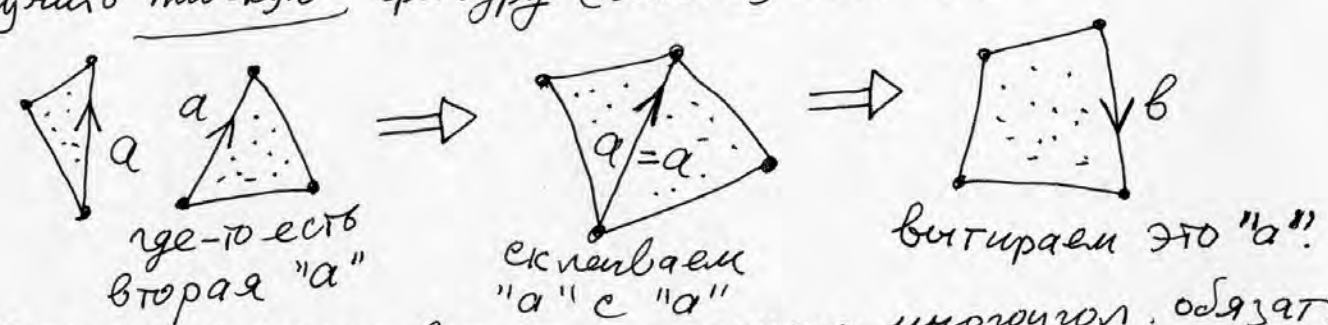
- Берем любую такую трианг. на M^2 .

- Шаг 2. Метки ребра — ставим на них буквы (все разные!) и стрелки (ориентации) произвольно. Затем разрежем M^2 по всем ребрам и "рассыпавши" M^2 в набор замкн. треугольников.




Так как у M^2 нет границы, то \forall буква встречается в наборе Δ ровно два раза! Т.к. у каждого разреза есть два берега.

- Шаг 3. Склеиваем обратно треугольнички, чтобы получить плоскую фигуру (многоугольник).



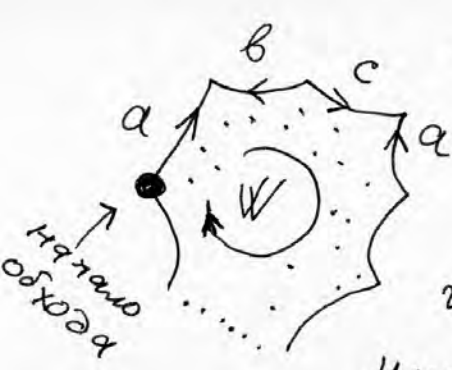
На границе получившегося плоского многоугол. обязат. \exists хотя бы одна буква "в" такая, что ее дубликат "в" лежит на каком-то из оставшихся треугольников. \Leftarrow во: допус. противное. Восстановим все склейки и M^2 окажется невязанным объединением по крайней мере 2-х непересекающихся кусков (компонент). Противоречит связности M^2 .

Итак, \exists "в" со своим дубликатом в оставшихся треугольничках:  склеиваем по "в", вытираем этот разрез. и т.д.

- В итоге получим плоский связный многоугольник W . Мы ислерпаем (т.е. поклеим) все треугольнички (иначе будет противоречие со связностью M^2).

Итог: на границе ∂W многоугольника W каждая буква "а" встрет. ровно два раза. Построение W -неоднотонно.

- Шаг 4. По мног. W строим "слово" (код) W . Будем его упрощать и приведем к каноническому виду (это-конечная цель).



обходим ∂W и выписываем буквы, указывая их ориентацию:

$$W = a_{i_1}^{\epsilon_1} a_{i_2}^{\epsilon_2} \dots a_{i_k}^{\epsilon_k} ; \epsilon_i = \pm 1$$

итак: $M^2 \rightarrow W(M^2)$ (= слово, код).

Неоднозначно. Это - не страшно. сократим все стоящие рядом aa^{-1} .

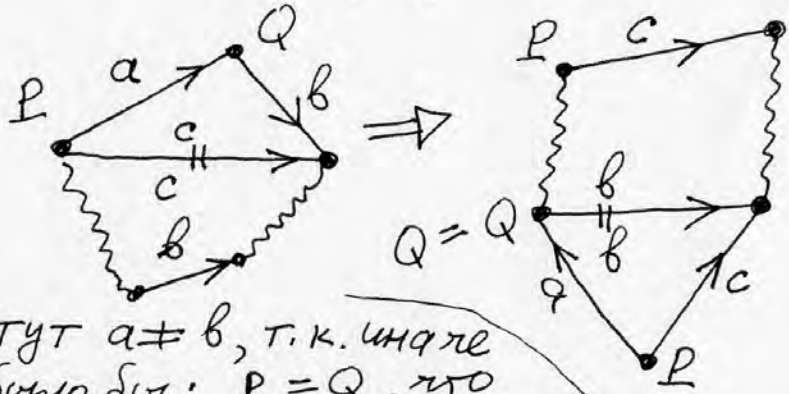
Лемма. Если $W = \dots aa^{-1} \dots$ (проверком обозначаем остальные буквы)

то на том же M^2 \exists новая система разрезов, что $W' = \dots$ (т.е. aa^{-1} исчезает, а остальные не меняются).



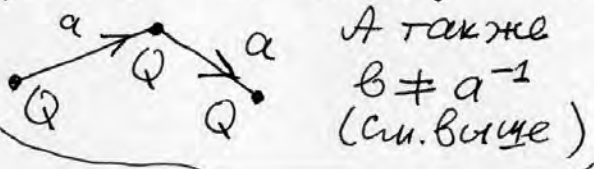
Шаг 5. Все вершины \rightarrow в одну вершину. Рассмотрим классы эквивалентности вершин (т.е. склеиваются в одну точку на M^2):

$\{P\}, \{Q\}, \dots, \{R\}$. Тогда (если их $>$ лемма) \exists два класса $\{P\}$ и $\{Q\}$ с парой их вершин на одном ребре:

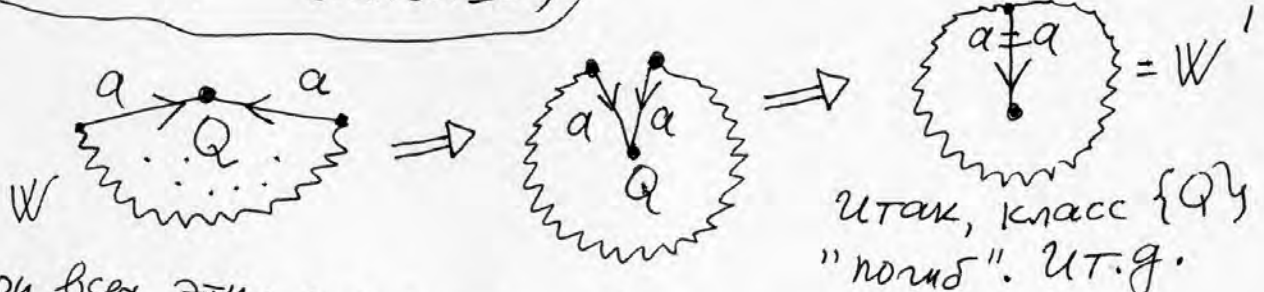


итак: $\{Q\} - 1$
 $\{P\} + 1$

тут $a \neq b$, т.к. иначе было бы: $P = Q$, что противоречит выбору $P \neq Q$.



Продолжая таким образом, "перекатываем" весь класс $\{Q\}$ в другие классы вершин. Последний шаг: когда в $\{Q\}$ осталась 1 вершина



• При всех этих операциях M^2 заменяется на гомеоморфное. меняем лишь код $W \rightarrow W'$ (но не M^2 !). меняем систему разрезов.

77
т.е. выбираем ("рисует") более экономичные, оптимальные разрезы. При упрощении W новые разрезы уже не являются триангуляцией. Но это уже неважно. Поверхность M^2 при этом вообще не меняется.

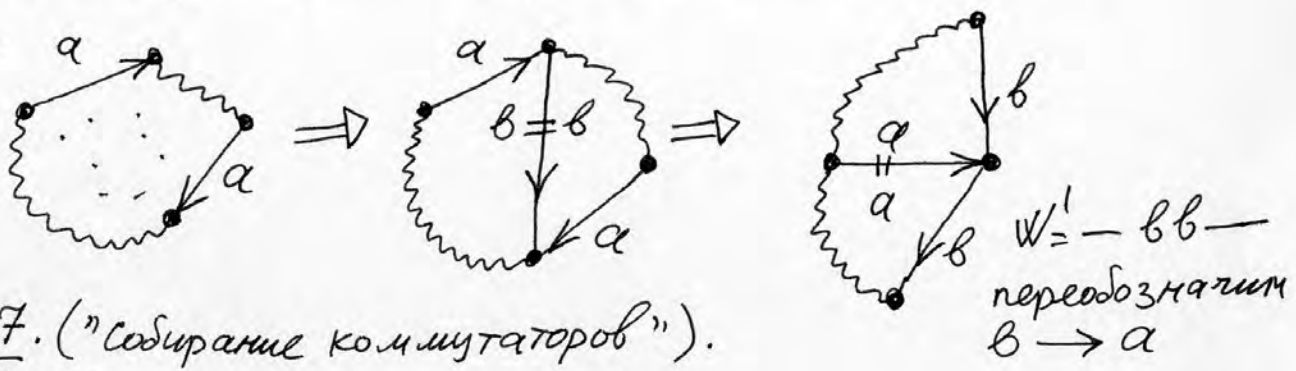
сферы с ручками, проективные плоскости, лист Мёбиуса как "скрещенный колпак" и т.д.



• Шаг 6. ("собираем квадраты"). лемма:

$$W = \text{---} a \text{---} a \text{---} \Rightarrow W' = \text{---} aa \text{---}$$

до-во.

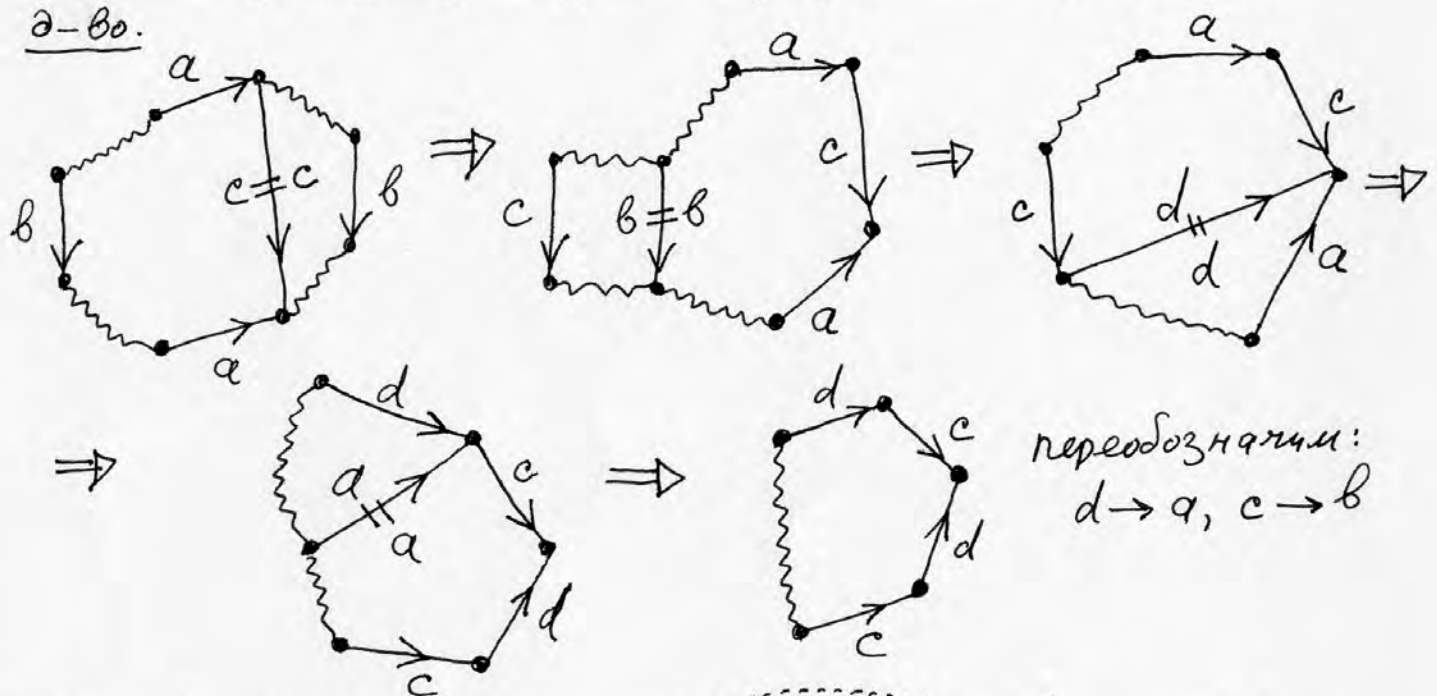


• Шаг 7. ("собираем коммутаторы").

лемма.

$$W = \text{---} a \text{---} b \text{---} a^{-1} \text{---} b^{-1} \text{---} \Rightarrow W' = \text{---} a b a^{-1} b^{-1} \text{---}$$

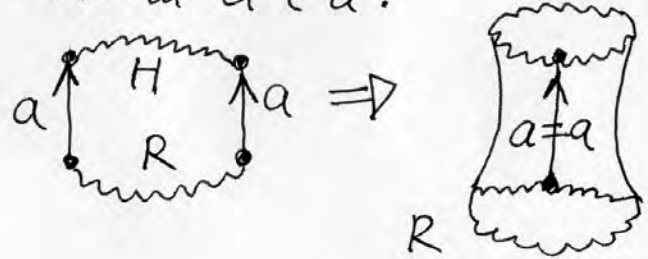
до-во.



• Шаг 8. лемма. $W = \text{---} a \text{---} a^{-1} \text{---} v^{-1} \text{---}$
 между $a \text{---} a^{-1}$
 $\exists v$ такое, что его
 дубликат v^{-1} расположен вне "отрезка" $a \text{---} a^{-1}$
 (именно v^{-1} , т.к. все квадраты мы уже собрали вместе).

до-во. Допуст. противное: $\text{---} a \text{---} \overbrace{v v^{-1}} \text{---} a^{-1} \text{---}$

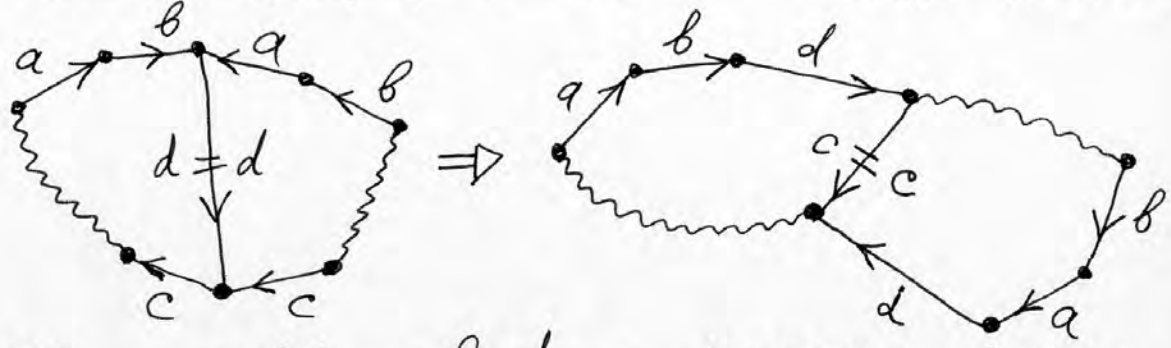
т.е. $\forall v$ между a и a^{-1} ,
 дубль v^{-1} слова между a и a^{-1} .
 склеим a с a^{-1} :



H Но тогда все вершины из H
 склеены с вершинами из H ,
 и все вершины из R склеены
 с вершинами из R . Т.е.
 возникают два класса разных
 вершин. А мы уже привели все
 к одной вершине. Противоречие.

Шаг 9. (нет сдвигающей сержи). В присутствии квадрата коммутатор превращается в 2 квадрата.

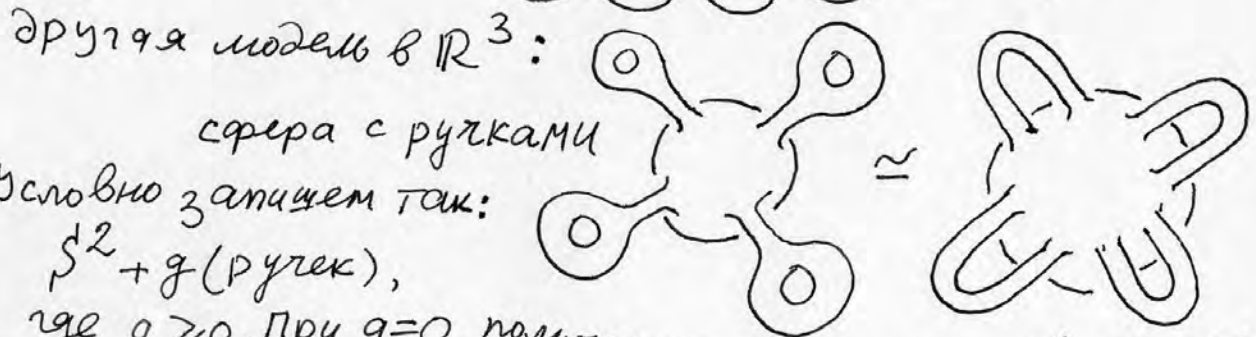
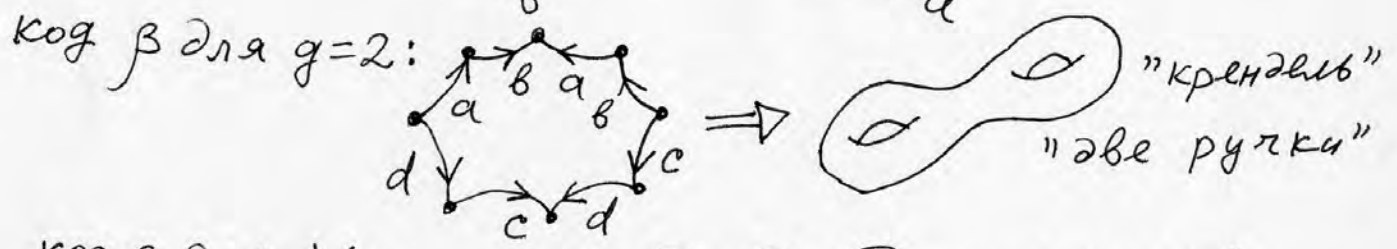
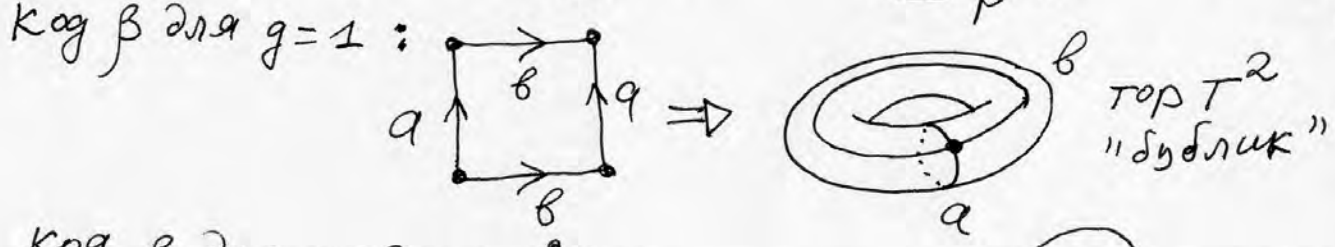
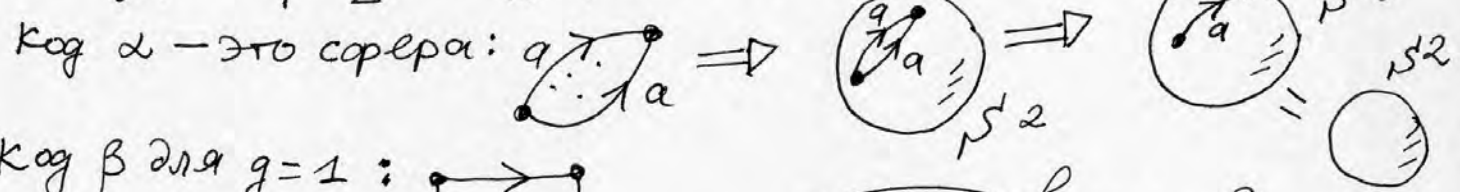
Лемма. $W = \text{---} a b a^{-1} b^{-1} \text{---} c c \text{---} \Rightarrow W' = \text{---} a^2 \text{---} b^2 \text{---} c^2 \text{---}$
 э-во.



получим: $\text{---} a b d \text{---} b a d \text{---}$ и теперь собираем вместе 3 квадрата: $\text{---} a^2 \text{---} b^2 \text{---} d^2 \text{---}$

Шаг 10. Мы доказали, что \exists три канонических кода:

- α) $a a^{-1}$
- β) $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}, g > 0$
- γ) $c_1^2 c_2^2 \dots c_k^2, k > 0.$



условно запишем так:
 $S^2 + g(\text{ручек}),$

где $g \geq 0$. При $g=0$ получится 2-сфера S^2 . Тем самым, мы объединяем в запись $S^2 + g(\text{ручек})$ оба кода: α и β. Эту ∞ серию назовем "серией I". Как увидим далее, это - ориентируемые 2-многообразия.

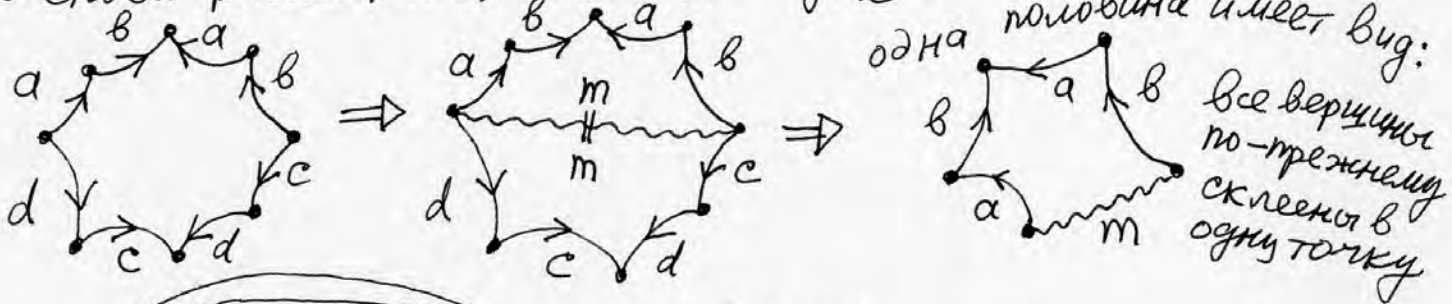
• Другой подход к построению M^2 .
опред. (связная сумма). Пусть M и P — два ^{связных} многообр.
 рассм. $M \setminus D$ и $P \setminus D$, т.е. выберем из M и P по диску
 (шару). Получим два мног. с краем сфера. отождествим
 эти две граничные сферы при помощи гомеоморфизма.
 Полученное мног. назыв. связной суммой: $Q = M \# P$.



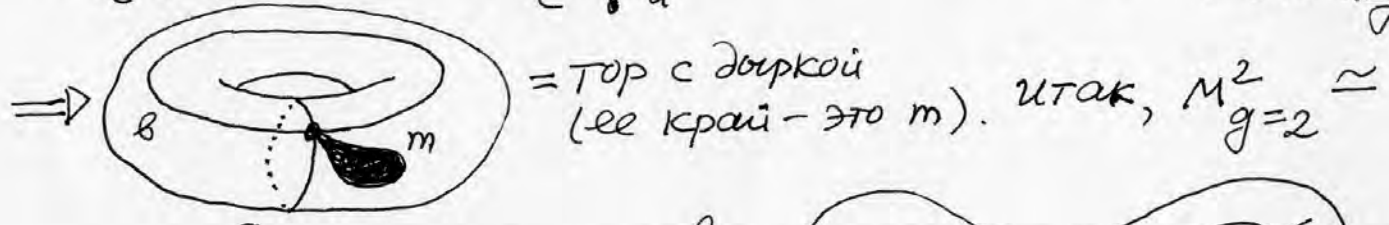
Утв. (связная сумма корректно определена)

• Утв. Если M и P — гладкие мног., то и $M \# P$ можно считать гладким.

• снова рассмотрим, например, $M^2_{g=2}$, т.е. крендель.



одна половина имеет вид:
 все вершины по-прежнему склеены в одну точку



$\cong W = aba^{-1}b^{-1}cd c^{-1}d^{-1}$ имеет вид:

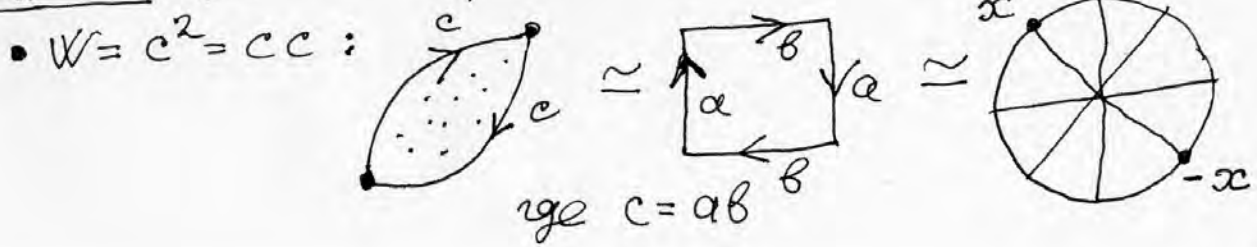


\Rightarrow $T^2 \setminus D^2 \# T^2 \setminus D^2 =$ крендель $= T^2 \# T^2$.
 т.е. $M^2_{g=2} = T^2 \# T^2$ (связн. сумма). А потому:

[Теор. Многообразия M^2_g серии I имеют вид (при $g \geq 1$):
 $M^2_g = T^2 \# \dots \# T^2$ (g раз). Число $g \geq 1$ называется родом.
 считаем, что при $g=0$ $M^2_{g=0}$ гомеом. сфере.

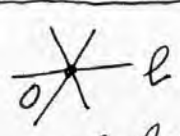
Утв. Все многообр. серии I можно гладко вложить в \mathbb{R}^3 .
 э-во окр. уже дано выше. Это — сферы с ручками.

Шаг 11. (2-многоб. серии II). Начнем с примеров.



т.е. $W = S^2$ - это диск D^2 , на границе которого отождествлены точки по правилу: $x \sim (-x)$, т.е. диаметрально противоположные.
 А это есть проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$.

• опред. $\mathbb{R}P^n$. В \mathbb{R}^{n+1} рассм. пучок прямых ℓ через точку O .

 $\mathbb{R}P^n = \{\ell\}$, т.е. точки $\mathbb{R}P^n$ - это прямые этого пучка.

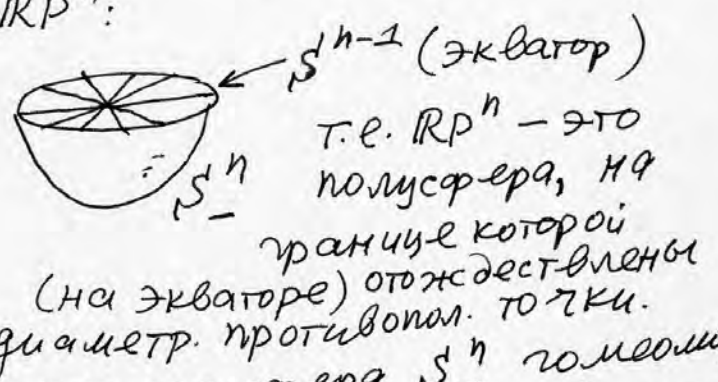
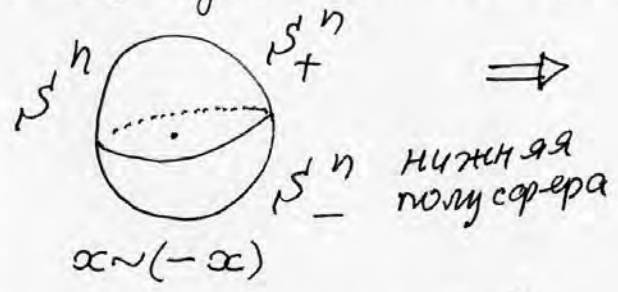
• эквивал. опред. $\mathbb{R}P^n$:  $\ell \leftrightarrow (x, -x)$, где $x \in S^n$.

т.е. $\mathbb{R}P^n = S^n / \mathbb{Z}_2$ поэтому $\mathbb{R}P^n = \{(x, -x), \text{ где } x \in S^n\}$.

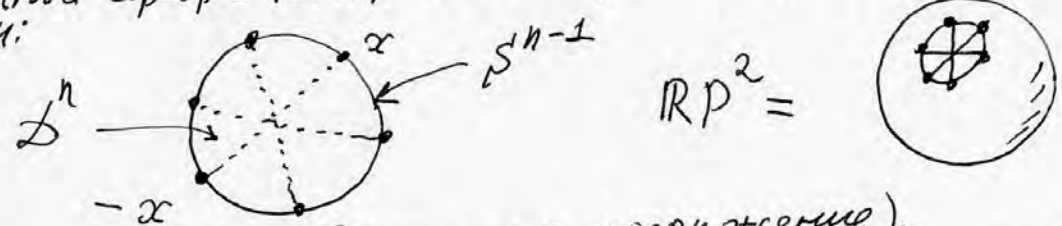
получается отождествлением диамет. противополож. точек на сфере S^n . $\sigma: x \rightarrow -x$ инволюция на сфере.

т.е. $\mathbb{R}P^n = S^n / \sigma$, факторизуем сферу по действию σ .

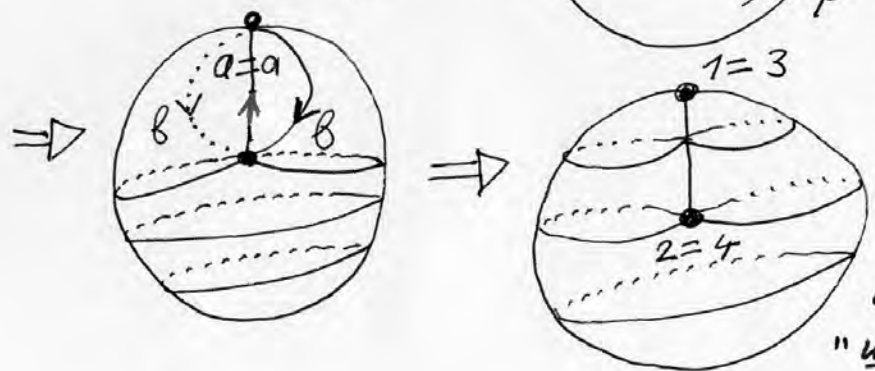
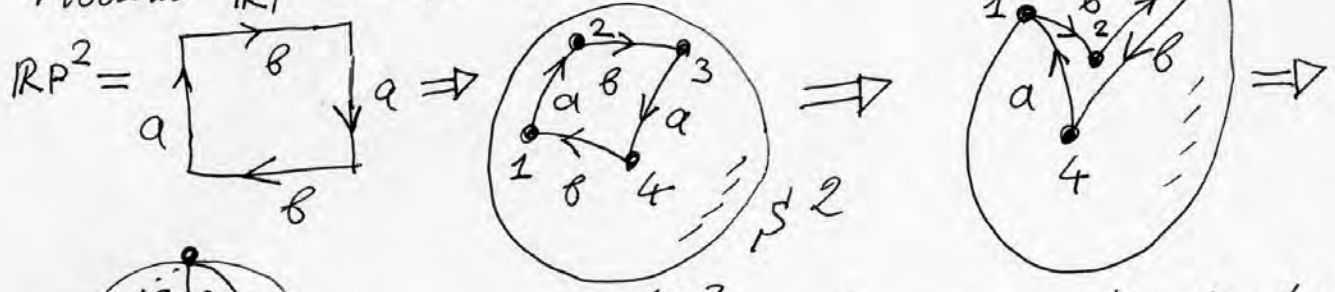
• еще одно эквивал. опред. $\mathbb{R}P^n$:



• еще одно опред. $\mathbb{R}P^n$: так как полусфера S_+^n гомеоморф. диску (шару) D^n , то $\mathbb{R}P^n$ - это шар (диск) D^n , на граничной сфере которой отождествл. диаметр. противополож. точки:

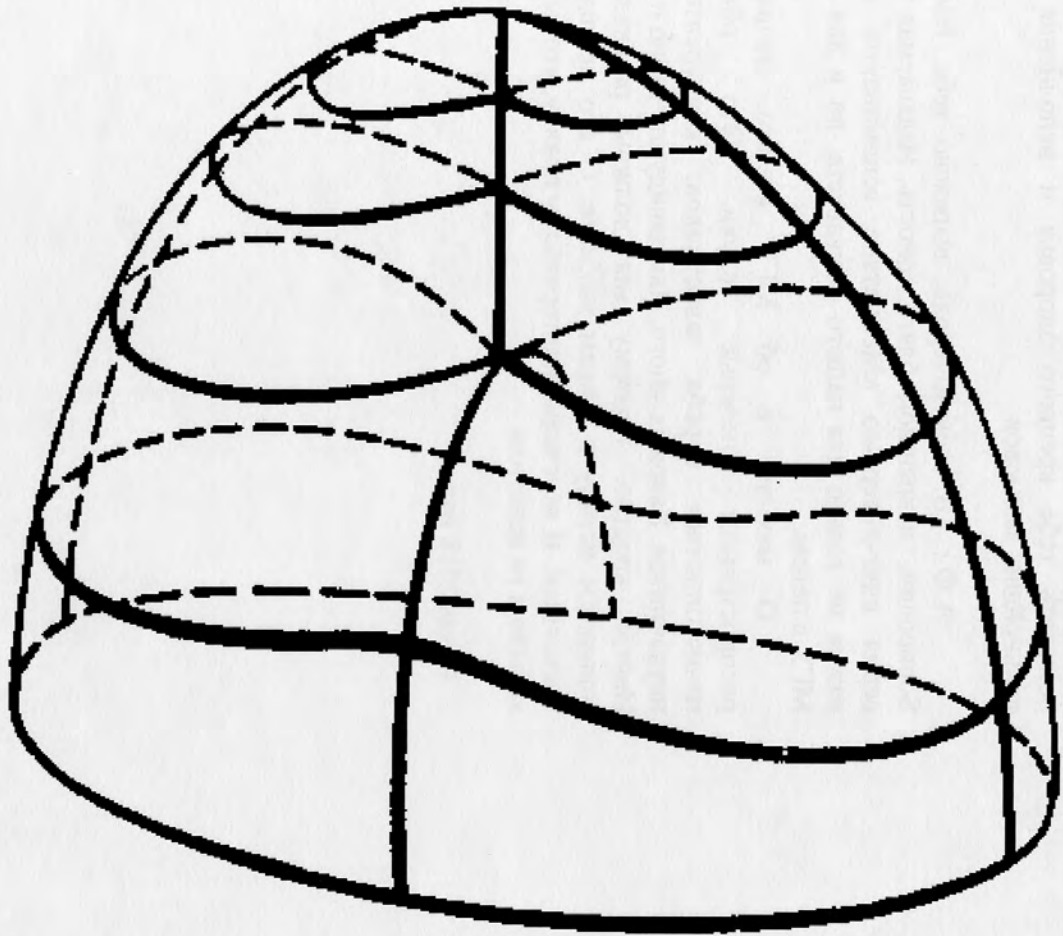


• Модель $\mathbb{R}P^2$ в \mathbb{R}^3 (это - не погружение).



В точках $(1=3)$ и $(2=4)$ погружения нет. В остальных точках - погружение.

Если снизу отрезать "шапочку", то останется лист Мёбиуса. см. рис.

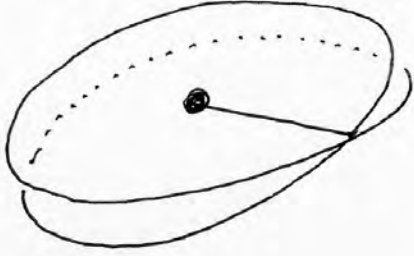


это — попу́хание
листа Мёбиуса в \mathbb{R}^3 , при котором его граница
(окружность) стала плоской. За это пришлось
"заплатить" тем, что у листа Мёбиуса появились
самопересечения.

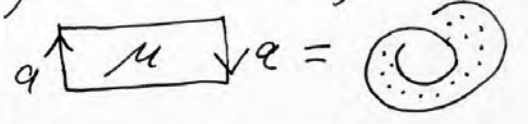
Такую модель для μ называют
"скрещенный" колпак.

См. след. страницу: $\mu = \mathbb{R}P^2 - \mathbb{Z}^2$.

В толчках (1=3) и (2=4) - ветвление порядка 2:

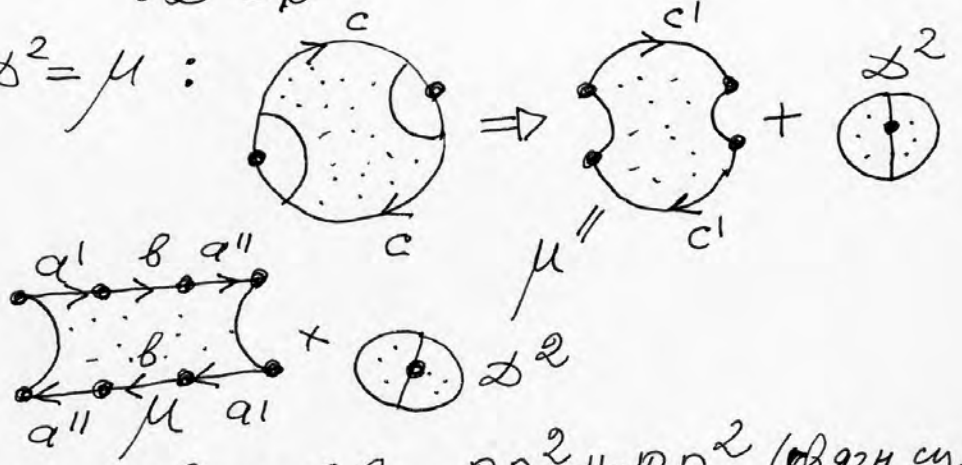
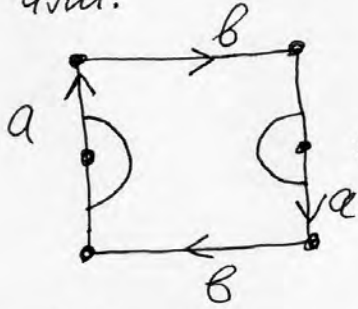


• Лемма. $\mathbb{R}P^2 = \mu + \mathbb{D}^2$, где μ - лист Мебиуса;
 $\partial\mu = S^1$
 $\partial\mathbb{D}^2 = S^1$

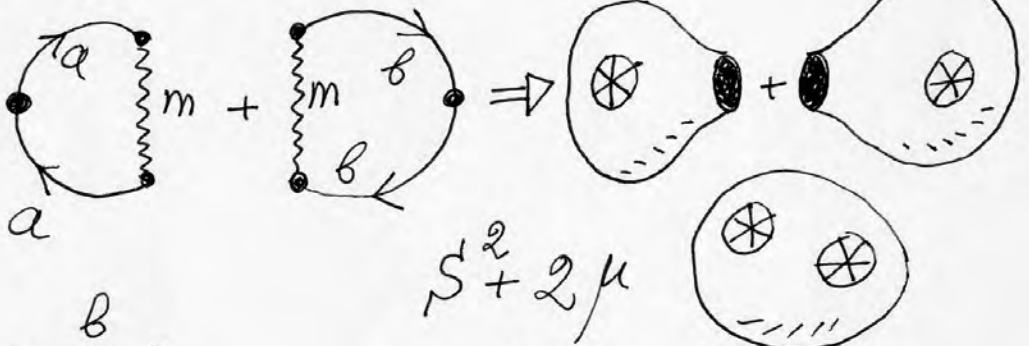
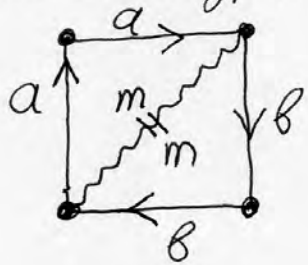


д-во. $\mathbb{R}P^2 - \mathbb{D}^2 = \mu$:

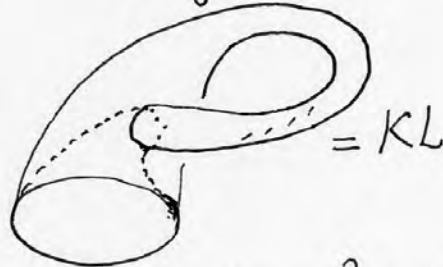
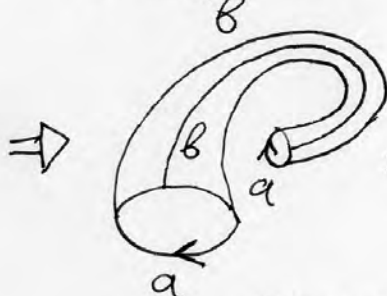
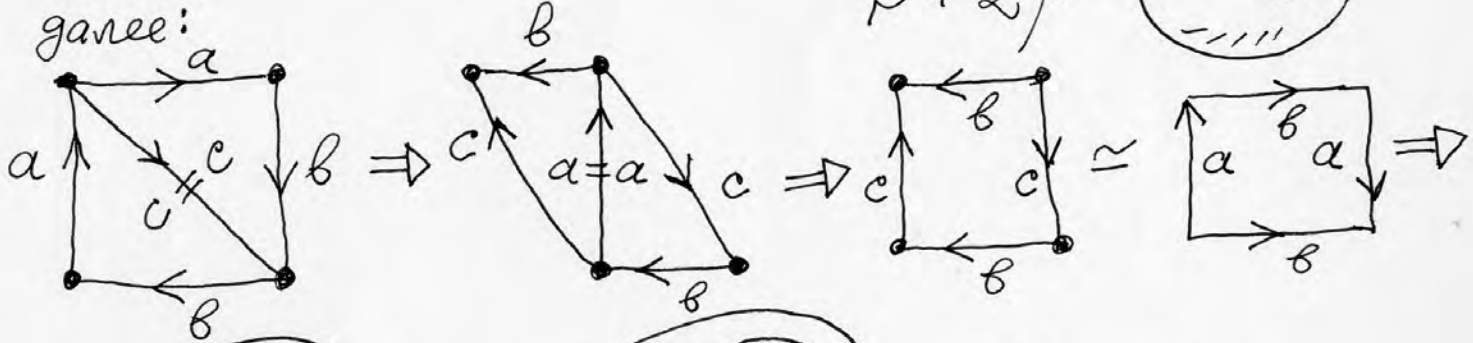
члм:



• Два квадрата: $\mathbb{V} = a^2 b^2 = a a b b = \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ (вразн. сумм)



далее:

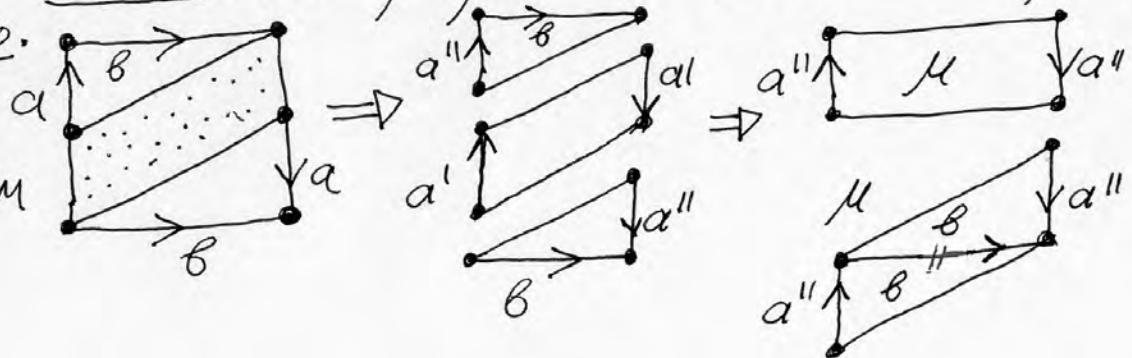


Сутьюшка
Клейна

Лемма. $KL = \mu + \mu \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 = S^2 + 2\mu =$

д-во.

разрежем

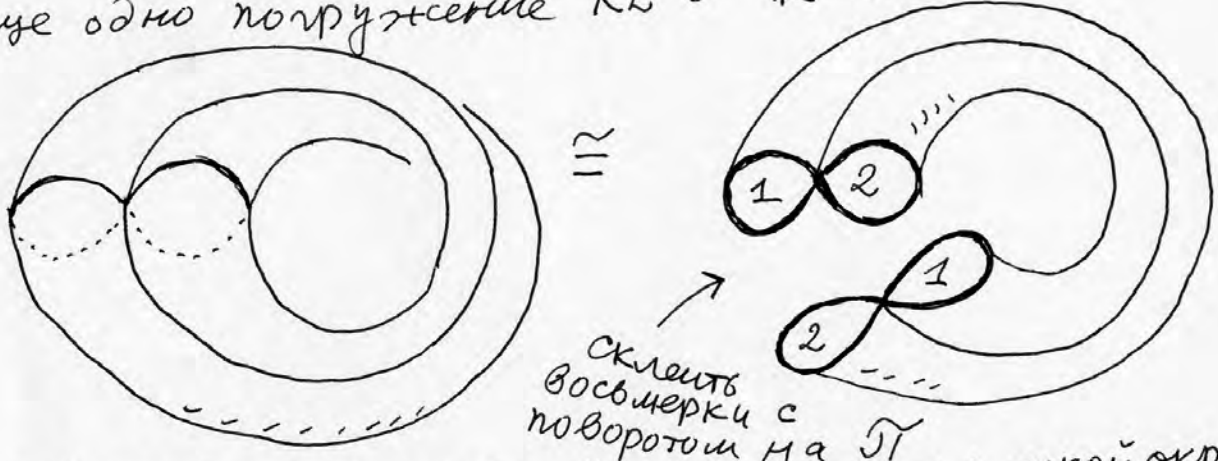


- Бутылка Клейна = вывернутая ручка:



это — мажорное погружение KL в \mathbb{R}^3 .
но — не вложение (есть самопересечение)

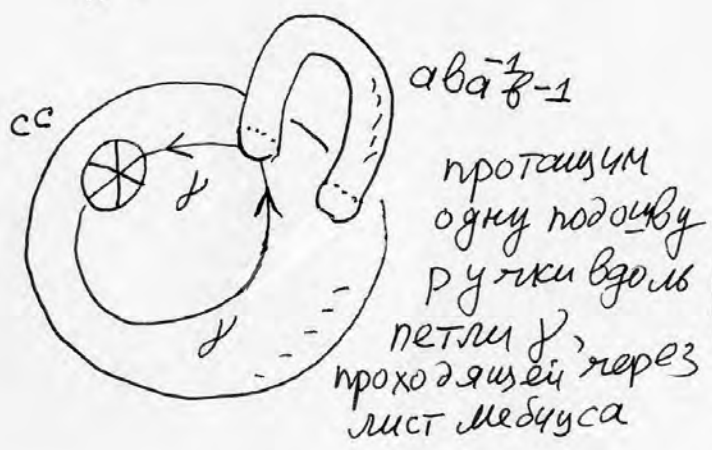
- еще одно погружение KL в \mathbb{R}^3 :



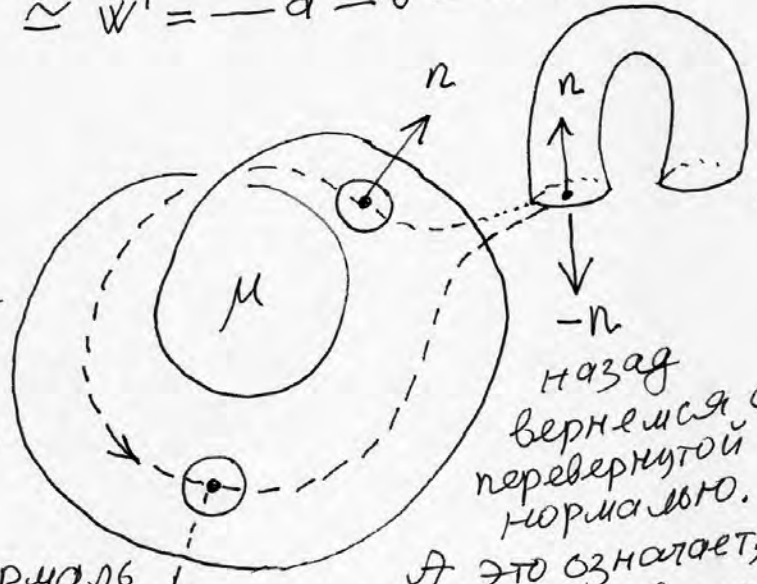
склеить восьмерки с поворотом на π

Получается склеиванием восьмерки вдоль тонкой окружности так, чтобы после полного оборота окружность повернулась на 180° .

