

1. Найти компоненты тензора  $T_j^i = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 2, & i = j \end{cases}$  после замены базиса с матрицей  $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .
2. Найти компоненты тензора  $T_j^i = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ -1, & i = j \end{cases}$  после замены базиса с матрицей  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .
3. Найти компоненту  $T_1^{22}$  тензора  $T = e^1 \otimes e_2 \otimes e_2 + 2e^2 \otimes e_2 \otimes e_2$  в базисе  $f_1 = 2e_1, f_2 = e_2$ .
4. Найти компоненту  $T_1^{11}$  тензора  $T = e^1 \otimes e_2 \otimes e_2 + 2e^2 \otimes e_2 \otimes e_2$  в базисе  $f_1 = 3e_2, f_2 = -e_1$ .
5. Пусть  $T_{ijk}$  — кососимметрический тензор в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , у которого компонента  $T_{123}$  равна 1 в базисе  $e_1, e_2, e_3$ . Вычислить его компоненты в базисе  $f_1 = e_2, f_2 = -e_3, f_3 = e_1 + e_2$ .
6. Пусть  $T_{ijk}$  — кососимметрический тензор в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , у которого компонента  $T_{123}$  равна  $-1$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$ . Вычислить его компоненты в базисе  $f_1 = e_2 + e_3, f_2 = -e_3, f_3 = e_1$ .
7. Вычислить компоненты тензора  $\text{Alt}(\xi \otimes \eta)$ , где  $\xi = 2e_1 + e_2, \eta = 2e_1$ .
8. Вычислить компоненты тензора  $\text{Alt}(\xi \otimes \eta)$ , где  $\xi = -e^1, \eta = e^2 - e^1$ .
9. Вычислить компоненты тензора  $\text{Sym}(\xi \otimes \eta)$ , где  $\xi = e_2 - e_1, \eta = -4e_1$ .
10. Вычислить значение тензора  $\xi \otimes \eta$ , где  $\xi = e^1 + e^2, \eta = e^1 - e^2$ , на паре векторов  $5e_1$  и  $4e_2$ .
11. Найти свертку вектора  $2e_1 - 3e_2$  и ковектора  $e^1 + e^2$ .
12. Найти компоненты тензора  $e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_3$  после применения операции перестановки индексов, заданной перестановкой  $(1, 2) \rightarrow (2, 1)$ .
13. Найти компоненты тензора  $e_3 \otimes e_2 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_1 \otimes e_2$  после применения операции перестановки индексов, заданной перестановкой  $(1, 2, 3) \rightarrow (2, 1, 3)$ .
14. Поднять индекс у тензора  $T = 2e_1 \otimes e^2 + 4e_2 \otimes e^1$  с помощью скалярного произведения, заданного матрицей  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .
15. Опустить индекс у тензора  $T = 4e_1 \otimes e^2 - e_2 \otimes e^1$  с помощью скалярного произведения, заданного матрицей  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Вычислить внешний дифференциал формы  $\omega = x^2 dx + xy^3 dy$ .
2. Вычислить внешний дифференциал формы  $\omega = x dy \wedge dz + y^3 dx \wedge dz$ .
3. Найти при каком значении параметра  $\lambda$  форма  $\lambda x dy + y dx$  будет замкнутой.
4. Найти при каком значении параметра  $\lambda$  форма  $3\lambda x dy \wedge dz + y dx \wedge dz$  будет замкнутой.
5. Найти прообраз формы  $\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$  при отображении окружности в плоскость, заданном формулами  $x = 2 \cos \varphi$  и  $y = 2 \sin \varphi$ .
6. Найти прообраз формы  $\omega = x^2 dx \wedge dy$  при отображении  $(x, y) \mapsto (0, x)$  плоскости в плоскость.
7. Найти прообраз формы  $\omega = (x^2 + y^2) dx \wedge dy \wedge dz$  при отображении  $(x, y, z) \mapsto (y, 1, z)$  пространства в себя.
8. Вычислить коммутатор векторных полей  $X = (1, 0)$  и  $Y = (x^2 + y, x - y)$  (на плоскости с координатами  $(x, y)$ ).
9. Вычислить коммутатор векторных полей  $X = (0, 1)$  и  $Y = (x - 3y, -y^3)$  (на плоскости с координатами  $(x, y)$ ).
10. Вычислить коммутатор векторных полей  $X = (0, 0, 1)$  и  $Y = (x - 3y, -y^3, z)$  (в пространстве с координатами  $(x, y, z)$ ).
11. Найти результат параллельного переноса вектора  $(0, 1)$  на евклидовой плоскости с декартовыми координатами  $(x, y)$  вдоль верхней полуокружности  $x^2 + y^2 = 1$  из правой крайней точки в левую.
12. Найти результат параллельного переноса вектора  $(0, -1)$  на евклидовой плоскости с декартовыми координатами  $(x, y)$  вдоль нижней полуокружности  $x^2 + y^2 = 1$  из правой крайней точки в левую.
13. Найти ковариантную производную функции  $yx^2 + y^2$  относительно римановой связности для метрики  $ds^2 = dx^2 + y^2 dy^2$ .
14. Найти ковариантную производную векторного поля  $(x^2, y)$  относительно римановой связности для метрики  $ds^2 = 2dx^2 + 3dy^2$ .
15. Найти ковариантную производную векторного поля  $(x - y^2, 3y)$  относительно римановой связности для метрики  $ds^2 = dx^2 + 4dy^2$ .