- Еще одно (мажорное) э-во, что нет сдвигающей серии M^2 :
 $W = -ava^{-1}v^{-1}ss \simeq W' = -a^2 - v^2 - c^2$

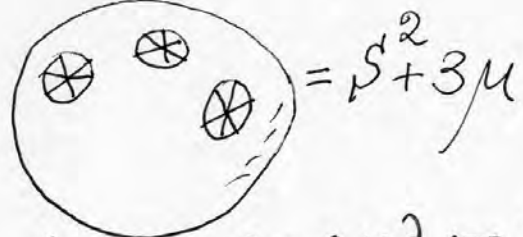
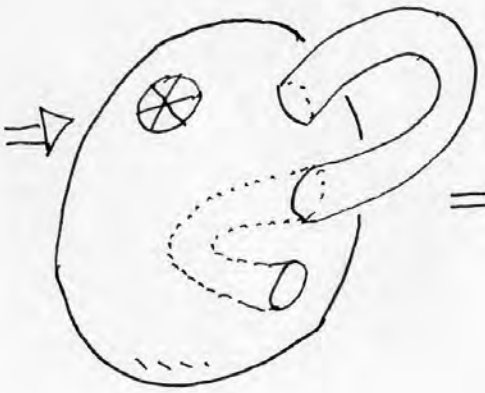


протащим одну сторону ручки вдоль петли γ , проходящей через лист Мебиуса



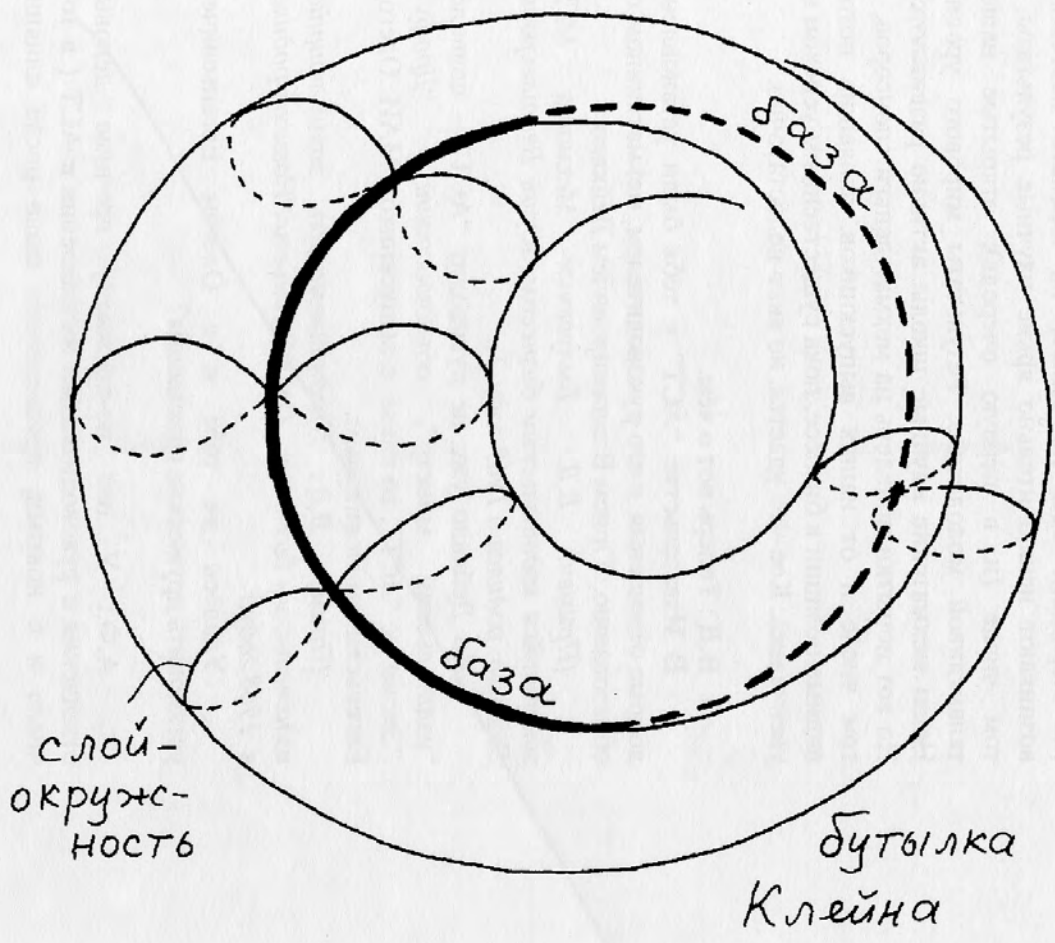
А это означает, что ручка вывернулась:

нормаль переворачивается: n



(также см. след. стр.)

т.е. ручка превратилась в два листа Мебиуса



погружение KL в \mathbb{R}^3 . линия самопересечения — это окружность



превращение ручки в вывернутую ручку, т.е. в два листа Мёбиуса (при наличии листа Мёбиуса)
 \mathbb{Z} -во отсутствия "смешанной серии".

Итог шага 11: Любое M^2 типа II гомеоморфно сфере с k тонкими ручками: $S^2 + k\mu$, т.е. связной сумме k экземпляров RP^2 :
 $M^2_k = S^2 + k\mu = RP^2 \# \dots \# RP^2$ (k раз).

• Ориентируемость и неориентируемость. Рассмотрим на M^2 всевозможные пути-петли γ , выходящие и возвращающиеся в точку x . В точке x рассмотрим касательный репер (из касательных векторов).

Опред. M^2 назыв. ориентируемым, если при любой непрерывной деформации (= скольжении) касательного репера вдоль любой петли, он возвращается в точку x с той же ориентацией.
 M^2 назыв. неориентируемым, если найдется петля γ , при скольжении вдоль которой ориентация репера поменяется.

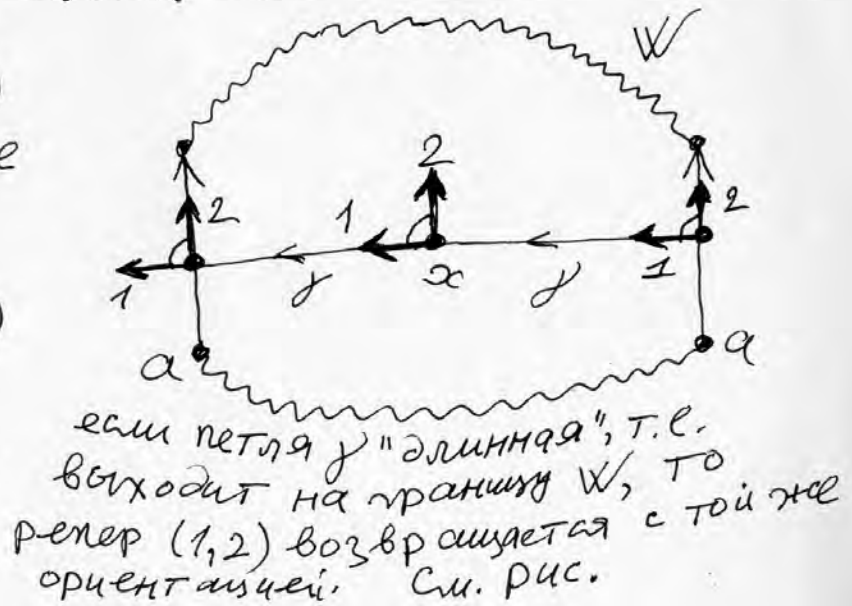
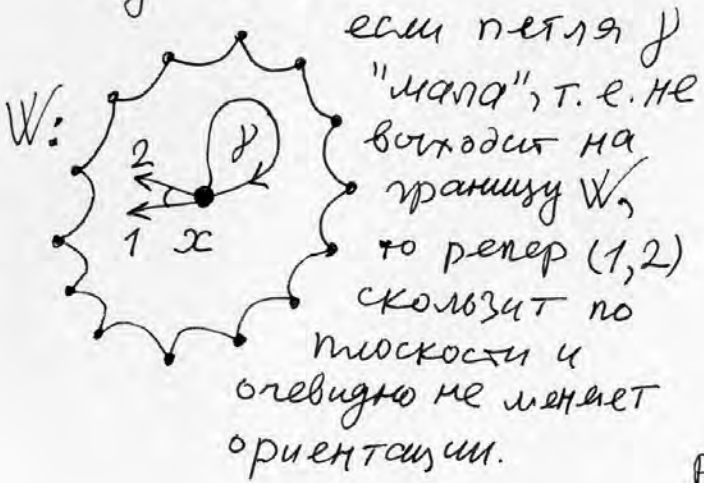
• Ориентируемость или неориентируемость — это инвариант гомеоморфизма.

• Шаг 12. Заключительный. Теорема классификации M^2 .

- 1) Любое связное, комп., компактное, замкнутое (без края) M^2 гомеоморфно (и диффеоморфно) либо I: $S^2 + g(\text{ручек})$, $g \geq 0$, либо II: $S^2 + k\mu$, $k > 0$. Числа g и k назыв. родом.
- 2) Мног. серии I — ориент. Мног. серии II — неориент.
- 3) Мног. серии I и серии II не гомеоморфны.
- 4) Мног. серии I можно вкладыв. в R^3 .
- 5) Мног. серии II можно погруж. в R^3 , но не вкладываются.

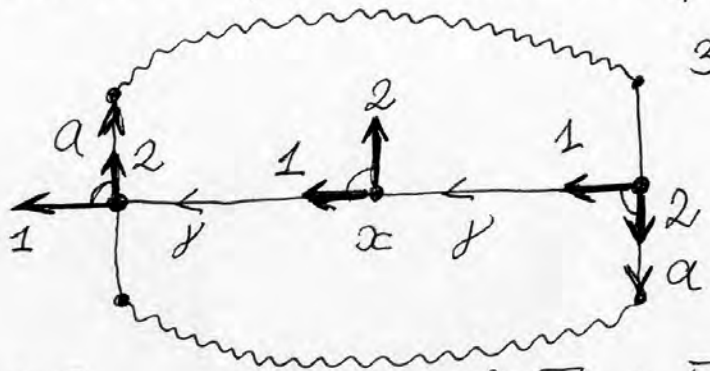
• Д-во. Пункт 1 уже доказан выше. Докажем 2.

$$M^2_g = S^2 + g(\text{ручек}) \cong \prod_{i=1}^g a_i v_i a_i^{-1} v_i^{-1}$$



• Теперь $M_K^2 = S^2 + K\mu$, $K > 0$. $W = \prod_{i=1}^K S_i^2$.

Как и в ориентир. случае скользящее (перенос) репера вдоль "малых" петель не меняет ориентации. Теперь рассмот. "длинные петли":



Здесь репер достигает ∂W и, очевидно, возвращается в точку x с противополож. ориентацией. Пункт 2 теор. доказан.

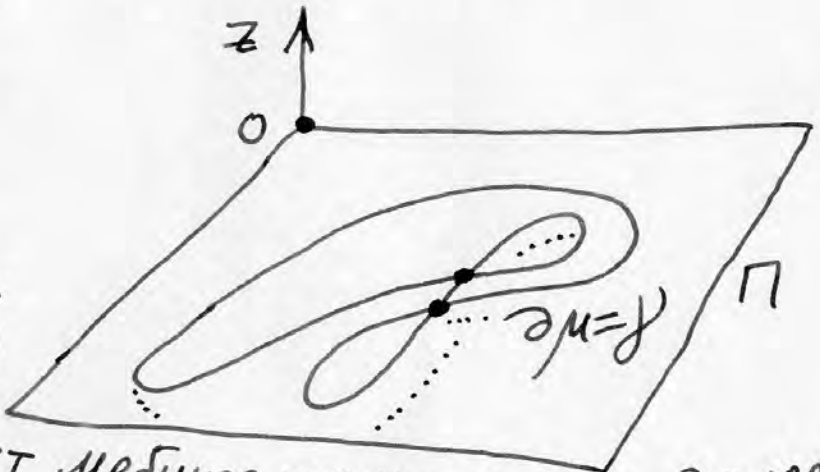
• Пункт 3. Многооб. I и II не гомотоп., т.к. I — ориент., а II — неориент. А вот не гомотоп. морф. многооб. разного рода внутри каждой серии — факт более сложн. мы его докажем потом, используя гомологии.

• Пункт 4 доказан выше.
• Докажем пункт 5. Неориент. случай.

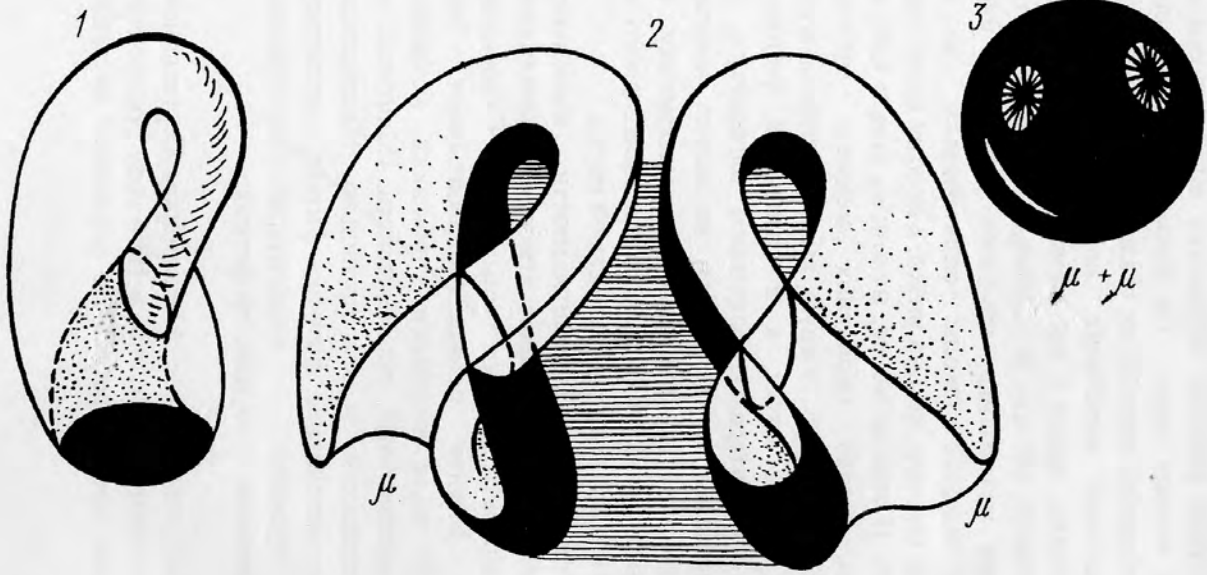
Лемма. $\mathbb{R}P^2$ слабо погруж. в \mathbb{R}^3 .
 $\mathbb{R}P^2 = \mu + \mathbb{Z}^2$ (см. выше). Рассмотрим $KL = \mu + \mu$ и разрежем KL пополам плоскостью, см. рис. это — погружение μ в \mathbb{R}^3 .



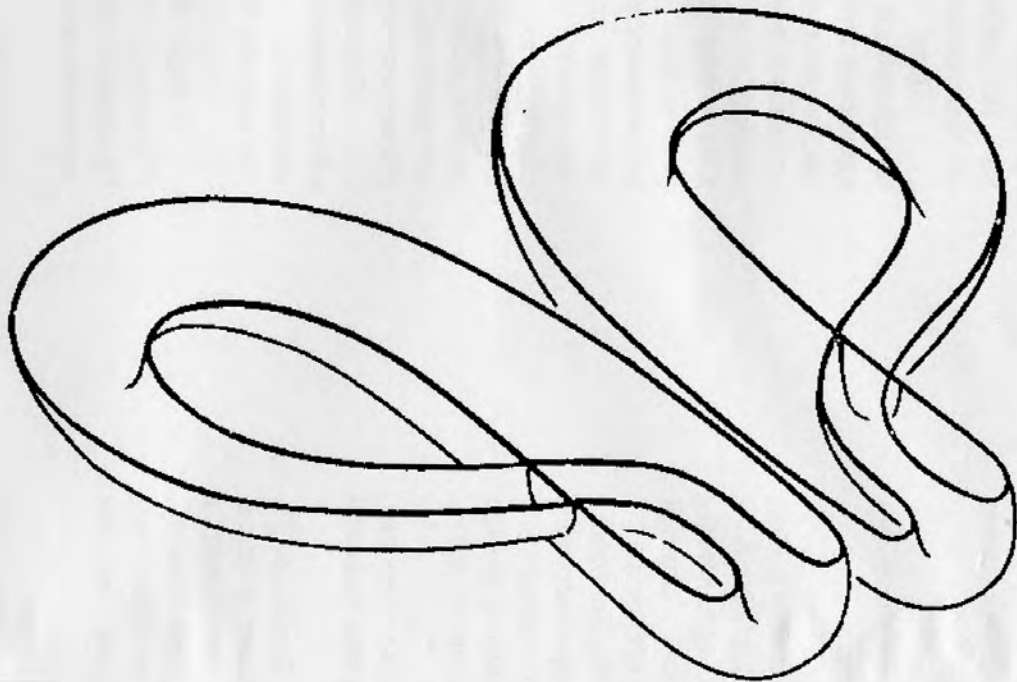
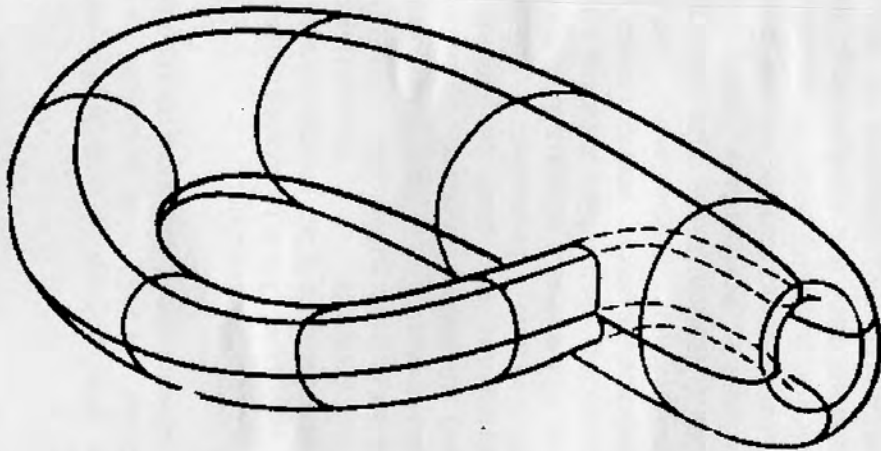
Граница μ — это плоская кривая с самопересечением:



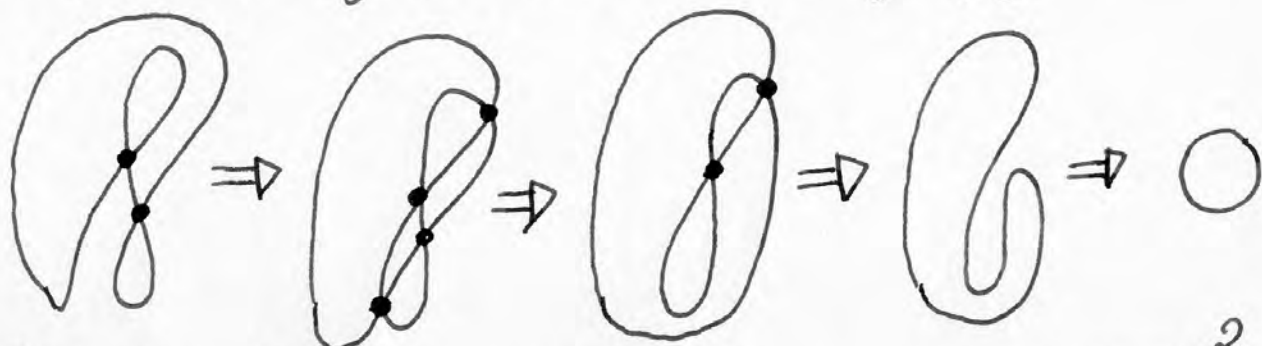
лист Мёбиуса расположен под плоскостью Π . Будем поднимать вверх плоскость Π , одновременно деформируя кривую γ как показано на рис. При этом γ будет "заметать" некоторую 2-поверхность, погруженную в \mathbb{R}^3 . Цель: продеформировать γ в станд. окружн. S^1 без самопересеч. в Π .



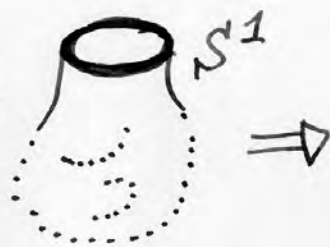
более наглядное изображение разреза KL
на два листа медузы.



деформация γ : (см. также след. стр.)



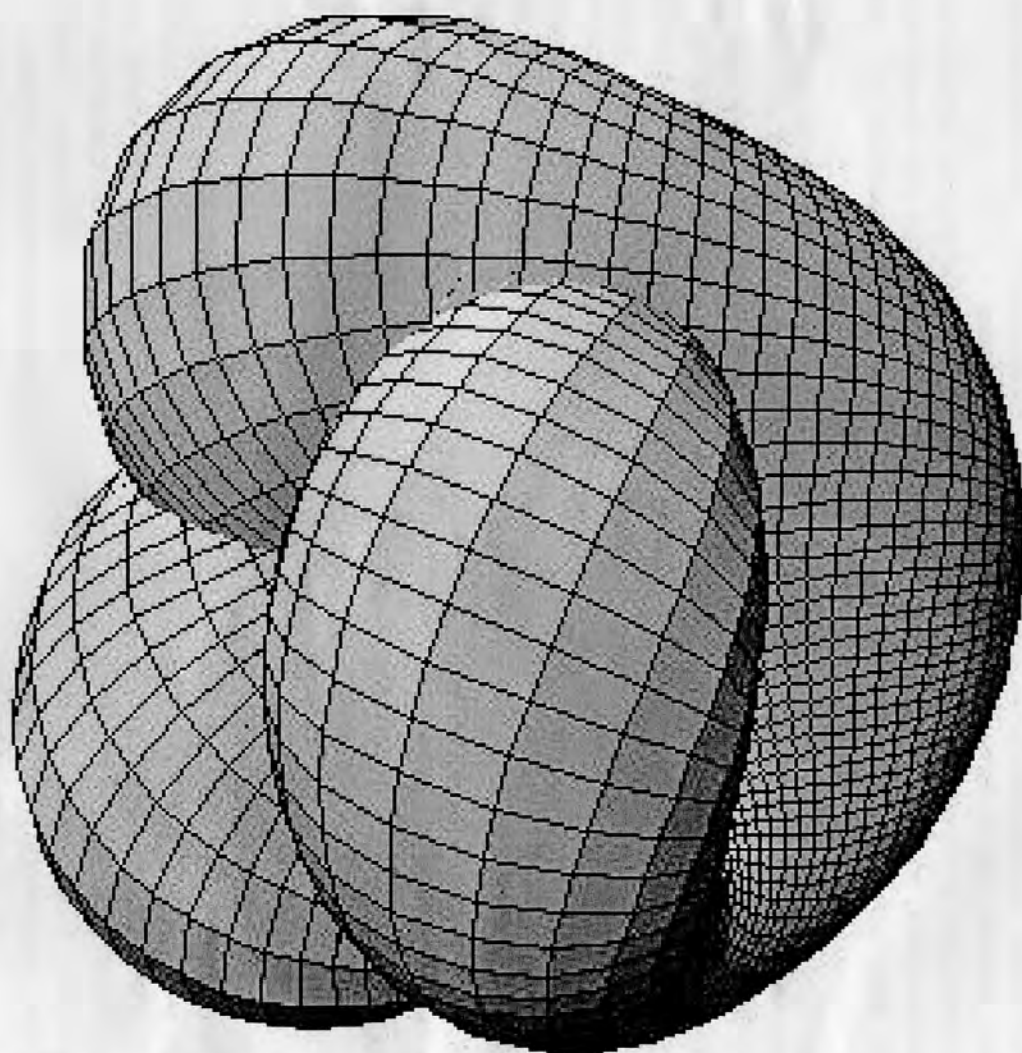
Получили в \mathbb{R}^3 :
 сложную поверхность,
 с границей S^1 ,
 являющуюся
 погружением μ
 в \mathbb{R}^3



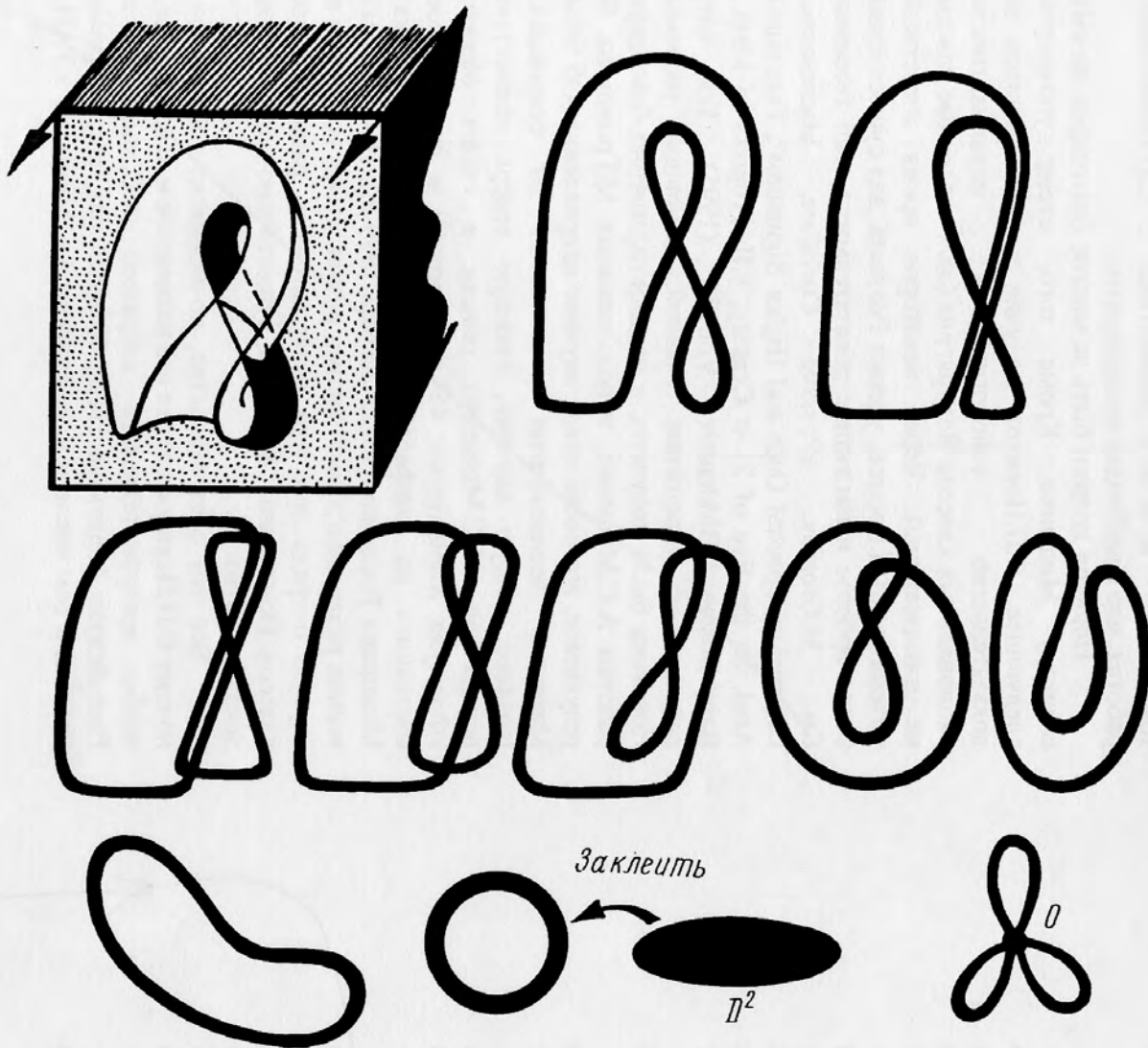
заклеим
 S^1 диском
 D^2 и
 получим
 погружение $\mathbb{R}P^2$

$\mathbb{R}P^2 = \mu + D^2$ в \mathbb{R}^3

эта поверхность
 называется "поверхностью Бойя".



А так как $M_k^2 = \mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2$ (k раз), то мы
 получаем погружение M_k^2 серии Π в \mathbb{R}^3 .

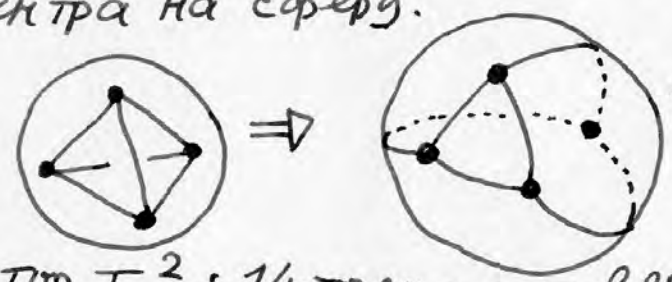


Еще одно изображение деформации границы листа Мебиуса в поднимающейся плоскости.

Почему M^2_K сериш Π нельзя вложить в \mathbb{R}^3 ?
 Легко доказать, что если M^2 — гладк. комп. замкн. попер.
 вложенная в \mathbb{R}^3 (без самопересек.), то она разбивает
 \mathbb{R}^3 на две части, а потому ориентируема.
 Пункт 5 доказан.

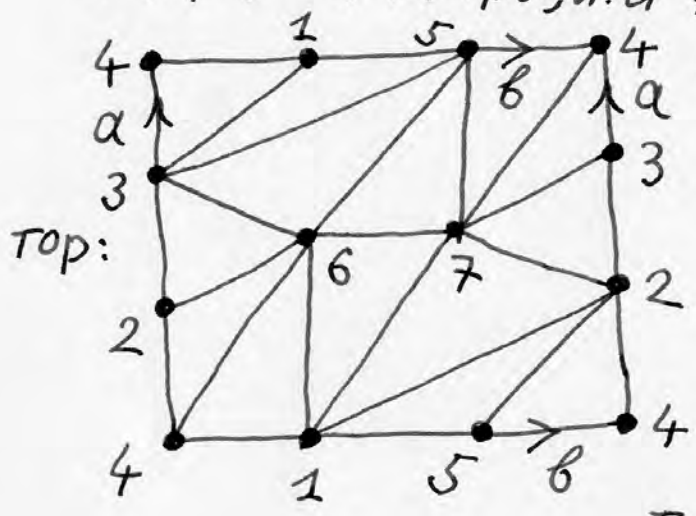
• Минимальные триангуляции $S^2, T^2, \mathbb{R}P^2$. т.е. с миним.
 числом треугольников.

• S^2 : 4 треуг. и 4 вершины. Опшем вокруг
 симплекса (тетраэдра) сферу и спроект. его 4х
 центра на сферу.



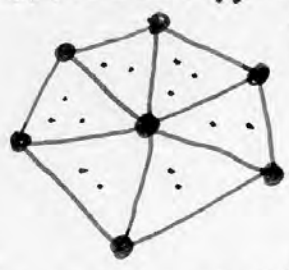
• Докажите
 минимальность
 (кстати, это — полный
 граф: каждая вершина
 соединена с каждой)

• Тор T^2 : 14 треуг. и 7 вершин:



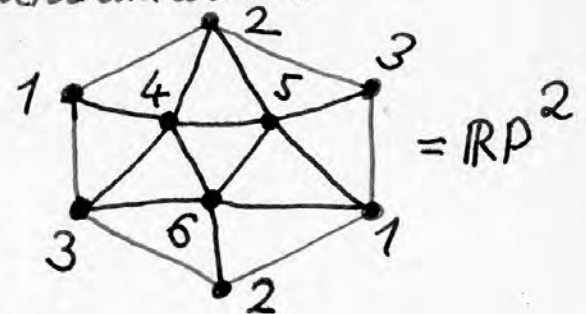
(это — тоже полный граф)
д-во. Пусть n — число треуг.
 в триангул. тора. Тогда число
 ребер равно $3n/2$, т.к. к каж-
 дому ребру примыкают два Δ .
 А всех ребер у n треуг. — $3n$.
 В обязат. курсе есть теор.:
 Эйлерова хар-тер. тора = 0,
 т.е. $\# \text{вер.} - \# \text{ребер} + \# \text{треуг.} = 0$

т.е. $\# \text{вер.} - \frac{3n}{2} + n = 0 \Rightarrow \text{вершин} = n/2$. Всего
 вершин у n треуг. — $3n$, поэтому при склейке M^2 из
 n треуг. в одну вершину на T^2 "в среднем" попадает
 $(3n)/(n/2) = 6$ вершин. А потому \exists вершина на T^2
 кратности ≥ 6 . Но тогда ей "звезда" имеет вид:



т.е. к ней примыкают по крайней
 мере 6 треуг. А тогда число вершин ≥ 7 .
 А мы предьявили триангул. с 7 верш.
 Потому она минимальна.

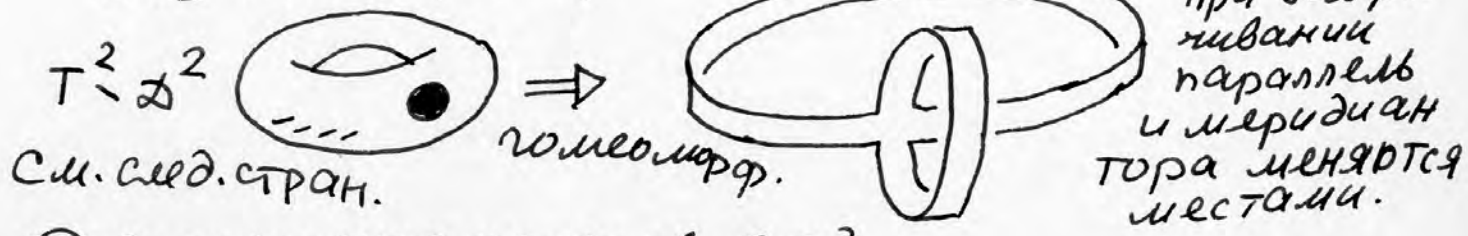
• Задача: миним. трианг. $\mathbb{R}P^2$
 имеет 6 вершин
 и 10 краей. см. рис.



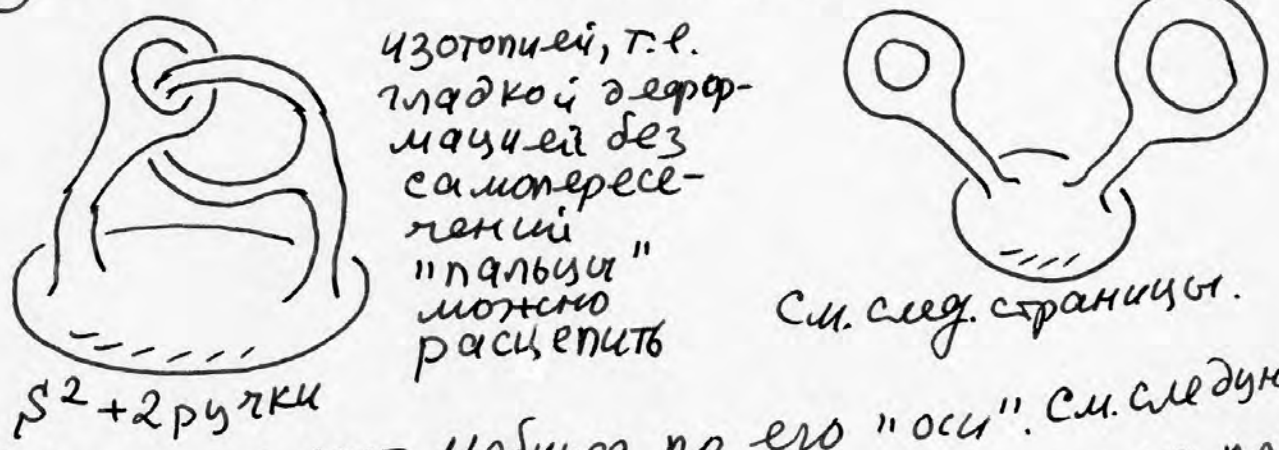
для $\mathbb{R}P^2$ - это тоже полн. граф. Но для других 2-поверхн. их минимал. триангул. не обязана быть полными графом.

• Несколько задач.

① Тор с дыркой можно вывернуть наизнанку в \mathbb{R}^3 (без самопересел.)



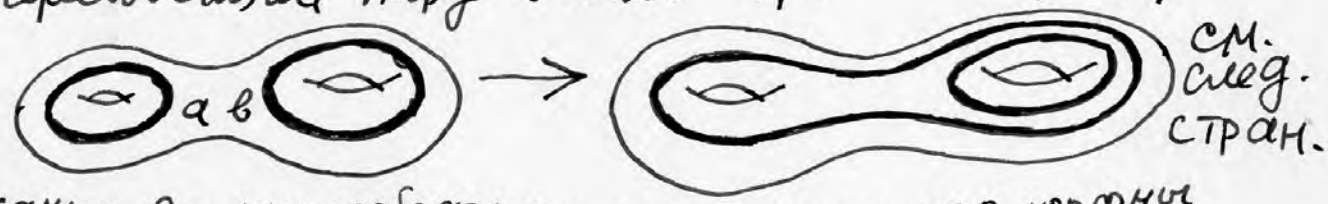
② Расцепление пальцев в \mathbb{R}^3 :



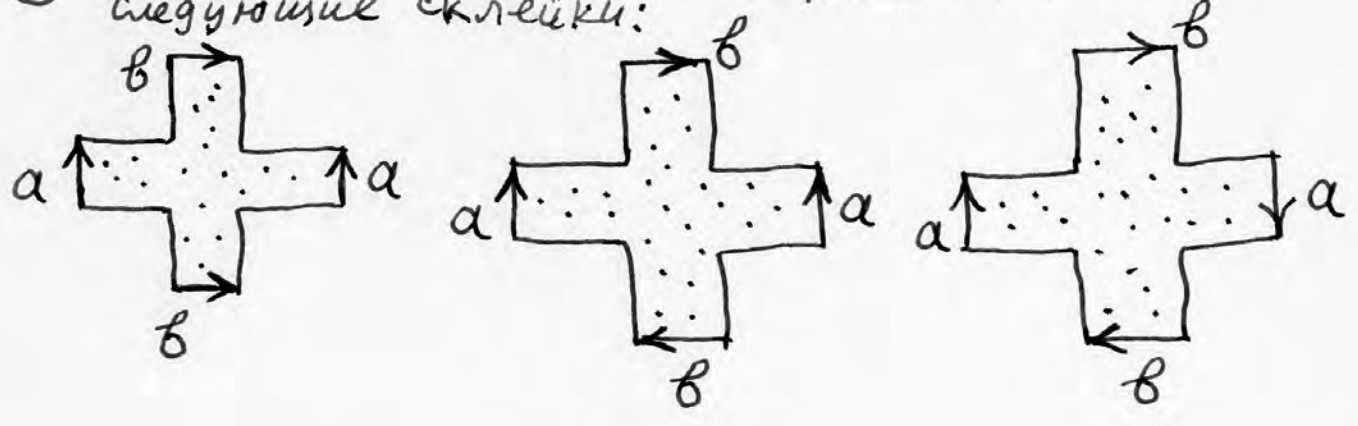
③ Разрезать лист Мебиуса по его "оси". См. следующую стр.

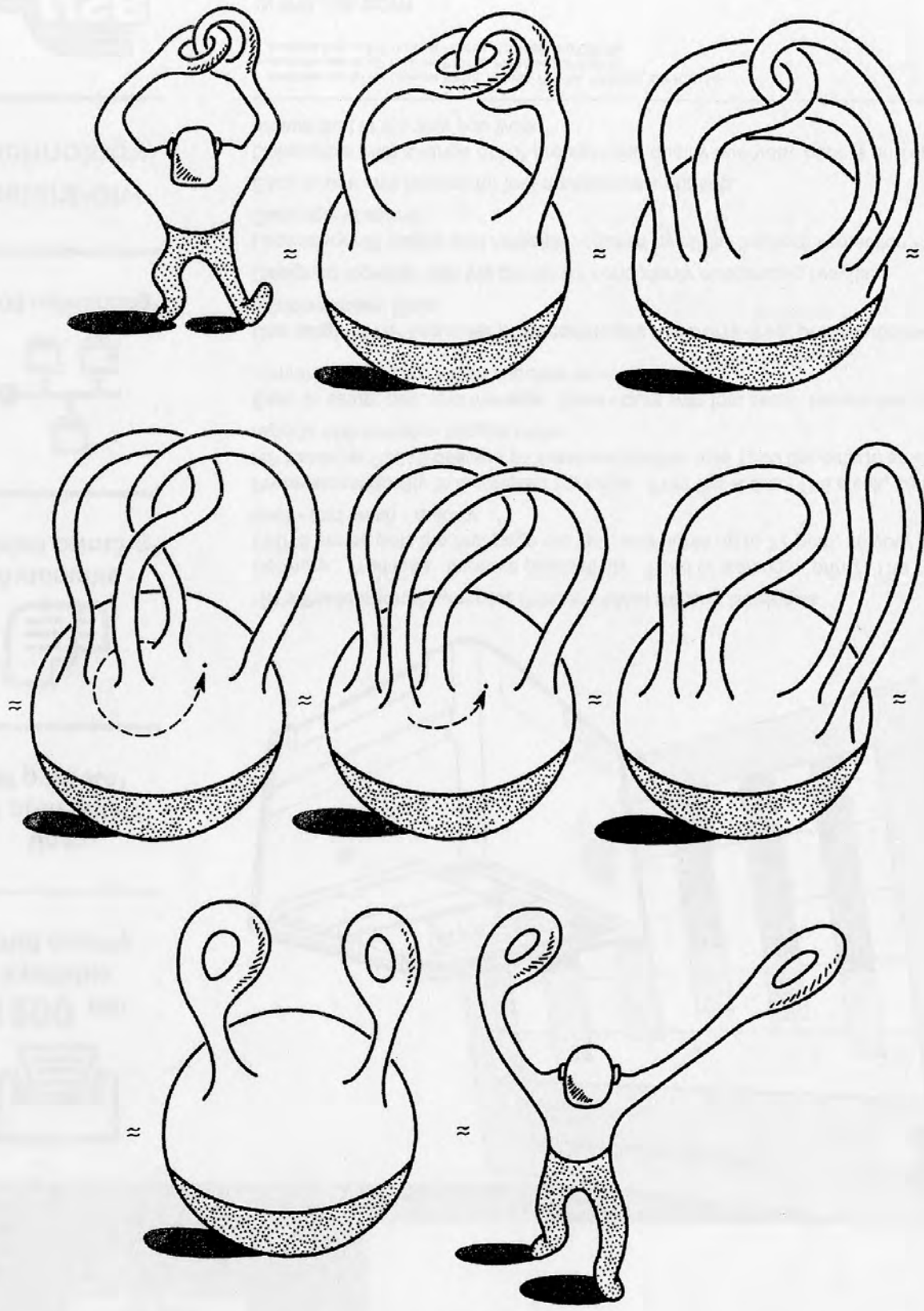
④ Чему гомеоморфно мн-во всех прямых на плоскости.
ответ: листу Мебиуса.

⑤ Построить гомеоморфизм кренделя на себя, переводящую пару циклов a, b в пару b, a .

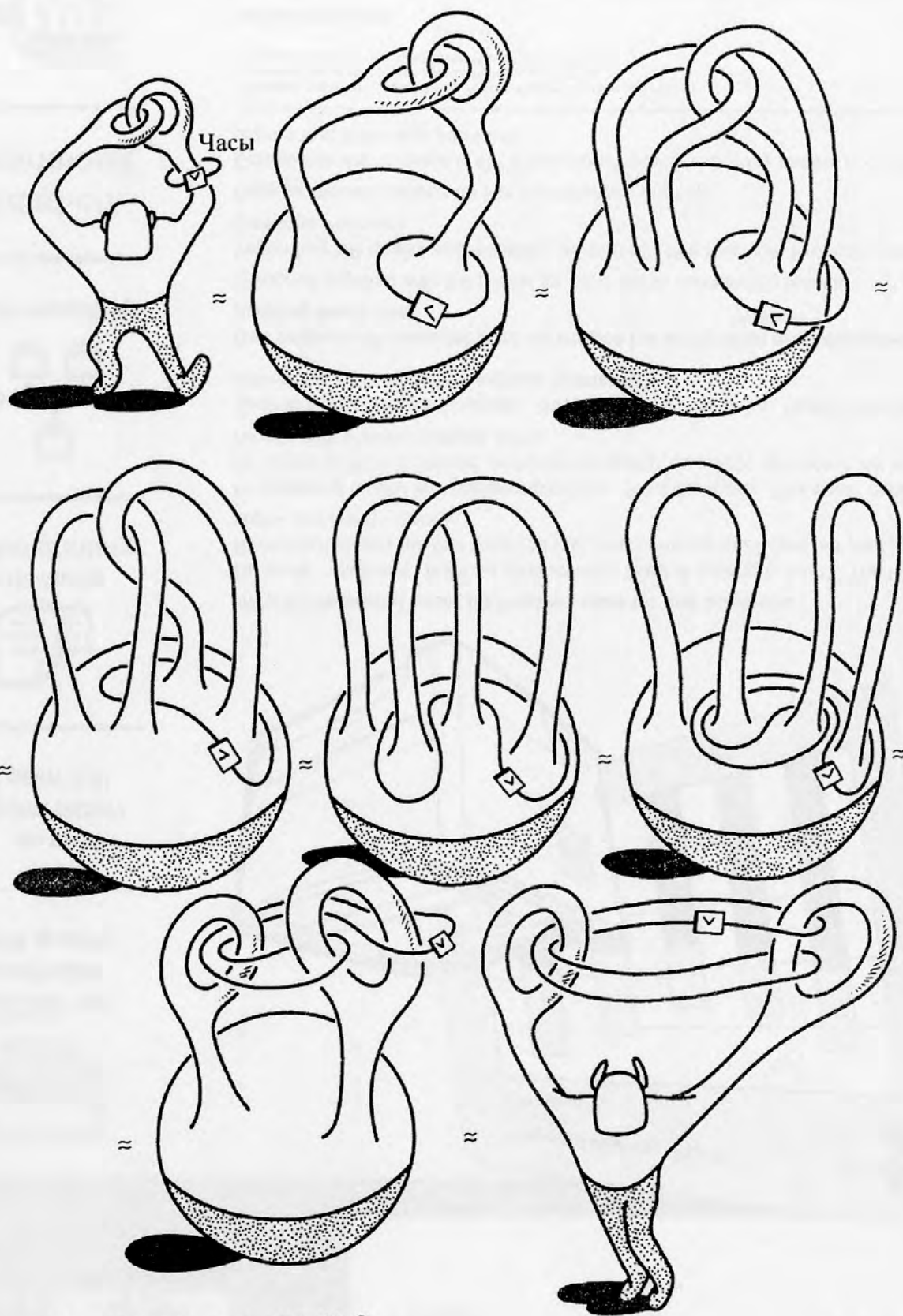


⑥ Какими 2-многообразиями с краем гомеоморфны следующие склейки:

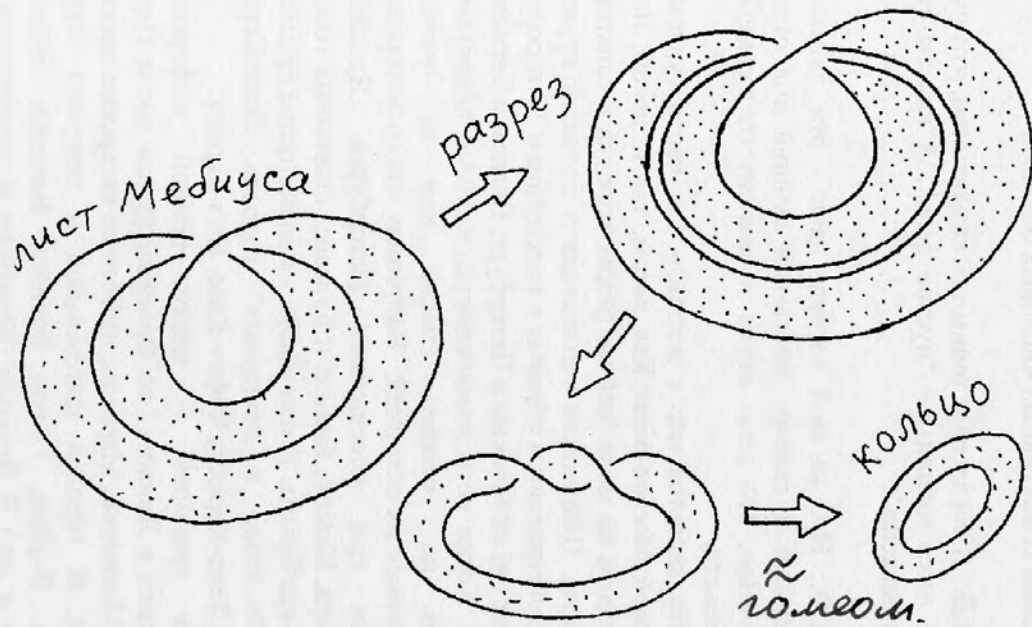




Расцепление наложив в \mathbb{R}^3

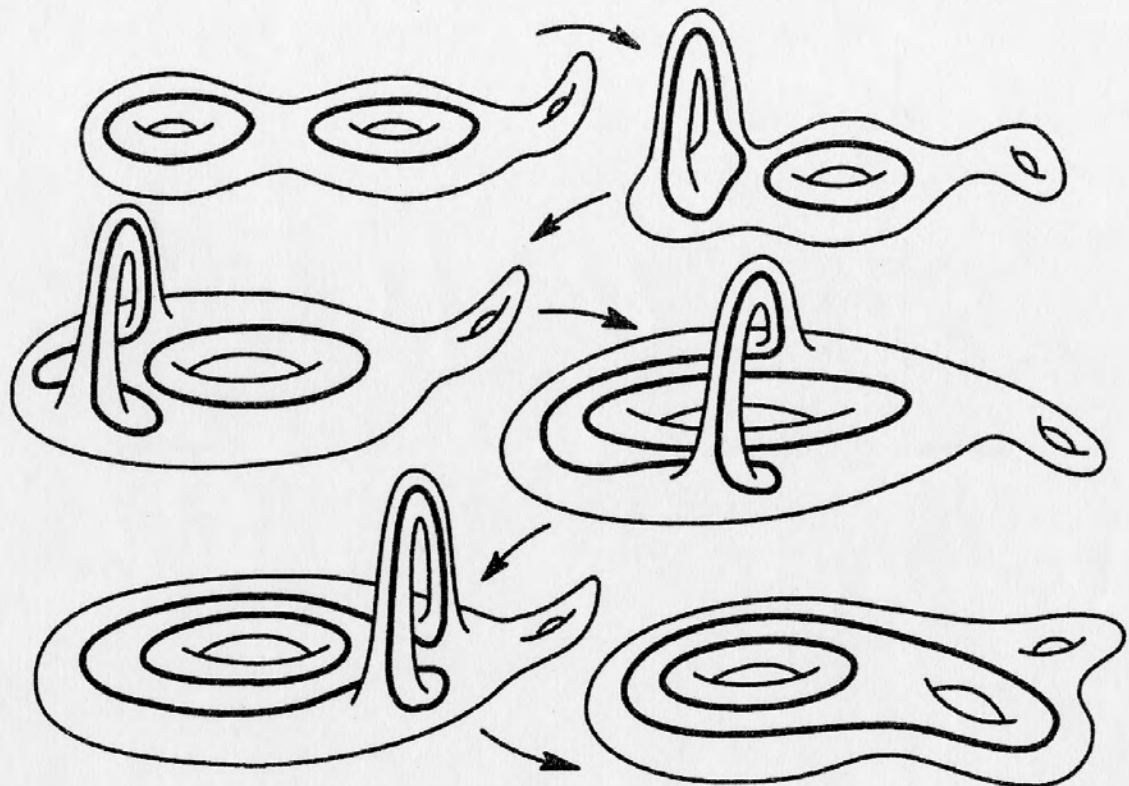


Но если на руке
есть часы (с ремешком), то пальцы конечно
можно расцепить, но ремешок завяжется,
как показано на рис.



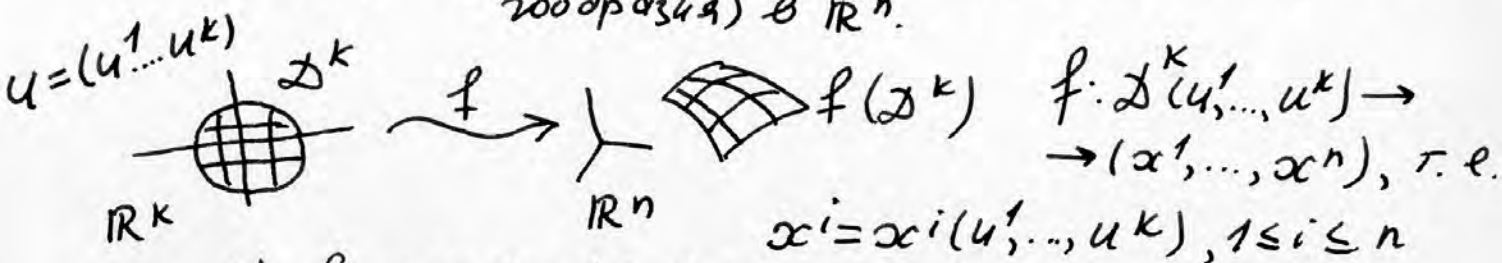
Разрезав 1 раз по осц, получили ленту, закрут. на 2π . Разрезав еще раз по осц ленты, получили уже две такие же ленты (закручен. на 2π), причем эти ленты зацеплены в \mathbb{R}^3 . Докажите. Продолжить разрезания по осц. что получится?

(Каждое из закрученных на 2π колец будет зацеплено с каждым).

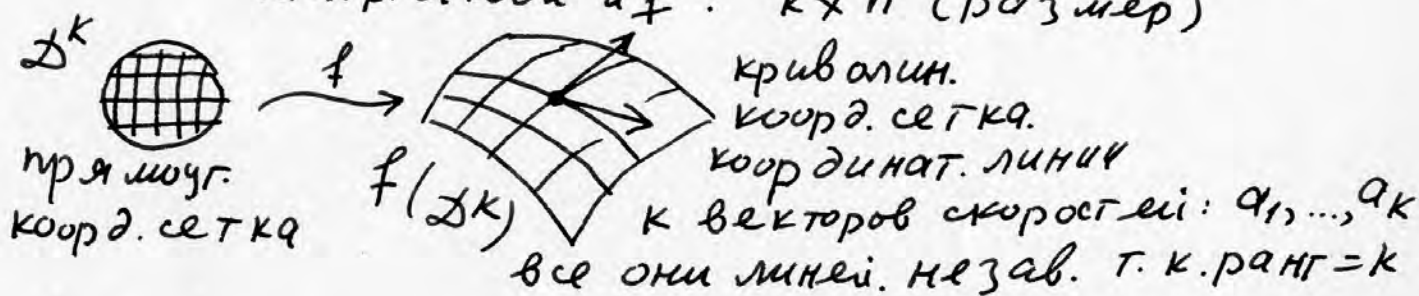


В алгебре такие операции иногда называются операциями Нильсена.

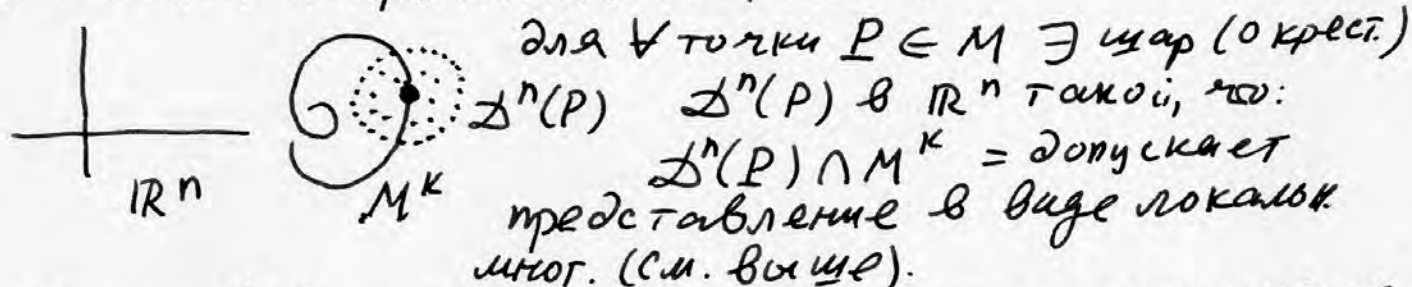
- Следующий шаг. Многомерные k -мерн. поверхн. (многог.) $M^k \subset \mathbb{R}^n$. а) локальные k -мерн. многогб. (подмногообразия) в \mathbb{R}^n .



- 1) f — гомеоморфизм и задает гомеоморфизм D^k на образ $f(D^k)$
- 2) $\text{ранг}(df) = k (= \text{max})$, т.е. $\text{ранг}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^a}\right) = k$
матр. Якоби $df: k \times n$ (размер)

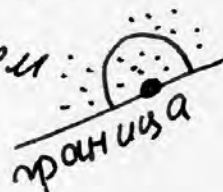


б) Глобал. k -мерн. многог. (поверхн.) в \mathbb{R}^n .



- Как и в $\dim = 2$ определено вложение и погружение многообразий.

• Аналогичн. опред. и k -мерное многог. с краем:



• Теор. (Уитни). "слабая":

пусть дано вложен. M^n в $\mathbb{R}^N, N < \infty$.

тогда \exists погружение $M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ и

\exists вложение $M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$.

• Теор. (Уитни). "сильная". Пусть M^n вложено в \mathbb{R}^N .

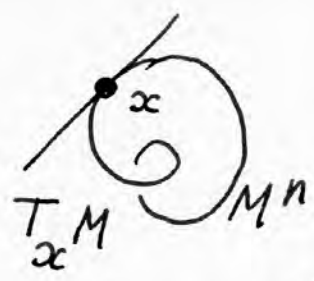
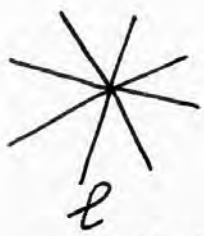
тогда \exists погружение $M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ и

(без д-ва). \exists вложение $M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, при $n > 1$.

• Докажем слабую теор. Уитни. Согласно нашему опред. многог. M^n , оно уже вложено в некоторое \mathbb{R}^N .

Хотим понизить размерность вложения и погружения.

- Начнем с погружения.



идея: берем прямую l в \mathbb{R}^N , берем ортогональную ей гиперплоскость $\mathbb{R}^{N-1}(l)$

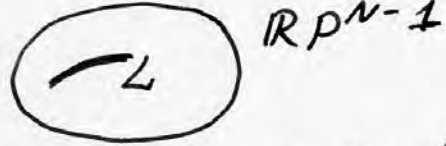
и проектируем M^n вдоль направления l на $\mathbb{R}^{N-1}(l)$.
проекция: $p_l : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{N-1}(l)$.

$\mathbb{R}P^{N-1} = \{l\}$
пучок прямых l через точку O

Хотим, чтобы p_l было погружением M^n в гиперплоскость. Т.е. чтобы матрица Якоби $d(p_l)$ не имела $\neq 0$

ядра на \forall касат. плоскости $T_x M$. Т.е. чтобы $d(p_l) a \neq 0$ для $\forall a \in T_x M$ и $a \neq 0$. Направление l можно менять. Надо выбрать "хорошую" прямую l .

• для этого надо понять - какие прямые l - "плохие". Ясно, что направление (прямая) l является "плохим" \iff в некоторой точке $x \in M$ есть касательная прямая (из $T_x M$), параллельная l . А если рассматривать l ст.ч. до паралл. сдвига, то, попросту, l касается M в точке $x \in M$. И так, все "плохие" прямые l имеют вид: $(x, l(x))$, где $l(x) \in T_x M$. Все они образуют некоторое замкн. подмн-во L в $\mathbb{R}P^{N-1}$:

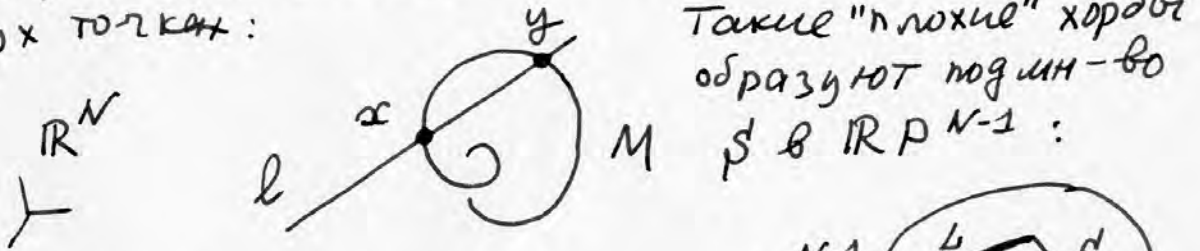


• Ясно, что $\dim L = 2n-1$, т.к. точка $x \in M$ задается n параметрами, а $l(x) \in T_x M$ задается $(n-1)$ параметр.
• По теор. Сарда если $\dim L < \dim \mathbb{R}P^{N-1}$, то мера L в $\mathbb{R}P^{N-1}$ равна нулю. Тогда дополнение к L в $\mathbb{R}P^{N-1} \neq \emptyset$, т.е. найдется "хорошая" прямая l . И так: если $\dim L = 2n-1 < N-1 = \dim \mathbb{R}P^{N-1}$, то берем любую "хорошую" l и проектируем M на гиперплоскость $\mathbb{R}^{N-1}(l)$, ортогон. l . Получаем погружение M^n в \mathbb{R}^{N-1} . Здесь $\text{rang } dp_l = n$, т.е. $\text{Ker}(dp_l) = 0$, а потому p_l явл. локал. диффеом. M^n на образ.

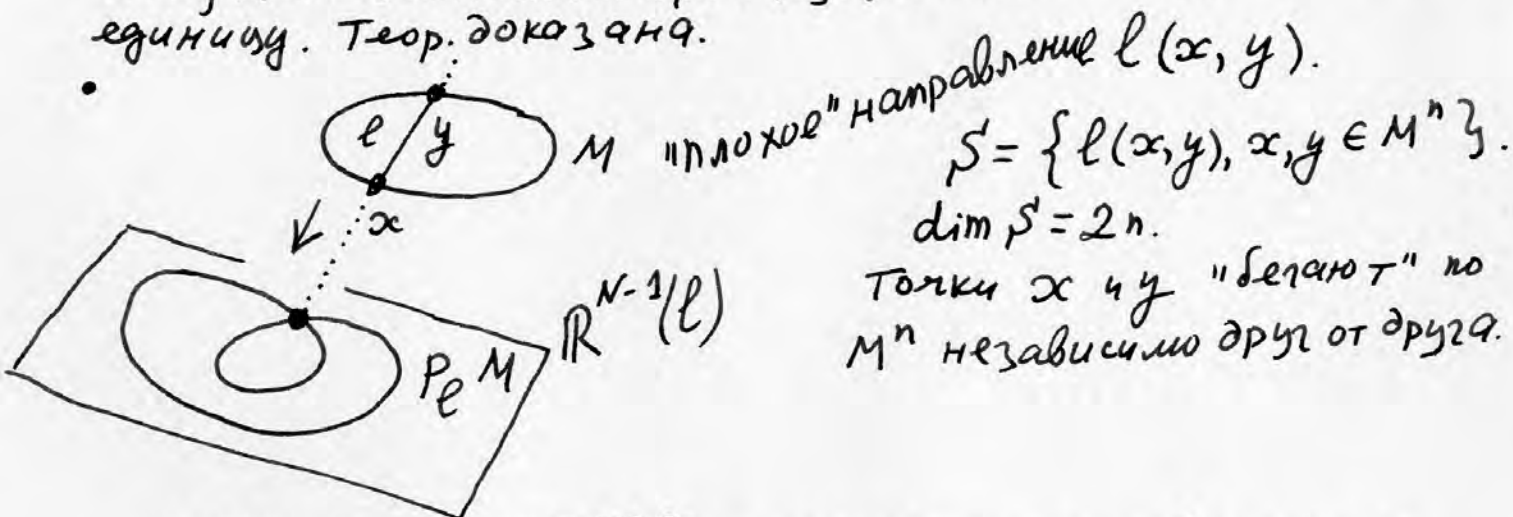
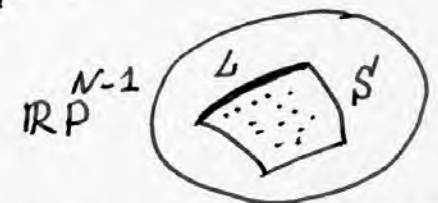
• Продолжали такие проектирования, пока $2n-1 < q-1$. Последний шаг такой: $2n-1 < (2n+1)-1$.

На этом шаге M^n проектируется в $\mathbb{R}^{(2n+1)-1} = \mathbb{R}^{2n}$ (35) и это — погружение. Мы построили погружение M^n в \mathbb{R}^{2n} .

- Первый пункт слаб. теор. Уитни доказан.
- Теперь — о вложении. Идея — та же. Однако к предыдущему надо добавить условие, что проекция P_ℓ не склеивает различные точки x и y из M . Значит к "плохим" прямым ℓ из предыдущ. пункта надо добавить все такие ℓ , что ℓ (рассматриваемая с точн. до паралл. переноса) протыкает M в двух точках:

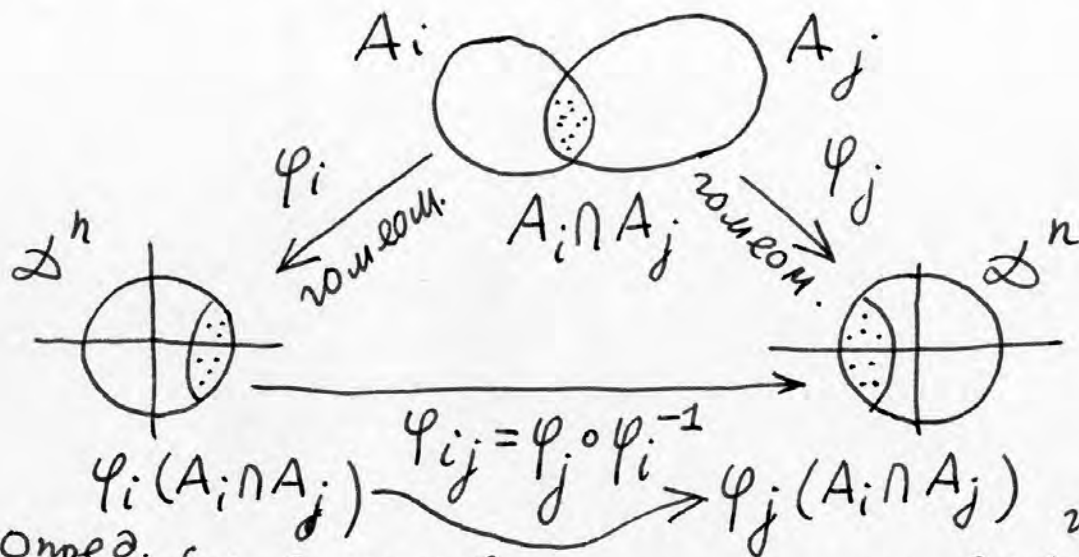


- Ясно, что $\dim S = 2n$, т.к. каждая из точек $x, y \in M^n$ задается n параметрами (координатами). И так, пока $2n < N-1$, можно проектировать M^n в \mathbb{R}^{N-1} , и это будет вложением. Проектируем вдоль $\ell \in \mathbb{R}P^{N-1} \setminus (L \cup S)$, т.е. вдоль "хорошего" направл. ℓ .
- Последняя проекция будет $P_\ell : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$. Получаем вложение. предыдущая оценка ухудшилась на единицу. Теор. доказан.



- Абстрактное опред. топологического и гладкого многогр. при помощи атласа. Без вложения в \mathbb{R}^N .
- Опред. Тополот. хаусдорфово пр-во X назыв. тополог. многообразием, если $X = \cup_i A_i$, где все A_i открыты в X и для каждого i задан гомеомор. $\varphi_i : A_i \rightarrow D^n$, где D^n — диск (шар) в \mathbb{R}^n ; n — одно и то же для всех i и назыв. размерностью X , $n = \dim X$.

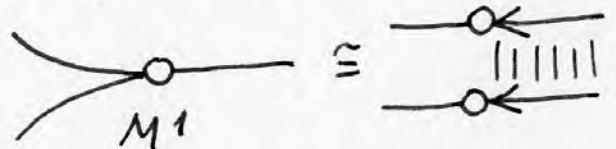
- A_i назыв. локал. картами, φ_i - локал. координаты, а совокупность $\{(A_i, \varphi_i)\}$ - это атлас на X .
- Функции склейки или функции перехода данного атласа:



φ_{ij} - гомотоп. как композиция гомотоморфизмов.

• Опред. $\{\varphi_{ij}\}$ назыв. функциями перехода (склейки) данного атласа.

• пример не хаусдорфова мног.



• Опред. Тополог. мног. назыв.

такими, если все функции перехода атласа явл. гладкими (C^∞). Аналогично определ. многообразия класса C^r , веществ.-аналит., компл.-аналит. (в терминах φ_{ij}).

• Теор. (без д-ва). Существуют тополог., но не гладкие мног. т.е. такие, на которых нельзя задать гладкого атласа.

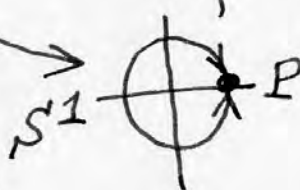
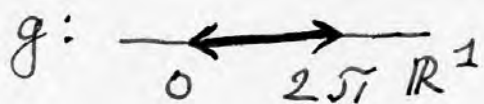
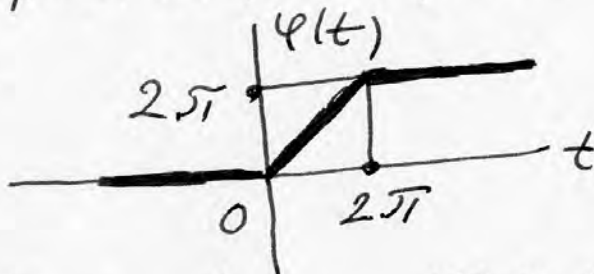
• Теор. (без д-ва). Существуют мног.-я, гомотопичные, но не диффеоморфичные. Пример: станд. сфера S^7 и мног. $M_k^7 \subset S^9$, которое задается так. $C^5 = \mathbb{R}^{10} \supset S^9 = \{ |z_1|^2 + \dots + |z_5|^2 = 1 \}$. Рассм. M_k^7 как пересечение сферы S^9 с поверхностью: $\{ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^3 + z_5^{6k-1} = 0 \}$. Здесь $k = 1, 2, \dots, 28$. Получаются 28 гладких мног., среди которых есть и станд. сфера S^7 . Все остальные 27 глад. мног. ей гомотопичны, но не диффеоморфичны (сферы Милнора).

• Теор. (Уитни). Любое гладкое связное многообразие, заданное с помощью гладкого атласа (т.е. "абстрактно") допускает гладкое вложение в некоторое конечномерное \mathbb{R}^N , $N < \infty$ (т.е. реализ. как гладк. поверхн. в \mathbb{R}^N).

• З-во. Докажем для компактного M^n (для простоты). Сначала — технич. лемма.

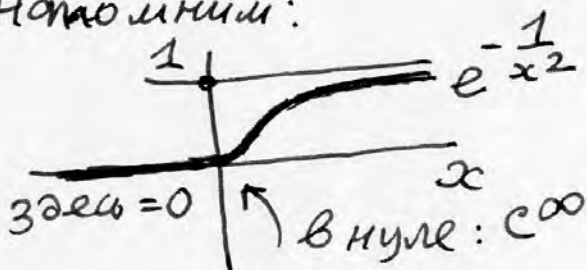
Пусть $D^n \subset \mathbb{R}^n$ — станд. шар (диск). Э гладк. отображ. $h: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$, при котором $h: D^n \rightarrow S^n \setminus P$ является диффеом. (где P — точка, напр. северн. полюс сферы); а $h: \mathbb{R}^n \setminus D^n \rightarrow P$, т.е. все дополн. к шару отобр. в точку P .
З-во. Пусть $n=1$. Строим $h: \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1$. Сначала:

$$g: \begin{cases} x = \cos \varphi(t) \\ y = \sin \varphi(t) \end{cases} \text{ где:}$$



Но g не гладко в точках 0 и 2π . Здесь излом. Надо сгладить.

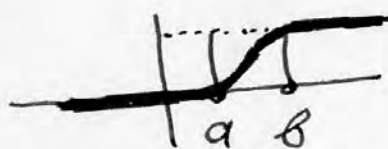
Напомним:



$$e^{\left(\frac{-1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x-b)^2} \right)}$$

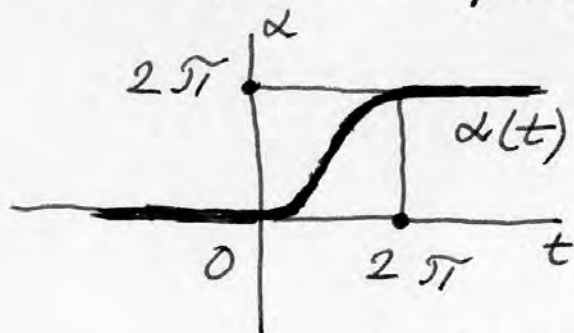


$$\lambda(x) = \int_0^x \rho(x) dx :$$



гладкая функ-я "склеивает" две постоянные.

• Аналогично строим гладкую функцию $\alpha(t)$:



Тогда искомое $h: \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1$ имеет вид:

$$h: \begin{cases} x = \cos \alpha(t) \\ y = \sin \alpha(t) \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty$$

• лемма доказана.

- В силу компактности M^n можно взять его конечное открытое покрытие: $M^n = \bigcup_{i=1}^k A_i$, где A_i гомеом. \mathcal{D}^n .
- Для $\forall A_i$ строим такую отображ. $h_i: M^n \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, где $h_i: A_i \rightarrow \mathcal{D}^n$ явл. диффеоморфизмом, а все дополнит. к A_i отображ. в северн. полюс P сферы S^n :
 $h_i: M^n \setminus A_i \rightarrow P \in S^n$.

- Каждое h_i можно задать как вектор-ф-ю в \mathbb{R}^{n+1} :
 $h_i(x) = (y_i^1(x), \dots, y_i^{n+1}(x))$, где y_i^i - декарт. к-ты в \mathbb{R}^{n+1} .

- Теперь строим окончательное $h: M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$:

$h(x) = (h_1(x), \dots, h_k(x)) \in \mathbb{R}^{k(n+1)}$, т.е. $N = k(n+1)$.

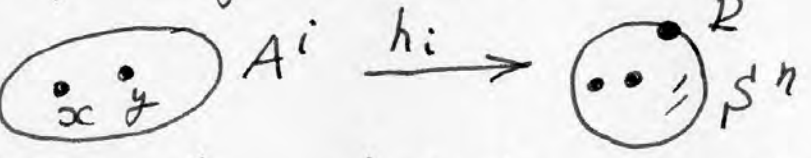
- Утв. Отобр. h явл. погружением M^n в \mathbb{R}^N .
до-во. матр. Якоби (дифференциал) dh имеет вид:

$dh = (dh_1, \dots, dh_k)$, где $dh_i(x)$ - матр. Якоби h_i .
 Тогда $\text{rang } dh(x) = n (= \max)$, т.к. точка x попадает в какую-то карту A_i :



$h_i: x \rightarrow S^n \setminus P$ и явл. диффеом. локально около x , а тогда $\text{rang } dh_i(x) = n$, а тогда и $\text{rang } dh(x) = n$, т.к. $dh_i(x)$ - это "часть" матрицы $dh(x)$.

- Утв. Если $x \neq y$, то $h(x) \neq h(y)$, т.е. h -вложение.



$h(x) = (\dots h_i(x) \dots)$ Но: $h_i(x) \neq h_i(y)$, т.к.
 $h(y) = (\dots h_i(y) \dots)$ обе эти точки $\in S^n \setminus P$,
 где h_i - диффеом.

- б) точки x и y "далеки", т.е. \exists карта A_i , так что:
 $x \in A_i, y \notin A_i$, т.е. $y \in M \setminus A_i$. Тогда:

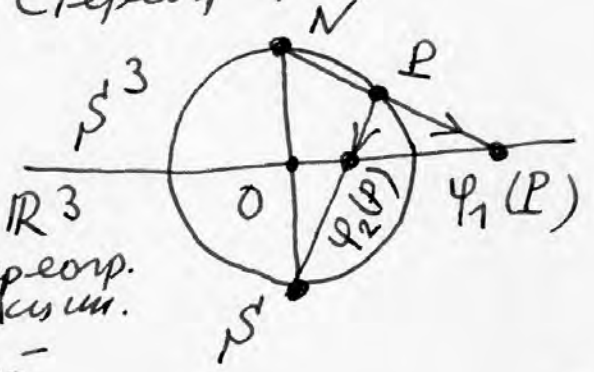
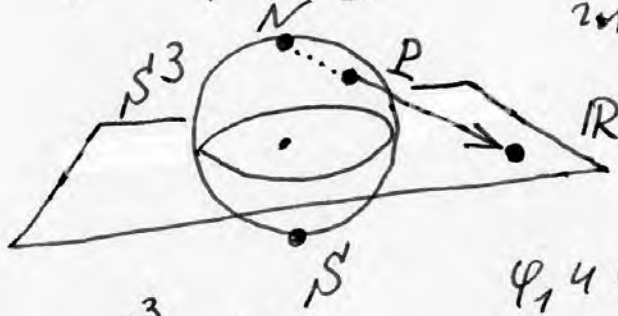
$h(x) = (\dots h_i(x) \dots)$ Здесь $h_i(x) \neq P$, т.к.
 $h(y) = (\dots P \dots)$ $h_i(x) \in S^n \setminus P$.

• Теор. Уитни доказана.

• Кратко о 3-мерн. мног. Классифик. 3-мерн. мног. - нерешенн. и популярн. проблема. "Список" кодов всех $\{M^3\}$ известен (см. ниже), но в нем каждое мног. M^3 представлено множеством "кодов". И алгоритмически различна - когда два "кода" задают одно и то же мног. (или - разные мног.) - пока не удается.

• Примеры 3-мног.

• 1. Сфера S^3 : $x_1^2 + \dots + x_4^2 = 1$ в \mathbb{R}^4 . Тогда $S^3 = A_1 \cup A_2$, где $A_1 \approx A_2 \approx D^3$ и функция клейки этого атласа - таджая. Стереогр. проекция:

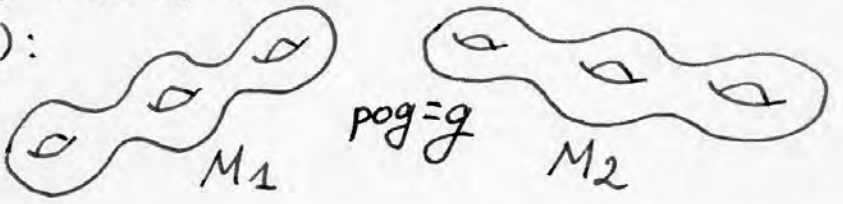


$A_1 = S^3 \setminus N$
 $A_2 = S^3 \setminus P$

Ψ_1 и Ψ_2 - стереогр. проекции.
 ф-я перехода Ψ_{12} - таджая. (докажите).

- $\mathbb{R}P^3$ (проект. пр-во) - таджое. 2-во - позже. сразу $\mathbb{R}P^n$.
- $M^2 \times S^1$. Вообще, если M^m и N^n - таджк. мног., то $M \times N$ - таджк. мног. $\dim = m + n$.

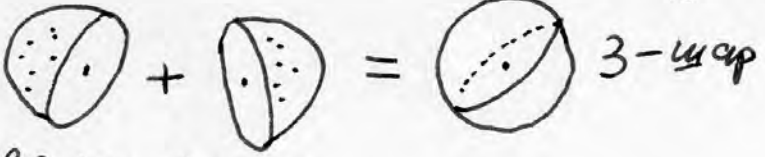
• Теор. о строении произвол. компакт. таджк. связн. 3-мног. D -во дадим позже. Рассм. в \mathbb{R}^3 два экземпл.
 $M^2 = S^2 + g$ (ручек):



и рассм. их "заполнения", т.е. ориентируемые или

в \mathbb{R}^3 3-мног. Π_1 и Π_2 , т.е. $\partial \Pi_1 = M_1$, $\partial \Pi_2 = M_2$. Пусть $h: M_1 \rightarrow M_2$ - произвол. диффеом. M_1 на M_2 . Склеим Π_1 и Π_2 по этому диффеом. их грани.

Получим 3-мног. $Q^3 = \Pi_1 \cup_h \Pi_2$, таджк. компакт. без края.



две половинки шара

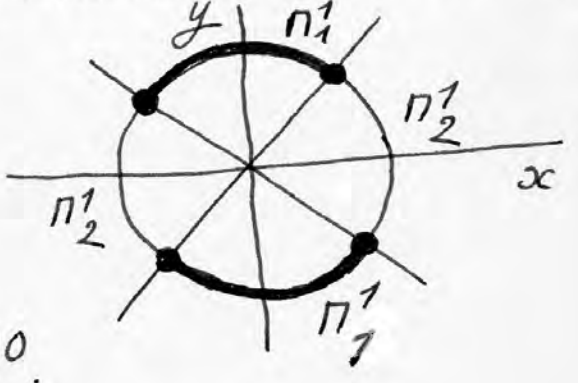
• Теор. (д-во потока). \forall макс. комп. связн. замкн. 3-многог. Q^3 можно представить в виде $\pi_1 \cup_h \pi_2$ для некоторого $g \geq 0$ и дифф. $h: M_1 \rightarrow M_2$, где $M_1 \approx M_2 \approx S^2 + g$ (ручек).

• Важн. пример. Теор. сфера $S^3 = (\text{полноторие}) \cup_h (\text{полноторие})$. Полноторие — это заполн. тор T^2 в \mathbb{R}^3 , т.е.

$S^1 \times D^2$:



• Начнем с нашей аналогии:



$S^1 \subset \mathbb{R}^2(x, y)$. $S^1 = (x^2 + y^2 = 1)$.

Рассм. "конус": $|x| = |y|$ на \mathbb{R}^2 . Это — две прямые (биссект.)

• Пересечем этот конус K с S^1 :

$K \cap S^1 = \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ |x| = |y| \end{cases} = \bullet \bullet = S^0 \times S^0$.

Тогда $S^1 = \pi_1^1 \cup \pi_2^1 = \underbrace{(|x| \leq |y|)}_{S^0 \times D^1} \cup \underbrace{(|x| \geq |y|)}_{S^0 \times D^1} = (S^0 \times D^1) \cup (S^0 \times D^1)$.

А теперь рассм. $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Аналог.

• $S^3 \subset \mathbb{R}^4(x, y, u, v) = \mathbb{C}^2(z, w)$, где $z = x + iy, w = u + iv$.

$S^3 = (|z|^2 + |w|^2 = 1) = (x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1)$.

Рассм. конус K^3 в \mathbb{R}^4 : $K = (|z| = |w|): x^2 + y^2 = u^2 + v^2$.

Пересечем K со сферой S^3 :

$(|z|^2 + |w|^2 = 1; |z| = |w|) \Leftrightarrow |z| = |w| = 1/\sqrt{2}$. И так:

• $K \cap S^3 = (z = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}, w = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\psi}) = T^2 = S^1(\varphi) \times S^1(\psi)$.
тор

Тогда S^3 есть объединение двух 3-многог. с краем:

$S^3 = (|z| \leq |w|) \cup (|z| \geq |w|) = \pi_1^3 \cup \pi_2^3$.

Здесь $\pi_1 = (|z|^2 + |w|^2 = 1; |z| \leq |w|)$;

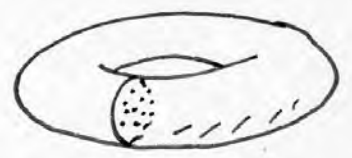
$\pi_2 = (|z|^2 + |w|^2 = 1; |z| \geq |w|)$.

• Тогда $\pi_1 \approx \pi_2 = \text{полноторие}$, т.е. $S^1 \times D^2$. В самом деле:

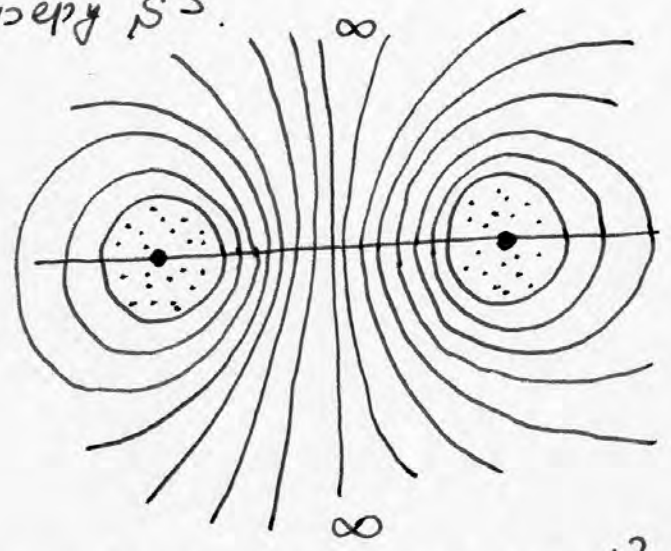
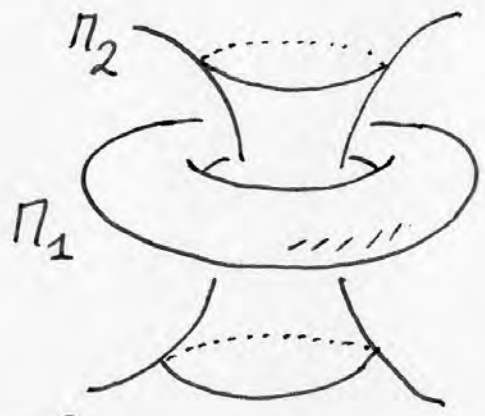
на сфере $z = r e^{i\varphi}, w = \sqrt{1-r^2} e^{i\psi}$; в многообр. π_1 :

$|z| \leq |w| \Leftrightarrow r^2 \leq 1-r^2$, т.е. $r \leq 1/\sqrt{2}$, а (φ, ψ) — произв.

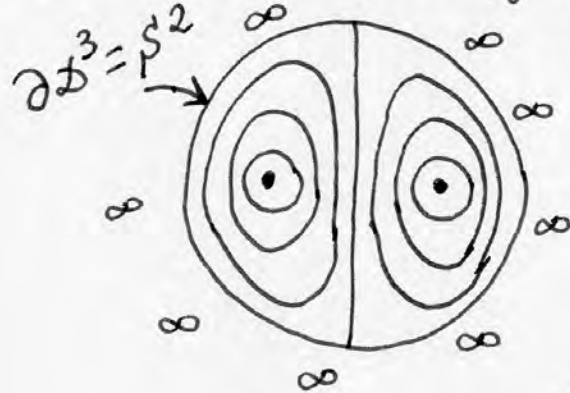
Это и есть полноторие:



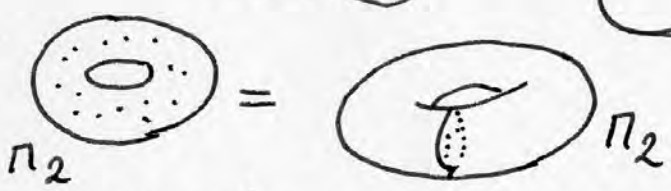
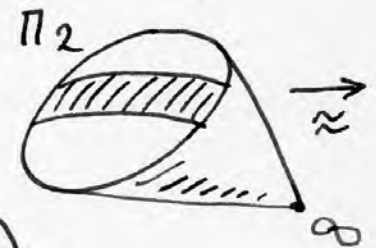
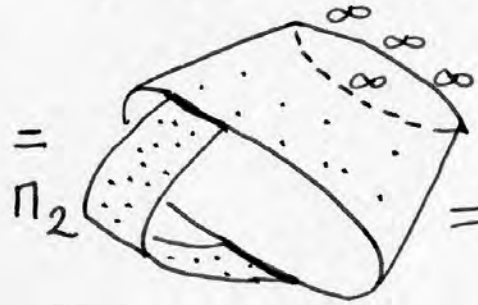
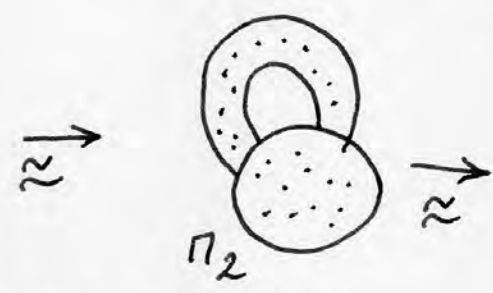
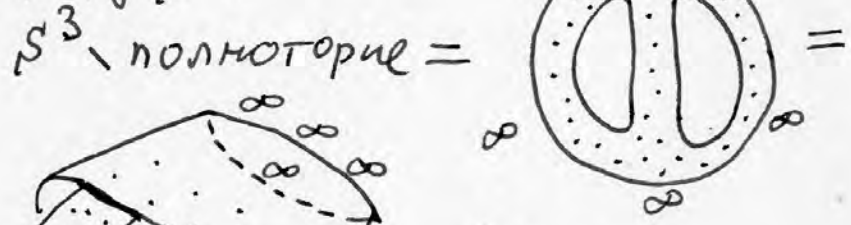
- И так: $S^3 = \Pi_1 \cup_h \Pi_2 =$ склейка двух полноторий.
- как они склеены по их границе? Рассм. инволюцию $\sigma: S^3 \rightarrow S^3$, где $\sigma(z, w) = (w, z)$. Тогда $\sigma \Pi_1 = \Pi_2$ и $\sigma \Pi_2 = \Pi_1$ т.е. полнотория Π_1 и Π_2 меняются местами. Т.е. на границе тора меняются местами параллель и меридиан.
- $\sigma: T^2 \rightarrow T^2$ с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$: $\begin{cases} \text{паралл.} \rightarrow \text{мерид.} \\ \text{мерид.} \rightarrow -\text{паралл.} \end{cases}$
- Натянутое изображ. в \mathbb{R}^3 , пополнено ∞ , т.е. ∞ удаленной точкой, что и дает сферу S^3 .



- \mathbb{R}^3 полем. 3-шару D^3



отождествляя граничн. сферу S^2 в точку, получаем 4-шару D^4 сферу S^3 .



- с этим разбиением сферы в сумму двух полноторий связано т.н. расслоение Хопфа: $p: S^3 \rightarrow S^2$ со слоем S^1 .

$$S^3 = \{ |z|^2 + |w|^2 = 1 \} \subset \mathbb{C}^2(z, w).$$

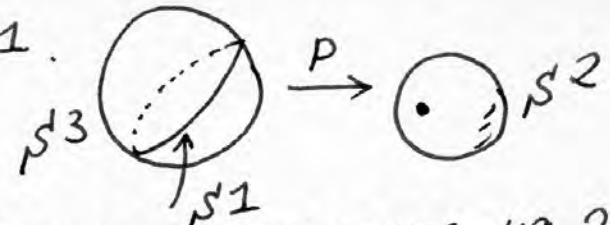
$$p(z, w) = z/w = \tilde{\gamma} \in \mathbb{C}^1 \cup \infty = \mathbb{R}^2 \cup \infty = S^2.$$

при проекции p в одну точку переходят точки вида:

$$(e^{i\psi} z, e^{i\psi} w) \rightarrow \tilde{\gamma} = z/w$$

т.е. точки окружности S^1 .

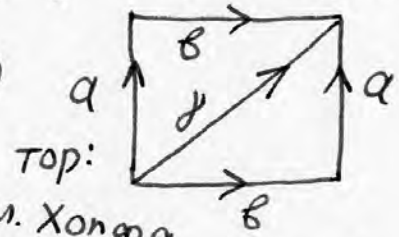
$$\bar{p}^{-1}(z) = (e^{i\varphi} z, e^{i\varphi} w)$$



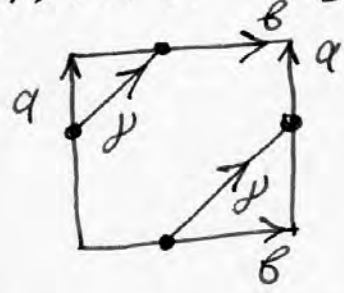
- $S^3 = \Pi_1 \cup \Pi_2$, где каждое полноторие расслоено на 2-тора, стягивающиеся на осевую окружность. Каждый из этих 2-торов расслоен на окружности, являющиеся слоями расслоения Хопфа. И эти окружности на 2-торе являются траекториями типа (1,1), т.е. 1 раз обходят параллель и 1 раз - меридиан тора:



γ -слой рассл. Хопфа



тор:



- Пример многомер. глад. мног. Теор. Проект. пр-ва $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$ - гладк. многообразия.

о-во. $\mathbb{R}P^n = \bigstar_{\mathbb{R}^{n+1}} \ell \cong \ell = \{ \lambda(x^1, \dots, x^{n+1}) \mid \lambda \neq 0 \text{ и } \exists x^i \neq 0 \}$.

Атлас на $\mathbb{R}P^n$ имеет вид: $\mathbb{R}P^n = A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}$, где локал. карта $A_i = \{ \ell : x^i \neq 0 \}$, координатн. отображ.

$\varphi_i : A_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет вид:

$$\varphi_i : \lambda(x^1, \dots, x^{n+1}) \rightarrow \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right) \in \mathbb{R}^n \left(\hat{\alpha}_1 \dots \hat{\alpha}_i \dots \hat{\alpha}_{n+1} \right)$$

здесь: $\alpha_k = x^k / x^i$, при $k \neq i$. Ясно, что $\varphi_i : A_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ гомеоморфизм

- Функции склейки на $A_i \cap A_j = \{ \ell(x^i \neq 0, x^j \neq 0) \}$.

пусть $A_i(\alpha_k, k \neq i)$ и $A_j(\beta_k, k \neq j)$.

тогда на пересечении:

$\beta_k = x^k / x^j, k \neq j$ и $\alpha_k = x^k / x^i, k \neq i$, отсюда:

$$\alpha_k = \frac{x^k / x^j}{x^i / x^j} = \frac{\beta_k}{\beta_i}; \quad \alpha_j = \frac{x^j / x^i}{x^j / x^j} = 1 / \beta_i$$

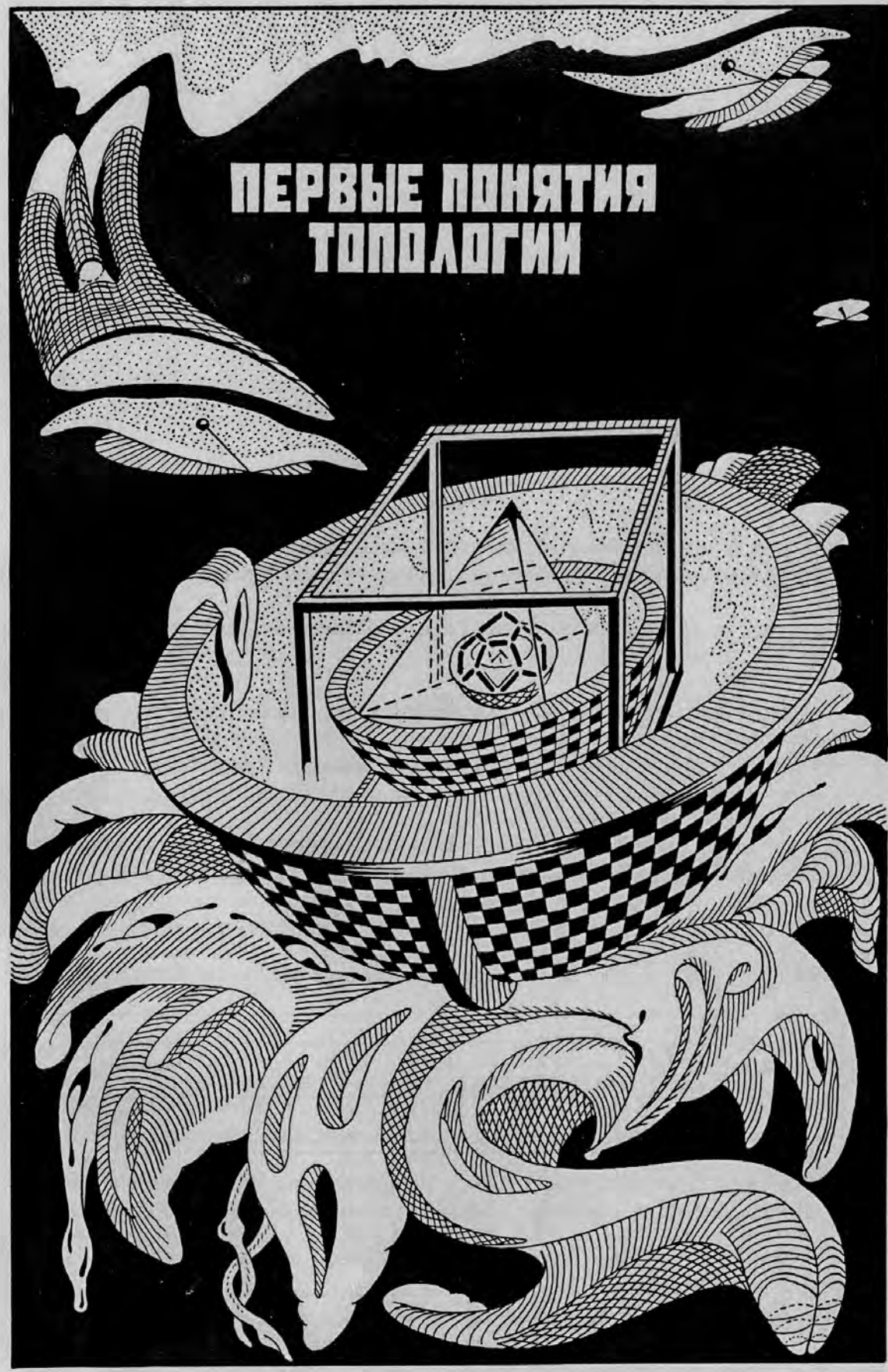
Все эти функции гладкие и даже веществ. аналитич.

- Аналогично - для $\mathbb{C}P^n$. При этом $\mathbb{C}P^n$ всегда ориентир., а $\mathbb{R}P^n$ - ориентир. при n -нечет. и неориент. при n -четно. докажем далее.

- Проблема алгоритмиз. классиф. n -мерн. гладк. мног. (без о-ва). • При $n=1$ классиф. есть. При $n=2$ тоже есть: см. теорему выше. При $n=3$ - ? неизвестно.

Налимая с $n=4$ (и выше) проблема классиф. мажк. инот. M^n (с точн. до диффеом. или гомеомр.) алгоритмически неразрешима (А.А. Марков). И так:

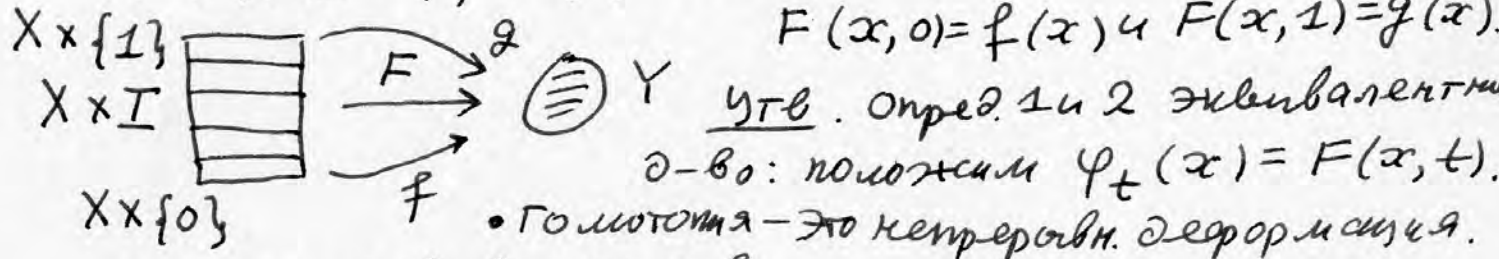
n	1	2	3	4	5	6	7
	+	+	?	-	-	-	-



ПЕРВЫЕ ПОНЯТИЯ ТОПОЛОГИИ

• Гомотопия и гомотопическая эквивалентность.
Опред. 1. f и $g: X \rightarrow Y$ гомотоп. эквивал. (гомотопии), $f \sim g$, если \exists семейство отображ. $\varphi_t: X \rightarrow Y, 0 \leq t \leq 1$, непрерывно по t и x одновременно, и так, что: $\varphi_0 = f$ и $\varphi_1 = g$.

Опред. 2. f и $g: X \rightarrow Y$ гомотопны, если \exists отображ. $F: X \times I \rightarrow Y$, непрерывн. на "цилиндре" $X \times I$ и такое, что: $F(x, 0) = f(x)$ и $F(x, 1) = g(x)$.



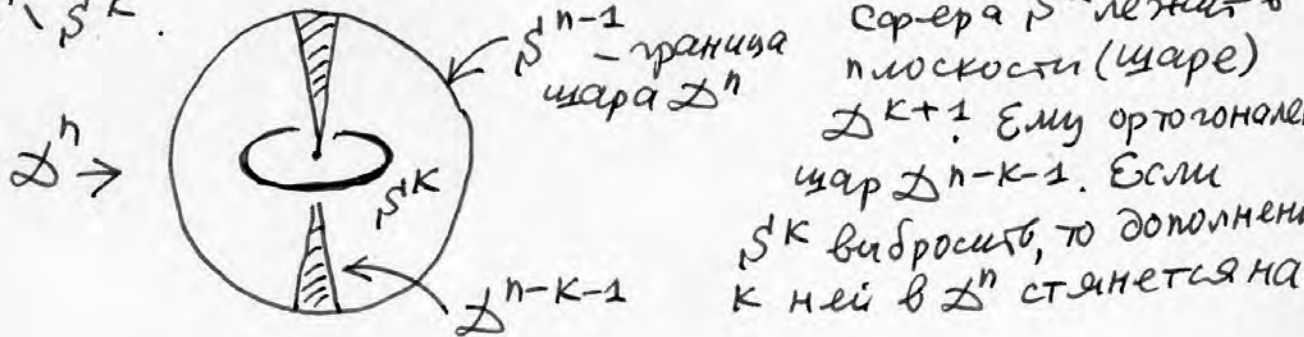
• Гомотопия - это непрерывн. деформация.
 • Гомотопия эквивал. пр-ств.
Опред. Два топол. пр-ва X и Y назыв. гомотопически эквивал., если $\exists f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$, оба непрерывн. и так, что: $g \circ f$ гомотопно id_X (тожд. отображ. X на себя), а $f \circ g$ гомотопно id_Y .

- Примеры гомотопия эквивален. пр-ств.
- ① $\mathbb{R}^n \sim *$, $\mathbb{Z}^n \sim *$ (эквивал. также $*$).
- ② Кольцо $S^1 \times \mathbb{Z}^1 \sim S^1$ (окружность).
- ③ лист Мебиуса M гомотоп. эквив. окружн. S^1 :

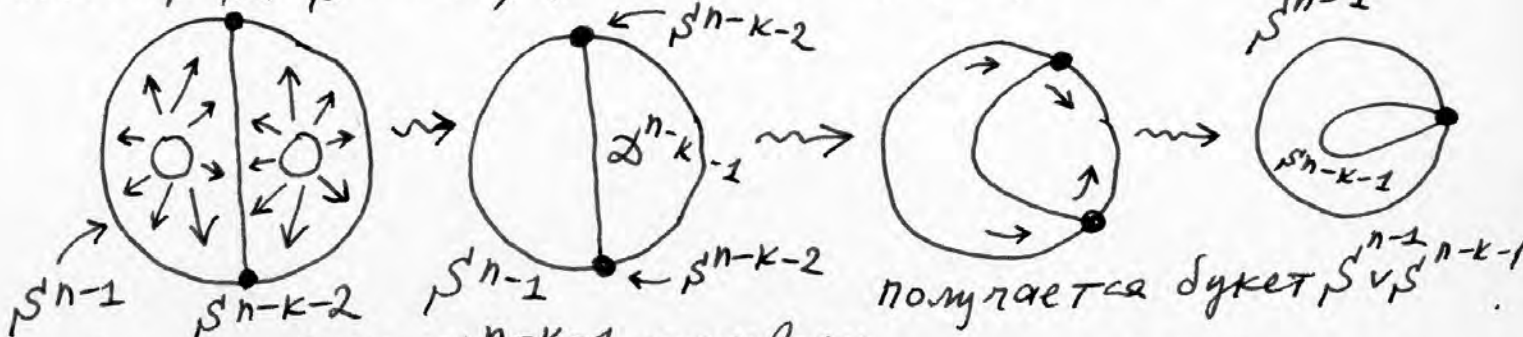
Вывод: размерность и ориентир. (неориент.) не являются гомотопическими инвариантами. могут "меняться".

- ④ Тор T^2 с дыркой гомотоп. эквив. "букету окружн.": $S^1 \vee S^1$, т.е. $T^2 \setminus \mathbb{Z}^2 \sim S^1 \vee S^1$.
Опред. "Букет" $X \vee Y$ получается склейкой двух точек: $x \in X$ и $y \in Y$.

- ⑤ $\mathbb{R}^n \setminus S^k \sim S^{n-1} \vee S^{n-k-1}$, д-во. $\mathbb{R}^n \setminus S^k$ гомотопн. $\mathbb{Z}^n \setminus S^k$.



сфере S^{n-1} (границу D^n) и диск D^{n-k-1} , граница которого (т.е. сфера S^{n-k-2}) приклеена к сфере S^{n-1} .



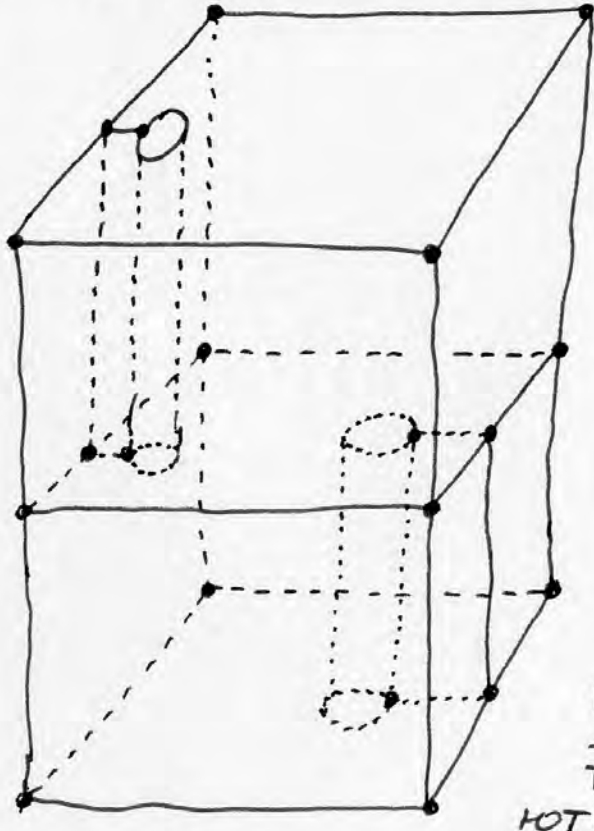
Границу диск D^{n-k-1} ставим по сфере S^{n-1} в точку. Получается сфера S^{n-k-1} .
 • Например, $\mathbb{R}^2 \setminus S^0 \sim S^1 \vee S^1$; $\mathbb{R}^3 \setminus S^1 \sim S^2 \vee S^1$.

⑥ $S^n \setminus S^k \sim S^{n-k-1}$. Вытекает из предыдущ. задачи.

⑦ сфера S^n с двумя отождествл. точками:
 $S^n \xrightarrow{\text{two points}} S^n \sim S^n \vee S^1 = \text{букет } S^n \vee S^1$

Вообще: если в связном тополог. пр-ве X (линейно связном) отождествить две точки, то получится букет X и окружности: $X \vee S^1$ (докажите).

⑧ "Дом Бинга" по топологии. Эквивал. точке (т.е. стягиваем).

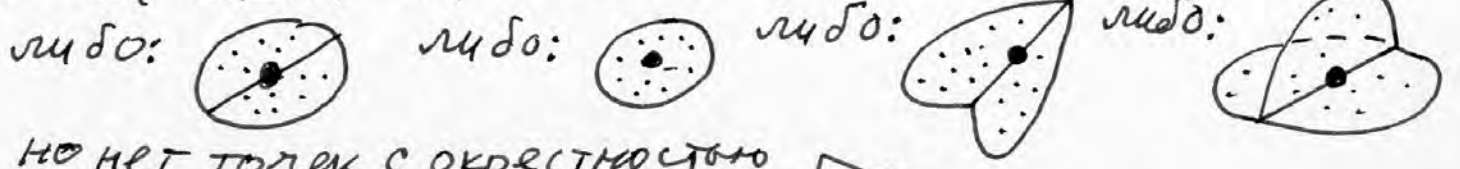


Это - 2-мерн. комплекс. состоит из стенок куба и его плоского сечения (на половине высоты) с двумя дырками. В верхней грани куба сделана дырка, от ее границы идет цилиндр до дырки на сечении. Цилиндр соединен полоской со стенкой куба. То же самое - в нижней половине куба.
 Т.е. в "доме" - две комнаты, сверху и снизу. В каждой комнате - цилиндр с полоской.

Утв. Дом Бинга по топологии эквив. точке. д-во. В яблоко врезаны два червяка - сверху и снизу. Им запрещено "встретаться", т.е. касаться друг друга. Они съедают все яблоко и остается дом Бинга.

так сначала яблоко (3-шар) голотоп. эквиван. точке, то все время его отрезок остается голотоп. эквив. точке.

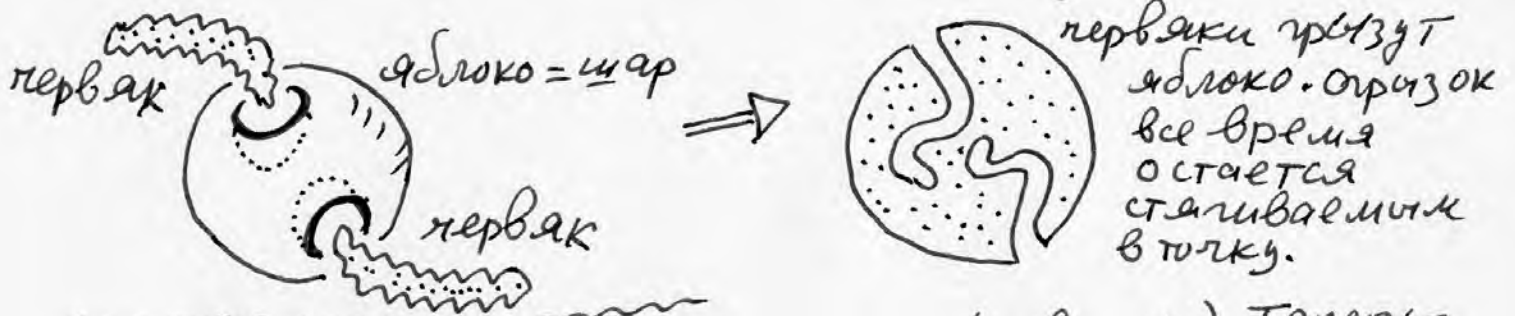
• В мех "пафос" дома Бинга. Дело в том, что все его точки имеют окрестности, переисленные на рис.:



но нет точек с окрестностью т.е. нет "граничных точек".



А потому как бы "нет начала стягивания". И тем не менее, дом Бинга стягивается в точку.



• мы познакомились с мажк. мног. (поверхн.). Теперь - новый, более широкий класс пространств: клеточные пр-ва (или клеточные комплексы, CW-комплексы).

• Мног. были склеены из n-дисков (шаров). Клеточные пр-ва тоже склеены из дисков разных размерностей, но в отличие от многообр., на границе дисков допускаются склейки.

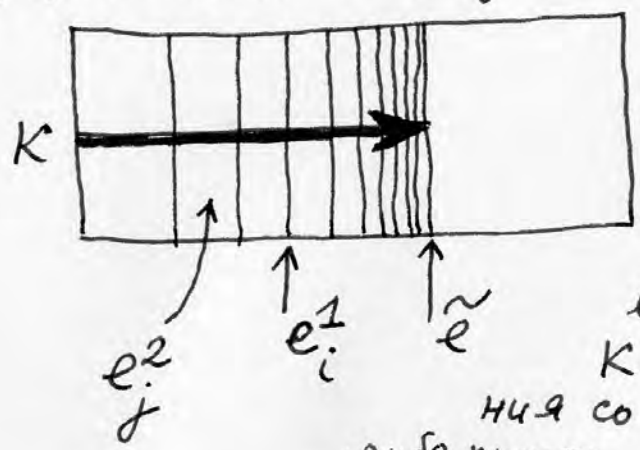
• Опред. Тополог. хаусдорфово пр-во X назыв. клеточным пр-вом (комплексом), если $X = \bigcup_i e_i^q$, где e_i^q - подм-ва в X, $\dim e_i^q = q$, i - это порядковый номер, причем e_i^q не обязаны быть замкнутыми или открытыми в X . Но они удовлетв. св-вам:

- ① клетки не пересекаются
- ② для $\forall e^q \exists$ непрер. отобра. $\chi: \bar{D}^q \rightarrow X$, где \bar{D}^q - замкн. диск; отображ. χ назыв. характеристическим, $\chi: \bar{D}^q \rightarrow e^q$ авт. гомеоморфизмом откр. диска на клетку; пусть $S^{q-1} = \partial \bar{D}^q$ есть граница диска, тогда $\chi: S^{q-1} \rightarrow \bigcup_{\alpha \leq q-1} e_\alpha$, т.е. граница клетки $\partial e^q = \bar{e}^q \setminus e^q = \chi(\partial \bar{D}^q)$ содержится в объединении клеток меньшей размерности.

т.е. $\partial e^2 \subset \cup_{i=1}^d e^1$, $d \leq q-1$.

③ Множество $K \subset X$ замкнуто \iff замкнуто все мн-во $\chi^{-1}(K \cap \bar{e}^2) \subset \bar{e}^2$, для всех клеток e^2 .

• Комент. Зачем нужно условие 3? Пример "плохого" разбиения X в сумму "клеток", где ③ не выполнено:



$X =$ прямоугольник
одномерные клетки e^1 накатываются к клетке \tilde{e}^2 .
Ясно, что св-ва ① и ② здесь выполнены, а ③ - нет. Т.к. мн-во $K \subset X$ не замкнуто, но его пересечение со всеми клетками либо замкнуто, либо пусто; $K \cap \tilde{e}^2 = \emptyset$. Таких "клеточных объектов" мы не хотим.

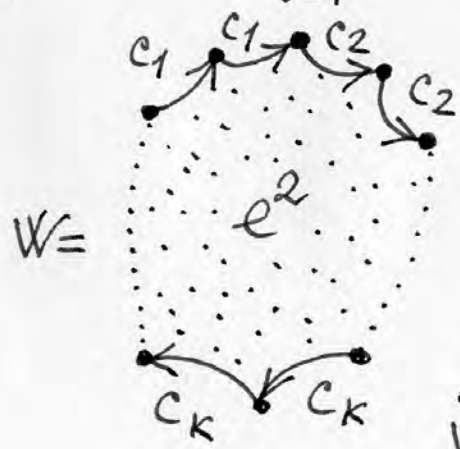
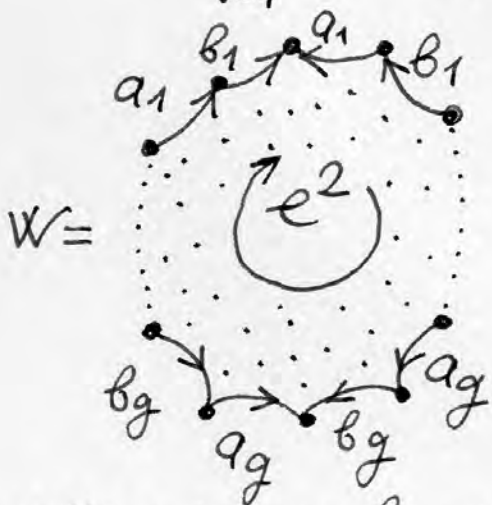
• Примеры CW-комплексов.

① $S^n = e^0 + e^n$ (Знаком + условно обознач. объединение).
Наприм. стереогр. проек. $e^0 = N$ \mathbb{R}^n

② ориент. 2-мнот. $M_g^2 = e^0 + (a_1 + b_1 + \dots + a_g + b_g) + e^2$,
а неориент. 2-мнот. $M_K^2 = e^0 + (c_1 + c_1 + \dots + c_k + c_k) + e^2$.

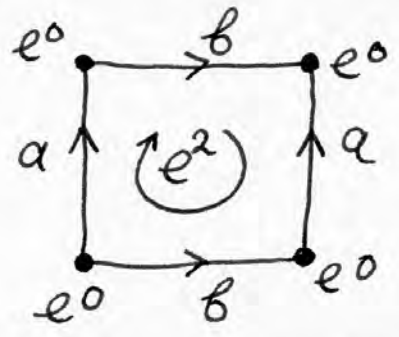
д-во. Достат. рассм. фундамен. многоугол. (развертку) W :

$W = \prod_{i=1}^g a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ и $W = \prod_{i=1}^k c_i^2$.

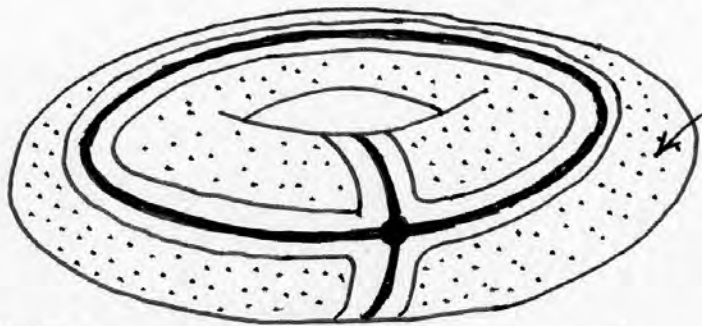


Все вершины W склеены в одну точку на M^2 . Это и есть 0-мерная клетка e^0 .
Все 1-мерные клетки образуют "петли" на M^2 .
А сам многоугольник W и есть клетка e^2 .

• Как приклеив. граница клетки e^2 к 1-мерным клеткам?
Рассм., например, тор $T^2 \simeq a b a^{-1} b^{-1}$.



Запишем условно обход границы клетки e^2 по 1-мерн. клеткам:
 $\partial e^2 = a + b - a - b$. Знак указывает на согласование или рассогласование ориентаций. Вскоре мы придадим знакам \pm топологический смысл.



• Теор: $\mathbb{R}P^n = e^0 + e^1 + \dots + e^i + \dots + e^n$; $\mathbb{C}P^n = e^0 + e^2 + e^4 + \dots + e^{2n}$.
 в каждой размерности ровно по 1 клетке.

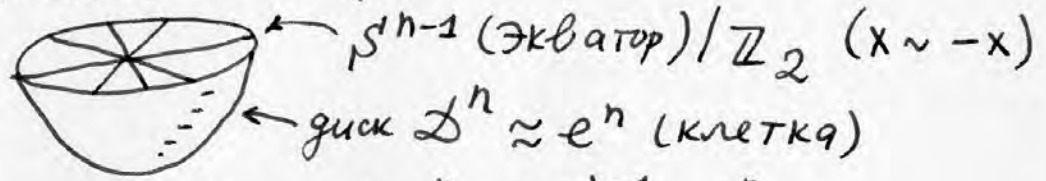
• д-во. лемма: $\mathbb{R}P^n = e^n + \mathbb{R}P^{n-1}$. Отсюда, очевидно, следует теорема.

• $\mathbb{R}P^n = \{ \lambda(x^0, x^1, \dots, x^n), \lambda \neq 0, \exists x^i \neq 0 \}$.
 Рассм. уравнение $(x^n = 0)$. т.е. $\{ \lambda(x^0, \dots, x^{n-1}, 0), \lambda \neq 0, \exists x^i \neq 0 \}$
 это, очевидно, $\mathbb{R}P^{n-1}$ (по определ.). Тогда:

$\mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^{n-1} = \{ \lambda(x^0, \dots, x^n), \lambda \neq 0, x^n \neq 0 \} = \text{карта } A_n$.

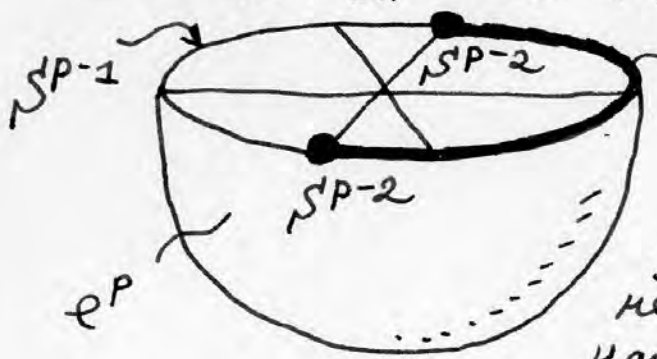
Выше мы доказали, что карта A_n гомеом. \mathbb{R}^n , т.е. откр. шару $D^n \approx e^n$ (клетка). итак: $\mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^{n-1} = e^n$.
 лемма (и теор.) доказана.

• Другое д-во, более геометрическое. Одна из моделей $\mathbb{R}P^n$ - это



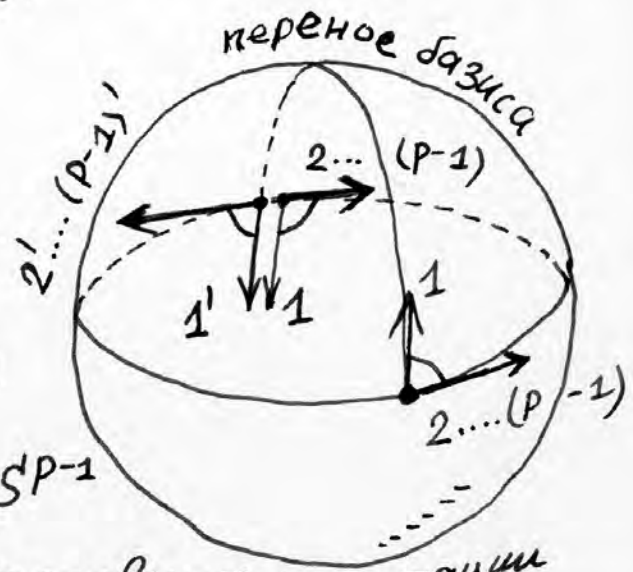
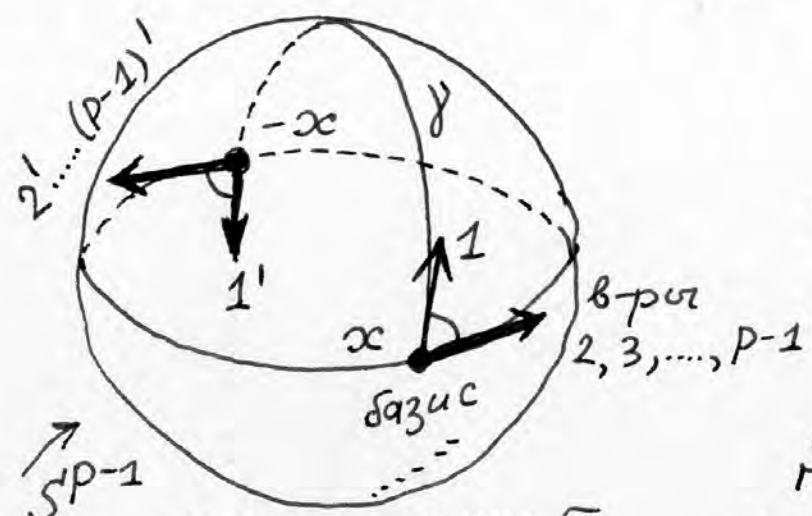
а $S^{n-1} / \mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^{n-1}$, т.е. $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^{n-1} + e^n$.

• как устроен "граничный оператор" (граница) ∂e^p в $\mathbb{R}P^n$?
 По лемме: $\mathbb{R}P^p = e^p + \mathbb{R}P^{p-1}$. Граница шара D^p , т.е.



e^{p-1} сфера S^{p-1} два раза проходит по клетке e^{p-1} .
 Поэтому условно можно написать, что $\partial e^p = e^{p-1} \pm e^{p-1}$, где знак показывает совпадение или несовпадение ориентаций S^{p-1} и e^{p-1} .
 Найдем знак.

рассм. инволюцию $\sigma: S^{p-1} \rightarrow S^{p-1}$, где $\sigma(x) = -x$.
 Отражение относит. центра сферы.



при отражении σ
 базис $1, 2, \dots, (p-1)$
 в точке x переходит в
 базис $1', 2', \dots, (p-1)'$
 в точке $-x$.

Надо сравнить ориентации
 базисов $1, 2, \dots, (p-1)$ и
 $1', 2', \dots, (p-1)'$ на сфере S^{p-1} .
 Для этого "протащим" базис
 $1, 2, \dots, (p-1)$ вдоль меридиана γ

чтобы перенести его в точку $-x$. См. рис. справа. Видно:

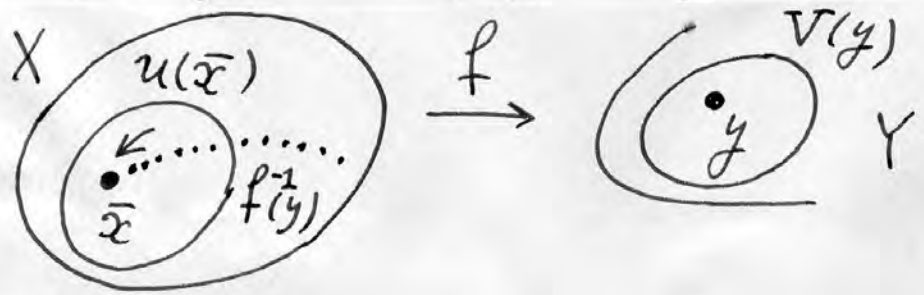
$(1, 2, \dots, (p-1)) \rightarrow (1', -2', \dots, -(p-1)')$. т.е. что
 ориентации определяются знаком $(-1)^{p-2} = (-1)^p$.

- итак: $\partial e^p = e^{p-1} + (-1)^p e^{p-1} = (1 + (-1)^p) e^{p-1}$
 т.е. $\partial e^p = 2e^{p-1}$ при p четн. и $\partial e^p = 0$ при p нечетн.
- Вскоре мы формализуем понятие границы клетки и эти подсчеты приобретут алгебраический смысл.
 для этого потребуется понятие степени отображения.

- Регулярные и критические точки (и значения) гладких отображений.
 $f: X^n \rightarrow Y^n$ - гладкое отображ. Тогда $df: T_x X \rightarrow T_y Y$,
 где $y = f(x)$. $df = (\partial y^i / \partial x^j)$ - матрица Якоби (= дифференциал).
- Опред. Точка $x \in X$ назыв. регулярной (= правильной, "хорошей"), если $\text{rang}(df) = n$, т.е. $\det(df(x)) \neq 0$.
 В противном случае, x - критическая ("плохая") точка.
- Опред. Точка $y \in Y$ назыв. регулярным значением ("хорошим")
 значением для f , если все точки полного прообраза $f^{-1}(y)$
 регулярны (в X), или если $f^{-1}(y) = \emptyset$ (пуст).
- По теореме Сарда регулярные значения заполняют мн-во
 полной меры в Y , т.е. почти все $y \in Y$ - регулярные значения.

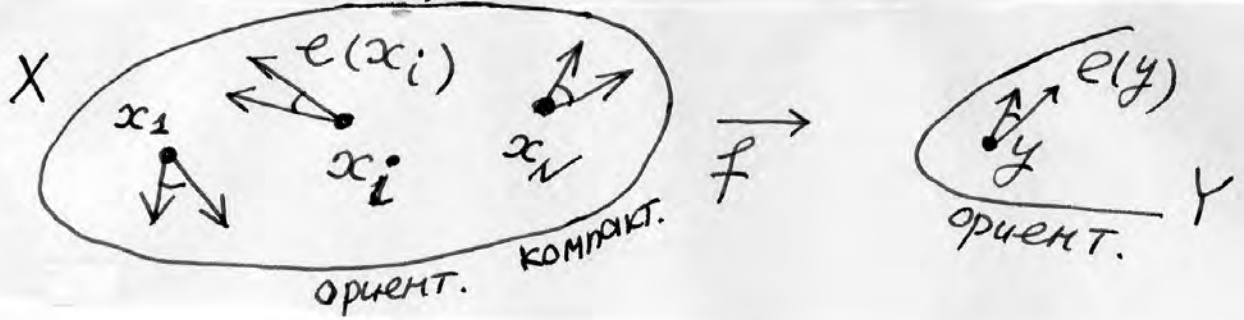
• Лемма. Пусть X^n — маж. и компактно. Тогда полн. прообраз $f^{-1}(y)$ регуляр. значения $y \in Y^n$ состоит из конечного ин-ва точек.

д-во. Допустим против. Тогда в компактном X \exists точка \bar{x} накопления ∞ числа точек из $f^{-1}(y)$. Но тогда в силу непрерывн. f имеем: $f(\bar{x}) = y$, т.е. $\bar{x} \in f^{-1}(y)$, а тогда \bar{x} — регулярная точка. По теор. о неявн. ф-ях локально f около точки \bar{x} — диффеоморфизм: $f: U(\bar{x}) \rightarrow V(y)$. Противоречие: т.к. сколь угодно близко от \bar{x} есть точки из $f^{-1}(y)$. Лем. доказ.



• опред. степени $\deg f$ для $f: X \rightarrow Y$. Пусть оба: X и Y — ориентируемы, связны, а X — компактно. Пусть y — регуляр. знач. для f в Y (такие \exists). Рассмотрим полнотн. ориент. репер $e(y)$ в $T_y Y$. Пусть $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_N\}$, $N < \infty$ — полнотн. прообраз. Тогда $df: T_{x_i} X \rightarrow T_y Y$ явл. линейным изоморфизмом, т.к. $\text{rang } df|_{x_i} = n$. Пусть $e(x_i) = (df)^{-1} e(y)$ — индуциров. базис в точке x_i с ориентац., индуцир. ориент. базиса $e(y)$. Сравним ориент. $e(x_i)$ с ориентац. X . Пусть $\epsilon_i = \pm 1$, где $\epsilon_i = +1$, если эти ориент. совпали, и $\epsilon_i = -1$, если не совпали.

• опред. Степенью $\deg_y f$ мажк. отобр. f относит. регуляр. точки $y \in Y$ назыв. число: $\sum_{\{x_i\}} \epsilon_i$, где $\{x_i\} = f^{-1}(y)$.
 Т.е. $\deg_y f = \sum_{\{x_i\}} \text{sign}(\det df|_{x_i}) \in \mathbb{Z}$.



- Теор. (э-во - в нашем обязат. курсе дифф. геом. и топ. См. также Мицен. Фомен. Краткий курс ..., стр. 272 (М., URSS, 2016).
- 1) $\deg y \neq 0$ не зависит от выбора ретлар. знач. $y \in Y$.
 - 2) Если $f, g: X \rightarrow Y$ гомотопны, то $\deg f = \deg g$.

• Степень f можно опред. и для непрерыв. отображ. гладких $X \rightarrow Y$.

Теор. (без э-ва). \forall непрерыв. отображ. f гомот. X в гомот. Y можно сколь угодно близко аппроксим. гомот. $\tilde{f}: X \rightarrow Y$. При этом, f и \tilde{f} непрерыв. гомотопны.

Если \tilde{f} и \tilde{g} - две близкие к f его гомот. аппроксим., то \tilde{f} и \tilde{g} - гомотопны.

Опред. За степень $\deg f$ непрерыв. отображ. $f: X \rightarrow Y$ возьмем $\deg \tilde{f}$ любой его близкой гладкой аппроксимации. Ясно, что это определ. корректно.

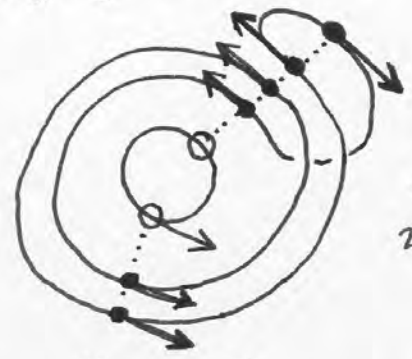


Перестройки двумер. торов, возникающие в симплектической геом. См. далее.

• Примеры вычисл. степени.

$f: S^1 \rightarrow S^1, f(e^{i\varphi}) = e^{in\varphi}$. Тогда $\deg f = n$.

$f^{-1}(1) = \{e^{2\pi k i/n}\}$ — n корней из единицы. Все знаки +.



Видно, что степень не меняется при гомотопии.

• $f: S^2 \rightarrow S^2, f(z) = z^n, z = x + iy$.

Пусть $w_0 \neq 0, w_0 = f(z) = z^n$, тогда $z = \sqrt[n]{w_0}$, т.е. — n прообразов (n корней). Теперь надо найти знаки прообразов.

• Общий факт. Пусть $f: S^2 \rightarrow S^2, w = f(z)$, где f — комплекс.-аналит. ф.-я.

Утв. $\det(df) > 0$, если $df \neq 0$. Поэтому знаки всех прообразов — положительные.

д-во. $f(z) = f(x + iy) = a(x, y) + ib(x, y)$, где в силу услов.

Коши-Римана: $a_x = b_y$ и $a_y = -b_x$.

$(df)^{\mathbb{R}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; df(z) = \frac{df}{dz} \cdot dz$. Тогда $(df)^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix}$

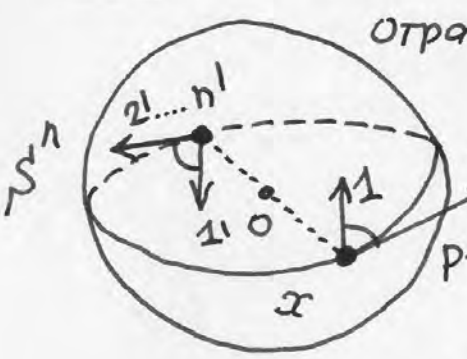
$\det(df)^{\mathbb{R}} = a_x b_y - a_y b_x = a_x^2 + a_y^2 > 0$ в неособых точках.

т.е. $\deg f(z) = \sum (+1)$ по всем n прообразам, т.е. $= n$.

• Опред. В случае неориент. много. степень определяется по mod 2.

• Теор. Проект. n -во $\mathbb{R}P^n$ ориент. при n — четн. и неориент. при n — четном.

д-во. Фактически уже дано выше. $\mathbb{R}P^n = S^n / \mathbb{Z}_2$.



Отражение относ. точки O . Надо сравнить ориент. реперов $(1, 2, \dots, n)$ и $(1', 2', \dots, n')$.

Выше мы показали, что всё определ. знаком $(-1)^{n-1}$. Теор. доказана.

• Утв. Пусть $f: S^n \rightarrow S^n, f(x) = -x$. Тогда

$\deg f = 2$ при нечетном n и $= 0$ при четн. n

д-во следует из предыдущ. теоремы.

• Утв. Пусть $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, где $f(x) = (x, -x)$, т.е. $\mathbb{R}P^n = S^n / \mathbb{Z}_2$.

Тогда $\deg f = 2$ при n — четн. и $\deg f = 0 \pmod{2}$ при n — четном.

д-во вытек. из предыдущего.

• Теор. Пусть $f: M^n \rightarrow X^n$ и $g: N^m \rightarrow Y^m$ - ладк. отображ. и $f \times g: M \times N \rightarrow X \times Y$, где $(f \times g)(\alpha, \beta) = (f(\alpha), g(\beta))$. Тогда $\deg(f \times g) = \deg f \cdot \deg g$.

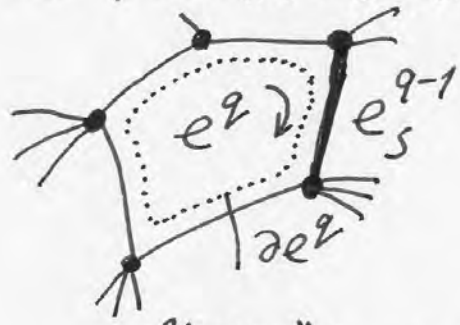
• Теор. Пусть $f: M^n \rightarrow X^n$ и $g: X^n \rightarrow Y^n$; тогда $g \circ f: M \rightarrow Y$ и $\deg(g \circ f) = \deg g \cdot \deg f$.

• докажите.

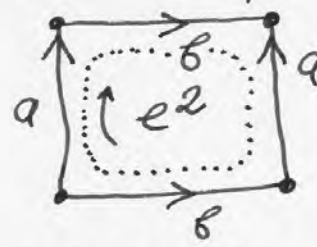
• Граничный оператор в клеточном пр-ве. Как формально определить ∂e^q по отношению к клеткам $\dim \leq q-1$? Обозначим $X(\alpha) = \cup_{i \leq \alpha} e^i$.

опред. $X(\alpha)$ назыв. α -мерным остовом X . Тогда $X = X^{(0)} \cup X^{(1)} \cup \dots \cup X^{(n)}$, где $n = \dim X$. При этом: $X = X^{(n)} \supset X^{(n-1)} \supset \dots \supset X^{(q)} \supset X^{(q-1)} \supset \dots \supset X^{(0)}$.

• Берем две клетки: e^q и e^{q-1} , где s - номер $(q-1)$ -клетки. Как граница ∂e^q клетки e^q "проходит" по клетке e_s^{q-1} ?



Вспомним тор:

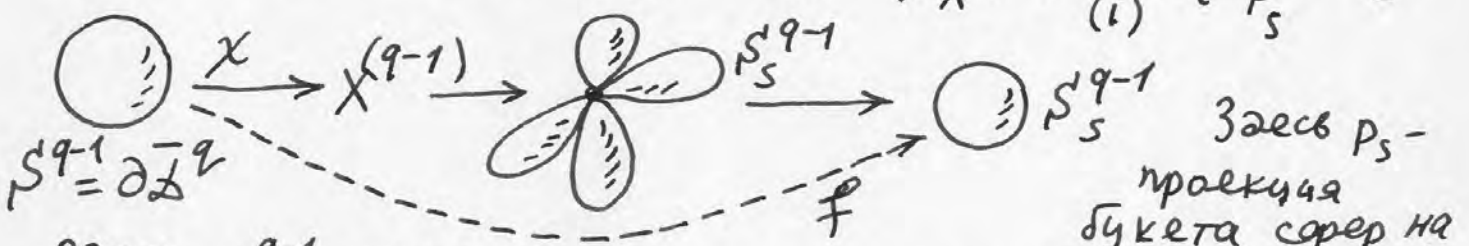


$\partial e^2 = a + b - a - b$ здесь граница e^2 проходит два раза по кажд. клетке a, b : в прямой и обратном направ.

Итак: "сколько раз" ∂e^q проходит по какой-то клетке e_s^{q-1} ?

• Рассм. композицию непр. отображ.:

$$S^{q-1} = \partial \bar{D}^q \xrightarrow{\chi} \partial \bar{e}^q \subset X^{(q-1)} \xrightarrow{\chi} X^{(q-1)} / X^{(q-2)} = \bigvee_{(i)} S_i^{q-1} \xrightarrow{p_s} S_s^{q-1}$$



Здесь p_s - проекция букета сфер на одну сферу S_s^{q-1}

• опред. $\deg f$ назыв. коэфф. инцидентности двух клеток: e^q и e_s^{q-1} и обозначается $[e^q : e_s^{q-1}]$.

• опред. Границей клетки e^q назыв. формальная сумма: $\partial e^q = \sum_s [e^q : e_s^{q-1}] e_s^{q-1}$.

Замеч. На каждом диске \bar{D}^q задана и фиксир. ориент. Она задает ориент. клеток e^q при гомотопорр. χ (характерист. отображ.)

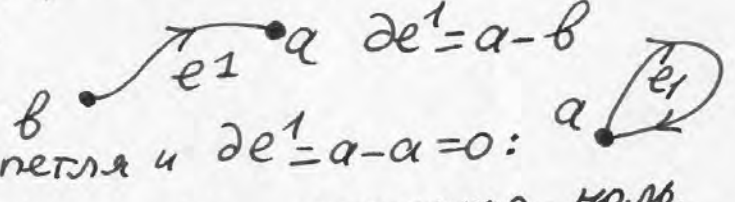
• Опред. Пусть X - клеточ. комплекс. Клеточной цепью (или просто цепью) размер. q назыв. формальная линейн. комбинация q -мерн. клеток с коэфф. из группы \mathbb{Z} :

$$c = \sum_i a_i e_i^q, a_i \in \mathbb{Z}. \text{ Цепи образуют группу } C_q(X), \text{ назыв. группой } q\text{-мерн. цепей. Сумма - конкатенация.}$$

• опред. Эквивалентно: цепи - это функции на множестве клеток $\{e^q\}$ со значен. в группе \mathbb{Z} (или в какой-то абелевой группе G). Такие функции образуют абелеву группу (по сложению): $C_q(X, G)$. Если $G = \mathbb{Z}$, то будем писать $C_q(X, \mathbb{Z})$ или $C_q(X)$. Цепь - это когда на \forall клетке e^q "написан" элемент группы G .

• Граничн. оператор (голоморфизм) $\partial_q: C_q(X) \rightarrow C_{q-1}(X)$ определен так: $\partial_q(\sum a_i e_i^q) = \sum a_i \partial e_i^q$, где ∂e_i^q был определен выше.

• Теор. $\partial^2 \equiv 0$, т.е. $\partial_{q-1} \circ \partial_q \equiv 0$ для любого q .
 формальное ∂ -во давало не буду. "Наглядно" - понятно, т.к. граница диска - это сфера, а граница сферы "пуста", у сферы нет края (границы).

• Пример: $\partial_1: C_1(X) \rightarrow C_0(X)$.  $\partial e^1 = a - v$
 Если $a = v$, то получается петля и $\partial e^1 = a - a = 0$.

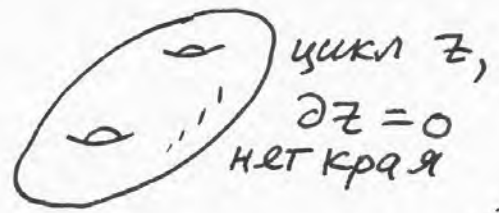
• Опред. Цепь из $C_q(X)$ назыв. циклом, если ее граница - ноль, т.е. $\partial z = 0$. Ясно, что q -мерн. циклы образуют группу Z_q и $Z_q = \text{Ker } \partial_q \subset C_q(X)$. Цепь $v \in C_q(X)$ назыв. границей, если $v = \partial_{q+1} h$, где $h \in C_{q+1}$. Все q -мерные границы образуют группу $B_q = \text{Im}(\partial_{q+1}) \subset C_q$.

• Теор. $B_q \subseteq Z_q$. ∂ -во - из тождества: $\partial^2 = 0$.
 т.е. любая граница - это цикл.

• опред. Абелева группа $H_q = Z_q / B_q$ назыв. группой q -мерной гомологии пр-ва X . Здесь $H_q(X, \mathbb{Z}) = H_q(X)$. Для произвал. абелев. группы коэфф. G получаем $H_q(X, G)$.

• Итак, $X \rightarrow \{H_0(X), \dots, H_n(X)\}$, где $n = \dim X$.

• Наглядно можно иногда представить цикл как q -мерную замкн. поверхн. (многог.), т.е. без края.

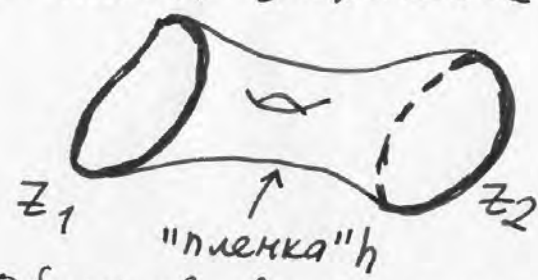


Что такое элемент $[z]$ группы гомологии $H_q(X)$?

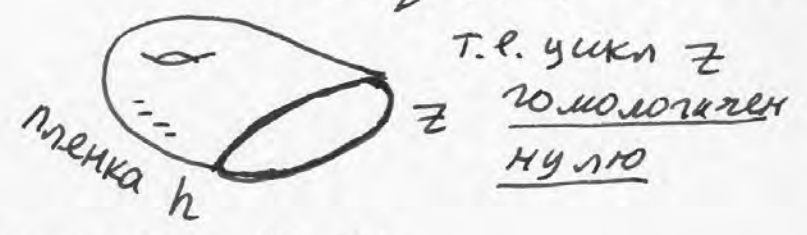
$[z] = z + \partial_{q+1} h, h \in C_{q+1}(X).$

Два цикла z_1 и z_2 назыв. гомотопными, если $z_1 - z_2 = \partial h$.

Наглядн. изображение:



$[z] = 0$ в $H_q(X) \iff z = \partial h$:



• Общие св-ва групп гомологии $H_q(X, G)$

Теор. 1) Гр. гомологии $H_q(X)$ не зависят от клеточного разбиения пр-ва X . (это - важное св-во: для подсчета гомологии можно выбрать простое клеточное разбиение).

2) Если $f: X \rightarrow Y$ непрер., то оно индуцирует гомоморфизм групп гомол.: $f_*: H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$.

3) Если f и $g: X \rightarrow Y$ гомотопны, то $f_* = g_*$.

4) Если $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$, то $gf: X \rightarrow Z$ и $(gf)_* = g_* f_*$.

5) Если пр-ва X и Y гомотопически эквивал., то $H_q(X) \cong H_q(Y)$ для всех q . Следствие: если для какого-то q $H_q(X) \neq H_q(Y)$, то X и Y гомотопия. не эквивал. (тем более не гомеом.). В этом смысле группы гомол. - это гомотопия. инварианты топол. пр-ств.

6) Если $f: X \rightarrow Y$ - непрер. отображ. клеточ. комплексов, то f всегда гомотопна клеточному отображ., т.е. переводящему клетки из X в клетки Y . (это т.н. теор. о клеточной аппроксимации непрер. отображ.)

• См. 2-во теор. в кн. Фоменко - Фукс, "Гомотопическая топология".

• Кошмент. Если $H_q(X) \cong H_q(Y)$ для $\forall q$, отсюда, вообще говоря, не следует, что X и Y гомотопия. эквивалентны. Примеры см. в кн. Фоменко - Фукс.

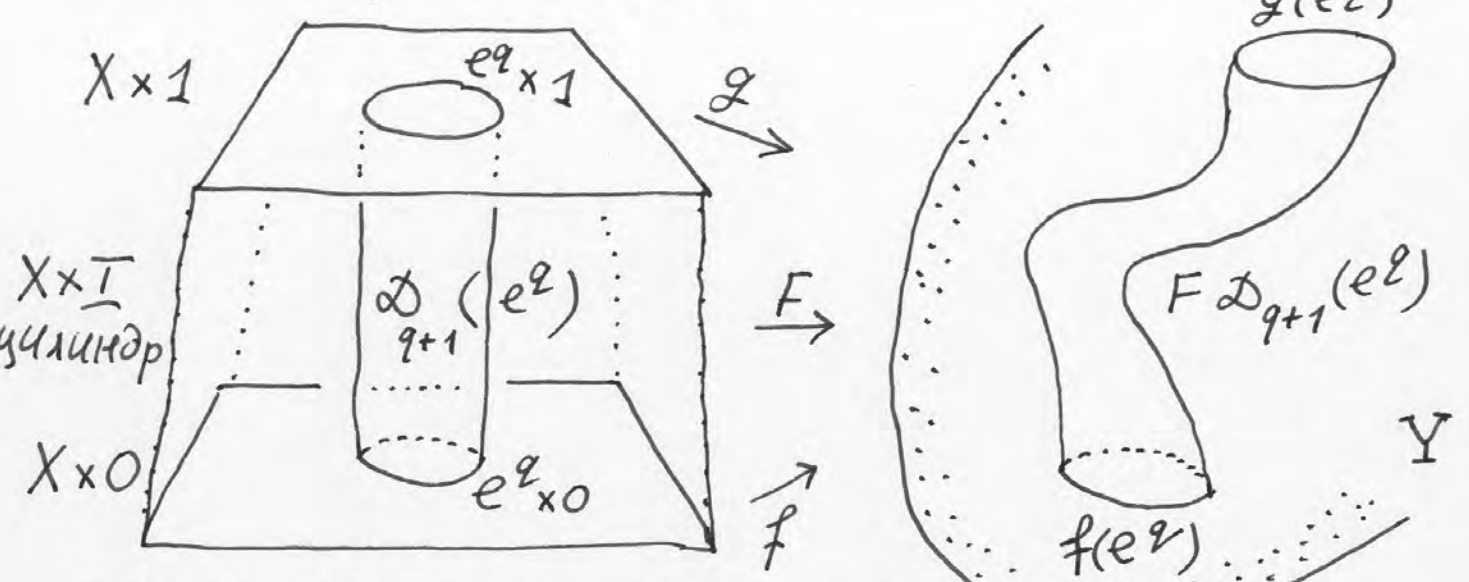
• Докажем важное св-во 3) из теор.: пусть f и $g: X \rightarrow Y$ два клеточных отображ., которые клеточно-гомотопны.

Тогда $f_* = g_*: H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$. Последовательность групп

$\dots C_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial} C_q(X) \xrightarrow{\partial} C_{q-1}(X) \rightarrow \dots$ назыв. "комплексом цепей" или "цепными комплексами" пр-ва X . Аналогично:

$\dots C_{q+1}(Y) \xrightarrow{\partial} C_q(Y) \xrightarrow{\partial} C_{q-1}(Y) \rightarrow \dots$

По определ. гомотопии, имеем: $F: X \times I \rightarrow Y$, где F - клеточное отображ. и $F(x, 0) = f(x)$ и $F(x, 1) = g(x)$.
 Рассм. клетку $e^q \subset X$. Тогда:

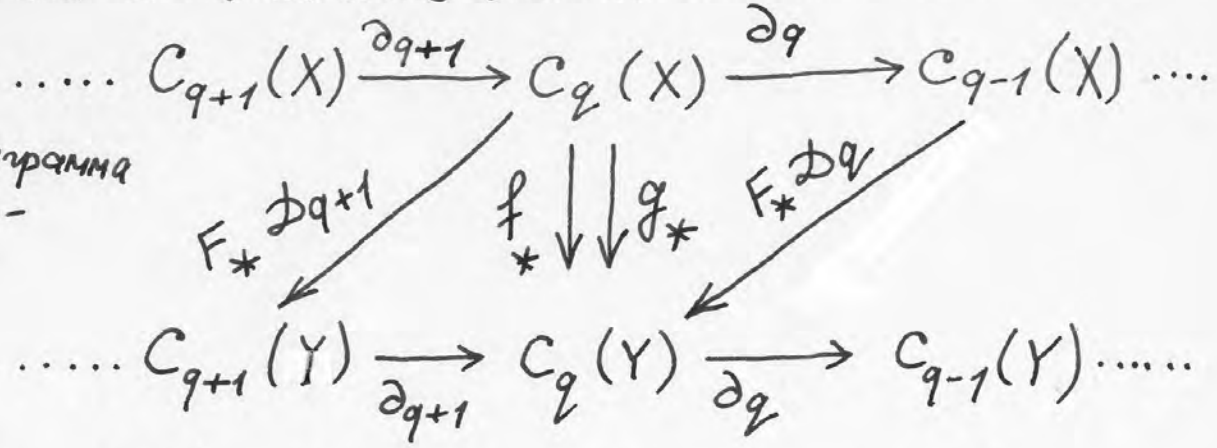


В $X \times I$ над \forall клеткой e^q возникает цилиндр $e^q \times I$, являющийся $(q+1)$ -клеткой. Обозначим его $D_{q+1}(e^q)$. Оператор D_{q+1} сопоставляет q -мерн. клетке e^q $(q+1)$ -клетку. При отображ. F клетки отображ. в Y :
 $0 \times e^q \rightarrow f(e^q)$, $e^q \times 1 \rightarrow g(e^q)$, $D_{q+1}(e^q) \rightarrow F D_{q+1}(e^q)$.

Ясно, что граница цилиндра $D_{q+1}(e^q)$ имеет вид:
 $\partial_{q+1}(D_{q+1}(e^q)) = (e^q \times 0) - (e^q \times 1) + D_q(\partial e^q)$.
 т.е. верхнее и нижнее основания "стакана" (с учетом ориент.) + боковая стенка стакана (цилиндр над границей клетки). Применяя F , получаем аналогичн. соотнош. в пр-ве Y :

$$\partial_{q+1} F(D_{q+1}(e^q)) = f_*(e^q) - g_*(e^q) + F_* D_q(\partial e^q).$$

Возникает отображение цепных комплексов:



Эта диаграмма коммутативна

т.е.:

$$\partial_{F_* D_{q+1}}(e^q) = f_*(e^q) - g_*(e^q) + F_* D_q(\partial e^q).$$

Рассм. q -цикл $z \in Z_q(X)$. Тогда $z = \sum_i a_i e_i^q$, где $a_i \in \mathbb{Z}$, и $\partial_q z = 0$. В силу линейности операторов ∂_q и \mathcal{L}_{q+1} , получаем:

$$\partial F_* \mathcal{L}_{q+1}(z) = f_* z - g_* z + F_* \mathcal{L}_q(\partial z).$$

Но т.к. z - цикл, то $\partial z = 0$, а потому:

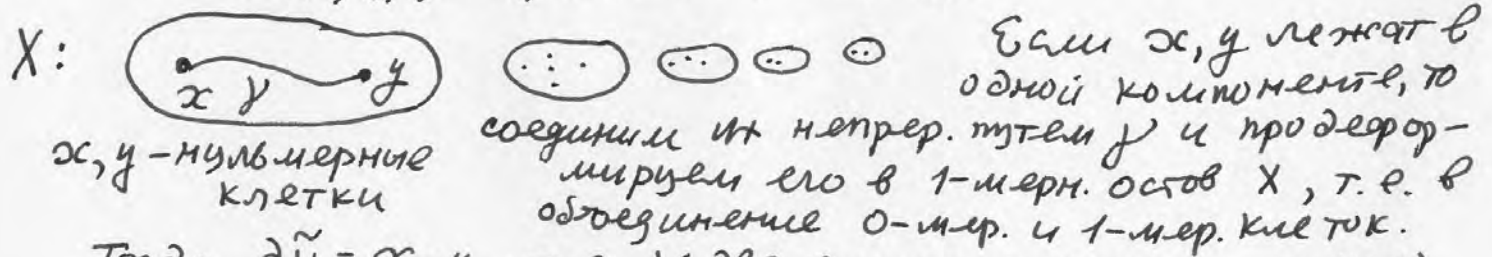
$$f_* z - g_* z = \partial(F_* \mathcal{L}_{q+1}(z)) = \partial h, \text{ где } h \in \text{Im } \partial_{q+1},$$

т.е. $f_* z$ и $g_* z$ гомологичны \simeq определяют один и тот же класс гомологий: $[f_* z] = [g_* z] \in H_q(Y)$. И так, $f_* = g_*$, что и требов. доказ.

Примеры вычисления клеточных гомологий.

• Пусть X состоит из k компонент линейной связности. Тогда $H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^k = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ (k раз).

$$H_0(X, G) = G \oplus \dots \oplus G \text{ (к раз).}$$



Тогда $\partial \tilde{y} = x - y$, т.е. \forall две 0-мерн. клетки (0-цикла) в X гомологичны: $x \sim y$, т.е. $[x] = [y] =$ образующая в $H_0(X)$.

• ② $S^n = e^0 + e^n$. угв.

для S^0 : $H_0 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H_i = 0, i > 0$.

для S^1 : $H_0 = H_1 = \mathbb{Z}$, $H_i = 0, i > 1$.

для $S^n, n > 1$: $H_0 = H_n = \mathbb{Z}$, $H_i = 0$ при $i \neq 0, n$.

• ③ $\mathbb{R}P^n = e^0 + e^1 + \dots + e^n$ (см. выше). Далее:

$$\partial e^p = \begin{cases} 2e^{p-1}, & \text{при } p \text{ четн.} \\ 0, & \text{при } p \text{ нечетн.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_{2k} = 0, & p = 2k \\ Z_{2k-1} = \mathbb{Z}(e^{2k-1}). \end{cases}$$

далее: $B_{2k-1} = 2\mathbb{Z}$, т.к. $2e^{p-1} = \partial e^p, p = 2k$.

поэтому $H_{2k} = Z_{2k} / B_{2k} = 0$ при $k > 0$,

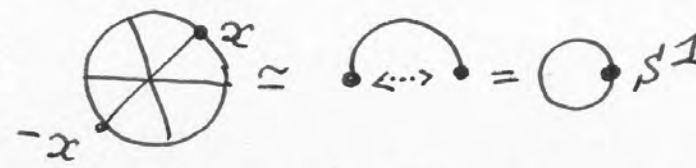
$$H_{2k-1} = Z_{2k-1} / B_{2k-1} = \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2 \text{ при } 2k-1 \leq n.$$

Отдельно рассмотрим $H_n(\mathbb{R}P^n)$. При n четном $H_n = 0$, т.к. $\partial e^{2s} = 2e^{2s-1} \neq 0$, а потому нет циклов: $Z_{2s} = 0$.

При $n = 2s+1$ - нечетном: $H_n = \mathbb{Z}$, т.к. $\partial e^{2s+1} = 0$, а $B_{2s+1} = 0$ (нет грани), поэтому $H_n = Z_n / B_n = Z_{2s+1} = \mathbb{Z}$.

Итак, гомотопии $\mathbb{R}P^n$ имеют вид:

$$H_q: \begin{matrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z}_2 & 0 & \mathbb{Z}_2 & 0 & \dots \\ q = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \dots \end{matrix} \begin{matrix} \rightarrow \mathbb{Z}, n=2s+1 \\ \rightarrow 0, n=2s \end{matrix}$$

• $\mathbb{R}P^1 = S^1$:  $\Rightarrow H_0(\mathbb{R}P^1) = \mathbb{Z}$
 $H_1(\mathbb{R}P^1) = \mathbb{Z}$
 остальные = 0.

• Выше мы считали, что $G = \mathbb{Z}$ (группа коэффициентов).
 Вычислим $H_q(\mathbb{R}P^n)$, если $G = \mathbb{Z}_2$, и если $G = \mathbb{R}$ (или \mathbb{Q}).

- Теор. $H_i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ для $0 \leq i \leq n$. Остальные = 0.
- $H_0(\mathbb{R}P^{2s+1}, \mathbb{R}) = H_{2s+1} = \mathbb{R}$, все остальные $H_i = 0$.
- $H_0(\mathbb{R}P^{2s}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, все остальные $H_i = 0$.

∂ -ва. Если $G = \mathbb{Z}_2$, то $\partial e^p \equiv 0 \pmod{2}$ для всех p , т.е. граничн. оператор $\partial \equiv 0 \forall p$, а потому $Z_i = \mathbb{Z}_2(e^p)$, а все $B_i = 0$. Поэтому $H_i = \mathbb{Z}_2/0 = \mathbb{Z}_2$ для всех i .
 А если $G = \mathbb{R}$, то $\partial e^{2s} = 2e^{2s-1}$, т.е. $e^{2s-1} = \partial(\frac{1}{2}e^{2s})$, т.е. все четно-мерн. клетки не явл. циклами (а потому $H_{\text{четн.}} = 0$), а все нечетно-мерн. клетки являются граничными, т.е. $Z_{\text{нечет}} = B_{\text{нечет}}$, т.е. $H_{\text{нечет}} = \mathbb{Z}/B = 0$.

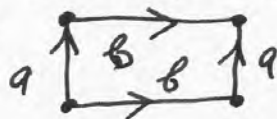
• Задача. Вычислить $H_q(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_p)$, где p - нечетн. простое.

- Теор. $H_i(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$ при $i = 0, 2, 4, \dots, 2n$. Остальные = 0.
- ∂ -ва. $\mathbb{C}P^n = e^0 + e^2 + e^4 + \dots + e^{2n}$. Т.е. граничн. оператор $\partial \equiv 0$ во всех размерн.
- ясно, что $H_{2k}(\mathbb{C}P^n, G) = G$, $H_{2k+1}(\mathbb{C}P^n, G) = 0$, для $\forall G$.
 при $0 \leq 2k \leq 2n$; $H_{2k} = 0$ при $2k > 2n$.

• Примеры вычисления гомологий.

Гомологии 2-мерн. поверхн.

• Тор T^2 :



$T^2 \cong e^0 + (a+b) + e^2$; т.к. все вершины квадрата смежны в одну сторону, то $\partial a = \partial b = 0$, $\partial e^2 =$

$= a + b - a - b = 0. \Rightarrow H_0(T^2) = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_1 = \mathbb{Z}(a) \oplus \mathbb{Z}(b); B_1 = 0,$

$H_1 = \mathbb{Z}_1 / B_1 = \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}; H_2 = \mathbb{Z}.$

• Рассм. ориент. $M_g^2 = S^2 + g(\text{ручек}) = e^0 + (a_1 + b_1 + \dots + a_g + b_g) + e^2,$

где $\partial e^0 = 0, \partial a_i = \partial b_i = 0$, т.е. a_i и b_i - 1-циклы;

$\partial e^2 = a_1 + b_1 - a_1 - b_1 + \dots + a_g + b_g - a_g - b_g = 0.$ отсюда:

$H_0 = \mathbb{Z}; H_1 = \mathbb{Z}_1 / B_1 = \mathbb{Z}^{2g} = \mathbb{Z}(a_1) \oplus \mathbb{Z}(b_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}(a_g) \oplus \mathbb{Z}(b_g)$

$H_2 = \mathbb{Z}.$

• Если $G = \mathbb{Z}_2$, то $H_1(M_g^2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{2g}, H_2(M_g^2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2.$

Вообще: $H_1(M_g^2, G) = G \oplus \dots \oplus G$ (2g раз); $H_2 = G.$

• Рассм. неориент. $M_k^2 = S^2 + k \mu = e^0 + (c_1 + c_1 + \dots + c_k + c_k) + e^2,$

$W = c_1^2 c_2^2 \dots c_k^2$; тогда $\partial e^0 = 0, \partial c_i = 0,$

$\partial e^2 = c_1 + c_1 + \dots + c_k + c_k = 2(c_1 + \dots + c_k) \neq 0$ над \mathbb{Z} и $\equiv 0$ над \mathbb{Z}_2 .

Цепи: $C_1 = \mathbb{Z}^k = \mathbb{Z}(c_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}(c_k).$

Заменяем образующие в группе 1-цепей. А именно:

$(c_1, \dots, c_k) \rightarrow (c_1, \dots, c_{k-1}, \alpha = c_1 + \dots + c_k).$

Ясно, что старые образ. выраж. через новые:

$c_k = \alpha - (c_1 + \dots + c_{k-1}).$ Итак, цепи:

$C_1 = \mathbb{Z}^k = \mathbb{Z}(c_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}(c_{k-1}) \oplus \mathbb{Z}(\alpha).$ Границы:

$\partial c_i = 0, 1 \leq i \leq k-1, \partial \alpha = 0; \partial e^2 = 2(c_1 + \dots + c_k) = 2\alpha.$

$\Rightarrow H_1 = \underbrace{\mathbb{Z} + \dots + \mathbb{Z}}_{k-1} + \mathbb{Z}_2(\alpha) = \mathbb{Z}^{k-1} + \mathbb{Z}_2.$

$H_2 = 0$ над \mathbb{Z} , т.к. $\partial e^2 = 2\alpha \neq 0$ над \mathbb{Z} , т.е. 2-мерных циклов нет (ненулевых). Итак:

Задача: $\begin{cases} H_0(M_k^2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, \\ H_1(M_k^2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^k, \\ H_2(M_k^2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \end{cases}$ (неориент.) $\begin{cases} H_0(M_k^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \\ H_1(M_k^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{k-1} + \mathbb{Z}_2, \\ H_2(M_k^2, \mathbb{Z}) = 0. \end{cases}$

• Задача. $H_0(M_k^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}; H_1(M_k^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{k-1}; H_2(M_k^2, \mathbb{R}) = 0.$
 (неориент.) $H_0(M_k^2, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p; H_1(M_k^2, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{k-1}; H_2(M_k^2, \mathbb{Z}_p) = 0.$
 p - нечет. простое

• Важное следствие. (Завершение ∂ -ва теор. классиф. 2-многог.).

Если $g_1 \neq g_2$, то $S^2 + g_1$ (пулек) и $S^2 + g_2$ (пулек) гомотопны?
 не эквивал. (а потому не гомотопны)

Если $k_1 \neq k_2$, то $S^2 + k_1 \mu$ и $S^2 + k_2 \mu$ гомотопны? не эквивал.
 (\rightarrow не гомотопны.)

• ∂ -во. $H_1(M_g^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}$, а при разных g эти абел. группы не изом. (курс алгебры).
 ориент. \rightarrow

неориент. $\rightarrow H_1(M_k^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{k-1} + \mathbb{Z}_2$, - не изом. при разных k .

• Общая структура: $H_i(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{\beta_i} + T_{0,2}$, где $T_{0,2}$ - подгруппа конечн. порядков.
 (по теор. об абел. конечнопорожд. группах).

• Опред. число $\beta_i = \text{ранг } H_i(X, \mathbb{Z})$ назыв. i -м числом Бетти.

Эйлерова характеристика $\chi(X) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i$, где $n = \dim X$.

• Ясно, что $\beta_i = \dim H_i(X, \mathbb{R})$, где $H_i(X, \mathbb{R})$ - вектор. пр-во над \mathbb{R} .
 здесь X - ориент. или неориент.

• Пример: $\chi(M_g^2) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$.

• Если X - неориент., то $H_i(X, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{\alpha_i}$, т.к. H_1 - вект. пр-во над полем \mathbb{Z}_2 .
 Тогда $\chi(X) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i$.

Пример: $\chi(M_k^2) = 1 - k + 1 = 2 - k$, где k - число плечок Мебиуса.

• Важное св-во $\chi(X)$ - ее можно вычислить без гомологии, зная только клеточное разбиение X (кол-во клеток в \forall размерн.).

Теорема. Пусть $X = \cup_{i,q} e_i^q$, и α_q = кол-во q -мерн. клеток.
 Тогда $\chi(X) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \alpha_q$, где $n = \dim X$. (т.е. группы гомологии знать не надо).

• ∂ -во. Рассм. в качестве группы коэфф. G какое-нибудь аб поле ($\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_p$, где p - нечет. и прост. и т.п.).

Рассм. комплекс цепей пр-ва X :

$$\dots \rightarrow C_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \rightarrow \dots$$

Тогда $\dim C_i = \alpha_i$ (размерн. рассм. над полем G). Все C_i - это векторн. пр-ва над полем. Из линей. алгебры мы знаем, что

$$\dim C_i = \dim(\text{Ker } \partial_i) + \dim(\text{Coker } \partial_i) = \dim(\text{Ker } \partial_i) + \dim(\text{Im } \partial_i) = \dim Z_i + \dim B_{i-1}, \text{ где } Z_i - \text{циклы в } C_i, \text{ а } B_{i-1} - \text{грань в } C_{i-1}.$$

ясно, что $C_i / \text{Ker } \partial_i = C_i / Z_i = B_{i-1}$. отсюда:

$$\dim C_i = \dim Z_i + \dim B_{i-1}. \text{ рассм. альтернирован. суммы:}$$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim C_i = \dots - \underbrace{(\dim Z_{i+1} + \dim B_i)}_{-\dim H_{i+1}} + \underbrace{(\dim Z_i + \dim B_{i-1})}_{+\dim H_i} - \underbrace{(\dim Z_{i-1} + \dim B_{i-2})}_{-\dim H_{i-1}}$$

т.е. раскроем скобки и перегруппируем слагаемые.

Получаем: $\sum (-1)^i \dim C_i = \sum (-1)^i \dim H_i = \sum (-1)^i \beta_i = \chi(X)$.

чтвр. Примеры.

$\chi(M_g^2) = 2 - 2g = 2 - 2g = 2 - 2g$

ориент. // по клеткам по $H_*(; \mathbb{Z})$ по $H_*(; \mathbb{Z}_2)$

$e^0 + (a_1 + b_1 \dots a_g + b_g) + e^2$	$H_0 \ H_1 \ H_2$	$H_0 \ H_1 \ H_2$
$1 - 2g + 1 = 2 - 2g$	1 2g 1	1 2g 1
	1 - 2g + 1	1 - 2g + 1

$\chi(M_k^2) = 2 - k = 2 - k = 2 - k$

неориен. по клеткам по $H_*(; \mathbb{Z})$ по $H_*(; \mathbb{Z}_2)$

$e^0 + (c_1 + \dots + c_k) + e^2$	$H_0 = \mathbb{Z}$	$H_0 \ H_1 \ H_2$
$1 - k + 1 = 2 - k$	$H_1 = \mathbb{Z}^{k-1} + \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \ \mathbb{Z}_2^k \ \mathbb{Z}_2$
	$H_2 = 0$	
	1 - (k-1) + 0	1 - k + 1

• Применения гомологии.

Теор. Евклидовы пр-ва \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m не гомеоморфны при $n \neq m$. (Этот факт, вообще говоря, не очевиден).

д-во. Допуст. противное, т.е. пусть \exists гомеоморф. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Выберем по точке из \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m , причем: $\mathbb{R}^n \setminus x$, где $x \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m \setminus y$, где $y = f(x)$. Тогда, очевидно,

$f: \mathbb{R}^n \setminus x \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m \setminus y$ тоже гомеоморфизм:



Поэтому отображ. $f: \mathbb{R}^n \setminus x \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m \setminus y$ индуцирует отображ. $g: S^{n-1} \rightarrow S^{m-1}$, являющийся гомотопич. эквивалентностью. Но $H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$, $H_{m-1}(S^{n-1}) = 0$ и $H_{m-1}(S^{m-1}) = \mathbb{Z}$, $H_{n-1}(S^{m-1}) = 0$, т.е. группы гомол. этих сфер не изоморф. А потому S^{n-1} и S^{m-1} гомотоп. не эквивал. (см. выше). Теор. доказ.

• Теор. Брауэра о неподв. точке: любое непрерыв. отображ. $f: \bar{D}^n \rightarrow \bar{D}^n$ всегда имеет неподв. точку.

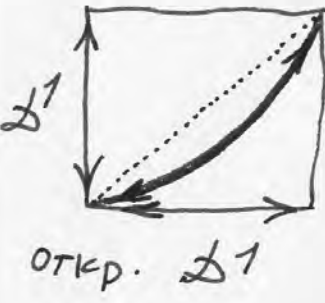
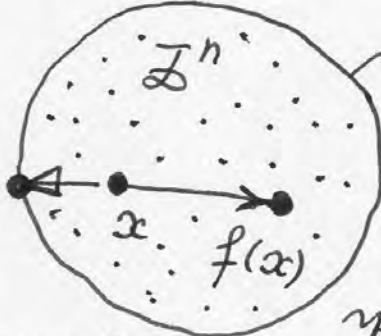


график $f: D^1 \rightarrow D^1$ неподв. тог. в D^1 нет.

Допуст. противн. Пусть $\exists f: \bar{D}^n \rightarrow \bar{D}^n$, не имеющее неподв. точек, т.е. $f(x) \neq x$ для $\forall x \in \bar{D}^n$.



соединим x и $f(x)$ отрезком и продолжим его назад, до пересечен. с граничн. сферой S^{n-1} .

Получаем непрер. отображ. $g: \bar{D}^n \rightarrow S^{n-1}$, прилем если $x \in S^{n-1}$, то очевидно $g(x) = x$. Если $i: S^{n-1} \rightarrow \bar{D}^n$ - вложение, то рассмотрим композицию $S^{n-1} \xrightarrow{i} \bar{D}^n \xrightarrow{g} S^{n-1}$

Тогда $gi = id$ - тождеств. отображ. сферы на себя. Тогда:

$$H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(\bar{D}^n) \xrightarrow{g_*} H_{n-1}(S^{n-1})$$

Так как шар стягивается в точку, то $H_{n-1}(\bar{D}^n) = 0$, т.е.

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} 0 \xrightarrow{g_*} \mathbb{Z}$$

$(gi)_* = id$

с одной стороны получаем, что $g_* i_*: \mathbb{Z} \rightarrow 0$, а с другой стороны $g_* i_* = (gi)_* = id: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ изоморфно.

Противоречие. Теор. доказ.

Опред. Пусть $X \supset Y$ и непрер. $f: X \rightarrow Y$, прилем $f = id$ на Y . Такой f назыв. ретракцией X на Y , а Y - ретрактом пр-ва X . Выше мы доказали, что диск \bar{D}^n нельзя ретрагировать на его границу (сферу S^{n-1}). Верно более общее утв. Теор. Пусть M^n компактно-многообр. с краем ∂M . Тогда не существует ретракции $f: M^n \rightarrow \partial M$.

т.е. нельзя непрер. отобр. M на его край, чтобы край был неподвижен.

∂ -во. Допуст. противное: пусть такое $f \exists$. Тогда:



i -вложение. Композиция $f \circ i: \partial M \rightarrow \partial M$ будет тождественна.

Тогда
$$H_{n-1}(\partial M, G) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(M^n, G) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(\partial M, G)$$

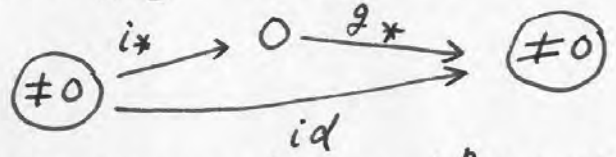
будет $= id$, так как $f_* i_* = (f \circ i)_* = id_* = id$.

Но цикл $i(\partial M)$ гомологичен нулю в M , т.к. ∂M -граница M .

Т.е. $i_*: H_{n-1}(\partial M, G) \rightarrow 0 \in H_{n-1}(M, G)$.

Если ∂M -ориентир., то $H_{n-1}(\partial M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \neq 0$.

Если ∂M -неориент., то $H_{n-1}(\partial M, \mathbb{Z}_2) \neq 0$. В обоих случаях получ. противоречие:



теор. доказ.

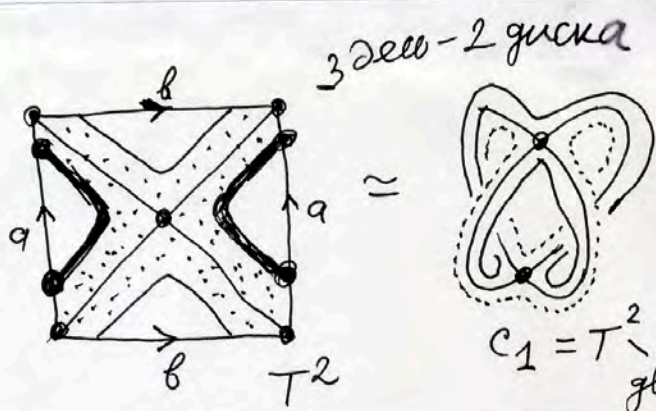
• Другое ∂ -во теор. о \nexists ретракции диска D^n на граничную сферу (аналог.: \nexists ретракции компакт. мн-я M^n на его границу ∂M).

Покажем на примере M^2 с тран. $\partial M^2 = S^1$. Допустим противн.: пусть \exists отобр. $f: M^2 \rightarrow \partial M^2 = S^1$, непрер. и кск' $f(x) = x \forall x \in \partial M^2$. Пусть $K = f^{-1}(x)$, $x \in \partial M^2$, K -связная компонента, содержащая x . Рассм. $K \subseteq f^{-1}(x)$, $x \in \partial M^2$, K -замкнуто в M^2 и \exists открытая окрестн. $U(K) \subset M^2$ с границей γ , где γ -шаговая кривая. Очевидно, что $\gamma \cap K = \emptyset$, $x \in K$. Пересечение $U(K) \cap \partial M =$ отрезок $[\alpha, \beta]$, причем $x \in [\alpha, \beta]$. Рассм. образ $f(\gamma) \subset \partial M = S^1$. Ясно, что α и $\beta \in f(\gamma)$, т.к. $f(\alpha) = \alpha$ и $f(\beta) = \beta$. Очевидно, $f(\gamma) \supset [\alpha, \beta]$, т.к. $\alpha, \beta \in S^1$, γ -связно и $f(\gamma)$ расположено близко от $[\alpha, \beta]$, т.к. окрестн. $U(K)$ можно выбрать близкой к $K = f^{-1}(x)$, причем γ связно, гомеом. отрезку с концами α, β ; и $f(\gamma)$ связно в S^1 . Поэтому $x \in f(\gamma)$. Противоречие, т.к. $\gamma \cap K = \emptyset$. Чт и треб.



Задача (для желающих) на Эйлера характерист. Рисуем "координатный крест" в торе T^2 и будем считать "концы креста" как положено на торе, но иногда добавляем "перекрутки" на лентах, ведущих в концы креста. Получим поверхность с краем (вообще говоря, несвязный) и заклеим все компоненты края 2-дисками. Вопрос: какое 2-многооб. получится? Вот решение задачи:

пошагово Эйлера характеристика задачи:



Здесь - 2 диска

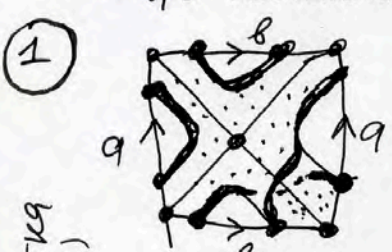
$$\chi(T^2) = 0 = 2 - 4 + 2 = 0$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 верш. ребра диски
 $M^2_? = T^2$

$$\chi(\text{относ. осей}) = 2 - 4 = -2$$

$C_1 = T^2 \setminus 2D^2$
два диска.

Теперь начинаем перекручиваться всеми способами. Что получится?



Теперь начинаем перекручиваться всеми способами. Что получится?
подсчитываем - сколько дисков.

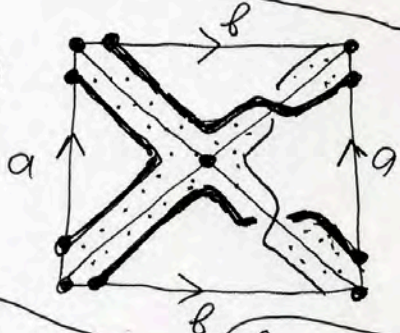
одна перекрутка (неориент.)

Здесь - один диск и $M^2_?$ - неориент. следоват. $\chi(M^2_?) = -2 + 1 = -1$. Но $\chi(\text{неориент. } M^2) =$

Общая формула: $\chi(M^2_?) = -2 + \text{число дисков}$
 " $\chi(\text{относ. осей})$
 который при перекрутках не меняется.
 $= 2 - k$, где $k = \text{число ленток Мёбиуса}$

т.е. $-1 = 2 - k$, $k = 3$
 т.е. $M^2_? = \text{дуг. Клейна} = S^2 \# 3M$

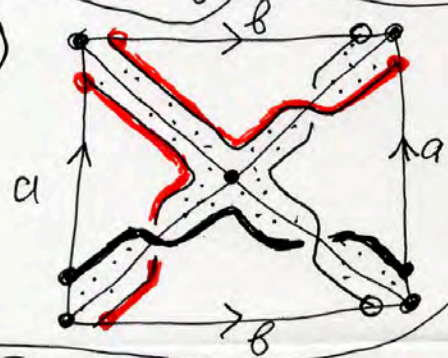
две перекрутки (неориент.)



$\chi(M^2_?) = -2 + \#D^2 = -2 + 2 = 0$,
 здесь - 2 диска $M^2_?$ - неориентир.

т.е. $0 = 2 - k$, $k = 2$, т.е. $M^2_? = \mathbb{R}P^2 = KL$ Клейн.

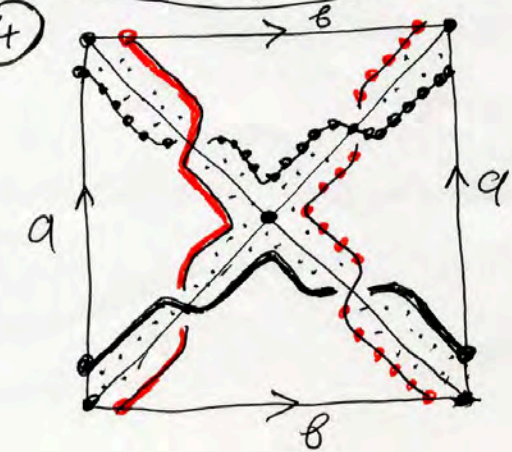
три перекрутки (неориент.)



Здесь - три диска. и $M^2_?$ - неориент.

т.е. $\chi(M^2_?) = -2 + 3 = 2 - k$, т.е. $k = 1$, т.е. $M^2_? = \mathbb{R}P^2$

4 перекрутки (ориент.)



Здесь - 4 диска (4 граничных окружн.) и $M^2_?$ - ориентир, т.к. не касаются ленте - 2 перекрутки (ориент. не меняется).

т.е. $\chi(M^2_{\text{ор.}}) = 2 - 2g = -2 + 4$
 т.е. $g = 0$ и $M^2 = S^2$
 сфера!

• Разные определ. гомологий: клеточные, симплиц. и симпл. Для "хороших" пространств все они изоморфны (соотв. группы гомол.). Например:

Теор. Если X — конечный полиэдр, то его гомологии: клет., симпл., симпл. изоморфны (без ∂ -ва).

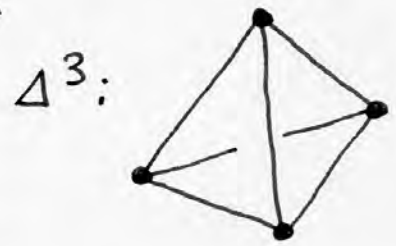
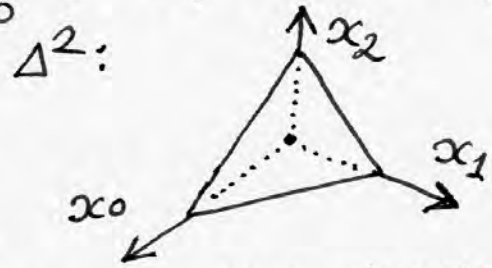
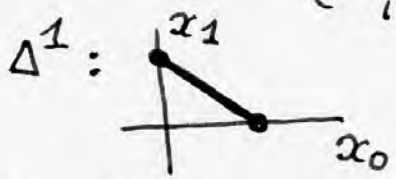
- Симпл. гомол. мы сейчас определим. А определ. симпл. гомол. см. в книге: Фоменко, Фукс, "Гомотоп. топол."
- Полезно понимать следующее:

Симпл. гомол.	легко определяются	трудно вычислять
Симпл. гомол.	легко определяются	трудно вычислять
Клеточ. гомол.	сложнее определяются	легче вычислять

Поэтому во многих случаях удобно пользоваться клеточными гомологиями



• Определ. симплиц. гомологий. Сначала — симплекс. q -симплекс Δ^q — это мн-во, задаваемое в $\mathbb{R}^{q+1}(x_0, \dots, x_q)$ так: $\Delta^q = \{ \sum_{i=0}^q x_i = 1; x_i \geq 0 \forall i \}$.



• Опред. Топол. пр-во X назыв. симплиц. комплексом (полиэдром), если

- 1) $X = \cup_{i \in I} \Delta_i^q$, где Δ_i^q — гомеоморфны стандарт. евклидовым симплексам, и:
- 2) симпл. Δ_i^q "хорошо прилегают" друг к другу, а именно: $\Delta_i^q \cap \Delta_j^p = \text{целая грань, или } \emptyset$ (т.е. не пересек.)

Зададим q -симпл. набором его вершин: $\Delta^q = (a_0, a_1, \dots, a_q)$. Определим границу $\partial \Delta^q = \sum_{i=0}^q (-1)^i (a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_q)$, т.е. вершина a_i — пропущена. Альтернированная сумма $(q-1)$ -мерных граней. Т.е. — "границы со знаками \pm ".

• Примеры. Δ^1 : $\partial \Delta^1 = \partial(a_0, a_1) = a_1 - a_0$

Δ^2 : $\partial \Delta^2 = \partial(a_0, a_1, a_2) = (a_1, a_2) - (a_0, a_2) + (a_0, a_1) = (a_1, a_2) + (a_2, a_0) + (a_0, a_1)$, т.е. обобщенная граница треугольника.

Теор: $\partial^2 \equiv 0$. $\partial \circ \partial = 0$. $\partial^2(a_0 \dots a_q) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j} (a_0 \dots \hat{a}_i \dots \hat{a}_j \dots a_q)$. (66)

Знак $(-1)^{i+j}$ определ. тем,

какую вершину выбрасываем первой: (пусть $i < j$):

— \hat{a}_i — \hat{a}_j — знак: $(-1)^i (-1)^{j-1}$
 (1) (2)

— \hat{a}_i — \hat{a}_j — знак: $(-1)^{j-1} (-1)^i$ ← отличаются
 (2) (1) ← знаками

поэтому в общей сумме эти слагаемые сокращаются. Цитр ∂ .

• Далее следуем схеме определ. клеточ. гомол.

Группа симплиц. q -цепей $C_q^{\text{сим.}} = \{ \sum_i a_i \Delta_i^q, a_i \in G \}$

где G — группа коэфф. Далее:

$Z_q^{\text{сим.}} = \text{Кер}(\partial_q)$; $B_q^{\text{сим.}} = \text{Im}(\partial_{q+1})$; $H_q^{\text{сим.}} = Z_q^{\text{сим.}} / B_q^{\text{сим.}}$

• Теор. Если X — конечн. симплиц. комплекс, то:

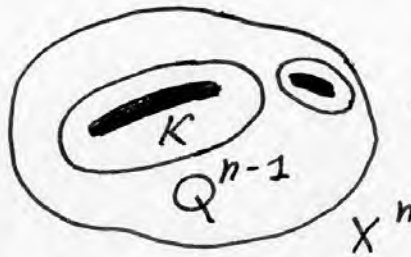
$H_q^{\text{клет.}}(X) \cong H_q^{\text{сим.}}(X) \cong H_q^{\text{симп.}}(X)$. (без ∂ -ва).

• Как и в случае клеточн. пр-ств, группы симп. гомол. не зависят от способа разбиения X в объедин. симплексов.

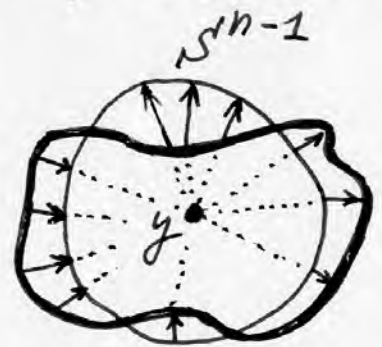


двумерный тор двуметно накрывает бутылку Клейна. См. далее теорию накрытий.

• Дополнение. Еще одно определ. степени $\deg f$ - по индукии. Пусть $f: X^n \rightarrow Y^n$ - гладк. отображ. Пусть $y \in Y^n$ - произв. точка (не обязат. регулярн. знач. для f). Пусть $K = f^{-1}(y)$ - полн. прообраз в X (вообще говоря, K - несвязно).



Пусть $U(K)$ - "малая" открытая окрестность K . Тогда нетрудно доказать, что границу $U(K)$ можно считать (при подходящем $U(K)$) малым $(n-1)$ -подмнот. в X^n . Рассмотрим образ $f(Q)$ в Y . Так как $U(K)$ выбрано "близким" к K , то $f(Q)$ - "близко" к точке y , но $y \notin f(Q)$. Рассм. достаточно малую сферу $S^{n-1}(y)$ с центром в y : можно считать, что $f(Q)$ расположено в окрестности шара $D^n(y)$, ограниченного сферой $S^{n-1}(y)$.

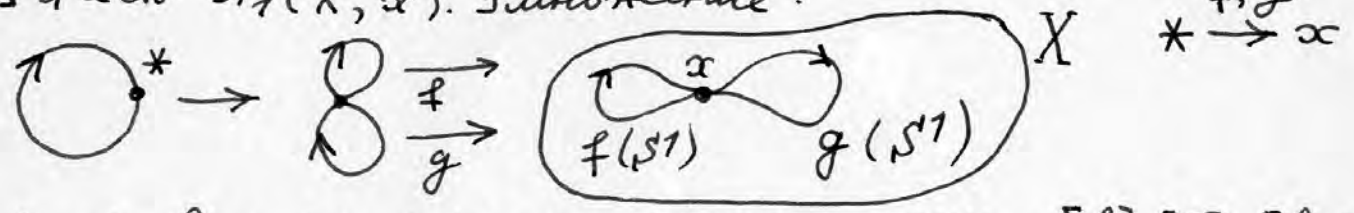


Тогда $f(Q)$ можно гладко спроектировать вдоль радиусов шара на сферу $S^{n-1}(y)$. Центр шара не лежит на $f(Q)$.

Получили отображ. $g: Q^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$. Продолжаем процесс. Получаем $S: D^{n-2} \rightarrow S^{n-2}$. И т.д. пока не дойдем до отображ. $p: U S^1 \rightarrow S^1$, т.е. объединения окружностей в S^1 . А здесь уже определ. степени - ясно: сумма прообразов точки со знаками (ориент.)

• Другие гомотопия инварианты топол. гр-ств. Фундамент. группа $\pi_1(X)$.

Опред. 1. $f: S^1 \rightarrow X$, где f - непрер. и отмеченная точка S^1 переходит в отмечен. точку $x \in X$. Пусть $[f]$ - все отображ., гомотопные f и не сдвигающиеся отмечен. точки. Мн-во всех $[f]$ и есть $\pi_1(X, x)$. Умножение:



$f, g \rightarrow f \cdot g$ как показано на рис. Положим $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$. Положим $[f]^{-1} = [f(-\varphi)]$, т.е. замена ориент. на окруж.

• легко показать, что $\pi_1(X, x)$ - это группа (вообще говоря, некомм.)

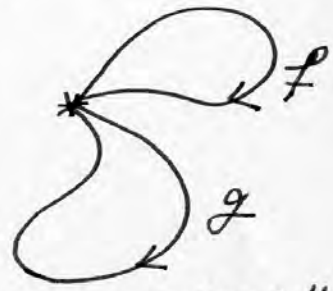
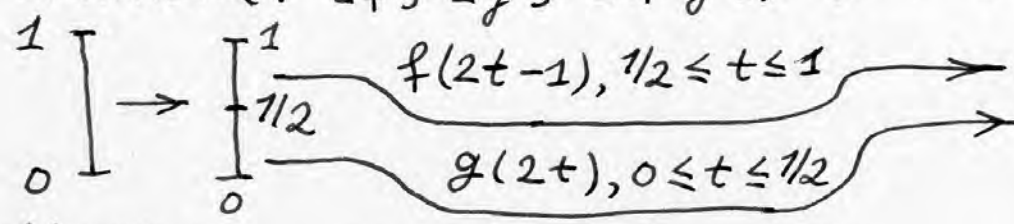
- Единичная группа: $e = [f]$, где $f: S^1 \rightarrow X$ гомотопна нулю, т.е. отображается в точку $*$.
- Ясно, что $[f] \cdot [f]^{-1} = e$, т.к.



такая петля гомотопна нулю.

• Опред. 2. $f: [0, 1] \rightarrow X$, где $f(0) = f(1) = *$ и $[f] \in \pi_1(X)$ есть класс всех g , гомотопных f .

• Умножение: $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$, где $f \cdot g$ есть композиция:



- Лемма. опред. 1 и 2 эквивалентны.
- докажите! См. книгу Фоменко-Фукс "Гомотоп. топол."
- Теор. $\pi_1(X, *)$ не зависит от точки. А именно, для связного пр-ва X группы $\pi_1(X, x)$ и $\pi_1(X, y)$ изоморфны для $\forall x, y$.
- д-во. Построим гомоморф. $i: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y)$ и встречные $j: \pi_1(X, y) \rightarrow \pi_1(X, x)$, которые взаимно обратны.



соединим x и y путем γ .

$$i: \alpha \rightarrow \gamma^{-1} \alpha \gamma$$

$$j: \beta \rightarrow \gamma \beta \gamma^{-1}$$

$$\left. \begin{aligned} & \gamma^{-1} (\gamma \alpha \gamma^{-1}) \sim \alpha, \\ & \sim \alpha, \end{aligned} \right\} \text{гомотопны } \alpha.$$

Путь γ действует как "сопряженце". Читрд.

- На этом основании будем писать просто $\pi_1(X)$, не указывая отмечен. точку. Т.е. $\pi_1(X)$ определ. с точн. до изоморф.
- Непрер. отобра. $f: X \rightarrow Y$ индуцирует гомоморфизм $f_*: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$. Если $f \sim g$ (гомотопны), то $f_* = g_*$.
- Отсюда: если X и Y гомотопн. эквивал., то $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.
- Вычисление $\pi_1(X)$. Примеры.

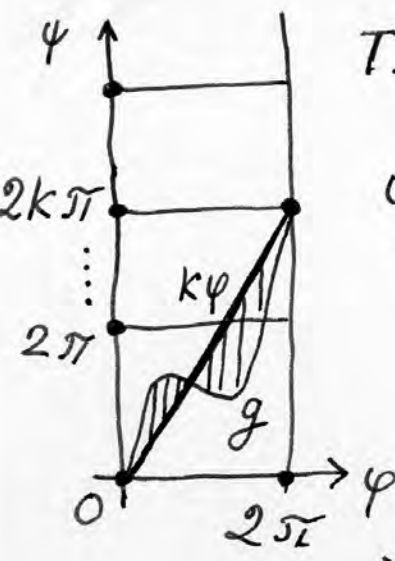
① Если X - стягиваемо в $*$, то $\pi_1(X) = 0$.

② Теор. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

д-во. $f: S^1 \rightarrow S^1; \cong f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^1 / \mathbb{Z}(2\pi) = S^1$
 где $f(0) = f(2\pi)$.

Тогда: $f: e^{i\varphi} \rightarrow e^{ig(\varphi)}$, где $g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^1 / \mathbb{Z}(2\pi)$, $\psi = g(\varphi)$, и $g(0) = 0, g(2\pi) = 2k\pi$ для некоторого целого k .

Рассмотрим график $\psi = g(\varphi)$ на отрезке $[0, 2\pi]$. Очевидно, что \exists непрерыв. гомотопия графика к линейной функции $\psi = k\varphi$, см. рис.



т.е. \forall непрер. $f: S^1 \rightarrow S^1$ гомоморфно отобра. $e^{i\varphi} \rightarrow e^{ik\varphi}$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$.
 обратно: для $\forall k \in \mathbb{Z}$ есть отобра. $e^{i\varphi} \rightarrow e^{ik\varphi}$.
 итак, $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Числ.

③ $\pi_1(S^n) = 0$ при $n > 1$.
 д-во. любая петля стягивается по
 сфере в точку.



опр. пространство X назыв. односвязным, если $\pi_1(X) = 0$.

• Теор. = общий алгоритм вычисл. $\pi_1(X)$ для \forall конечно связного клеточн. пр-ва X . (без д-ва).

лемма. У любого связн. конечн. клеточн. пр-ва X всегда \exists клеточн. разбиение с одной клеткой e^0 .

• рассм. такое разбиение X :
 $X = e^0 + (e_1^1 + \dots + e_m^1) + (e_1^2 + \dots + e_p^2) + (e_1^3 + \dots)$
 dim=1 dim=2 "хвост" dim ≥ 3

составим: $e_i^1 \leftrightarrow a_i$; $e_j^2 \leftrightarrow W_j$. Для \forall клетки e_j^2

рассм. характер. отобра.: $\gamma: \partial \mathbb{D}^2 \rightarrow X^{(1)} = 1$ -остов X .

Тогда $\partial e_j^2 = \bigcup_k \varepsilon_k e_k^1$, где $\varepsilon_k = [e_j^2; e_k^1] \in \mathbb{Z}$.

См. выше опред. трансл. оператора. условно запишем:

$\partial e_j^2 = (e_{i_1}^1)^{\varepsilon_1} \dots (e_{i_s}^1)^{\varepsilon_s}$, т.е. разложение ∂e_j^2 по 1 -мерным клеткам; и $\varepsilon_s \neq 0$.


• Теперь запишем "слово" W_j в "алфавите" a_1, \dots, a_m :

$$W_j = a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{i_s}^{\varepsilon_s}$$

• Теор. $\pi_1(X) = (a_1, \dots, a_m \mid W_1, \dots, W_p)$, т.е. задается образующими a_1, \dots, a_m с соотношениями W_1, \dots, W_p .
 Это - т.н. копредставление группы $\pi_1(X)$.



т.е. $\pi_1(X) = F_m / N(W)$, т.е. - фактор-группа свободной группы F_m (ранга m) по нормальному делителю, порожденному элементами (словами) $\{W_j\}$ группы F_m . т.е. это - наименьший нормал. делитель, содержащ. $\{W_j\}$.

• Примеры.

① $X = S^1 = e^0 + e^1$:  т.к. клеток $\dim=2$ нет, то соотношений ∂_j нет.

$\Rightarrow \pi_1(S^1) = F_1(a_1) = \mathbb{Z}$ (своб. группа ранга 1).

② $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{k \text{ точек}\}$, т.е. \mathbb{R}^2 с k проколами:

 \approx  $= \bigvee_{i=1}^k S^1$ (букет k окружностей).
 $\pi_1(\bigvee_{i=1}^k S^1) = F_k(a_1, \dots, a_k) =$
 = свободная группа ранга k . Некоммутат.

③ Задача. $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \oplus \pi_1(Y)$.

④ $\pi_1(M_g^2) = F(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g) / (a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = 1)$,
 ориен.

$\pi_1(M_k^2) = F(c_1, \dots, c_k) / (c_i^2 = 1)$.
 неориен Частные случаи:

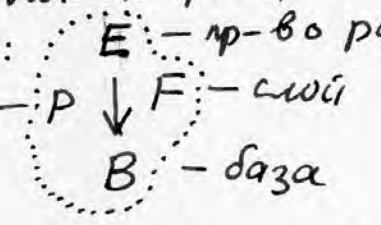
- тор: $\pi_1(T^2) = F_2(a, b) / (a b a^{-1} b^{-1} = 1) = F(a, b) / (a b = b a) = \mathbb{Z}(a) \oplus \mathbb{Z}(b)$.
- $\mathbb{R}P^2$: $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = F_1(c) / (c^2 = 1) = \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$.
- бутылка Клейна: $\pi_1(KL) = F(a, b) / (a b a^{-1} b = 1)$. некомм.

- Алгоритм распознавания тривиальной (нулевой) группы и алгоритм установления изоморфизма двух групп.
- связь фундам. группы с группой гомологии $H_1(X, \mathbb{Z})$.

Теор. $H_1(X, \mathbb{Z}) = \pi_1(X) / [\pi_1(X), \pi_1(X)]$, т.е. - фактор по коммутанту.
 э-во следует из определ. H_1 . На э-во объявить все петли коммутировавшими, а это - фактор по коммутанту.

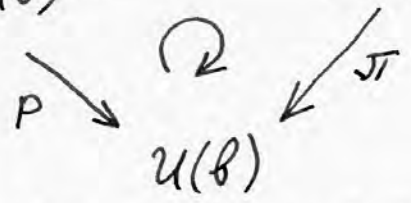
• Пример: $H_1(KL, \mathbb{Z}) = \tilde{F}(a, b) / (a + b - a + b = 0) = \tilde{F}(a, b) / (2b = 0) = \mathbb{Z}(a) \oplus \mathbb{Z}_2(b)$.

Накрытие. Это - частн. случай локал. трив. раскл. с дискрет. слоем.

• Опред. локал. трив. раскл. это: 
 где для $\forall v \in B \exists$ открыт. окрестн. $U(v)$ точки v , что:

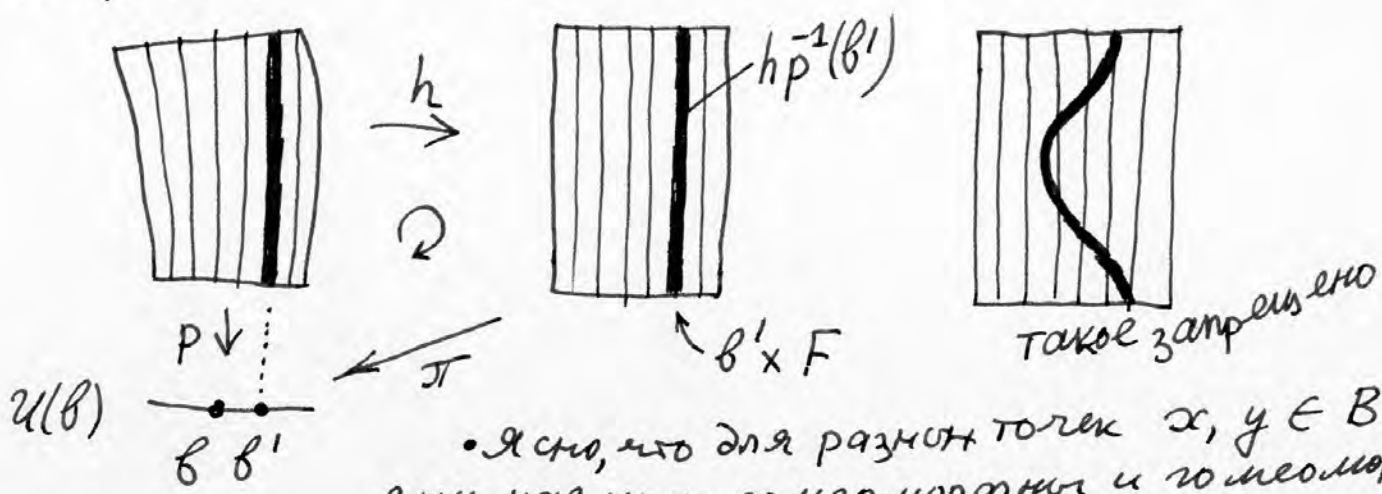
$p^{-1}(U(v)) \cong U(v) \times F$, причем следующая диаграмма коммутативна: $p^{-1}U(v) \xrightarrow{h} U(v) \times F$

т.е. $p = \pi \circ h$, где $\pi: (v', f') = v'; v' \in U(v)$ и $f' \in F$ (слою). Ясно, что



$F \cong p^{-1}(v)$. Условие $p = \pi \circ h$ означает, что h - гомотопический гомеоморфизм $p^{-1}U(v)$ на $U(v) \times F$, т.е.

$h: p^{-1}(b') \rightarrow b' \times F$ для $\forall b' \in \mathcal{U}(b)$.



• Ясно, что для разных точек $x, y \in B$ слои над ними гомеоморфны и гомеоморфны одному и тому же F (слою рассл.): $p^{-1}(x) \cong p^{-1}(y) \cong F$.

• Опред. Накрытие — это локал. трив. рассл. с дискретными слоями F . (Базу B мы считаем связной). Если F — счетно, то накр. $p: E \rightarrow B$ назыв. бесконечно-листным; если F состоит из $k < \infty$ точек, то накр. назыв. k -листным (конечно-кратным).

• Примеры накрытий.

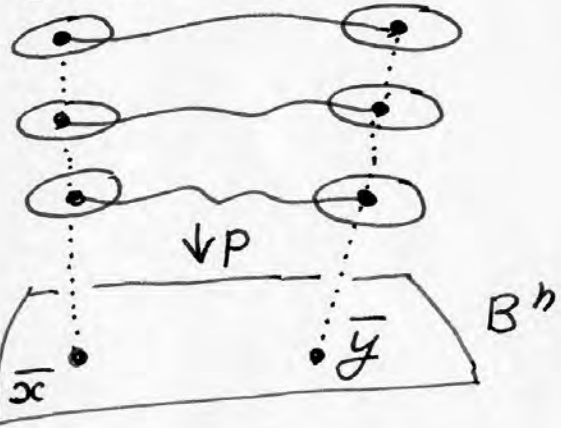
① $p: M^n \rightarrow B^n$, — гладк. отображ. гладк. многог. (связн.), при этом dp — всюду невырожденно, т.е. $\det(dp) \neq 0$ в $\forall x \in M^n$. Тогда p — накрытие.

• э-во. Это — локал. трив. рассл. см. выше. Вытекает из теор. о неявном функ. Все точки $x \in M$ — регулярны.

$p^{-1}(\bar{x}) \cong p^{-1}(\bar{y}), \forall \bar{x}, \bar{y} \in B^n$.

все слои гомеом.

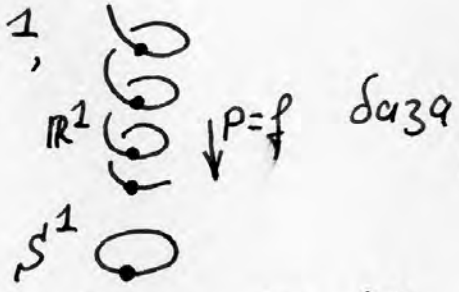
$p^{-1}U(b) \cong U(b) \times F$



② $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1$,

$f(\varphi) = e^{i\varphi}$

∞ -листное накрытие



③ $f: S^1 \rightarrow S^1$, где $f(e^{i\varphi}) = e^{ik\varphi}$. Это — k -листное накрытие.

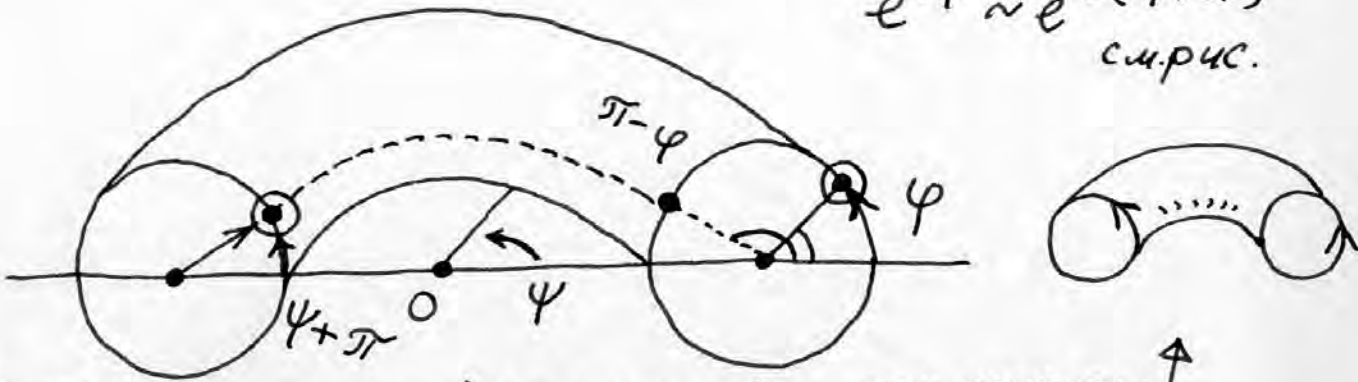
④ $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, где $f(x) = (x, -x) \in \mathbb{R}P^n$. 2-листное накрытие.

⑤ $f: T^2 \rightarrow T^2$, где $f(e^{i\varphi}, e^{i\psi}) = (e^{ik\varphi}, e^{i\psi})$. $(k \cdot p)$ -листное накрытие

⑥ $f: T^2 \rightarrow KL^2$, 2-листное накрытие:
 $f(e^{i\varphi}, e^{i\psi}) = (-e^{-i\varphi}, -e^{i\psi}) = (e^{i(\pi-\varphi)}, e^{i(\psi+\pi)})$.

2-во. опишем действие f на торе. Для наглядн. разрежем тор пополам: (72)

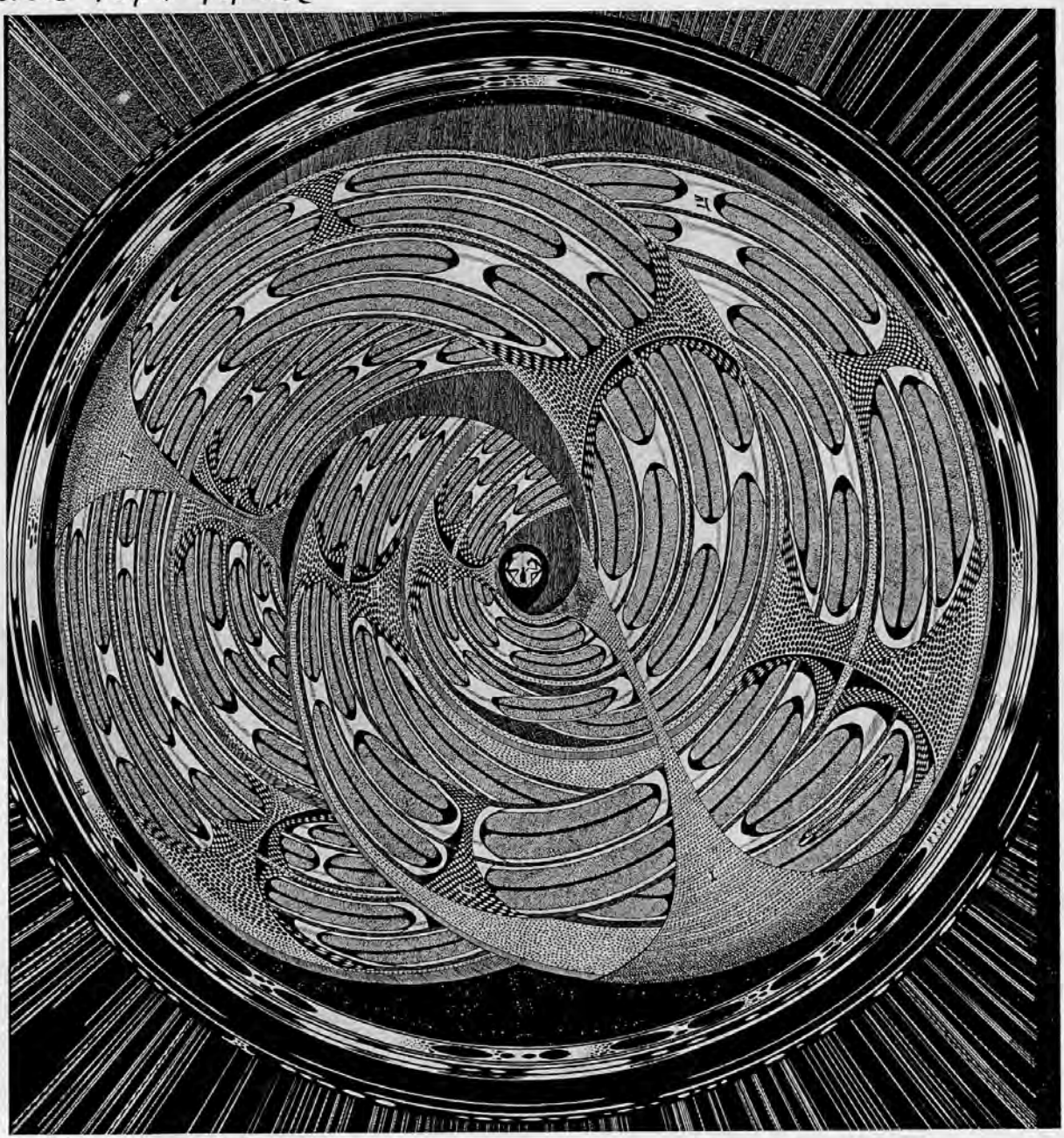
т.е. $e^{i\psi} \sim e^{i(\pi-\psi)}$ и $e^{i\psi} \sim e^{i(\psi+\pi)}$ см.рис.



т.е. надо склеить основания цилиндра как показано \uparrow .
 А это и есть бутылка Клейна. Описанное f порождено инволюцией b на торе: $b(e^{i\psi}, e^{i\psi}) = (e^{i(\pi-\psi)}, e^{i(\psi+\pi)})$.

2-адический соленоид:
 Накрытие тора тором

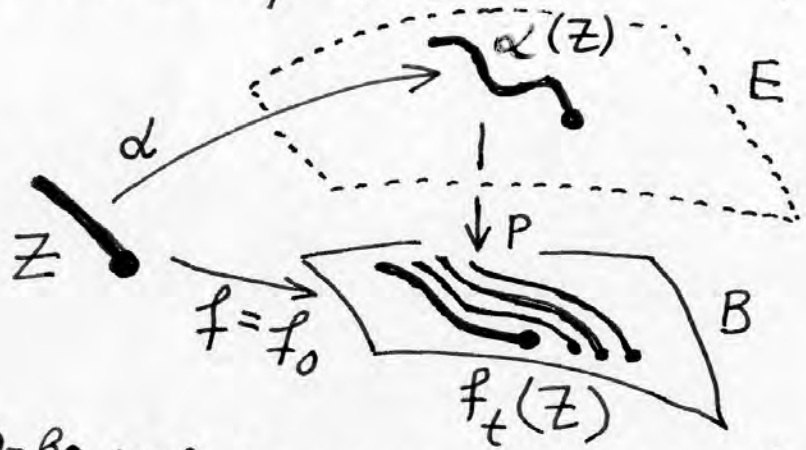
$(e^{i\psi}, e^{i\psi}) \rightarrow (e^{i^k\psi}, e^{i^k\psi}), k \in \mathbb{Z}$
 $k \rightarrow \infty$



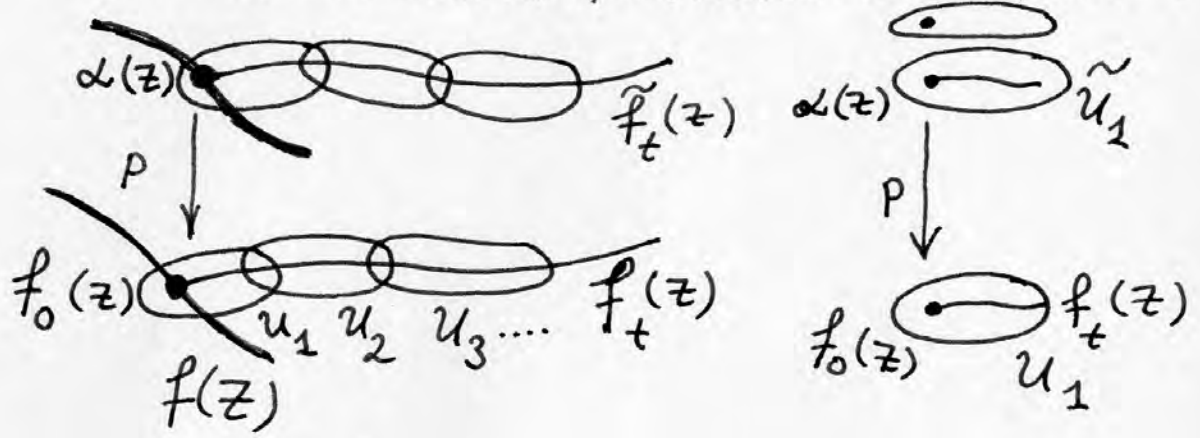
Накрывающая и $\pi_1(X)$.

• Теор. о накрывающей гомотопии.
 Дано: накрытие $p: E \xrightarrow{F} B$ и
 клеточное пр-во Z :

Дано: $f = \text{род } \alpha$ и
 гомотопия $f_t: Z \rightarrow B$,
 причем $f_0 = f$.
 Тогда гомотопию f_t
 можно "накрыть"
 гомотопией α_t "наверху",
 т.е. \exists гомотопия
 $\alpha_t: Z \rightarrow E$ такая, что
 $f_t = p \circ \alpha_t, 0 \leq t \leq 1$.



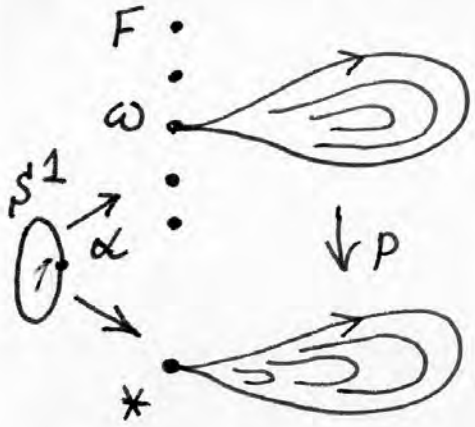
з-во следует из локальной тривильности накрытия.



Если $z \in Z$, то $f(z) \in B$; рассм. малую окрестн. U_1 , содерж.
 $f(z)$ и "включим" гомотопию $f_t(z), 0 \leq t \leq \epsilon$. Тогда
 точка $f_0(z)$ протерпит путь в U_1 . так как $f = p \circ \alpha$, то в слое
 F выделяется точка $\alpha(z)$ и можно рассм. окрестность $\tilde{U}_1 =$
 $= p^{-1} U_1$, т.к. p -локал. гомеоморфизм. Возникает путь
 $\tilde{f}_t(z)$ в \tilde{U}_1 - прообраз пути $f_t(z)$. мы "накрываем" f_t в U_1
 путем в \tilde{U}_1 . Берем следующую окрестн. U_2 и повторяем
 процесс. Теор. док.

• Следствие. Теор. Пусть $p: E \xrightarrow{F} B$ накрытие. Тогда гомомор.
 $p_*: \pi_1(E) \rightarrow \pi_1(B)$ явл. мономорфизмом.

з-во. Доп. против. Пусть $\exists h \in \pi_1(E), h \neq 0$, но $p_* h = 0$
 в $\pi_1(B)$, т.е. петля $p_* h$ гомотопна нулю, стая в точке $*$.
 Тогда \exists гомотоп. $f_t: p_* h \rightarrow *$. По теор. о накрыв. гомотопии
 \exists гомотоп. $\tilde{f}_t: S^1 \rightarrow E$, где $\tilde{f}_0(S^1) = h$ и $p_* \tilde{f}_1(S^1) = *$ в B .



$h = \tilde{f}_0(S^1)$ Т.е. S^1 отобра. в E , где $\omega(1) = \omega \in E$ (отмеченная точка в E), $\alpha: S^1 \rightarrow E$ и $p \circ \alpha \sim 0$ в B . Отобр. α - это представитель h , т.е. условно можно написать: $\alpha = h$. Гомотопия \tilde{f}_t стягивает h в

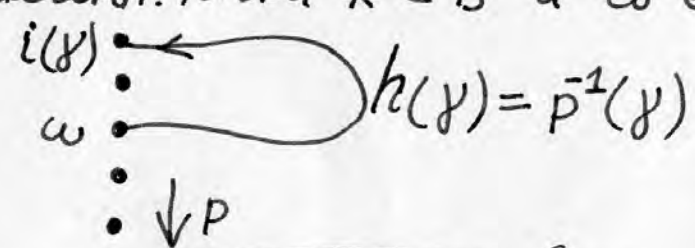
образ $p^{-1}(*)$ точки $*$ в B , т.е. - в точку $\omega \in F$. Значит петля h стянулась в точку в E . Противореч. Чтбд.

• Опред. Подгруппа $p_* \pi_1(E)$ в $\pi_1(B)$ (изоморфная $\pi_1(E)$) назыв. группой накрытия $p: E \rightarrow B$. Накрытие назыв. регулярным, если $p_* \pi_1(E)$ - нормал. делит. в $\pi_1(B)$.

• Теор. Э канонич. взаимно-одн. соответствие: $\pi_1(B) / p_* \pi_1(E) \xrightarrow{\cong} F$. Слева - класов смежности группы $\pi_1(B)$ по подгруппе $p_* \pi_1(E)$, а справа - слой F .

Если накрытие регул., то слой F естеств. приобретает структуру группы.

д-во. Построим отобра. $i: \pi_1(B) \rightarrow$ слой F . Выберем отмеченн. точки $*$ в B и $\omega \in F$. Пусть γ - петля в базе.



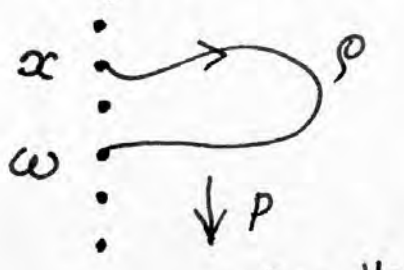
т.к. накрытие локал. тривиал., то петлю γ можно однозначно накрыть путем в E , выходящим из точки ω и приходящим в некоторую точку слоя $F = p^{-1}(*)$; $h(\gamma) = p^{-1}(\gamma)$. Концы пути $h(\gamma)$ и возьмем за $i(\gamma)$.

Получим $i: \pi_1(B) \rightarrow F$. В самом деле, при гомотопии γ по базе концы $i(\gamma)$ не движется, т.к. по теор. о накрыв. гомот. гомотопия пути γ накрыв. гомотоп. $h(\gamma)$, а в силу дискретности слоя F при непрер. деформ. концов пути $h(\gamma)$ не может "перескочить" в другую точку слоя:



Поэтому $i(\gamma)$ корректно определено.
• Теперь докажем, что образ $i(\pi_1(B))$ "накрывает" весь слой F .

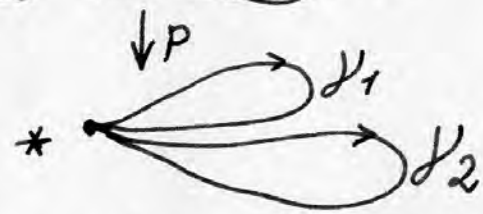
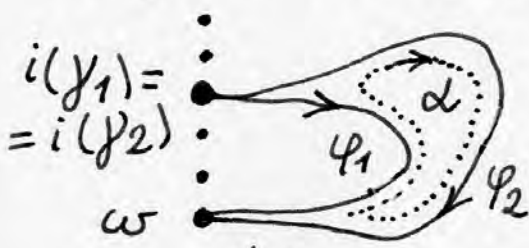
Пусть $x \in F$ — произв. точка слоя. Рассм. путь ρ , соедин. x с отмечен. точкой $\omega \in F$. Мы считаем, что E — связно, а потому $\rho \exists$. Строим базу: $p(\rho) = \gamma$. Тогда γ — это петля, $\gamma \in \pi_1(B)$. Ясно, что $i(\gamma) = x$, т.е. "поднав" петлю $\gamma \in E$, мы из точки ω попадем в x . Читрд.



• Теперь докажем, что если $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(B)$ и $i(\gamma_1) = i(\gamma_2)$, то $\exists \alpha \in \pi_1(E)$ такой, что $\gamma_2 = \gamma_1 \cdot p_*(\alpha)$, т.е. γ_1 и γ_2 лежат в одном классе смежности, т.е. $\gamma_2 \equiv \gamma_1 \pmod{p_* \pi_1(E)}$.



д-во. Поднимем петли γ_1 и γ_2 в E , стартова из точки ω . Так как $i(\gamma_1) = i(\gamma_2)$, то эти поднятия: $\varphi_1 = p^{-1}\gamma_1$ и $\varphi_2 = p^{-1}\gamma_2$ закончатся в одной и той же точке. А потому в E возникает петля $\alpha = \varphi_2 \cdot \varphi_1^{-1}$ из $\pi_1(E)$. Но тогда

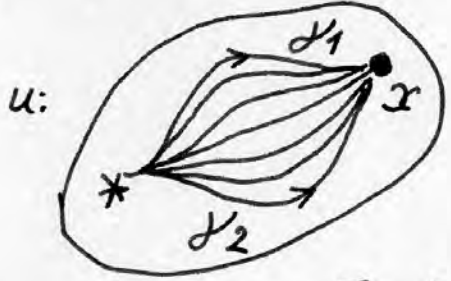
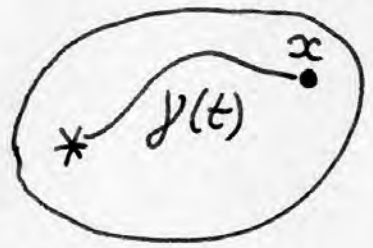


$p\alpha = p(\varphi_2 \cdot \varphi_1^{-1}) = p(p^{-1}\gamma_2) \cdot p(p^{-1}\gamma_1^{-1}) = \gamma_2 \cdot \gamma_1^{-1}$, откуда:

$\gamma_2 = \gamma_1 \cdot p\alpha$, где $p\alpha \in p_* \pi_1(E)$. Читрд.

• Пусть H — произв. подгруппа в $\pi_1(B)$. Теор. Тогда всегда \exists накрытие $p: E \xrightarrow{F} B$ такое, что $H = p_*(\pi_1(E))$, т.е. $\pi_1(E) \cong H$ (группа накрытия).

• докажем сначала для $H=0$. Положим: $E = \{ (\gamma, x), \text{ где } \gamma \text{ — путь в } B, \gamma(0) = *, \gamma(1) = x; x \in B, \text{ и } \gamma \text{ расшат. с точн. до гомотопии, не сдвигающей концы пути.} \}$



γ_1 гомотоп. γ_2 и считаются эквивалентн.

Положим $p(\gamma, x) = x$, т.е. $p: E \rightarrow B$. Отобр. p непрер. и его образ — вся база B . Ищем слой F . Слой F — это все пары (γ, x) , где $p(\gamma) = x$, т.е. $\gamma(1) = x$, т.е. это — все классы гомотопных путей из точки $*$ в точку x . Но множество

всех таких классов - это в точности $\pi_1(B)$. Достаточно соединить вместе точки $*$ и x , протянув точку x вдоль какого-то пути γ_0 в точку $*$. Итак, слой $F = \pi_1(B)$.

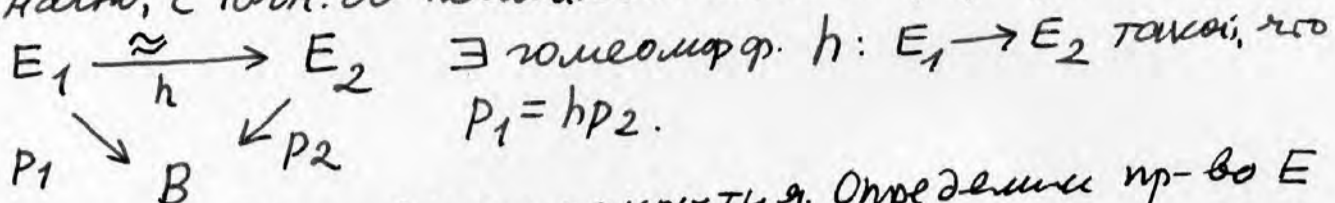
• по предост. теор.: $\pi_1(B) / p_* \pi_1(E) = \pi_1(B)$, т.е.

$p_* \pi_1(E) = 0$, а т.к. p_* - моно м., то $\pi_1(E) = 0$. Читра.

• Опред. Накрытие $p: E \rightarrow B$, где $\pi_1(E) = 0$, назыв. универсальными.

Здесь слой F изоморфен $\pi_1(B)$, и является группой. Такое накрытие - регулярно.

• Теор. (без д-ва). Универсальное накрыт. над B определено однозначно, с точн. до гомотопического гомеоморфизма: т.е.

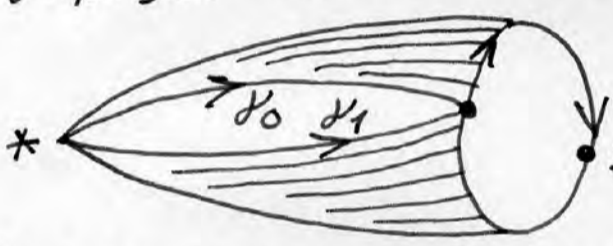


• Другое д-во \exists универсаль. накрытия. Определим пр-во E как и выше: $E = \{(\gamma, x), \gamma(0) = *, \gamma(1) = x \in B\}$, где γ рассматр. с точн. до гомотопии, не сдвигающ. концов пути.

Докажем, что $\pi_1(E) = 0$. Пусть $\tau \in \pi_1(E)$, тогда

$$\tau(\alpha) = \{(\gamma_\alpha(t), x_\alpha), 0 \leq \alpha \leq 1, \gamma_\alpha(0) = * \text{ для } \forall \alpha\}$$

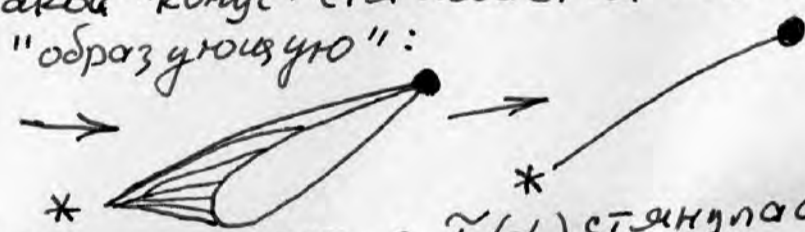
Изобразим "движение" $\tau(\alpha)$ по базе B : путь $\gamma_\alpha(t)$ скользит по B , его конец x_α чертит петлю; она выходит из $\gamma_0(1)$ и возвращается в $\gamma_1(1)$.



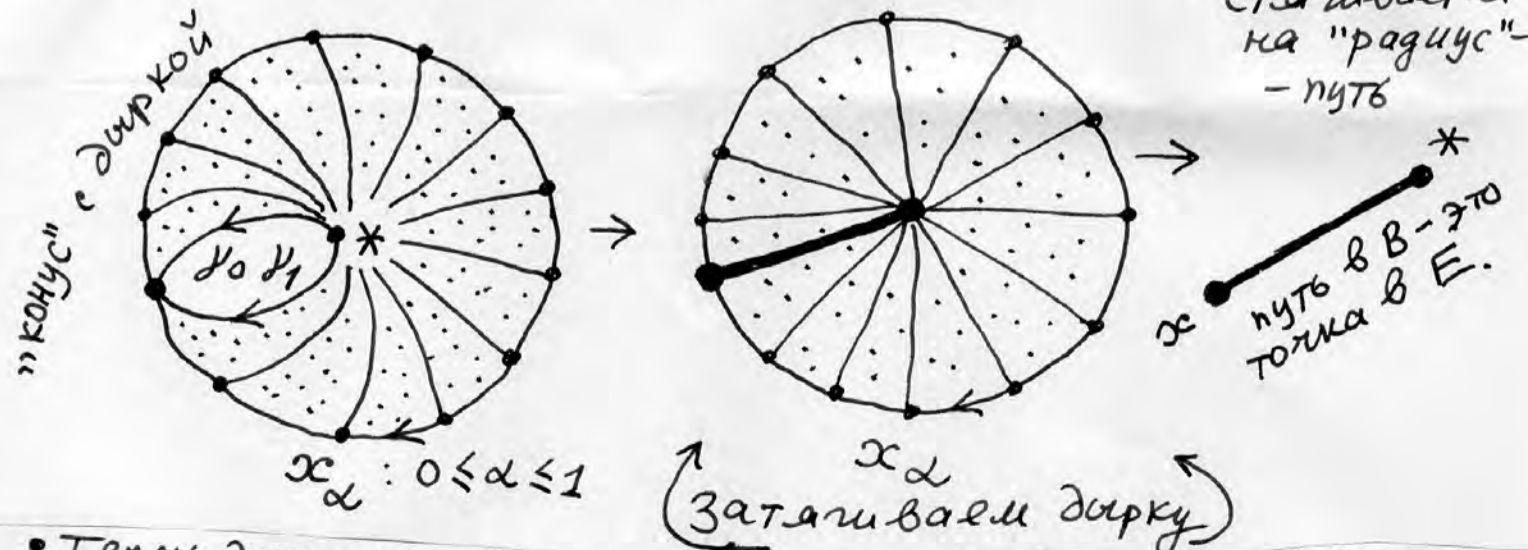
Получается "конус с дыркой", образованной путями γ_0 и γ_1 , т.е. $\gamma_{\alpha=0}(t)$ и $\gamma_{\alpha=1}(t)$. Но так как $\tau(0) = \tau(1)$, то два пути $\gamma_0(t)$ и $\gamma_1(t)$ гомотопны (при неподв. концах). Продолжим их друг в друга и получим "конус без дырки":



Такой "конус" стягивается на свою "образующую":
 Т.е. самими, петля $\tau(\alpha)$ стягивается в точку по пр-ву E . Т.е. $\pi_1(E) = 0$. Читра.

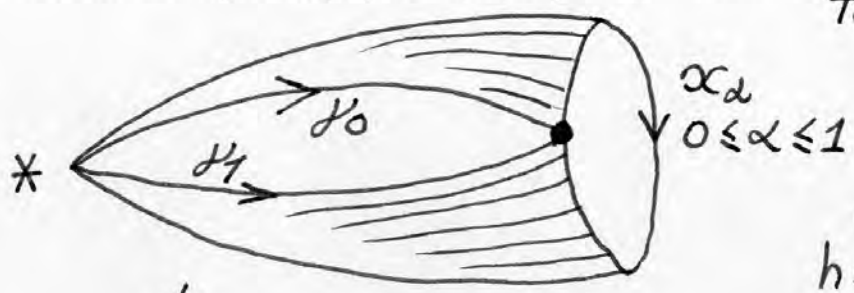


Можно изобразить нагляднее:

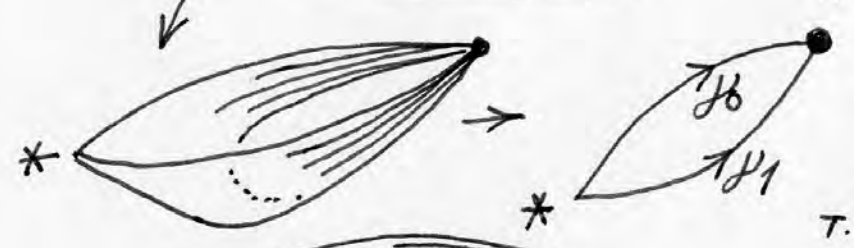


• Теперь докажем теор. о \exists накрытия в общем случае, для $\forall H \subset \pi_1(B)$. Определим $E_H = \{(\gamma, x), \text{ где } \gamma - \text{ путь в } B, \gamma(0) = *, \gamma(1) = x, x \in B\}$, и γ рассматр. "с точностью до H ", т.е. два пути γ_1 и γ_2

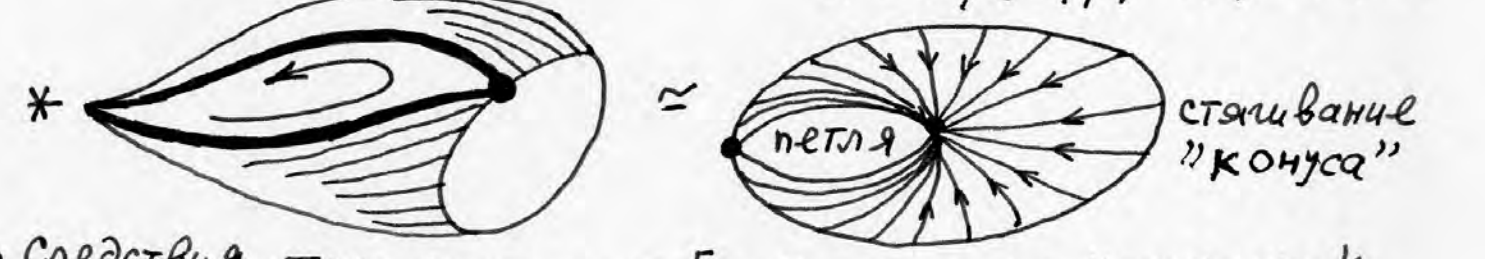
идущие из $*$ в x , считаются эквивал., если $\gamma_1^{-1}\gamma_2 \in H$.
 Тогда $\pi_1(E_H) = H$. Фактически повторим предыдущее
 д-во с "конусом". Пусть $\gamma \in \pi_1(E_H)$, тогда петля
 $\tilde{\gamma}(\alpha) = \{(\gamma_\alpha(t), x_\alpha), 0 \leq \alpha \leq 1, \gamma_\alpha(0) = *$ для $\forall \alpha\}$.
 Тогда в B петля $\tilde{\gamma}(\alpha)$ "заметает" "конус с дыркой":
 Так как $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$, то



$\gamma_0^{-1}\gamma_1 \in H$ (см. определ.).
 Поэтому петля $\tilde{\gamma}(\alpha)$
 стягивается на петлю
 $h = \gamma_0^{-1}\gamma_1 \in H$:

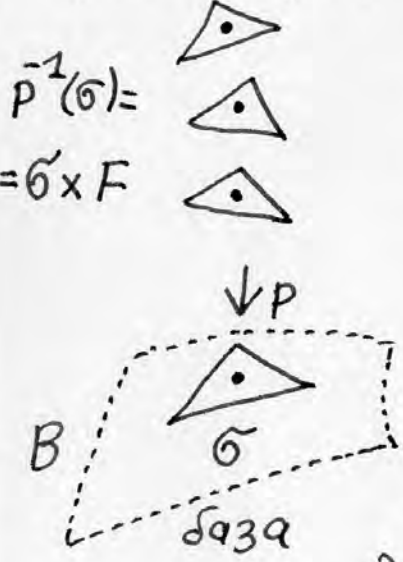


т.е. \forall петля $\tilde{\gamma}(\alpha)$ из
 $\pi_1(E_H)$ в силу одноз.
 задается петлей $h \in H$;
 т.е. $\pi_1(E_H) \cong H$, ч.т.д.



• Следствие. Теор. Пусть $p: E \xrightarrow{F} B$ накрытие кратности k ,
 т.е. F состоит из k точек. Тогда $\chi(E) = k \cdot \chi(B)$.

д-во. Пусть, для простоты, E и B - симплиц. комплексы.
 Так как эйлерова характ. не зависит от симплиц. разбиения,
 можно считать, что симплексы в B достаточно мелкие и что
 симплексы в E получаются как преобразы симплексов из B при
 проецир. p :



Пусть $\mu_p = (\text{кол-во симпл. } \sigma^p, \dim = p, \text{ в } B)$.
 Как доказано выше, $\chi(B) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \mu_p$.

В силу локал. тривиал. накрытия над каждым
 симплексом σ^p "висит" ровно p симплексов
 из E , т.к. $p^{-1}\sigma = \sigma \times F$. Но тогда
 $\mu_p(E) = (\text{кол-во симпл. } \dim = p \text{ в } E) =$
 $= k \cdot \mu_p(B)$, т.е. $\chi(E) = k \cdot \chi(B)$. Ч.т.д.

Следствие 1. Топ T^2 не может накрывать сферу.
 д-во. Если $\exists p: T^2 \rightarrow S^2$, то $\chi(T^2) = k \cdot \chi(S^2)$, т.е.
 $0 = k \cdot 2$; противоречие. Или так: $p_*: \pi_1(T^2) \rightarrow \pi_1(S^2)$
 должен быть мономорф., но $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, а $\pi_1(S^2) = 0$. Ч.т.д.

Следствие 2. Сфера S^2 не может покрывать тор. ∂ -во. Если $p: S^2 \rightarrow T^2$, то $\chi(S^2) = k \cdot \chi(T^2) = 0$, т.к. $\chi(T^2) = 0$, а $\chi(S^2) = 2 \neq 0$. Противоречие.

Следствие 3. Сфера S^2 не может покрывать сферу с $g > 1$ ручками. ∂ -во. Если $p: S^2 \rightarrow M_g^2$, то $2 = \chi(S^2) = k \cdot 2(1-g)$, но $1 < g$, т.е. $1-g < 0$. Противоречие.

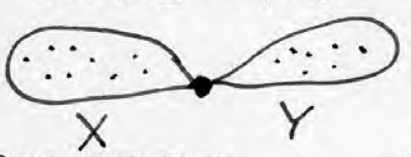
- Еще примеры накрытий.
 Пусть G - группа матриц (напр. $GL(n, \mathbb{R}), SO(n), U(n) \dots$);
 и F - дискретная подгруппа в G . Пусть $B = G/F$ - "однородное пр-во", т.е. мн-во классов смежности G по подгруппе F . Тогда $p: G \rightarrow G/F$ - это накрытие со слоем F . Прием это накрытие регуляро.
 Пусть дискрет. группа F действ. на гладк. мног. E свободно и эрфективно, т.е. для \forall точки $x \in E$ ее орбита $F(x) = \{f(x), \text{ где } f \in F\}$ гомотоморфна F . Тогда $p: E \rightarrow E/G$ авл. накрытием. Здесь $E/G = \{\text{мн-во всех орбит}\}$.

• Вернемся к фундам. группе.
Теор. ван Кампена. Пусть клеточн. пр-во P имеет вид $P = X \cup Y$, где $X \cap Y = Z$, и X, Y, Z - связны. Пусть $i: Z \rightarrow X$ и $j: Z \rightarrow Y$ - два вложения:
 Тогда $i_*: \pi_1(Z) \rightarrow \pi_1(X)$
 и $j_*: \pi_1(Z) \rightarrow \pi_1(Y)$ - соотв. гомоморфизмы.
 Пусть $\pi_1(X) = \{x_1, \dots, x_n \mid \{W\}_X\}$ образующие соотнощ.
 $\pi_1(Y) = \{y_1, \dots, y_m \mid \{W\}_Y\}$ образующие соотнощ. Тогда группа $\pi_1(X \cup Y)$ имеет следующее представление:



$\pi_1(X \cup Y) = \left\{ x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m \mid \{W\}_X; \{W\}_Y; \{i_*\alpha = j_*\alpha\} \right\}$
 (без ∂ -ва) где $\alpha \in \pi_1(Z)$

• Если $Z = *$ (точка), то $P = X \vee Y$ (т.н. букет) и $\pi_1(X \vee Y) = \pi_1(X) * \pi_1(Y)$, т.е. - свободное произведение двух групп.



• Интересное следствие из теор. ван Кампена и теории накрыт.
Теорема из алгебры. Пусть A и B - две конечно-порожден. группы (т.е. конечн. число образующ. и соотнощ.) и пусть $A * B$ - их свободное произведение. Пусть G - произвольная подгруппа в $A * B$. Тогда $G = A_1 * B_1 * F_2$, где $A_1 \subset A$ и

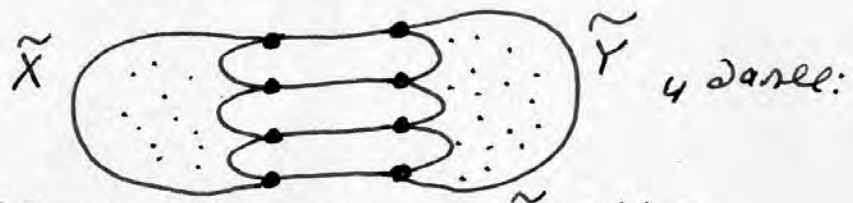
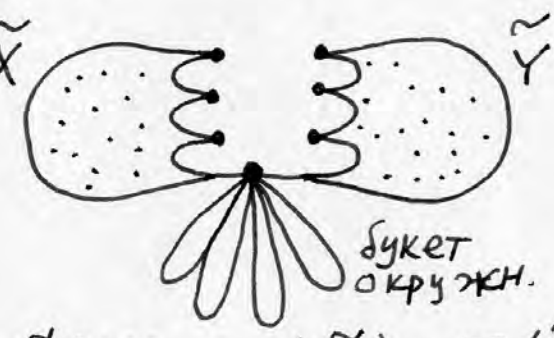
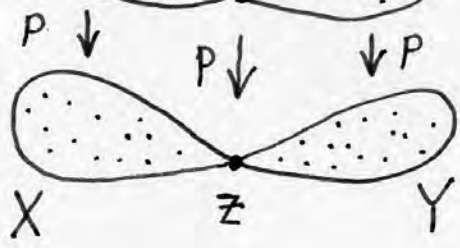
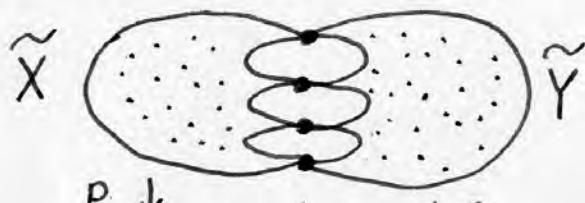
$B_1 \subset B$ - некотор. подгруппы, а F_n - свободная группа некоторого ранга n .

З-во. лемма. Пусть A - конечно-порожд. группа:

$[A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n | W_1, \dots, W_p)]$. Тогда \exists конечн. клеточн. компл. X такой, что $\pi_1(X) = A$. З-во вытекает из теор. о фундам. груп. клеточ. компл. В качестве X возьмем букет окружн. В числе n штук, к которому по словам-соотнож. $\{W_i\}$ приклеим 2-клетки.

• Теперь по группе B построим аналогия. компл. Y такой, что $\pi_1(Y) = B$. Далее, в силу теор. ван Кампена:

$\pi_1(X \vee Y) = \pi_1(X) * \pi_1(Y) = A * B$. Далее, по подгруппе $G \subset A * B = \pi_1(X \vee Y)$ строим накрытие $p: \tilde{M} \rightarrow X \vee Y$, где $\pi_1(\tilde{M}) \cong G$; $p_* \pi_1(\tilde{M}) = G$. Пусть z - точка в $X \vee Y$ - "вершина" букета. Тогда \tilde{M} имеет вид как на рис. Тогда $\tilde{M} = \tilde{X} \cup \tilde{Y}$, где $\tilde{X} \cap \tilde{Y} = p^{-1}(z) = (\lambda \text{ точек})$, где λ - кратность накрытия. Ясно, что \tilde{M} гомотоп. эквивалентно:



Здесь $p: \tilde{X} \rightarrow X$ и $p: \tilde{Y} \rightarrow Y$ - накрытия, а потому

$p_* \pi_1(\tilde{X}) = A_1 \subset \pi_1(X) = A$ и $p_* \pi_1(\tilde{Y}) = B_1 \subset \pi_1(Y) = B$.

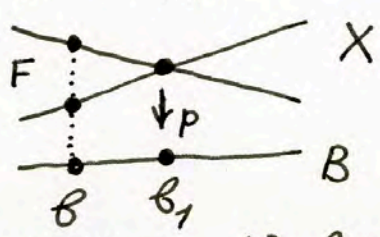
Далее: $\pi_1(\tilde{M}) = \pi_1(\tilde{X} \vee \tilde{Y} \vee (\text{букет } \lambda S^1)) = \pi_1(\tilde{X}) * \pi_1(\tilde{Y}) * \pi_1(\bigvee_{i=1}^{\lambda} S^1) = A_1 * B_1 * F_n$, а так как $\pi_1(\tilde{M}) = G$, то $G = A_1 * B_1 * F_n$, где $A_1 \subset A, B_1 \subset B$. Цитр д. Напомним, что p_* - мономор.

- Задача. Док., что любое 2-листн. накр. - регулярно.
- Задача. Как сформулир. теор. ван Кампена, если $Z = X \cap Y$ - несвязно.

• Разветвл. накрытия. Опред. Пусть $p: X \rightarrow B$ - непрер. отображ. клеточ. компл. (топол. пр-ств), где в базе B выделен конечный набор точек v_1, \dots, v_m , назыв. "толками ветвления", прилем отобра. p над $B \setminus (v_1 \cup \dots \cup v_m)$ явл. обычным (неразветвл.) накрытием со слоем F ; прообраз $p^{-1}(v_i)$ - дискретен, и если точка v в базе B стремится к v_i (т.е. условно:

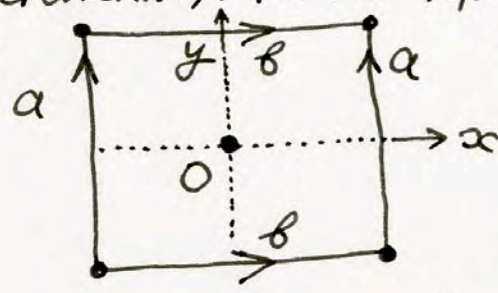
$\lim v = v_i$), то слой F над v стремится к слою $p^{-1}(v_i)$ (т.е. условно: $\lim_{v \rightarrow v_i} p^{-1}(v) = p^{-1}(v_i)$).

• Пример разветвлен. накры.: F X v_1 -точка ветвления.



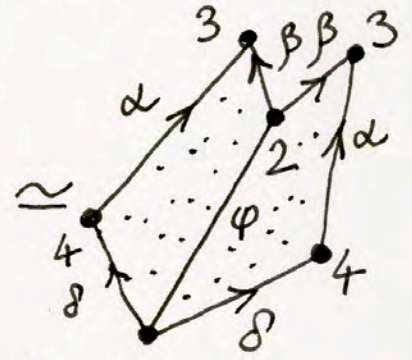
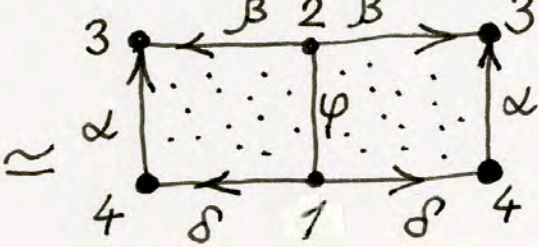
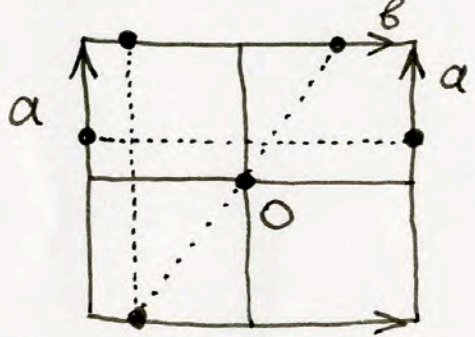
• Более содержат. пример разветвл. накры. это специал. отобр. $p: T^2 \rightarrow S^2$.

Напомним, что T^2 не может накрыть S^2 в обычном смысле (т.е. неразветвленно). Рассм. тор как квадрат со склейками a и $a^{-1}b^{-1}$: x и y оси, 0 центр. Рассм. имволуч. σ на квадрате: $\sigma(x, y) = (-x, -y)$. Отражение в центре. Рассм. проекцию $p: T^2 \rightarrow T^2/\sigma$, т.е.

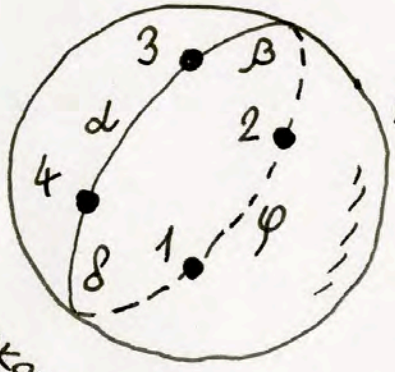
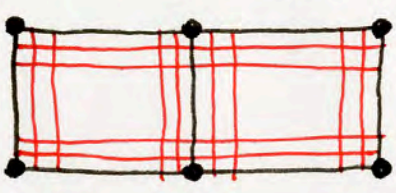


отображением точки (x, y) и $(-x, -y)$. Утв.: фактор пр-во T^2/σ есть сфера S^2 . σ -во см. на рис.

отображением точки (x, y) и $(-x, -y)$. Утв.: фактор пр-во T^2/σ есть сфера S^2 . σ -во см. на рис.



нижнюю часть квадрата можно удалить



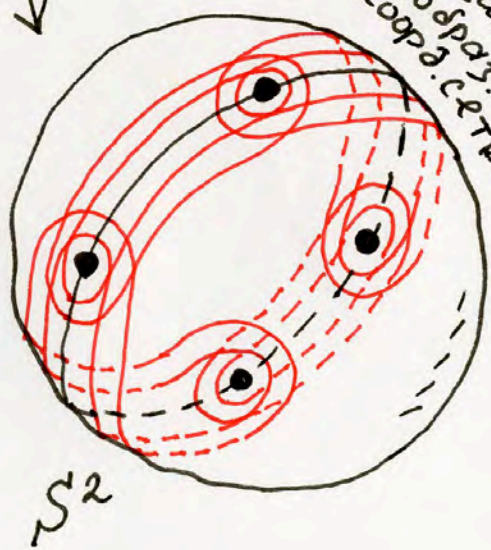
Мы построили разветвл. 2-листное накры. $p: T^2 \rightarrow S^2$.

Есть 4 точки ветвл.: 1, 2, 3, 4. Слой над каждой из них - это одна точка. Оказыв., это отображ. задается функцией Вейерштрасса $W: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$.

Пусть $z = x + iy$; $\mathbb{R}^2(x, y) \cong \mathbb{C}^1(z)$. Рассм. на \mathbb{R}^2 целочислен. решетку $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ и пусть ω - это узлы решетки (т.е. $\omega = m + in$, где $m, n \in \mathbb{Z}$).

Пополняя \mathbb{C}^1 точкой ∞ , получаем сферу S^2 . Рассм. компл. ф-ю: (= ф-ю Вейерштрасса)

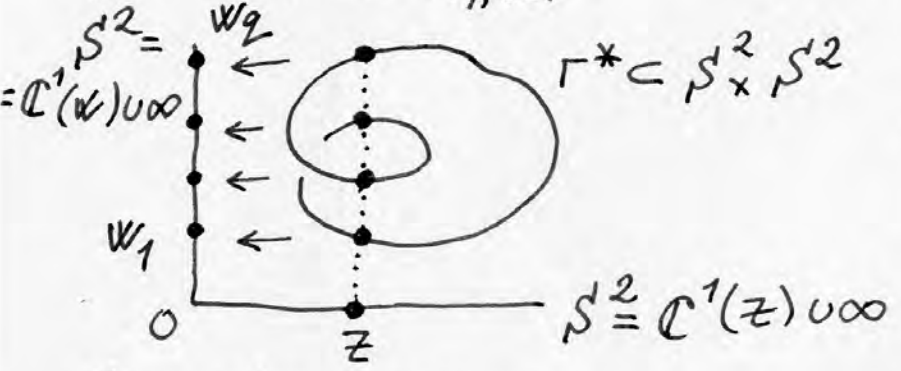
показано, как преобраз. ортогон. коорд. сетка на торе



$$W(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\omega \in \Gamma \\ \omega \neq 0}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right), \text{ где } \Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \text{ решётка}$$

Ф-я $W(z)$ отобра. $\mathbb{R}^2(x, y) = \mathbb{C}^1(z) \rightarrow \mathbb{S}^2(W)$ и $W(z)$ - эволюционно-периодич. Ф-я, а потому на самом деле она отображ. тор $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$. В узлах решетки Γ ф-я $W(z)$ имеет полюса порядка 2. Это и есть описанное выше разветвл. накрытие $T^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$.

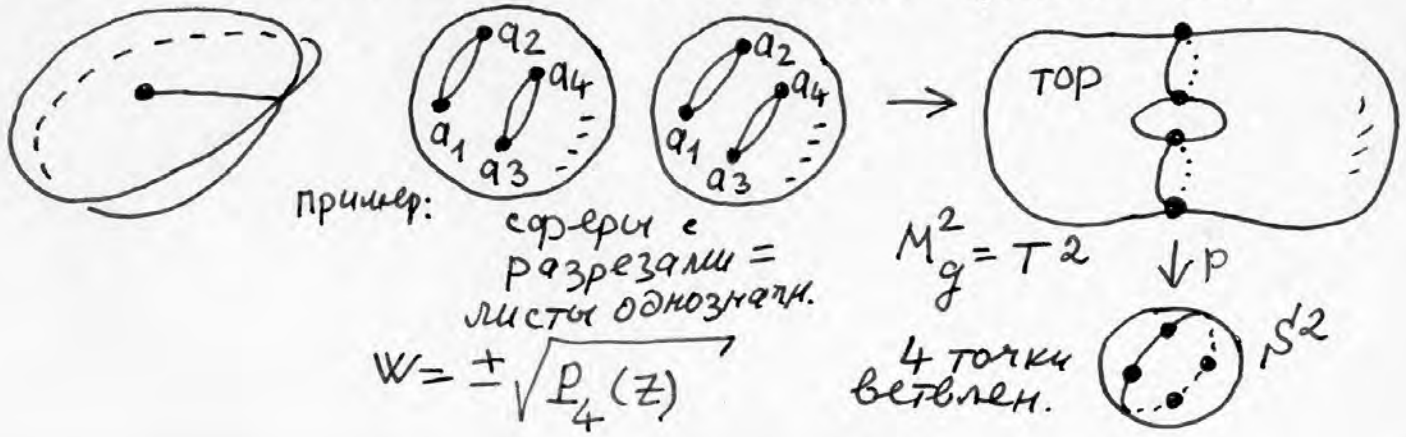
• Еще пример разветвл. макр. Рассм. в $\mathbb{C}^2(z, w)$ ур-е $w^2 - P_n(z) = 0$, где P_n - полин. степ. n с простыми корнями. Тогда $\Gamma = \{(z, w) : w^2 - P_n(z) = 0\}$ явл. модким 2-подмод. в \mathbb{C}^2 . Γ -ришан. поверхн. для алгебр. Ф-ции $w = \pm \sqrt{P_n(z)}$. См. наш обязат. курс по диффр. геом. и топол. Тогда компактифицированная ршан. пов. $\Gamma^* \subset \mathbb{S}^2(z) \times \mathbb{S}^2(w)$ явл. модким комп. мног. ориент., и $\Gamma^* = M_g^2 = \mathbb{S}^2 + g(\text{ручек})$, где $g = \lfloor \frac{n(n-1)}{2} \rfloor$ - целая часть. Ршан. пов. Γ^* проектив. на $\mathbb{S}^2(z)$; $p: \Gamma^* \rightarrow \mathbb{S}^2$, т.к. Γ^* - это график алгебраич. Ф-ции $w = \pm \sqrt{P_n(z)}$. Проек. $p: \Gamma^* = M_g^2 \rightarrow \mathbb{S}^2(z)$



явл. разветвл. накрыт. кратности 2, т.к. для z вообще полнотемия ур-е $w^2 - P_n(z) = 0$ имеет 2 разл. корня. На сфере $\mathbb{S}^2(z)$ есть ровно n точек ветвл. - это корни a_1, \dots, a_n полин. $P = \prod_{i=1}^n (z - a_i)$. Алгебр. ф-я

Если $w^2 - P_n(z) = 0$, то накрытие p является g -листным разветвленным.

$z \rightarrow w \xrightarrow{\cong} g(z) = (w_1(z), w_2(z))$; две ветви
корни a_1, \dots, a_n явл. точками ветвл. порядка 2.

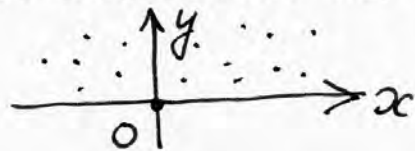


пример: сфери с разрезами = листы однозначн.

$$W = \pm \sqrt{P_4(z)}$$

$M_g^2 = T^2$
4 точки ветвл. \mathbb{S}^2

• Еще один важн. пример метрики. Риск. реализацию метрики Лобачевского на верхней полуплоскости: $ds^2 = \frac{dzd\bar{z}}{-(z-\bar{z})^2}$,



где $z = x + iy$; или же,
эквивалентно: $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

Риск. изометрии: $W = \frac{az + b}{cz + d}$, $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}$ и $ad - bc = +1$.

Тогда группа изометрий, сохран. ориентацию L^2 ,
есть $SL(2, \mathbb{R}) / \mathbb{Z}_2$, где $SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ и } ad - bc = 1 \right\}$.

Риск. матрицы A_1, \dots, A_{2g} из $SL(2, \mathbb{R})$, где: $g \geq 2$ и

$$A_k = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^{-k+1} \begin{pmatrix} \cos \beta + \sqrt{\cos 2\beta} & 0 \\ \sin \beta & \sin \beta \\ 0 & \cos \beta + \sqrt{\cos 2\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^{k-1}$$

где $\alpha = \frac{\pi(2g-1)}{4g}$, $\beta = \frac{\pi}{4g}$; $k = 1, 2, \dots, 2g$. Тогда:

$A_1 \dots A_{2g} A_1^{-1} \dots A_{2g}^{-1} = 1$ (id). можно доказать, что

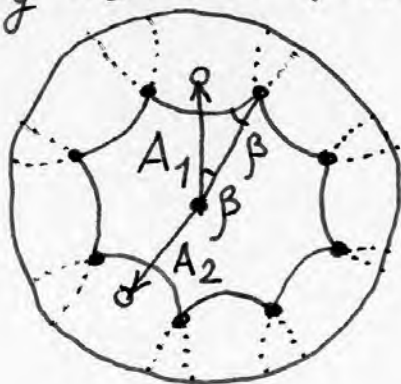
A_1, \dots, A_{2g} и указанным соотношением, изоморфна
группе с образ. $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ и соотношением ($g \geq 2$):

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1, \text{ т.е. фундам. группе}$$

$\pi_1(M_g^2)$ сферы S^2 с g ручками: g -род
поверхности.

• Теор. (без д-ва). Плоск. лобачев. L^2 явл. универс. накрытием над $M_g^2 = S^2 + g$ (ручек). Слой F является фундам. гр. $\pi_1(M_g^2)$. Она реализована как дискр. подгр. в группе изометрий плоск. лобач. и она действует на L^2 свободно и эффеетивно. А потому $M_g^2 = L^2 / \pi_1(M_g^2)$. В частности, на M_g^2 возникает риман. метр. постоянной отриц. кривизны.

В модели Пуанкаре на открытом диске, см. пример для действия изометрий A_1, A_2, \dots при $g=2$.



Склейка сторон v -угольника дает край M_g^2 $g=2$:



Элементы теории Морса.

Рассм. макс ф-ю $f(x)$ на M^n . идея: восстановить данные о топологии M , если известны св-ва функции f , например, ее критич. точки.

• Опред. Точка $x \in M$ назыв. критической, если $df(x) = 0$, т.е. $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, 1 \leq i \leq n$, т.е. $grad f(x) = 0$.

• Лемма. Понятие крит. точки не зависит от выбора локал. к-т. $(x) \rightarrow (x')$; $\frac{\partial f}{\partial x_i'} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i'} \frac{\partial f}{\partial x_i}$, т.е. слова $\frac{\partial f}{\partial x_i'} \Big|_x = 0$.

• Рассм. $d^2 f \leftrightarrow (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$ в критич. точке. Пусть $(x) \rightarrow (x')$. тогда: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i' \partial x_j'} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i'} \frac{\partial x_j}{\partial x_j'} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial x_i' \partial x_j'}$, т.е. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i' \partial x_j'} = 0$ в крит. точке

т.е. $\begin{pmatrix} d^2 f \\ (x') \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} d^2 f \\ (x) \end{pmatrix} A^T$, где A - матрица Якоби. $\begin{pmatrix} d^2 f \\ (x) \end{pmatrix}$ не зависит от выбора локал. к-т.

• Опред. Крит. точка $x \in M$ для ф-ции f назыв. невырожд., или точкой Морса, если $\det(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}) \neq 0$, т.е. $\det \begin{pmatrix} d^2 f \\ (x) \end{pmatrix} \neq 0$.

Индексом λ крит. точки x назыв. кол-во отрицател. собствен. чисел у симм. невыр. матриц. $(d^2 f)$.

• Пример. у функции $y = x^2$ точка 0 - крит. невыр. $ind = \lambda = 0$. у функции $y = x^3$ точка $x = 0$ - крит. и вырождена.

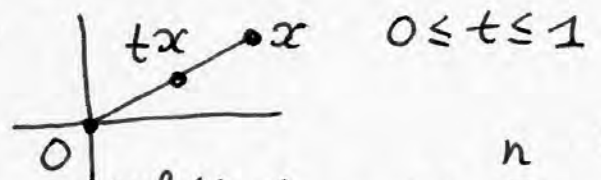
• Лемма Морса. Пусть P - крит. невыр. точка $ind = \lambda$ для ф-ции f на M^n , тогда \exists локал. регул. система к-т x_1, \dots, x_n , т.е. $f(P) = 0$.

$f(x) = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$ в некоторой откр. окр. U точки P . считаем, т.е. $P = (x_i = 0)$. Такое представление ф-ции f явл. полным в U , а не приближен.

• Д-во. Итак: $f(x), f(0) = 0$ и $grad f(0) = 0, \det(d^2 f) \neq 0$.

Лемма 1. \exists гладк. ф-ции $g_1(x), \dots, g_n(x)$, т.е. $f(x) = x_1 g_1(x) + \dots + x_n g_n(x)$ в некот. откр. окр. O и $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0, 1 \leq i \leq n$.

Д-во. Рассм. отрезок: $f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) x_i dt = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$



$= \sum_i x_i g_i(x)$, где $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} dt$. Ясно, что $g_i(0) = \partial f / \partial x_i |_0$. Читред.

• Применим лемму два раза, т.е. теперь $g_i(x) = \sum_j x_j h_{ij}(x)$, где $h_{ij}(0) = \frac{\partial g_i(0)}{\partial x_j}$. И так: $f(x) = \sum_{ij} x_i x_j h_{ij}(x)$, где $h_{ij}(0) = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} |_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} |_0$. А так как $x=0$ невырожд. крит. точка, то

$\det(h_{ij}(0)) \neq 0$.

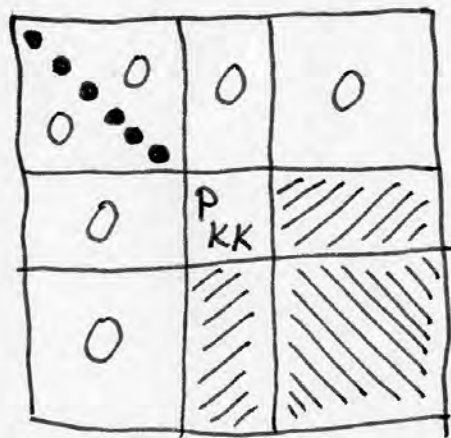
Шаг 2. Лемма 2. Для $\forall k \exists \varphi$ -числ R_{ij} и там же локал. рел. к-тот $y_1 \dots y_n$ в некоем откр. окр. точки 0, что:

$f(y) = \pm y_1^2 \dots \pm y_{k-1}^2 + \sum_{i,j \geq k} y_i y_j R_{ij}(y)$, где матрица $(R_{ij}(y))$ - симмет. и невыр., т.е. $\det(R_{ij}(0)) \neq 0$.

До-во. по индукции. При $k=1$ мы на шаге 1 получили:

$f(x) = \sum x_i x_j h_{ij}$, удовл. требован. леммы 2. Пусть лемма 2 уже доказана для k . Сделаем шаг k следующим. $k+1$. Имеем:

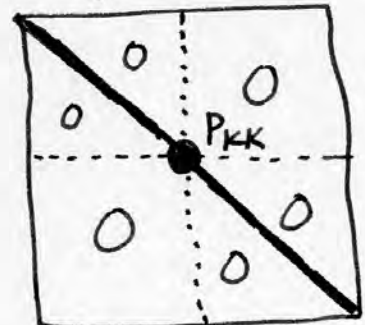
$f(y) = \pm y_1^2 \dots \pm y_{k-1}^2 + y_k^2 R_{kk} + \sum_{\substack{i,j \geq k \\ i \neq j}} y_i y_j R_{ij}$ (*)



Утверд., что можно сделать такую замену (репл.) к-т y_k, \dots, y_n в окрестн. 0, что новое $R_{kk}(0)$ будет отлжно от 0.

В самом деле. Т.к. матр. (R_{ij}) симмет. и невырожд., то \exists локал. репл. замена к-т, что в одной точке, т.е. в нуле, эта матр. приведет к диагон. виду. А тогда собств. число $\lambda_k \neq 0$. Это и есть

новое $R_{kk}(0) = \lambda_k \neq 0$. Поэтому можно считать, что матрица (R_{ij}) в нуле имеет вид:



Теперь в сумме (*) выделим "полный квадрат".

т.е. диагональ и невырожденна. Отметим, что $R_{ik}(0) = 0$ при $i \neq k$. Это нам ниже потребуется.

$f(y) = \pm y_1^2 \dots \pm y_{k-1}^2 \pm (y_k \sqrt{|R_{kk}|})^2 + 2y_k \sum_{i > k} y_i R_{ik} + \sum_{i,j \geq k+1} y_i y_j R_{ij} =$

$$\begin{aligned}
 &= \pm y_1^2 \dots \pm y_{k-1}^2 \pm (y_k \sqrt{|P_{kk}|})^2 \pm 2y_k \sqrt{|P_{kk}|} \sum_{i>k} y_i \frac{P_{ik}}{\sqrt{|P_{kk}|}} + \\
 &+ \left(\sum_{i>k} y_i \frac{P_{ik}}{\sqrt{|P_{kk}|}} \right)^2 - \left(\sum_{i>k} y_i \frac{P_{ik}}{\sqrt{|P_{kk}|}} \right)^2 + \sum_{i,j>k+1} y_i y_j P_{ij} = \\
 &= \pm y_1^2 \dots \pm y_{k-1}^2 \pm \left(y_k \sqrt{|P_{kk}|} \pm \sum_{i>k+1} y_i \frac{P_{ik}}{\sqrt{|P_{kk}|}} \right)^2 + \sum_{i,j>k+1} y_i y_j \left(P_{ij} - \frac{P_{ik} P_{jk}}{|P_{kk}|} \right).
 \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных: $y_i \rightarrow z_i$, где:

$$\begin{cases}
 z_1 = y_1 \\
 \vdots \\
 z_{k-1} = y_{k-1} \\
 z_k = y_k \sqrt{|P_{kk}|} \pm \sum_{j>k+1} y_j \frac{P_{jk}}{\sqrt{|P_{kk}|}} \\
 z_{k+1} = y_{k+1} \\
 \vdots \\
 z_n = y_n
 \end{cases}$$

Эта замена регулярна (невырожд.) в окрестности нуля. Докажем.

Надо проверить, что матрица $\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$ невырожд. в нуле.

А тогда она невырожд. и в некотор. окрест. нуля.

$\frac{\partial z_p}{\partial y_q} = \delta_{pq}$ при $p, q \leq k-1$ и $p, q > k+1$. Ищем $\frac{\partial z_k}{\partial y_k}$.

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial z_k}{\partial y_k} \right|_0 &= \underbrace{\sqrt{|P_{kk}(0)|}}_0 + \underbrace{y_k}_{0} \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \sqrt{|P_{kk}|} \right) \pm \sum_{j>k+1} \underbrace{y_j}_{0} \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{P_{jk}}{\sqrt{|P_{kk}|}} \right) = \\
 &= \sqrt{|P_{kk}(0)|} \neq 0.
 \end{aligned}$$

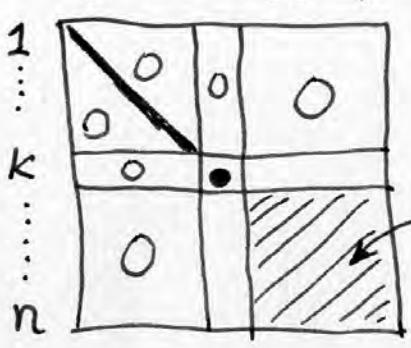
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z_k}{\partial y_i} &= \underbrace{y_k}_{0} \frac{\partial}{\partial y_i} (\sqrt{|P_{kk}|}) \pm \sum_{j>k+1} \underbrace{y_j}_{0} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{P_{jk}}{\sqrt{|P_{kk}|}} \right) \pm \frac{P_{ik}}{\sqrt{|P_{kk}|}} \pm \\
 &\pm \underbrace{y_j}_{0} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{P_{jk}}{\sqrt{|P_{kk}|}} \right) = \pm \frac{P_{ik}(0)}{\sqrt{|P_{kk}(0)|}} = 0, \text{ т.к.} \\
 &\text{при } i \neq j
 \end{aligned}$$

В выбранной выше сист. k -т $P_{ik}(0) = 0$ при $i \neq k$.

Итак: $\left. \frac{\partial z_k}{\partial y_k} \right|_0 \neq 0$, а $\frac{\partial z_k}{\partial y_i} = 0$ при $k \neq i$.

Осталось проверить симм. и невыр. "хвоста", т.е.

$\sum_{i, j > k+1} y_i y_j \left(P_{ij} - \frac{P_{ik} P_{jk}}{P_{kk}} \right)$. Симметрия очевидна. А невырожд. в новых координ. z_1, \dots, z_n вытекает из того, что матрица имеет вид:



Полная матр. была и осталась невырожд., на месте (k, k) стоит $\neq 0$ элемент, а потому и "хвост" невырожден. Чтрд.

• Описание невыр. крит. точек в $\dim=2$. Т.е. $f(x)$ на M^2 :



max

$-x^2 - y^2$

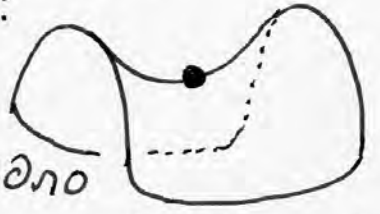
$\text{ind} = \lambda = 2$



min

$x^2 + y^2$

$\lambda = 0$



седло

$x^2 - y^2$; $\lambda = 1$

Пример вырожд. особенности:
 $f(x, y) = \text{Re}(z^3) = x^3 - 3xy^2$

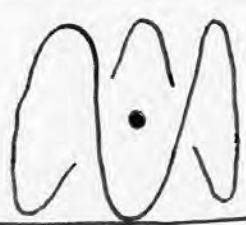
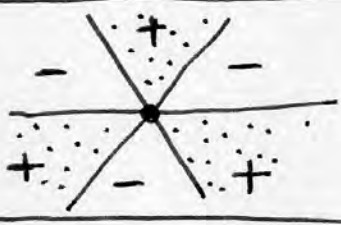
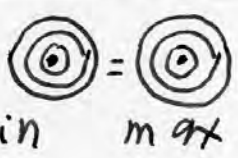


график $\text{Re}(z^3)$
т.е. "обезьянье седло".

линии уровня $f(x, y)$ около морсовской особенн.:



min



max

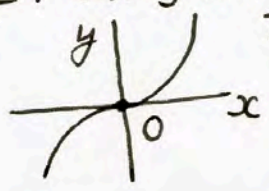


седло

- Общие св-ва ф-ий Морса.
- Опред. гладк. ф-я $f(x)$ на маджк M^n назыв. ф-ей Морса, если все ее крит.т. невырожд.
- Теор. 1. На \forall маджк. M^n (комп. или некомп.) всегда \exists ф-я Морса.
- 2. Ф-ии Морса всюду плотны в пр-ве $C^\infty(M)$ всех маджк. ф-й. Т.е. \forall гладк. ф-я на M путем сколь угодно малого маджк. возмущен. может быть сделана ф-ей Морса.
- 3. Малым возмущ. ф-ии Морса можно развести ее критич. точки на разные уровни так, что на каждом критич. уровне окажется ровно одна крит. точка. Такие ф-ии Морса назыв. простыми. Простые ф-ии Морса всюду плотны в пр-ве $C^\infty(M)$ всех гладк. ф-й на M .
- 4. Любую ф-ю Морса на M можно путем маджк. гомотопии в классе ф-й Морса превратить в такую ф-ю Морса, у которой все крит. точки одного индекса будут лежать на одном уровне; при этом эти критич. уровни будут возрастать с ростом индекса. (Такие "правильные" ф-ии Морса уже не всюду плотны в $C^\infty(M)$).
- 5. Если M - связно, то \forall ф-ю Морса можно путем маджк. гомотопии в классе ф-й с конечным числом крит. точек (некоторые из которых могут быть вырожденными) превратить в ф-ю Морса с ровно одним min и ровно одним max.

- В полном объеме доказывают эту теор. теорему. За м. малая д. пояснения.
- Пункт 1 докажу ниже для случая гиперповерхн. в \mathbb{R}^n .
- Пункт 2: всюду плотность в $C^\infty(M)$. Рассм. пример на M^1 :

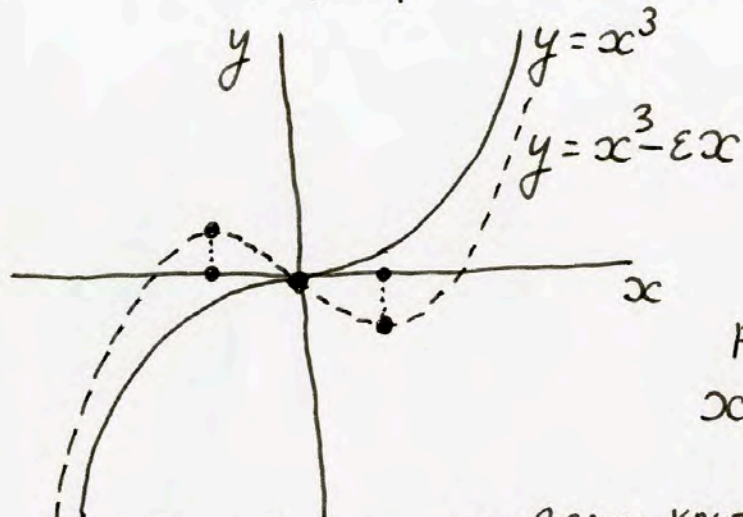
$y = x^3$



Точка 0 - вырожд. т.к. $y'(0) = y''(0) = 0$.
 Рассм. малое возмущение: $y = x^3 - \epsilon x$, где $\epsilon > 0$ и мало; тогда

$y' = 3x^2 - \epsilon$ и $y' = 0$ в точках $x = \pm \sqrt{\epsilon/3}$, а тогда $y'' = 6x \neq 0$ в этих точках, т.е. $x^3 - \epsilon x$ является ф-ей Морса. Вырожд. особенн. x^3 распалась на две морсовские особенн.:

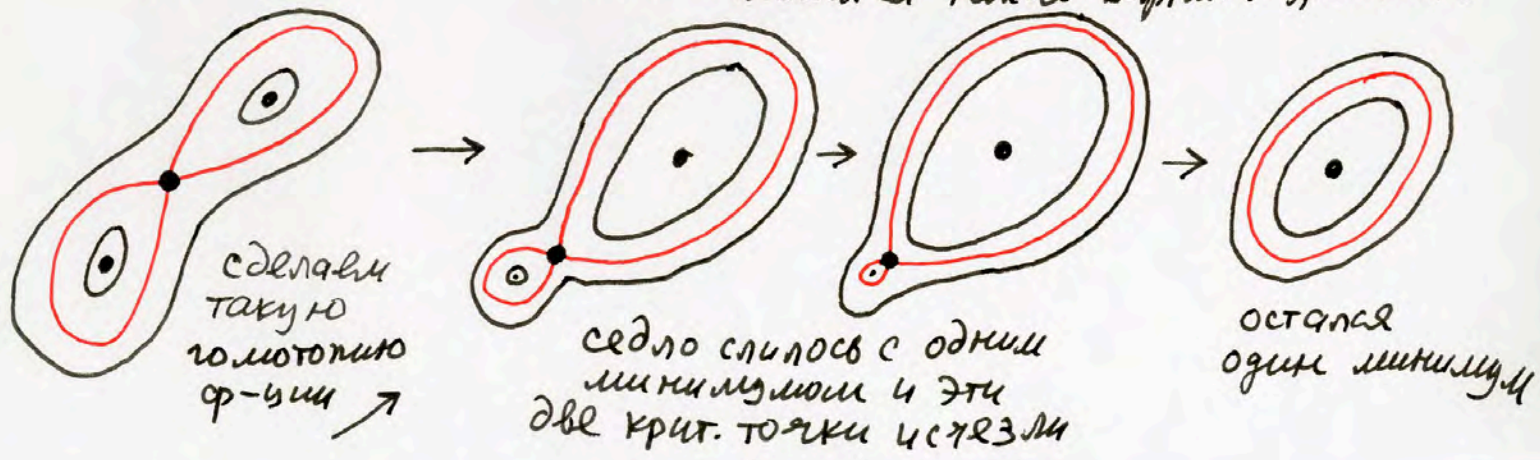
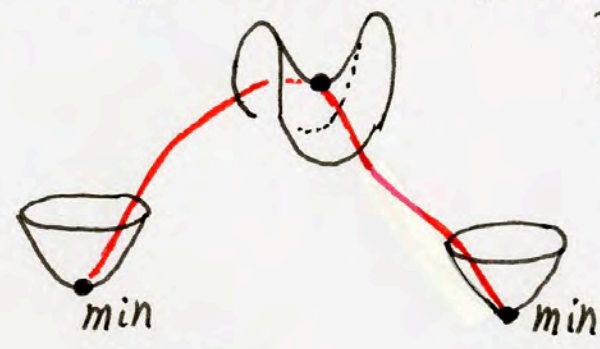
$x^3 \begin{matrix} \rightarrow x^2 \\ \rightarrow x^2 \end{matrix}$



• Пункт 3: как развести крит. точки на разные уровни. См.:



• Пункт 5: как сделать один минимум и один максимум. Рассм. два локальных минимума. Тогда по "принципу перевала" между ними есть седло: если на графике ф-ции f расположить резинку так с концами в двух лок. min, то резинка будет сокращаться, скользить по графику и останется, "зацепившись" за "перевал", т.е. за седло. Тогда на многообразии (пример - на M^2) появится такая картина уровней:

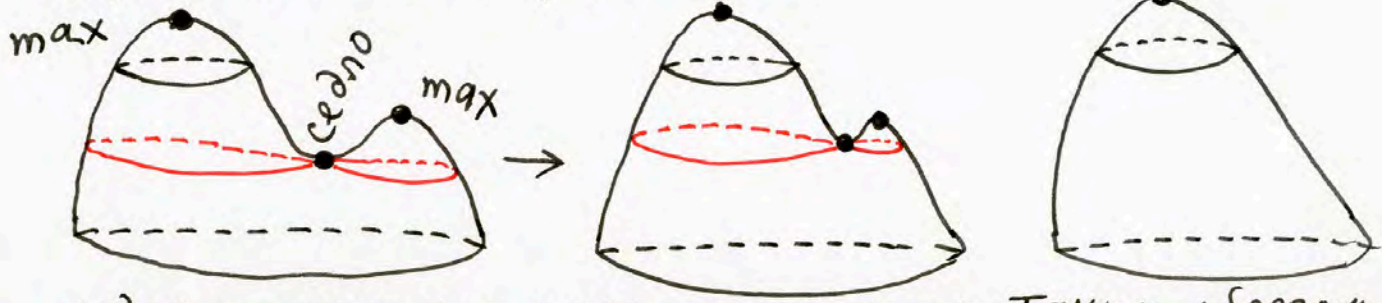


сделаем такую гомотопию ф-ции

седло слилось с одним минимумом и эти две крит. точки исчезли

остался один минимум

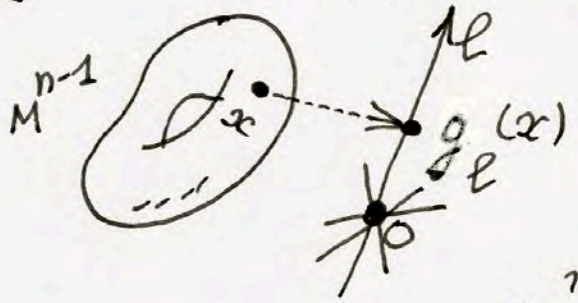
Еще одна пятая деформация:



седло и максимумы "сбегли" друг друга. Таким образом, используя седла, мы оставим только один максимум (или минимум).

• Теперь вернемся к пункту 1 теоремы. Докажем в важной частном случае. Будем использовать материал начального этапа курса по дифференциальной геометрии.

• Теор. Пусть $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ - гладкая подмногообразие (гиперповерхность). Рассмотрим функцию высоты $g(x)$ на M , задаваемую ортогональной проекцией M на прямую ℓ в \mathbb{R}^n , проходящую через начало координат O . Тогда для почти всех прямых ℓ , ф-я g_ℓ явл. ф-ей Морса.

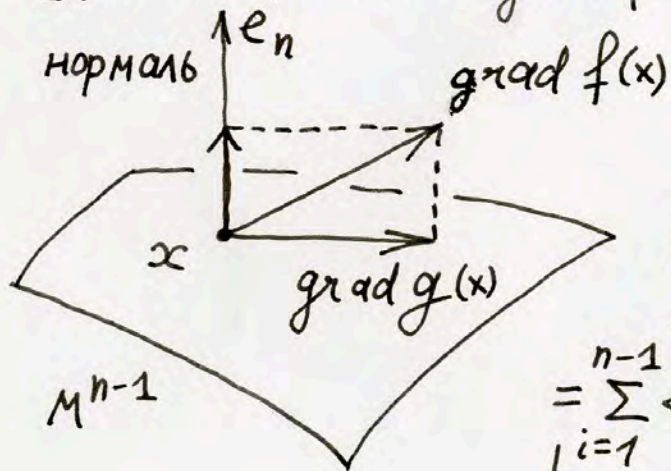


Мы считаем, что на ℓ задана ориентация, т.е. $g_\ell(x)$ - это вещественное число.

Для этого нам потребуются следующие утверждения. Пусть $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ - многообразие и $f(x)$ - гладкая ф-я в окрестности M^{n-1} , и $\text{grad } f$ - в-р градиента f в \mathbb{R}^n относит. евкл. метрике.

Пусть $g(x)$ - ограничение f на поверх. M^{n-1} и пусть g_{ij} - риман. метр. на M^{n-1} , индуцир. объектом евкл. метр. в \mathbb{R}^n . Пусть $\text{grad } g(x)$ - градиент ф-ции g на M^{n-1} относит. этой индуц. метр. g_{ij} ; т.е. $\text{grad } g(x) \in$ касател. плоск. к M^{n-1} .

• Утверж. Тогда $\text{grad } g(x) = \pi(\text{grad } f(x))$, где π - это ортогональная проекция $\text{grad } f$ на касат. плоск. $T_x M^{n-1}$.



Далее. Пусть e_1, \dots, e_{n-1} - ортонорм. базис в $T_x M^{n-1}$, а e_n - нормаль к M . Тогда

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle \text{grad } f, e_i \rangle e_i + \langle \text{grad } f, e_n \rangle e_n = \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \langle \text{grad } f, e_i \rangle e_i}_{\text{grad } g \text{ в } T_x M^{n-1}} + \langle \text{grad } f, e_n \rangle e_n. \end{aligned}$$

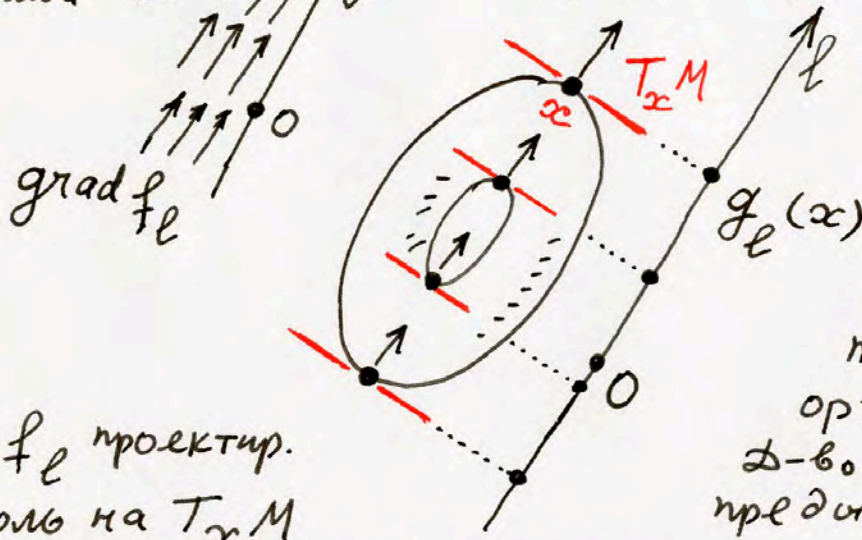


так как $g(x)$ можно продолжить с M "вдоль нормали" к M до ф-ции в малой окрестности M , не меняя значений $g(x)$

вдоль нормали, т.е. $g(x)$ - постоянна вдоль нормали и ее производная вдоль e_n равна нулю. И так, $grad\ g$ в $T_x M$ получается из $grad\ f$ вычитанием компоненты $grad\ f$ вдоль нормали e_n ; т.е. $grad\ g = \pi(grad\ f)$, где $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M^{n-1}$. И так:

$$grad(g = f|_M) = grad\ f - \langle grad\ f, e_n \rangle e_n = \pi(grad\ f).$$

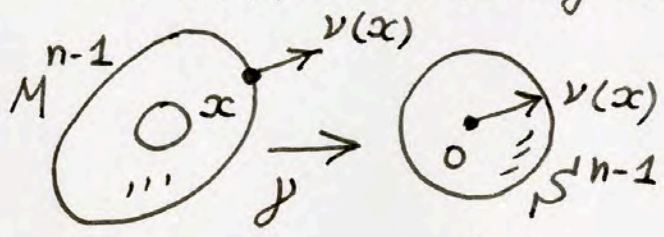
Читрэд.
 Пусть $f_\ell: \mathbb{R}^n \rightarrow \ell = \mathbb{R}^1$ - линей. ф-я в \mathbb{R}^n , проекция на ℓ . Ее градиент - это постоянное вект. поле, параллельное прямой ℓ .
 Теперь рассм. ф-ю $g_\ell = f_\ell|_{M^{n-1}}$:



Утв. Критич. точки ф-ции g_ℓ на M - это в точности те точки $x \in M$, в которых касат. плоскость $T_x M$ ортогональна прямой ℓ .
 Э-во следует из рис. и предыдущ. утвержд.

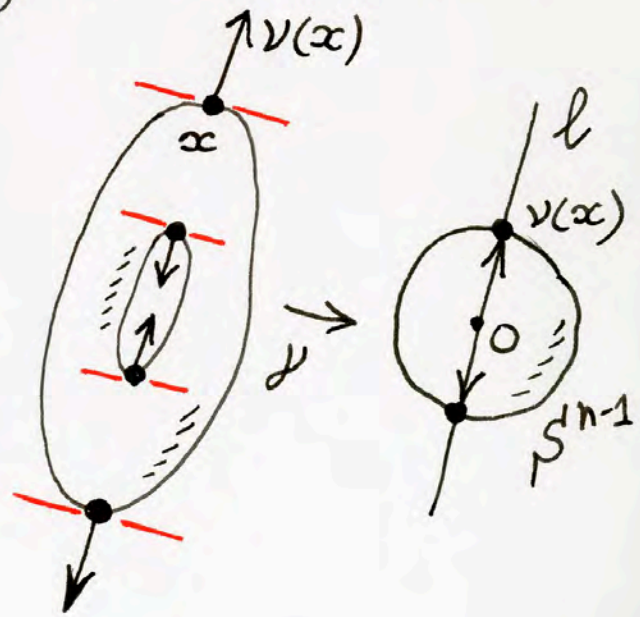
$grad\ f_\ell$ проектир. в ноль на $T_x M$ если и только если $T_x M$ ортон. прямой ℓ .

• Теперь рассм. отобра. $\gamma: M^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, назыв. отобра. Гаусса. Если $x \in M$, то рассм. нормаль $\nu(x)$ к M , перенесем $\nu(x)$ паралл. и поместим начало $\nu(x)$ в точку O ; тогда конец нормали $\nu(x)$ дает точку на сфере S^{n-1} .



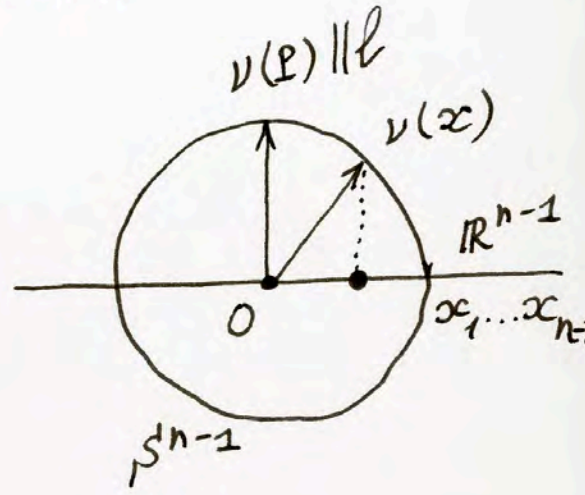
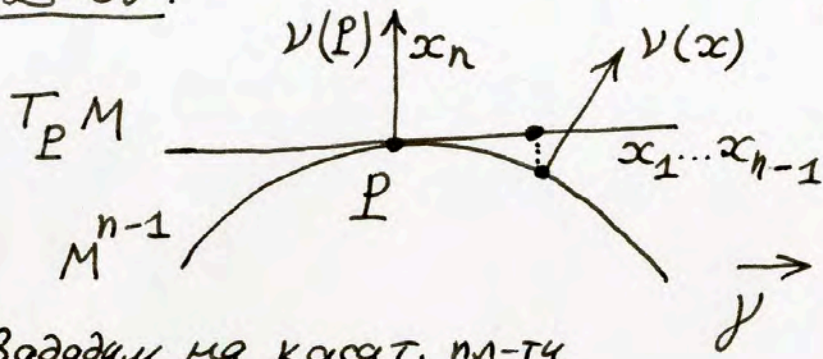
$$\gamma(x) = \text{конец } \nu(x) \text{ на } S^{n-1}.$$

• Фиксируем прямую ℓ .
 Утвер. Критические точки ф-ции g_ℓ на M - это в точности те точки x , которые явл. образами при отобра. γ точек $\ell \cap S^{n-1}$.
 Э-во видно из рисунка \rightarrow



Утвер. Если P - крит. точка ф-ции g_ℓ на M , то $Hess(g_\ell) = d\gamma$, т.е. $\left(\frac{\partial^2 g_\ell}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ совпадает с матр. Якоби отобр. Гаусса γ в этой точке.

До-во.



Задодим на касат. пл-ти $T_P M$ декарт. к-ты x_1, \dots, x_{n-1} , P рассм. в точке O - плоскость \mathbb{R}^{n-1} , паралл. пл-ти $T_P M$ и с теми же коорд. x_1, \dots, x_{n-1} . Задодим локально M около точки P в виде графика ф-ции g_ℓ , где ℓ параллельна $\nu(P)$.

Т.е. локально $M = \{x_n = g_\ell(x_1, \dots, x_{n-1})\}$. Тогда локально M явл. нулевой поверхн. уровня ф-ции $F(x_1, \dots, x_n) = g_\ell(x_1, \dots, x_{n-1}) - x_n = 0$. Тогда нормаль

$$\ell \nu(x) = \frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|} = \frac{1}{\sqrt{\dots}} \left(\frac{\partial g_\ell}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g_\ell}{\partial x_{n-1}}, -1 \right).$$

Следовательно, $\gamma: (x_1, \dots, x_{n-1}) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\dots}} \left(\frac{\partial g_\ell}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g_\ell}{\partial x_{n-1}} \right)$.

Так как P - крит. точка для g_ℓ , то $\frac{\partial g_\ell}{\partial x_i}(P) = 0$ и $\sqrt{\dots}|_P = 1$, а потому

$$\text{матр. Якоби } d\gamma \text{ отобр. } \gamma \text{ имеет вид: } d\gamma|_P = \left(\frac{\partial^2 g_\ell}{\partial x_i \partial x_j} \right)_P.$$

Читр д.

• Отсюда вытекает, что $\det(d\gamma|_P) = \det \left(\frac{\partial^2 g_\ell}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_P \right)$.

т.е. критич. точка $P \in M$ для ф-ции g_ℓ невырож. \leftrightarrow она регулярна для отобр. Гаусса, т.е. $\det(d\gamma|_P) \neq 0$ в точке $P \in \gamma^{-1}(\pm \ell)$.

• И так, осталось выбрать прямую ℓ так, чтобы во всех прообразах $\gamma^{-1}(\pm \ell)$ матр. Як. $d\gamma$ была бы невырожд. Здесь мы воспольз. теор. Сарда.

• Теор. Сарда. Пусть $\gamma: V^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ гладк. отображ. мн-ог. многог.
 Точка $\xi \in \mathbb{R}^k$ назыв. регул. значением, если во всех точках $\gamma^{-1}(\xi)$ прообраза точки ξ ранг $(d\gamma) = k$, т.е. макс.
 Тогда мн-во регул. знач. ξ в \mathbb{R}^k всюду плотно.

• У нас: $V^k = M^{n-1}$, а $\mathbb{R}^k = S^{n-1}$ (или $\mathbb{R}P^{n-1}$);
 $\xi = \ell \cap S^{n-1}$.

• Итак, по теор. Сарда почти все прямые ℓ в \mathbb{R}^n задают регулар. значения для отображ. γ . Следовательно, для почти всех прямых ℓ в \mathbb{R}^n ϕ -я высоты g_ℓ на M^{n-1} явл. ϕ -ей Морса. Цитрд.

• Дополнит. коммент. к утвержд.: $\text{grad}(f|_{M^{n-1}}) = \pi(\text{grad } f)$ в \mathbb{R}^n .
 Вот как этот факт выглядит в размерн. = 2.

Пример. Рассм. ϕ -ю $f(x, y)$ на \mathbb{R}^2 и ограничим ее на кривую $\gamma \subset \mathbb{R}^2$.



Вектор $\text{grad } f$ ортогонален линиям уровня $f = \text{const}$ (на \mathbb{R}^2).

$\text{grad } f = (f_x, f_y)$

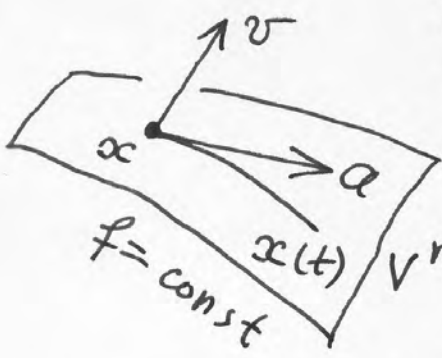
Пусть кривая $\gamma = M^1$ задана так: $\gamma = \gamma(x)$. Тогда касател. вектор к γ имеет вид:

$j = (1, \gamma'_x)$, т.к. $\gamma(x) = (x, \gamma(x))$. Ограничение f на γ :

$g = f|_\gamma = f(x, \gamma(x))$. В-р $\text{grad } g$ касается кривой γ .

ясно, что $|\text{grad } g| = \frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx} f(x, \gamma(x)) = f_x + f_y \cdot \gamma'_x = \langle \text{grad } f, j \rangle = |\pi(\text{grad } f)|$. Итак: $\text{grad } g = \pi(\text{grad } f)$ Цитрд.

• Выше использовался тот факт, что $\text{grad } f$ всегда ортогонален поверхностям уровня $f = \text{const}$ в M . Напомним об этом факте. Пусть на M задан риманова метр. $g_{ij}(x)$ и $f(x)$ - гладк. ϕ -я. Тогда $\text{grad } f = (\partial f / \partial x^i)$, по опред. При наличии рчм ан. метр. ковекторное поле $\text{grad } f$ можно реализовать как вект. поле v (иногда обозначаемое тоже $\text{grad } f$, что не очень хорошо), где $v = (v^i)$, $v^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} = \sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$, где g^{ij} - элементы обратной матрицы G^{-1} , а $G = (g_{ij})$. Итак, утверждается, что v ортогонально поверхн. уровня $f = \text{const}$. Д-во:



Пусть $a \in T_x V^{n-1}$, где $V^{n-1} = \{f = \text{const}\}$.
 Рассм. локал. мажк. кривую $x(t) \subset V$
 такую, что $x(0) = x$ и $\dot{x}(0) = a$.

Тогда $f(x(t)) \equiv \text{const}$ и

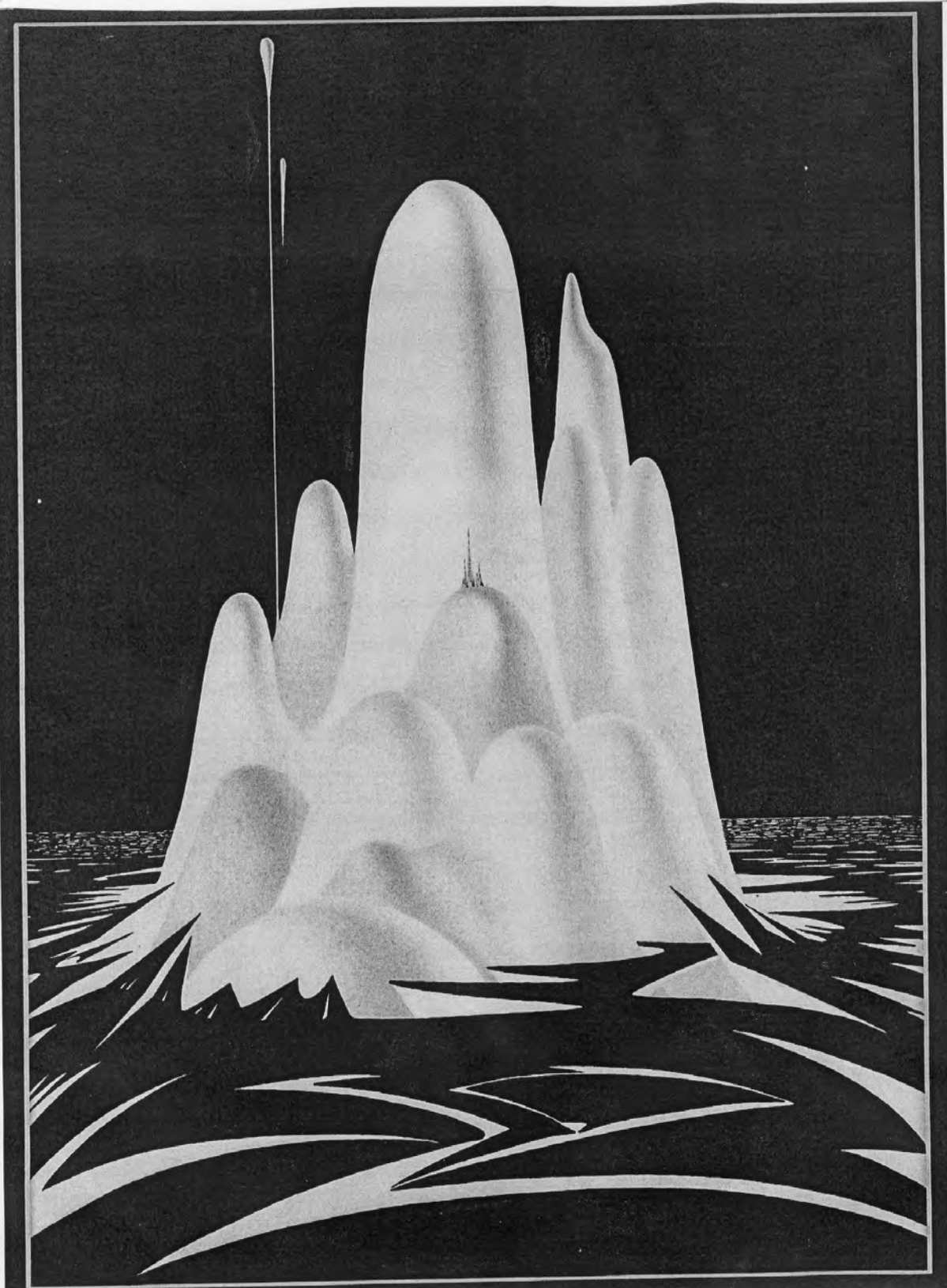
$$0 = \frac{d}{dt} f(x(t)) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} =$$

$$= \sum_{i,j} g_{ij} v^j \frac{dx^i}{dt} = \sum_{i,j} g_{ij} v^j a^i = \langle v, a \rangle$$
 (т.е. скалярн. произв. v и a в метр. g_{ij}).

Итак, $\langle v, a \rangle = 0$ для $\forall a \in T_x V$, т.е. вектор v ортогонален касат. пл-ти $T_x V$. Читрџ.

• Если $g_{ij} = \delta_{ij}$ (т.е. евклид. метрика), то $v^i = (\text{град } f)_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$.
 т.е. сам градиент можно понимать как вект. поле. В евклид. метр. нет разницы между векторами и ковекторами.

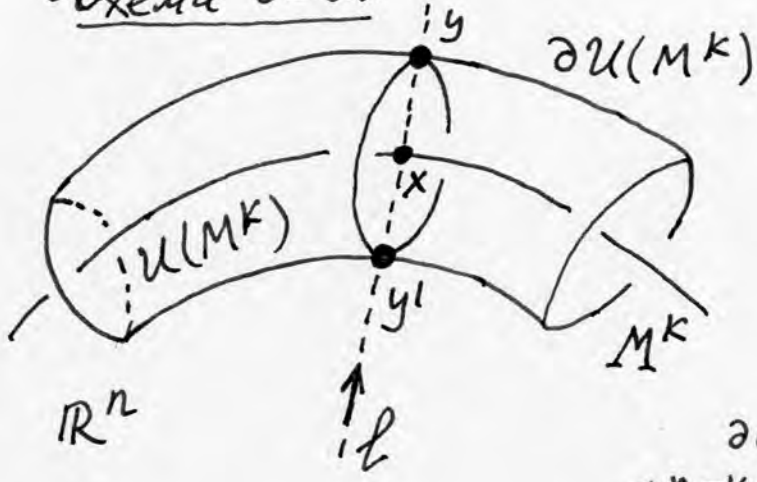
орункуча морса



• Выше мы доказали \exists ф-ции морса на \forall гиперповерх. в \mathbb{R}^n , указав такую ф-ю в классе ф-ций высоты. Аналогично можно доказ. теорему для подмнот. $M^k \subset \mathbb{R}^n$ любой коразмерности.

• Теор. Пусть $M^k \subset \mathbb{R}^n$ - гладк. подмн. Тогда почти все ф-ции высоты на M^k явл. ф-ями морса.

• Схема д-ва.



Рассм. трубку окрестн. $U(M^k)$ малом радиуса ϵ , т.е. в \forall точке $x \in M^k$ возьмем диск D^{n-k} радиуса ϵ , ортогон. к касат. пл-ти $T_x M^k$. Граница $\partial U(M^k)$ явл. гладк. подмнот. $\dim = n-1$ в \mathbb{R}^n . Граница диска $D^{n-k}(x)$ - это сфера $S^{n-k-1} \subset \partial U(M^k)$. Тогда \forall крит. точке $x \in M^k$ для функции высоты g на M^k соответ. две крит. точки y и y' для функции высоты h на $V^{n-1} = \partial U(M^k)$. Если $\text{ind}(x) = \lambda$, то $\text{ind}(y) = \lambda + (n-k-1)$, а $\text{ind}(y') = \lambda = \text{ind}(x)$.

Прием крит. т. x невырожд. для g \iff обе крит. точки y и y' невырожд. для h . Поэтому для почти всех f ф-я $g \circ f$ явл. ф-ей морса на M^k (так как для почти всех v ф-я $h \circ v$ явл. ф-ей морса на V^{n-1}). Цитра.

А так как по теор. Уитни \forall гладк. мнот. M^k можно вложить в некоторое конечном. \mathbb{R}^n в виде гладк. поверхн. (подмнот.), то мы доказали \exists ф-ции морса на \forall гладком M^k .

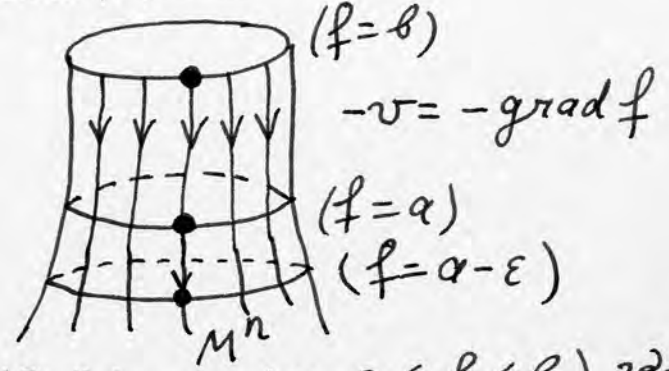
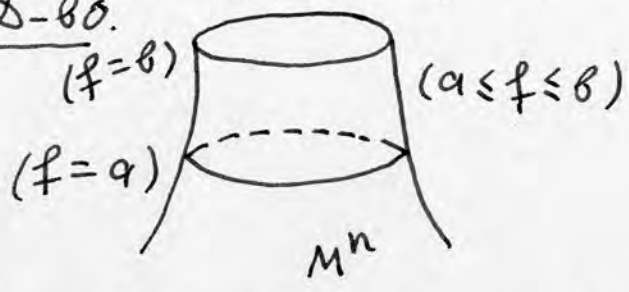
- связь свойств ф-ции морса с топол. мнот. M^n .
- Шаг 1. Рассм. произв. риман. метр. на M^n . Например, реализовать M^n как подмнот. в \mathbb{R}^n . Пусть $f(x)$ - ф-я морса на M^n . Рассм. вект. поле $v = \text{grad } f$. Тогда α (см. выше) поле v ортогон. поверхностям уровня $f = \text{const}$.
- Шаг 2. Пусть a и b - два регул. значения ф-ции f , т.е. на уровнях $(f=a) = f^{-1}(a)$ и $(f=b) = f^{-1}(b)$ нет критич. точек ф-ции f . По теор. о неявн. ф-ям, уровни $(f=a)$ и $(f=b)$ - это гладк. подмн. в M^n . Обозначим через $(f \leq a)$ и $(f \leq b)$ - "срезы" M , т.е. $(f \leq a) = \{x \in M, \text{ где } f(x) \leq a\}$. Тогда $(f \leq a)$ и $(f \leq b)$ - мнот. с краем и если $a < b$, то $(f \leq a) \subset (f \leq b)$.

Шаг 3. Лемма. Пусть в "слое" ($a \leq f \leq b$) нет крит. (94)

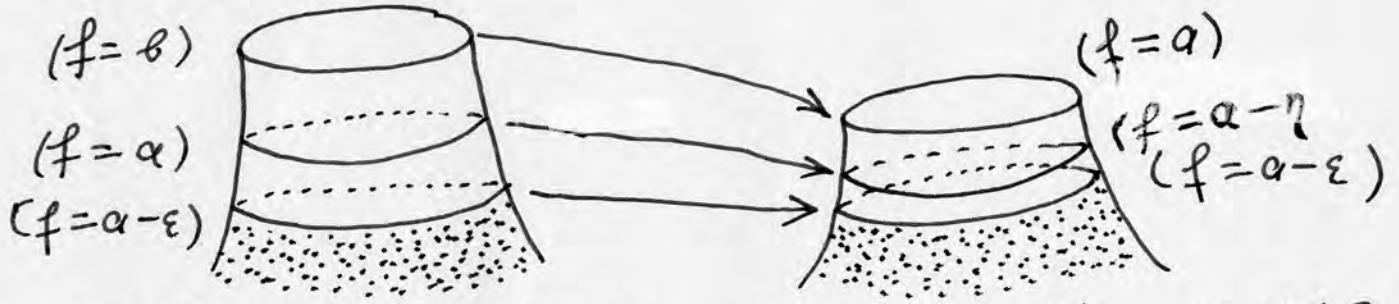
точек f , т.е. глад $f \neq 0$ при $a \leq f(x) \leq b$. Тогда:

- 1) мног. ($f=a$) и ($f=b$) диффеоморфны,
- 2) мног. ($f \leq a$) и ($f \leq b$) диффеоморфны.

\mathcal{D} -во.



Рассм. вект. поле $-v = -\text{grad } f$ на "слое" ($a-\epsilon \leq f \leq b$), где ϵ - мало. Тогда $-v \neq 0$ на этом слое. Рассм. интеграл. траект. $\gamma(t)$ поля $-v$. Они начинаются на ($f=b$) и доходят до ($f=a-\epsilon$). Они не пересекаются. Т.е. ($a-\epsilon \leq f \leq b$) является прямым произвед. ($f=b$) на отрезок. сдвигая ($f=b$) вдоль траект. $\gamma(t)$ "вниз", мы совмещаем это мног. с уровнем ($f=a$), а потом - с уровнем ($f=a-\epsilon$). Ясно, что получили диффеоморфизм: $(f=b) \approx (f=a) \approx (f=a-\epsilon)$. следоват.: $(f \leq b) \approx (f \leq a)$:

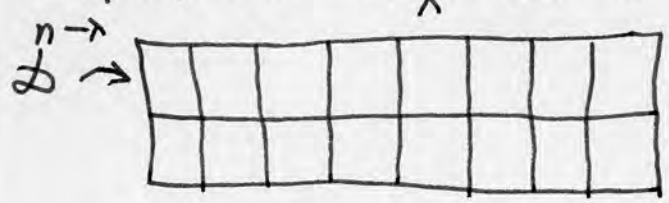


т.е. $(f=b) \rightarrow (f=a)$, $(f=a) \rightarrow (f=a-\eta)$, где $\eta < \epsilon$, $(f=a-\epsilon) \rightarrow (f=a-\epsilon)$, и $(f \leq a-\epsilon) \rightarrow (f \leq a-\epsilon)$. тождественно

Итак, слой $(a-\epsilon \leq f \leq b)$ сжимается диффеоморфизмом на слой $(a-\epsilon \leq f \leq a)$. Читр д.

Шаг 4. Понятие ручки индекса λ .

опред. Ручкой размерности n и индекса λ назыв. прямое произвед. $M_\lambda^n = \mathcal{D}^\lambda \times \mathcal{D}^{n-\lambda}$ двух дисков (шаров):




диск \mathcal{D}^λ иногда назыв. "осью ручки". топологически ручка, конечно, гомеом. шару \mathcal{D}^n , но нам важна "координатная сетка" $\mathcal{D}^\lambda \times \mathcal{D}^{n-\lambda}$.

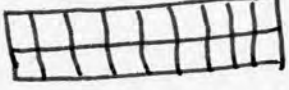
Шаг 5. Граница ручки. Примеры.


Для оператора границы прямого произвед. верна "формула

Лейбница": $\partial(X \times Y) = (\partial X) \times Y \cup X \times (\partial Y)$.

Для ручки имеем: $\partial H_\lambda^n = (\partial D^\lambda) \times D^{n-\lambda} + D^\lambda \times (\partial D^{n-\lambda}) = (S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}) + (D^\lambda \times S^{n-\lambda-1})$. Примеры.

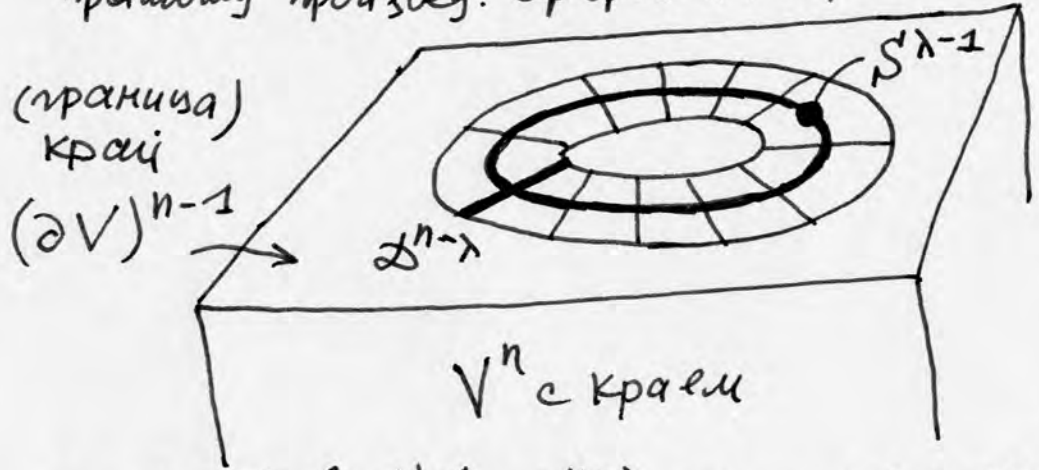
Пусть $n=2$. Тогда: $H_0^2 = D^0 \times D^2 = \text{диск} = \text{чашка}$ 

$H_1^2 = D^1 \times D^1 = \text{прямоугольник} = \text{сетка}$ 

$H_2^2 = D^2 \times D^0 = \text{диск} = \text{шар}$ 

Шаг 6. операция приклейки ручки.

Пусть V^n - мног. с краем ∂V разн. = $n-1$. Пусть в крае ∂V есть сфера $S^{\lambda-1}$ такая, что ее малая трубчатая окрестность $\mathcal{U}(S^{\lambda-1}) \cong S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$, т.е. диффеоморфна прямому произвед. сферы на нормальный (ортгон.) диск.



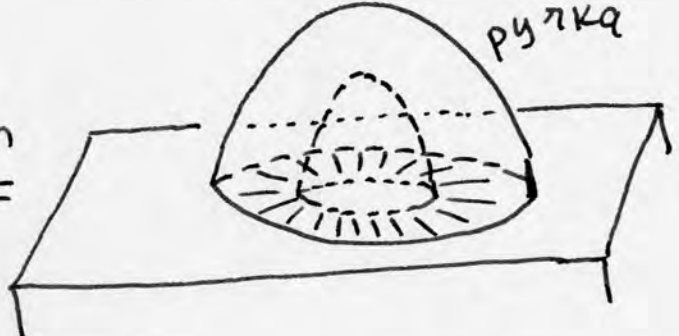
ясно, что окрестн. $\mathcal{U}(S^{\lambda-1})$ гомеоморф. одной из компонент границы ручки H_λ^n , а именно: $S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$. Приклеим ручку к V^n .

отождествив $S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$ как часть границы ручки, с $\mathcal{U}(S^{\lambda-1})$.

Получим новое мног. с новым краем, т.е.

$\tilde{V}^n = V^n + H_\lambda^n$, см. рис.

Вот мы и определили операцию приклейки ручки индекса λ .



Шаг 7. Примеры.

Рассм. M^2 с краем S^1 .

Тогда: $M^2 + H_0^2$ есть:



$M^2 + H_0^2$ есть:



$M^2 + H_1^1$ есть:



или:



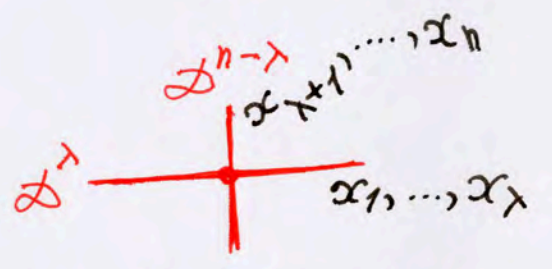
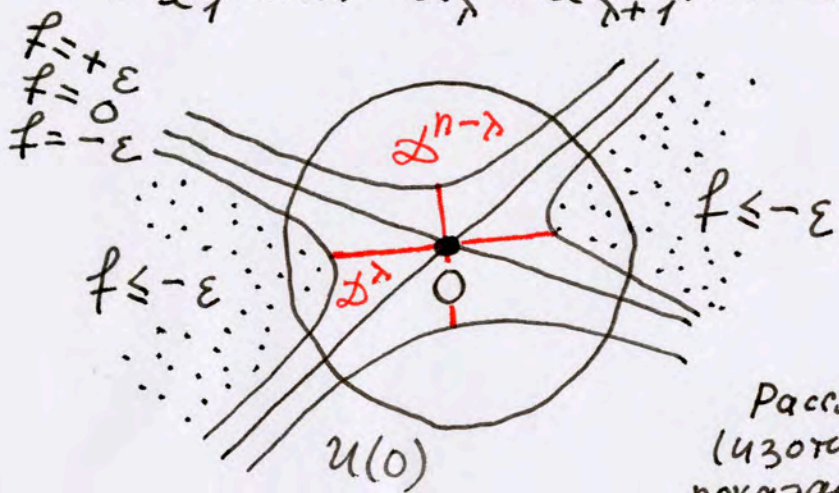
Отсюда видно, что приклеивка ручки - операция "неоднородная", так как в случае H_1^2 из, например, ориентированного V^2 с краем S^1 может получиться как ориентир. $\tilde{V}^2 = V^2 + H_1^2$, так и неориентированное.

Шаг 8. Лемма. Пусть на M^n задана φ -я морса f и пусть на критич. уровне $f=0$ есть ровно одна крит. точка $\text{ind} = \lambda$. Тогда $(f \leq \epsilon) \cong (f \leq -\epsilon) + H_\lambda^n$. Это - гомотопизм (и диффеоморфизм).

До-во. Пусть $U(0)$ - малая окрестн. крит. точки P , в которой заданы локал. к-ты x_1, \dots, x_n , построенные в лемме Морса, т.е. точка P - это начало координат, т.е. O , $f(0) = 0$ и в $U(0)$ имеем: $f(x) = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$.

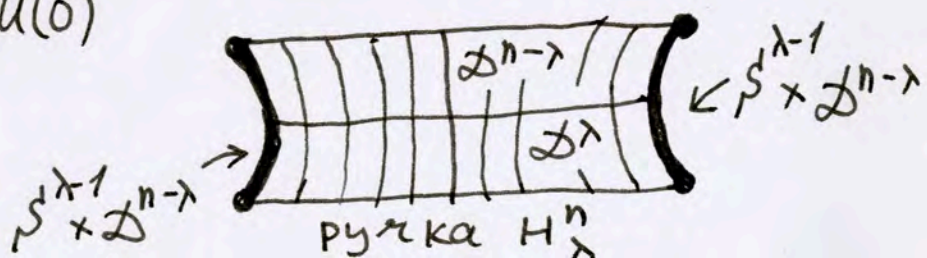
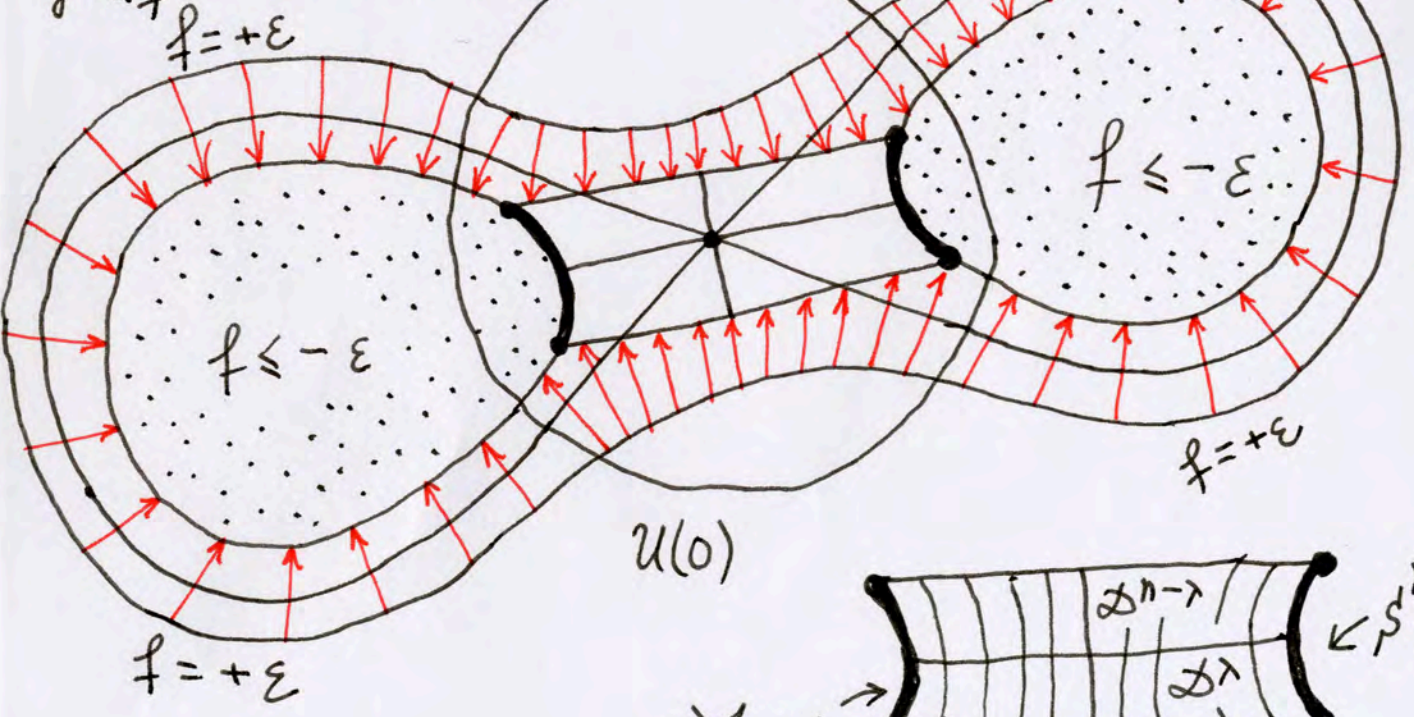
Рассм. три гиперповерхн. в $U(0)$:

$$-x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2 = \begin{cases} -\epsilon & \text{"гиперболоид"} \\ 0 & \text{"конус"} \\ +\epsilon & \text{"гиперболоид"} \end{cases}$$

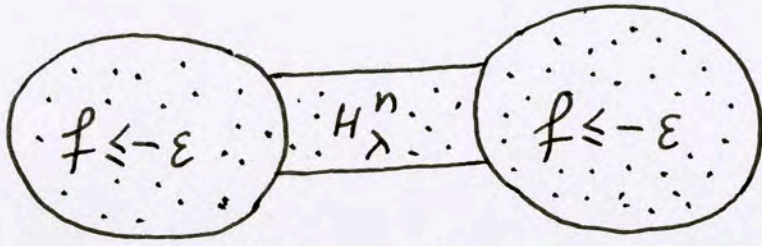


Рассмот. мажк. гомотопию (изотопию) множества $(f \leq +\epsilon)$, показан. на рис.

Эта деформация происходит по линиям тока вект. поля $-\text{grad } f$



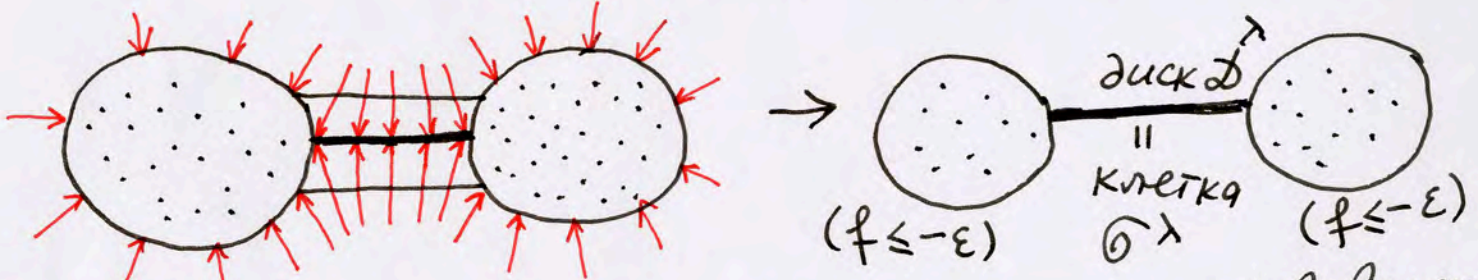
Эта гомотопия φ_t , $0 \leq t \leq 1$, для $\forall t$ является гомотоморф. (диффеом.), $\varphi_0 = id$, а результат φ_1 см. нарис.



т.е. $(f \leq +\epsilon)$ диффеоморфно $(f \leq -\epsilon) + H_\lambda^n$.
Цитрд.

- Итак, при переходе уровня через крит. точку $ind = \lambda$ к "срезу" $(f \leq -\epsilon)$ приклеивается ручка H_λ^n индекса λ .
- Шаг 9. лемма. В предыдущих предполож., m -во $(f \leq +\epsilon)$ гомотопически эквивалентно m -ву $(f \leq -\epsilon) + \sigma^\lambda$, т.е. к "срезу" $(f \leq -\epsilon)$ приклеена клетка размерности λ .

Д-во. Достаточно продолжить деформацию (гомотопию), построенную выше. т.е. ручка H_λ^n стягивается на свою особ. диск D^λ , который и есть клетка σ^λ .



Цитрд. Это уже не гомотоморфизм, а гомотопия. Эквивалент.

Шаг 10. Теор. (основн. теор. теории Морса).

Пусть M^n - глад. комп. замкн. мнот. (т.е. без края) и f - ϕ -я морса на M . Тогда: а) M^n гомотоп. экв. конечн. клеточному комплексу $\cup \sigma_i^{\lambda_i}$, где каждая клетка $\sigma_i^{\lambda_i}$ взаимно-одноз. соотв. крит. точке x_i ϕ -ции f индекса λ_i . на компак. мнот.

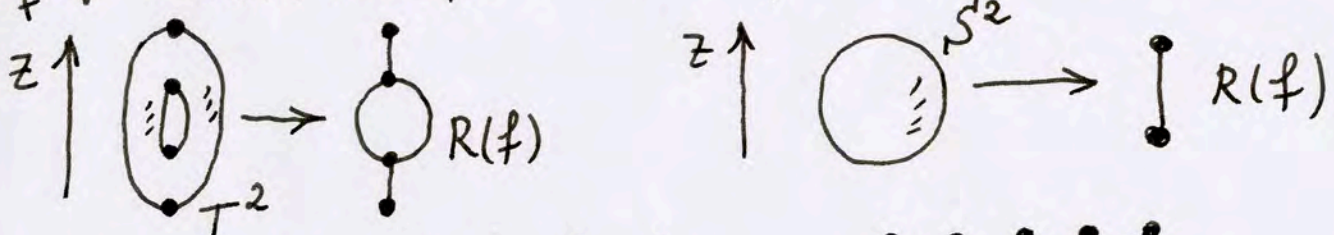
ϕ -я морса имеет конечно число крит. точек.
б) M^n гомотоморфно объединен. (склеен, "сумма") ручек $M^n \cong \cup H_{\lambda_i}^n$, где \forall ручка взаимн.-одн. соотв. крит. топ. x_i индекса λ_i . т.е. ручки $\{H_{\lambda_i}^n\}$ - это "элемент-кирпичи", из которых склеено M^n .

Замечание. В пункте б) сообщается о кол-ве и индексах ручек $\{H_{\lambda_i}^n\}$, но не о способе склейки ручек. см. пример выше.

- Д-во теор. рассм. ϕ -ю морса f на M и малым возмущением ("шевелением") превратим ее в простую ϕ -ю морса, т.е. имеющую на каждом крит. уровне ровно одну крит. точку. А затем применим лемму, доказ. выше. Цитрд.
- Так как ϕ -я морса на M "много", то и разложения M в сумму ручек тоже "много".

• Ф-ции Морса на 2-мерн. поверхн. "Атомы" как "перестройки".
 Пусть f -ф-я морса на M^2 (простая или сложная). Рассмотрим уровень ($f=a$) - рещуп. или симпуп. (т.е. критический). Вообще говоря, он несвязен. Изобразим каждую компоненту связности - точкой. Меняя уровень a , получаем граф, назыв. "графом Рибба" $(R \text{ ерв}) R(f)$. получаем непрер. отображ. $M^2 \rightarrow R(f)$. Примеры:

f -ф-я высоты на торе T^2 в \mathbb{R}^3 ; или ф-я высоты на сфере:

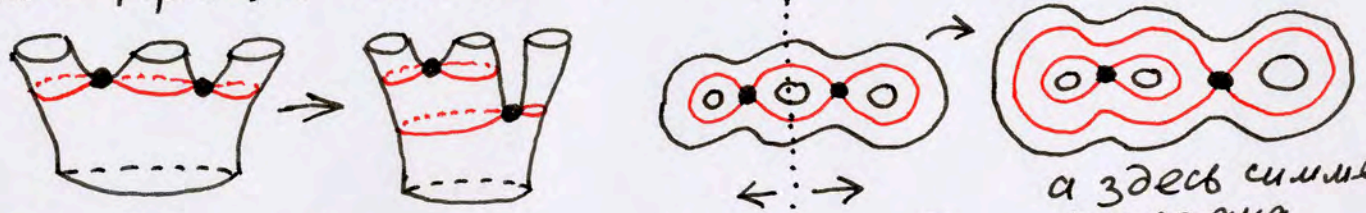


чтн: сфера S^2 в \mathbb{R}^3 Но граф Рибба - слишком грубое описание функции.

Более точная характеристика - "молекула".

Но об этом - ниже. Сначала - что такое "атомы".

- Вообще мы говорили о простых и сложных ф-ях Морса. Простые - когда на \forall критич. уровне - ровно 1 крит. точка, а сложные - когда есть критич. уровень, на котором - несколько крит. точек. Вопрос: зачем изучать слож. ф-ции морса, когда малым возмущением их можно преврат. в простые? Ответ: часто приходится изучать симметрии ф-ий морса; а если у ф-ции есть симметрии, то часто это - сложн. ф-я. При деформации сложн. ф-ции к простой симметрии исчезают:



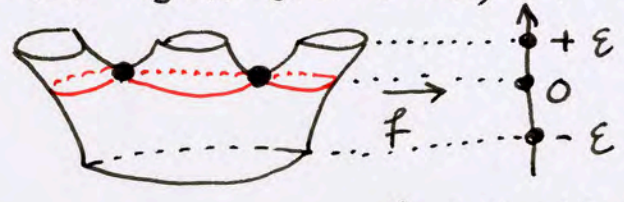
• Теор. о графе Рибба простой ф-ции морса.

Пусть f - глад. простая ф-я морса на M^2 , где заранее известно, что M^2 - либо ориентир., либо неориент. Тогда граф Рибба $R(f)$ однозначно определяет тополог. тип M^2 с точн. до гомотопизма (и ф-реом.). Здесь M^2 - комп. глад. замкн. Δ -во. Т.к. f - простая ф-я морса, то вершины графа $R(f)$

могут быть только такими: \uparrow max \downarrow min ∇ седло. Значя $R(f)$, подсчитываем кол-во max, min и седел у ф-ции f . По теор. Морса мы знаем клеточное разб. M^2 : $\bigcup_{i=1}^p e_i^0 + \bigcup_{j=1}^q e_j^1 + \bigcup_{k=1}^s e_k^2$, где $p = \# \text{ max}$; $s = \# \text{ min}$; $q = \# (\text{седел})$.

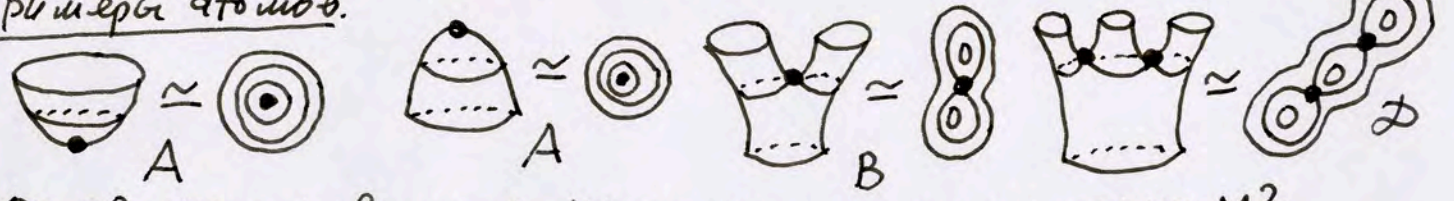
Отсюда находим Эйлер. характ. $\chi(M^2) = p - q + s$. Так как тип ориентируемости M^2 (зад. комп. замкн. связ.) нам известен, получаем ответ: либо $M = M_g^2$ (ориент.), либо $M = M_g^2$ (неориент.). Цитра.

- Если f - сложн. ф-я на M^2 , то граф Рибба тополог. тип M^2 , вообще говоря, не определяет.
- Пусть f - ф-я морса на M^2 и 0-критич. значение, т.е. на уровне $f^{-1}(0)$ есть критич. точки. Пусть $\epsilon > 0$ мало, и рассмот. поверхность $f^{-1}[-\epsilon, +\epsilon]$:



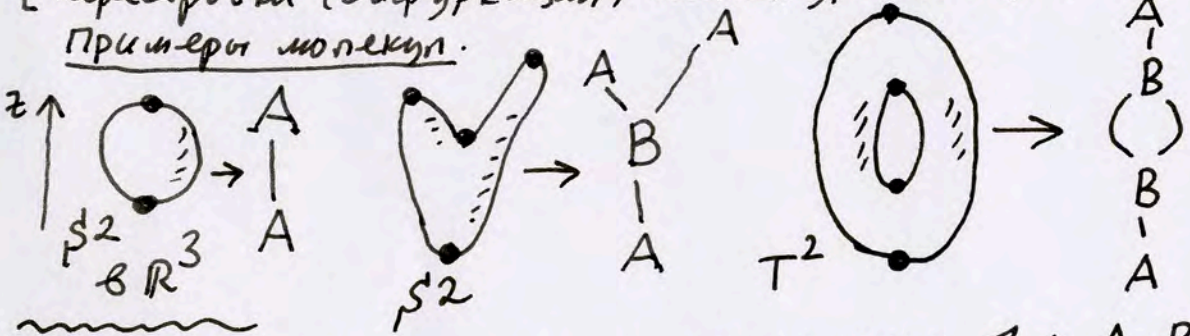
- Опред. "Атомы" назыв. поверхн. $f^{-1}[-\epsilon, +\epsilon]$, расслан. на линии уровня ф-ции f , и с фиксиров. направл. роста ф-ции f . Два "атома" считаем эквивал., если \exists диффеом. атома P на атом Q , перевод. связные компон. уровня ф-ции f на P в связные компон. уровня ф-ции g на Q и сохран. направл. роста ф-ции f и g . Тополог. "атом" будем называть такой класс эквивалент. Сложностью атома назовем кол-во критич. точек на крит. уровне $f=0$. Атом ориентируем (неориент.), если поверхн. P^2 ориент. (неориент.).

Примеры атомов.



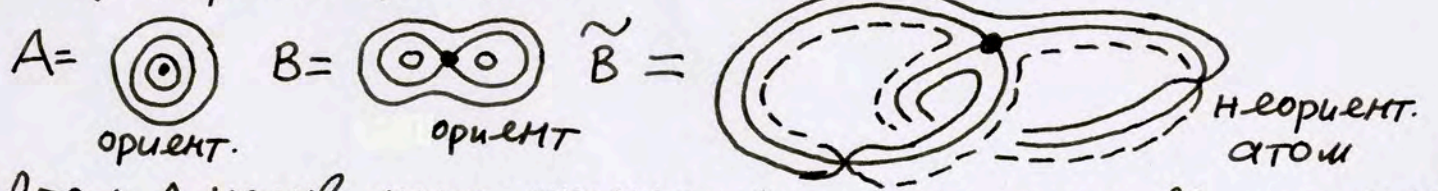
- Опред. Пусть f - ф-я морса на зад. комп. замкн. M^2 . "Молекулой" $W(f)$ назыв. граф Рибба, у которого в качестве вершин рассмат. атомы. Точки на ребрах молекулы изображ. связные компон. линии уровня ф-ции f . Атомы показывают перестройки (бифуркации) линии уровня ф-ции f .

Примеры молекул.



это - функции высоты в \mathbb{R}^3 .

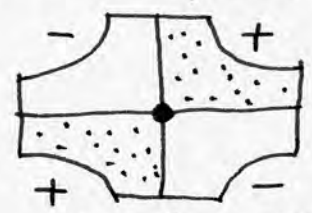
- Теор. Э ровно три атома сложности 1: A, B, \tilde{B} . См рис.:



- Атом A назыв. минимаксими (min, max ф-ции f), остальные атомы назыв. седловыми (седла ф-ции f).

Δ-во теор. Ясно, что минимакс. атом только один, это A .

У атома седлового сложн. 1 есть ровно 1 вершина и ее окрестн. - это "координ. крест":



Чтобы восстановить весь атом, надо соединить концы креста линиями (прямыми). Важно при этом

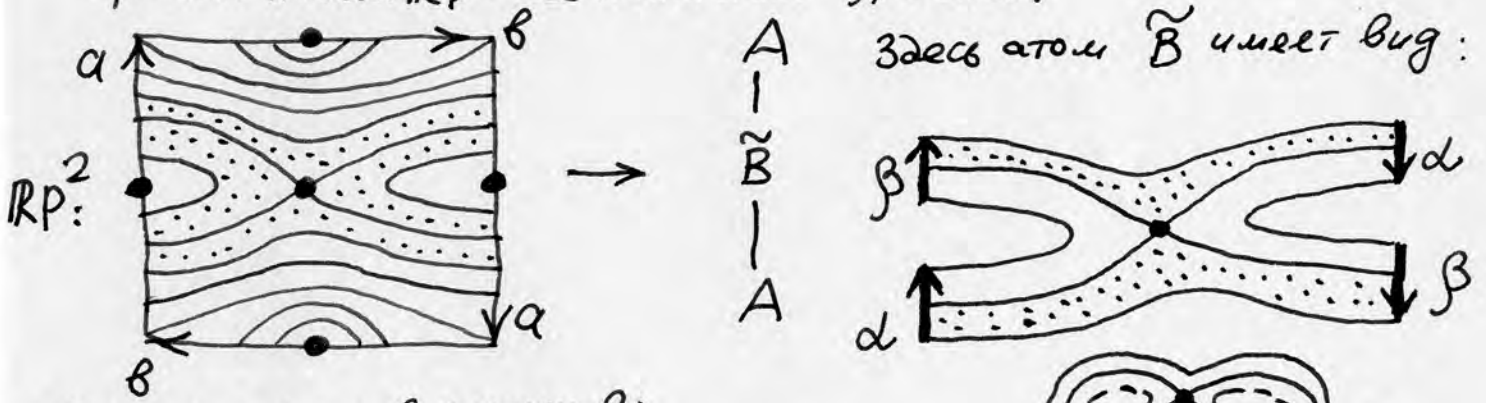
следить, чтобы "положительн." линии уровня склеивались с "положител." (тогда "отрицат." - с "отрицат."). Перебираем все варианты:



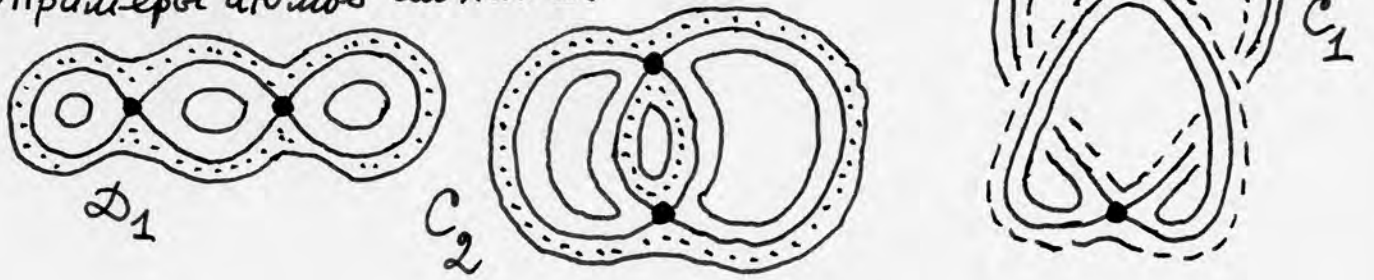
легко проверить, что все остальные варианты соединения концов креста - запрещенные. Центр.

- рассм. (M^2, f) и (N^2, g) , где f и g - ор-ции морса. Назовем эти пары попарно эквивал., если \exists диффеом. $\lambda: M^2 \rightarrow N^2$, переводящ. связн. компон. линии уровня f в связн. компон. линии уровня g .
- Теор. (M^2, f) и (N^2, g) попарно эквивал. \Leftrightarrow их соответ. молекулы $W(f)$ и $W(g)$ совпадают (изоморфны). молекулы назыв. изомор., если \exists гомеоморф. $W(f)$ на $W(g)$, перевод. ребра в ребра и атомы в атомы.
- \mathbb{Z} -во трое и представл. симметрии.

В каких молекулах встрет. атомы A, B, \tilde{B} ? Для A и B см. примеры выше. Покажем для \tilde{B} . Заддим ор-ию морса на проект. плоск. $\mathbb{R}P^2$ ее линиями уровня:



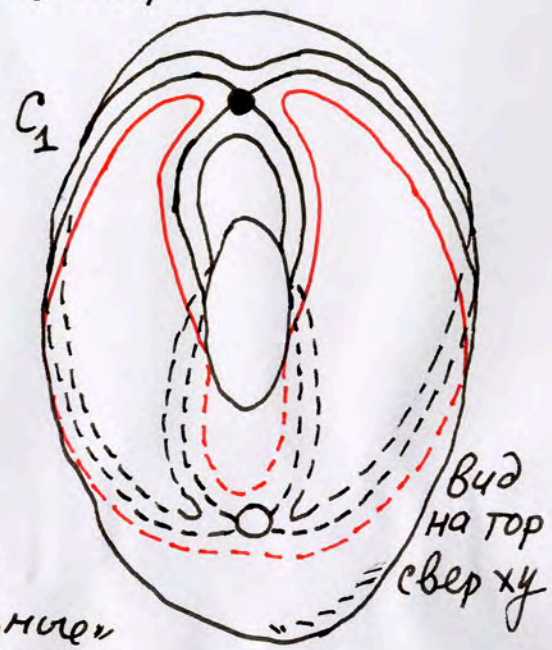
Примеры атомов сложн. 2:



• Атом - это 2-поверх. с границей (одна или несколько окружностей). Заклеим все гранич. окруж. дисками. Получим замкн. 2-мнр (ориент. или неориент.).

[Опред. Родом атома назыв. род этой поверхности (т.е. число ручек или листов мебиуса).

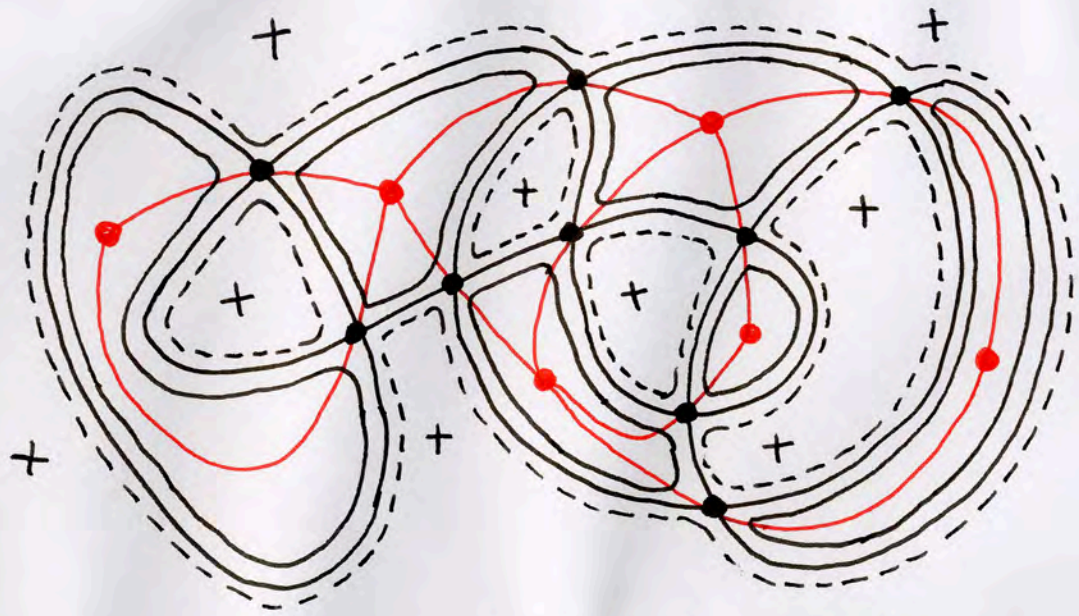
Примеры. Атома A, B, C_2 имеют род 0 (сфера). Атом C_1 имеет род 1, т.е. "живет" на торе T^2 . См. рис.:



• Оказывается, 2-атома имеют другую наглядную интерпрет. (реализацию). Рассм. клеточн. разбиения 2-поверхностей, т.е. разбиение на многоугольники с таковыми ребрами.

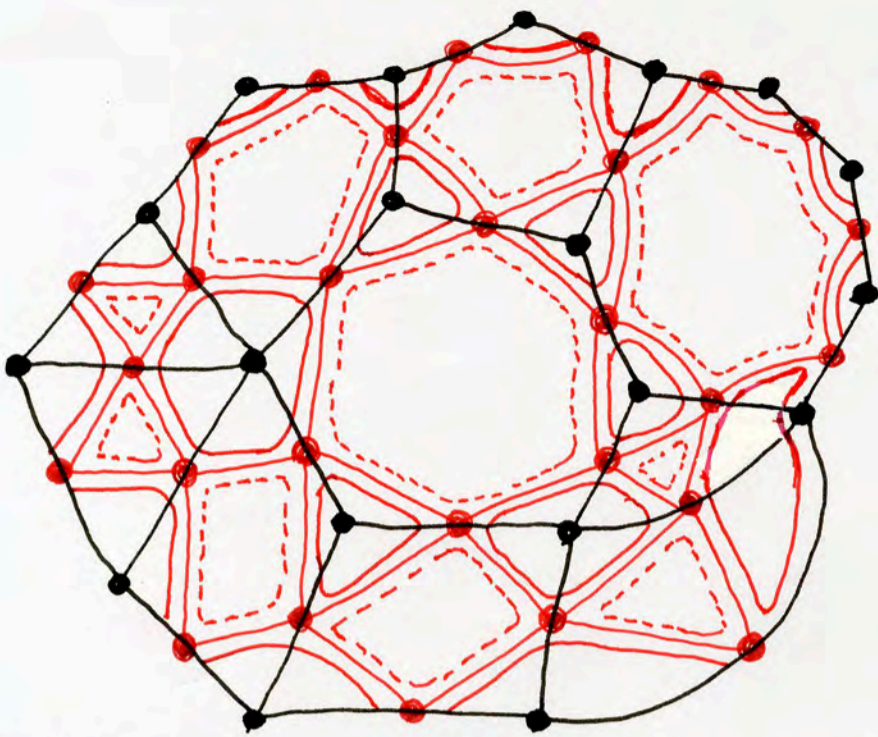
[Теор. \exists взаимно-однозн. соответствие между 2-атомами и клеточными разбиениями замкн. компак. поверхн.

До-во. 1. Рассм. атом и заклеим его гранич. окружн. 2-дисками. Получим замкн. поверхн. с клеточным разбиением, которое построим так. Берем "отрицательные" области атома (где $f \leq 0$), отмечаем их центры и соединяем через вершины атома ребрами.



седловой атом \rightarrow
клеточное разбиение 2-поверхности.

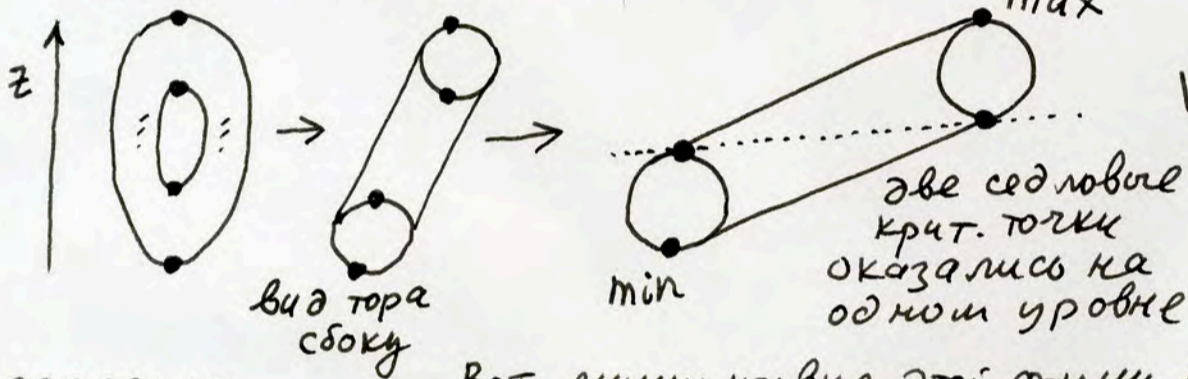
2. Обратнo. Дано клеточн. разбиение поверхности. Надо построить атом. На середине каждого ребра клеточн. разб. поставим "белую" вершину. Это будут вершины атома. Соединим соседние белые вершины ребрами. Получаем атом. Из построения видно, что полученное соответ. \leftarrow атом \leftrightarrow клеточн. разб. взаимно однозначно. Каждая вершина атома имеет кратн. = 4. Вершины клеточн. разб. могут иметь произвол. кратность седлового



клеточное разбиение
2-поверхности →
→ атом(седловой)

Читрд.

Атом C_1 (см. выше) можно реализовать в молекуле $W(f)$ для подходящей функции высоты на торе в \mathbb{R}^3 . Надо взять обычное "вертикальное" вложение тора и затем "слегка положить его набок", наклонить.



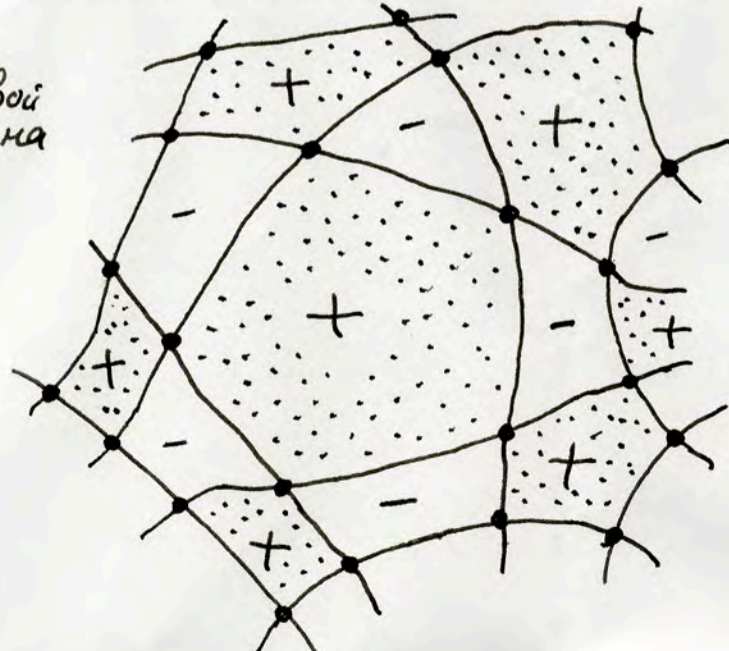
$W(f) =$

A
C_1
A



Вернемся к взаимно-одноз. соотв.: $\sqrt{\text{Атом}} \leftrightarrow \text{клеточное разбиение}$.
Как мы видели, сам атом можно представить как специальное клеточное разбиение замкн. 2-поверхн. M^2 . Заклеим граници. окруж. атома диска и получим замкн. M^2 , в котором лежат траект. критич. уровня (седой) атома, т.е. ($f=0$). Так как атом — седловой, то все его вершины имеют кратность 4. Отметим те диски на M^2 , где $f > 0$ и те, где $f < 0$. Получаем "шахматное" клеточное разбиение M^2 . См. рис. т.е. атом (седлов.) — это "шахматное" клеточн. разбиение.

седловой атом на M^2



Таким образом, выше мы доказали \exists взаимно-одноз. соотв. между шахматными клеточн. разбиениями замкн. M^2 и произвольными клеточн. разбиениями M^2 .



МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА