МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 3

ШАПОШНИКОВ
СТАНИСЛАВ ВАЛЕРЬЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

Краткий конспект лекций по математическому анализу
(II-й курс, осенний семестр)
лектор С.В. Шапошников

«Снова нас ведут куда-то,
И не ясен нам маршрут.
Видно, горы виноваты -
Не сидим ни там, ни тут.
Снова в горы и по тропам
С рюкзаками за спиной.
Груз под силу лишь циклопам!
Мама, я хочу домой!»
Ю.Визбор и М.Левин   Мама, я хочу домой.

1. Числовые ряды и бесконечные произведения.

Пусть $\{a_n\}$ – числовая последовательность. Выражение $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называют числовым рядом. Сумму первых N слагаемых $S_N = a_1 + \ldots + a_N$ называют частичной суммой ряда. Если существует конечный предел

$$\lim_{N\to\infty} S_N,$$

то говорят, что ряд сходится и этот предел называют суммой ряда и обозначают через $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если указанный предел равен бесконечности или не существует, то говорят, что ряд расходится.

Предложение 1.1. *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Доказательство. Пусть $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. По определению $a_N = S_N - S_{N-1} \to S - S = 0$. $\square$

Предложение 1.2. (i) *Отбрасывание конечного числа слагаемых не влияет на сходимость ряда.*

(ii) *Пусть n_k – возрастающая последовательность натуральных чисел. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то сходится сгруппированный ряд*

$$\sum_k \Big(\sum_{s=n_k+1}^{n_{k+1}} a_s\Big).$$

(iii) *Пусть n_k – возрастающая последовательность натуральных чисел, причем*

$$n_k - n_{k-1} \leqslant L$$

для всех k и некоторого L. Если $a_n \to 0$ и сгруппированный ряд $\sum_k \Big(\sum_{s=n_k+1}^{n_{k+1}} a_s\Big)$ сходится, то ряд $\sum_n a_n$ сходится.

Доказательство. Докажем только (iii). Пусть $n_k \leqslant N < n_{k+1}$. Тогда

$$S_N = a_1 + \ldots + a_N = \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{s=n_i+1}^{n_{i+1}} a_s\Big) - (a_{N+1} + \ldots + a_{n_{k+1}}).$$

Число слагаемых с номерами от $N+1$ до n_{k+1} не превосходит L. Если N столь велико, что $|a_n| < \varepsilon$ при $n > N$, то

$$|a_{N+1} + \ldots + a_{n_{k+1}}| < \varepsilon L.$$

Следовательно, предел S_N при $N \to \infty$ совпадает с пределом частичных сумм сгруппированного ряда. $\square$

Заметим, что в утверждении пункта (iii) нельзя убрать условие $a_n \to 0$. Действительно, из сходимости ряда $(1-1)+(1-1)+\ldots$ не следует сходимость ряда $1+(-1)+1+(-1)+\ldots$. Кроме того, нельзя убрать условие $n_k - n_{k-1} \leqslant L$. Рассмотрим ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{-1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{-1}{4}+\frac{-1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$$

Этот ряд не сходится так как S_N для сколь угодно больших N может равняться 0 и может равняться $1/2$. Ясно, что разрешив группировку произвольного числа слагаемых, можно составить ряд из нулей.

Предложение 1.3. (Критерий Коши) *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что для всех $n, m > N$*

$$\Big|S_n - S_m\Big| = \Big|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\Big| < \varepsilon.$$

Доказательство. Это просто переформулировка критерия Коши сходимости числовой последовательности. □

Ряд $\sum_n a_n$ сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum_n |a_n|$.

Следствие 1.1. *Если ряд сходится абсолютно, то ряд сходится.*

Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, то говорят, что он сходится условно.

Особенно просто исследовать сходимость числовых рядов в случае неотрицательных слагаемых.

Предложение 1.4. *Пусть $a_n \geqslant 0$. Ряд $\sum_n a_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.*

Доказательство. Утверждение следует из теоремы Вейерштрасса о сходимости монотонной и ограниченной последовательности. □

Следствие 1.2. *Пусть $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$. Из сходимости ряда $\sum_n b_n$ следует сходимость ряда $\sum_n a_n$, а из расходимости ряда $\sum_n a_n$ следует расходимость ряда $\sum_n b_n$.*

Если сравнивать числовой ряд с суммой бесконечной геометрической прогрессии $\sum_n q^n$, то несложно получить следующие признаки сходимости.

Предложение 1.5. (i) (Признак Коши) *Пусть $a_n \geqslant 0$ и $\limsup \sqrt[n]{a_n} = q$. Если $q < 1$, то ряд $\sum_n a_n$ сходится. Если $q > 1$, то ряд $\sum_n a_n$ расходится.*

(ii) (Признак Даламбера) *Пусть $a_n > 0$. Если $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд $\sum_n a_n$ сходится. Если $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то ряд $\sum_n a_n$ расходится.*

Путь $\{b_n\}$ – числовая последовательность. Выражение

$$\prod_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots$$

называют бесконечным произведением. Произведение первых N множителей

$$\Pi_N = \prod_{n=1}^{N} b_n$$

называют частичным произведением. Если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{N\to\infty} \Pi_N,$$

то говорят, что произведение сходится, а сам предел обозначают через $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$. В остальных случаях говорят, что произведение расходится.

Предложение 1.6. *Если произведение сходится, то $b_n \to 1$ при $n \to \infty$.*

Доказательство.
$$b_N = \frac{\Pi_N}{\Pi_{N-1}} \to 1.$$
□

Предложение 1.7. *Пусть $b_n > 0$. Произведение $\prod_n b_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_n \ln b_n$ и в случае сходимости*
$$e^{\sum_n \ln b_n} = \prod_n b_n.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что
$$e^{\sum_{n=1}^{N} \ln b_n} = \Pi_N, \quad \sum_{n=1}^{N} \ln b_n = \ln \Pi_N$$
и воспользоваться непрерывностью экспоненты и логарифма. □

Необходимым условием сходимости произведения является стремление множителей к единице, что можно записать так
$$b_n = 1 + \beta_n, \quad \beta_n \to 0.$$
Вспомним теперь, что $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Следовательно, из сходимости ряда $\sum_n |\beta_n|$ следует сходимость ряда $\sum_n \ln(1+\beta_n)$ и, значит, сходимость произведения $\prod_n b_n$. Если все числа β_n одного знака (все $\geqslant 0$ или все $\leqslant 0$), то из сходимости произведения следует сходимость ряда $\sum_n \beta_n$.

2. Признак Гаусса и формула Стирлинга.

Лемма 2.1. *Пусть $b_n > 0$ и*
$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \beta_n.$$
Если сходится ряд $\sum_n |\beta_n|$, то существует предел $\lim b_n$.

Доказательство. Достаточно заметить, что
$$b_n = b_1 \frac{b_2}{b_1}\frac{b_3}{b_2}\cdots\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_1}{\prod_{k=1}^{n-1}(1+\beta_n)}.$$
□

Теорема 2.1. (Признак Гаусса) *Если $a_n > 0$ и*
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 - \frac{p}{n} + \alpha_n, \quad \sum_n |\alpha_n| < \infty,$$
то для некоторого $C \neq 0$
$$a_n \sim \frac{C}{n^p},$$
в частности, ряд $\sum_n a_n$ сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$.

Доказательство. Достаточно применить лемму с $b_n = a_n n^{-p}$:
$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(1 - \frac{p}{n} + \alpha_n\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = 1 + \beta_n, \quad \sum_n |\beta_n| < \infty.$$
□

Аналогичные рассуждения позволяют установить формулу Стирлинга, описывающую поведение $n!$. Сначала заметим, что

$$\ln n! = \ln 2 + \ldots + \ln n = \frac{1}{2}(\ln 1 + \ln 2) + \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3) + \ldots + \frac{1}{2}(\ln(n-1) + \ln n) + \frac{1}{2}\ln n.$$

Число $\frac{1}{2}(\ln(k-1) + \ln k)$ равно площади трапеции под графиком $y = \ln x$, образованной хордой, которая соединяет точки $(k-1, \ln(k-1))$ и $(k, \ln k)$. Сумма площадей этих трапеций оценивается сверху площадью под графиком:

$$\frac{1}{2}(\ln 1 + \ln 2) + \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3) + \ldots + \frac{1}{2}(\ln(n-1) + \ln n) \leqslant \int_1^n \ln x\, dx = n\ln n - n + 1.$$

Следовательно, приходим к оценке $\ln n! \leqslant n\ln n - n + 1 + \frac{1}{2}\ln n$ и

$$n! \leqslant n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+1}.$$

Оказывается, что эта оценка достаточно точно описывает поведение $n!$.

Предложение 2.1. *Существует конечный отличный от нуля предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}.$$

Доказательство. Положим

$$b_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}.$$

Имеем

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n+1/2} e^{-1} = 1 + \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

Следовательно, выполняются условия леммы и у последовательности b_n существует конечный предел. □

Итак, мы установили, что

$$n! \sim C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

Теперь вычислим константу C. Для этого получим формулу Валлиса. Рассмотрим выражение

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx.$$

Несложно видеть, что

$$I_n = -\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\, d\cos x = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x(1 - \sin^2 x)\, dx.$$

Следовательно, верно равенство

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Полагая $I_0 = \pi/2$ и $I_1 = 1$ выводим формулы

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}, \quad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Так как $I_{2n-1} \leqslant I_{2n} \leqslant I_{2n+1}$, то

$$\frac{(2^{n-1}(n-1)!)^2}{(2n-1)!} \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \leqslant \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Последние неравенства можно переписать так

$$1 + \frac{1}{2n} \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot\Big(\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\Big)^2 (2n+1) \leqslant 1.$$

Таким образом, мы вывели формулу Валлиса:
$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}\Big)^2\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}.$$
Подставляя в эту формулу выражение для факториала с неизвестной константой C, находим
$$C=\sqrt{2\pi}.$$
Теперь мы можем окончательно выписать формулу Стирлинга:
$$n!=\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n+\varepsilon_n},\quad \varepsilon_n\to 0.$$
Можно уточнить (но мы этого уже делать не будем), что $\varepsilon_n=\frac{\theta_n}{12n}$, где $0<\theta_n<1$.

3. Разложение $\sin x$ в произведение.

Теорема 3.1. (Эйлер) *При всех $x\neq\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, имеет место равенство*
$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{x^2}{\pi^2n^2}\Big).$$

Доказательство. Заметим, что $\sin(2N+1)t=\sin tP(\sin^2 t)$, где P – многочлен степени N. Вычисляя корни P и раскладывая его на множители, приходим к равенству
$$\sin(2N+1)t=(2N+1)\sin t\prod_{k=1}^{N}\Big(1-\frac{\sin^2 t}{\sin^2\frac{\pi k}{2N+1}}\Big).$$
Сделаем замену $t=x/(2N+1)$:
$$\sin x=(2N+1)\sin\frac{x}{2N+1}\prod_{k=1}^{N}\Big(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2N+1}}\Big).$$
Пусть J такое натуральное число, что $(J+1)\pi>|x|$. При фиксированном J
$$\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{J}\Big(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2N+1}}\Big)=\prod_{k=1}^{J}\Big(1-\frac{x^2}{\pi^2k^2}\Big).$$
Кроме того, существует предел
$$R_J=\lim_{N\to\infty}\prod_{k=J+1}^{N}\Big(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2N+1}}\Big).$$
Заметим, что
$$\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2N+1}}\leqslant\frac{x^2}{4k^2}.$$
Следовательно,
$$\prod_{k=J+1}^{N}\Big(1-\frac{x^2}{4k^2}\Big)\leqslant\prod_{k=J+1}^{N}\Big(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2N+1}}\Big)\leqslant 1$$
и
$$\prod_{k=J+1}^{N}\Big(1-\frac{x^2}{4k^2}\Big)\leqslant R_J\leqslant 1.$$
Значит $R_J\to 1$ при $J\to\infty$ и мы получаем требуемое разложение. □

Следствие 3.1. *Имеет место равенство*
$$\cos x=\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\Big).$$

4. Преобразование Абеля. Признаки Абеля и Дирихле.

Рассмотрим сумму $\sum_{k=n}^{m} a_k b_k$. Положим $B_N = b_1 + \ldots + b_N$ и $B_0 = 0$.

Преобразование

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n}^{m} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=n}^{m} a_k B_k - \sum_{k=n}^{m} a_k B_{k-1} = a_m B_m - a_n B_{n-1} - \sum_{k=n}^{m} (a_{k+1} - a_k) B_k.$$

называется преобразованием Абеля и является дискретным аналогом интегрирования по частям.

Предложение 4.1. *Если существует конечный предел* $\lim_{n\to\infty} a_n B_n$*, то ряды*

$$\sum_n a_n b_n \quad \text{и} \quad \sum_n (a_{n+1} - a_n) B_n$$

сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство. С помощью преобразования Абеля выводим равенство:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = a_N B_N - \sum_{n=1}^{N} (a_{n+1} - a_n) B_n,$$

из которого немедленно следует наше утверждение. □

Следствие 4.1. (Признаки Абеля–Дирихле)

(i) *Если последовательность* a_n *монотонно стремится к нулю, а последовательность* B_n *ограниченна, то ряд* $\sum_n a_n b_n$ *сходится.*

(ii) *Если последовательность* a_n *монотонна и ограниченна, а ряд* $\sum_n b_n$ *сходится, то ряд* $\sum_n a_n b_n$ *сходится.*

Доказательство. Обоснуем (i). По условию $a_n B_n \to 0$ и сходимость ряда $\sum_n a_n b_n$ равносильна сходимости ряда $\sum_n (a_{n+1} - a_n) B_n$, который сходится даже абсолютно. Будем считать, что последовательность a_n не возрастает. Ряд $\sum_n |a_{n+1} - a_n|$ сходится, так как

$$\sum_{n=1}^{N} |a_{n+1} - a_n| = \sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{N+1} \to a_1.$$

Остаётся заметить, что $|(a_{n+1} - a_n) B_n| \leqslant |a_{n+1} - a_n| \sup_n |B_n|$.

Пункт (ii) сводится к (i) переходом от a_n к $a_n - a$, где $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. □

Отметим, что признак Лейбница является частным случаем признака Абеля–Дирихле.

Следствие 4.2. (Признак Лейбница) *Если последовательность неотрицательных чисел* a_n *не возрастает и стремится к нулю, то ряд* $\sum_n (-1)^n a_n$ *сходится.*

5. Перестановка членов ряда. Теорема Коши и теорема Римана.

Для конечных сумм еще со школы известно правило: от перестановки слагаемых сумма не меняется. В случае рядов это правило вообще говоря не работает.

Пусть $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – биекция. Ряд $\sum_n a_{\varphi(n)}$ называется перестановкой ряда $\sum_n a_n$.

Теорема 5.1. (Риман) *Если ряд* $\sum_n a_n$ *сходится условно, то перестановкой его слагаемых можно получить всякую наперед заданную сумму, в том числе* $+\infty$ *и* $-\infty$.

Доказательство. Пусть p_n – неотрицательные, а q_n отрицательные слагаемые ряда. Поскольку ряд сходится условно, то $\sum_n p_n = +\infty$ и $\sum_n q_n = -\infty$. Пусть задано некоторое число A. Будем составлять новый ряд из p_n и q_n следующим образом. Сначала складываем

$p_1, p_2, \ldots$ до тех пор пока сумма первый раз не превысит A. Затем добавляем q_i до тех пор пока сумма не станет меньше A и т.д. Поскольку колебания суммы около числа A каждый раз составляют не более p_n или q_n, а $p_n, q_n \to 0$, то новый ряд сходится к A. □

Теперь покажем, что для абсолютно сходящихся рядов перестановка слагаемых не меняет суммы.

Теорема 5.2. (Коши) *Если ряд $\sum_n a_n$ сходится абсолютно, то для всякой перестановки φ новый ряд $\sum_n a_{\varphi(n)}$ сходится абсолютно и $\sum_n a_n = \sum_n a_{\varphi(n)}$.*

Доказательство. Докажем сначала сходимость переставленного ряда. Имеет место неравенство:

$$\sum_{n=1}^{N} |a_{\varphi(n)}| \leqslant \sum_{k \leqslant \max_{n \leqslant N} \varphi(n)} |a_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Следовательно, переставленный ряд сходится. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется номер N_1 такой, что

$$\sum_{n \geqslant N_1} |a_n| < \varepsilon.$$

Пусть J_1 такой номер, что $\{\varphi(1), \ldots, \varphi(J_1)\} \supset \{1, 2, \ldots, N_1\}$. Для всех $J > J_1$

$$\Big| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{k=1}^{J} a_{\varphi(k)} \Big| \leqslant \sum_{n > N_1} |a_n| < \varepsilon$$

□

В качестве применения последней теоремы покажем как перемножать абсолютно сходящиеся ряды.

Теорема 5.3. *Если ряды $\sum_n a_n$ и $\sum_n b_n$ сходятся абсолютно, то ряд составленный из всех возможных попарных произведений $a_i b_j$, взятых в произвольном порядке, сходится абсолютно и его сумма равна $(\sum_n a_n) \cdot (\sum_n b_n)$.*

Доказательство. Пусть имеется какая-то нумерация пар (i, j). Так как

$$\sum_{n=1}^{N} |a_{i(n)} b_{j(n)}| \leqslant \Big(\sum_{k \leqslant \max_{n \leqslant N} i(n)} |a_k| \Big) \Big(\sum_{k \leqslant \max_{n \leqslant N} j(n)} |b_k| \Big),$$

то ряд из $a_{i(n)} b_{j(n)}$ сходится абсолютно. Следовательно, его сумма не зависит от перестановки слагаемых, т. е. от способа нумерации пар (i, j). Занумеруем эти пары так, что пары $(i(n), j(n))$ при $n \leqslant N^2$ заполняют весь квадрат $\{1, 2, \ldots, N\} \times \{1, 2, \ldots, N\}$. Тогда

$$\sum_{n \leqslant N^2} a_{i(n)} b_{j(n)} = \Big(\sum_{k \leqslant N} a_k \Big) \Big(\sum_{k \leqslant N} b_k \Big),$$

что стремится к $(\sum_n a_n) \cdot (\sum_n b_n)$ при $N \to \infty$. □

6. Несобственный интеграл Римана. Признаки Абеля и Дирихле.

Пусть f интегрируема по Риману на всяком отрезке $[a, c] \subset [a, b)$, где b может быть $+\infty$. Положим

$$F(c) = \int_a^c f(x)\, dx.$$

Если существует конечный предел $\lim_{c \to b-} F(c)$, то его называют несобственным интегралом Римана от f по $[a, b)$,обозначают через

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

и говорят, что несобственный интеграл сходится. Если предел $\lim_{c\to b-} F(c)$ не существует или равен бесконечности, то говорят, что несобственный интеграл расходится. Если f интегрируема по Риману на $[a,b]$, то ее несобственный интеграл совпадает с интегралом Римана.

Предложение 6.1. (Критерий Коши) *Несобственный интеграл от f по $[a,b)$ сходится тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $c_1, c_2 \in (b-\delta, b)$*

$$\Big|\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx\Big| < \varepsilon.$$

Доказательство. Это просто переформулировка критерия Коши существования конечного предела функции. □

Особенно просто исследовать сходимость несобственного интеграла в случае неотрицательной функции f.

Предложение 6.2. *Если $f \geqslant 0$ на $[a,b)$, то несобственный интеграл от f на $[a,b)$ сходится тогда и только тогда, когда существует число $M > 0$ такое, что*

$$\int_a^c f(x)\,dx \leqslant M \quad \forall c \in [a,b).$$

Доказательство. Следует из теоремы Вейерштрасса о существовании предела у монотонной и ограниченной функции. □

Следствие 6.1. *Если $0 \leqslant f \leqslant g$ на $[a,b)$, то из сходимости несобственного интеграла от g на $[a,b)$ следует сходимость несобственного интеграла от f, а из расходимости несобственного интеграла от f следует расходимость интеграла от g.*

Следствие 6.2. *Пусть неотрицательная функция f не возрастает на $[1,+\infty)$. Тогда ряд $\sum_n f(n)$ и*

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство. Определим новые функции h и g следующим образом: на полуинтервале $[k, k+1)$ функция h равна $f(k+1)$, а функция g равна $f(k)$. Тогда $0 \leqslant h \leqslant f \leqslant g$ и

$$\int_1^N h(x)\,dx = \sum_{n=2}^N f(n), \quad \int_1^N g(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

Теперь утверждение вытекает из предыдущего следствия. □

Следующее преобразование (интегрирование по частям) является аналогом преобразования Абеля, но для интегралов:

$$\int_a^c g(x)f(x)\,dx = g(c)\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^c g'(x)\Big(\int_a^x f(t)\,dt\Big)\,dx.$$

Предложение 6.3. *Пусть $f \in C([a,b))$, $g \in C^1([a,b])$ и $g' \leqslant 0$. Если существует конечный предел*

$$\lim_{c\to b} g(c)\int_a^c f(t)\,dt,$$

то интегралы

$$\int_a^b g(x)f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^b g'(x)\Big(\int_a^x f(t)\,dt\Big)\,dx$$

сходятся и расходятся одновременно.

Следствие 6.3. (Признаки Абеля–Дирихле) *Пусть* $f \in C([a,b))$, $g \in C^1([a,b))$ *и* $g' \leqslant 0$.

(i) *Если* $\lim_{c\to b} g(c) = 0$ *и существует число* M *такое, что для всех* $c \in [a,b)$ *верна оценка*

$$\Big|\int_a^c f(x)\,dx\Big| \leqslant M,$$

то несобственный интеграл от fg *по* $[a,b)$ *сходится.*

(ii) *Если* g *ограничена на* $[a,b)$ *и несобственный интеграл от* f *по* $[a,b)$ *сходится, то сходится несобственный интеграл от* fg *по* $[a,b)$.

Доказательство. Обоснуем (i). По условию

$$\lim_{c\to b} g(c)\int_a^c f(x)\,dx = 0.$$

Следовательно, сходимость исходного интеграла равносильна сходимости интеграла

$$\int_a^b g'(x)\Big(\int_a^x f(t)\,dt\Big)\,dx,$$

который как мы покажем сходится абсолютно. Действительно,

$$\Big|g'(x)\Big(\int_a^x f(t)\,dt\Big)\Big| \leqslant M|g'(x)|$$

и

$$\lim_{c\to b}\int_a^c |g'(x)|\,dx = \lim_{c\to b}(g(a)-g(c)) = g(a).$$

Пункт (ii) сводится к (i) заменой g на $g - \lim_{c\to b} g(c)$. □

7. Гамма и Бета функции Эйлера.

Функция

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

называется гамма-функцией Эйлера, а функция

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

называется бета-функцией Эйлера.

Отметим, что $\Gamma(x)$ определена при $x>0$, а $B(x,y)$ определена при $x>0$ и $y>0$.

Теорема 7.1. (Свойства бета-функции)

(i) $B(x,y) = B(y,x)$;

(ii) $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$;

(iii) $B(x,y) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}}\,ds.$

Доказательство. Пункт (i) выводится с помощью замены $t \to 1-t$. Пункт (iii) выводится с помощью замены $t = s/(1+s)$. Наконец для вывода (ii) достаточно проинтегрировать по частям. □

Используя пункт (ii), несложно вывести равенство:

$$B(n,m) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(n+m-1)!}.$$

Теорема 7.2. (Свойства гамма-функции)

(i) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$;

(ii) $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$ *(формула Эйлера–Гаусса);*

(iii) $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ *при* $0 < x < 1$ *(формула дополнения).*

Доказательство. Пункт (i) выводится с помощью интегрирования по частям. Докажем (ii). Сделаем замену $t = -\ln u$:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \ln^{x-1}(1/u)\, du.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = n(1 - e^{x/n}) + x$ на $[-a, 0]$. Так как $0 \leqslant f'(x) = 1 - e^{x/n} \leqslant |x|/n$ при $x \leqslant 0$, то по теореме Лагранжа $|f(-a)| = |f(-a) - f(0)| \leqslant |a|^2/n$. Следовательно,

$$|n(1 - u^{1/n}) - \ln(1/u)| \leqslant n^{-1} \ln^2 u$$

для всех $u \in (0,1)$. Поэтому

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 n^{x-1}(1 - u^{1/n})^{x-1}\, du = \lim_{n\to\infty} n^x B(n, x).$$

Отстается расписать $B(n,x)$ с помощью формулы понижения. Для получения пункта (iii) достаточно применить формулу Эйлера–Гаусса и сравнить результат с разложением синуса в произведение. □

Из пункта (i) следует, что $\Gamma(n+1) = n!$. Заметим также, что гамма-функция и бета-функция связаны следующим равенством

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

доказательство которого мы пока отложим.

Применяя формулу дополнения при $x = 1/2$ получаем

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

В свою очередь

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t}\, dt = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Таким образом, найдено значение интеграла Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}.$$

8. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Пусть X – некоторое непустое множество. Будем говорить, что последовательность функций $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) сходится равномерно на множестве X к функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), если

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Рассмотрим множество $B(X)$ ограниченных на X функций. Это множество с метрикой

$$\varrho(f,g) = \sup_X |f(x) - g(x)|$$

является метрическим пространством, а сходимость по этой метрике равносильна равномерной сходимости. Однако, в определении равномерной сходимости мы не требуем ограниченности функций f_n и f.

Говорят, что последовательность f_n сходится к f поточечно на X, если

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall\, x \in X.$$

Ясно, что из равномерной сходимости следует поточечная, но обратное не имеет место.

Предложение 8.1. *Пусть f_n сходится равномерно к f и g_n сходится равномерно к g на множестве X. Тогда $f_n + g_n$ сходится равномерно к $f + g$ на X. Если дополнительно известно, что последовательности g_n и f_n равномерно ограниченны, то $f_n g_n$ сходится равномерно к fg на X. Более того, если g_n равномерно ограниченная последовательность и f_n равномерно сходится к нулю, то $f_n g_n$ равномерно сходится к нулю.*

Доказательство. Утверждение следует из неравенств:

$$\sup_X |(f_n + g_n) - (f + g)| \leqslant \sup_X |f_n - f| + \sup_X |g_n - g|,$$

$$\sup_X |f_n g_n - fg| \leqslant \sup_X |g_n| \sup_X |f_n - f| + \sup_X |f| \sup_X |g_n - g|.$$

□

Предложение 8.2. (Критерий Коши) *Последовательность f_n сходится к f равномерно на X тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для всех $n, m > N$ верно*

$$\sup_X |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon.$$

В частности, метрическое пространство $B(X)$ является полным.

Доказательство. Пояснений требует лишь достаточность. Из условия следует, что для каждого $x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ фундаментальна и существует предел $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, который мы обозначаем через $f(x)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Существует номер N такой, что для всех $n, m > N$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Устремляя $m \to \infty$, получаем $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ для всех $x \in X$ и всех $n > N$. Следовательно, f_n сходится к f равномерно на X. □

Вместе с последовательностями полезно рассматривать ряды. Будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится к $S(x)$ на X, если его частичные суммы $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ сходятся равномерно к $S(x)$. Аналогично определяется поточечная сходимость. Если уже известна поточечная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, то равномерная сходимость равносильна равенству

$$\lim_{N\to\infty} \sup_X \Bigl| \sum_{n=N}^{\infty} f_n(x) \Bigr| = 0.$$

Критерий Коши переформулируется следующим образом: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на X тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для всех $n, m > N$ верно

$$\sup_X \Bigl| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \Bigr| < \varepsilon.$$

Необходимым условием равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ является равномерное стремление к нулю его слагаемых f_n.

Теорема 8.1. (Признак Вейерштрасса) *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ сходится равномерно на X и $|f_n(x)| \leqslant g_n(x)$ на X, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на X. В частности, если $|f_n(x)| \leqslant a_n$ и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд из f_n сходится равномерно.*

Доказательство. Утверждение следует из неравенства

$$\sup_X \Big|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\Big| \leqslant \sup_X \sum_{k=m+1}^{n} g_k(x)$$

и критерия Коши. □

Теорема 8.2. (Признак Дини) *Пусть X – компакт в метрическом пространстве и для всякого $x \in X$ числовая последовательность $|f_n(x) - f(x)|$ монотонно стремится к нулю, причем функции f_n и f непрерывны на X. Тогда последовательность f_n равномерно сходится к f на X.*

Доказательство. Положим $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$. Пусть $\varepsilon > 0$. Для каждой точки $x_0 \in X$ найдем $N(x_0) > 0$ такое, что $g_N(x_0) < \varepsilon$. Используя непрерывность g_N найдем $\delta(x_0) > 0$ такое, что $g_N(x) < 2\varepsilon$ для всех $x \in B_\delta(x_0)$. В силу монотонности $g_n(x) < 2\varepsilon$ для всех $n > N$ и всех $x \in B_\delta(x_0)$. Выбираем конечное подпокрытие $B_{\delta_i}(x_i)$ компакта X положим $N = \max_i N_i$. Ясно, что для всех $n \geqslant N$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство $g_n(x) < 2\varepsilon$. □

Теорема 8.3. (Признак Хелли) *Предположим, что задана последовательность вещественнозначных монотонных функций f_n на отрезке $[a, b]$. Если f_n поточечно сходится к монотонной и непрерывной функции f, то f_n равномерно на $[a, b]$ сходится к f.*

Доказательство. Пусть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Из-за монотонности для всякого $x \in [a, b]$ верна оценка

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \max\{|f_n(x_i) - f(x_{i-1})|, |f_n(x_{i-1}) - f(x_i)|\}.$$

В силу непрерывности f можно для всякого $\varepsilon > 0$ выбрать разбиение $\{x_i\}$ столь мелким, что $|f(x_i) - f(x_{i-1})| < \varepsilon$ для всех i. Получаем

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \max_i |f_n(x_i) - f(x_i)| + \varepsilon.$$

Остается воспользоваться поточечной сходимостью. □

Таким образом, на отрезке для равномерной сходимости достаточно добавить к поточечной сходимости непрерывность и монотонность, причем можно требовать монотонность и по x и по n.

Обсудим подробнее ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$. Следующее утверждение отвечает на два вопроса. На что можно умножить слагаемые сходящегося ряда так, что новый ряд будет сходиться? На что нужно умножить слагаемые ряда с ограниченными частичными суммами так, что новый ряд будет сходиться? Кратко ответы можно сформулировать так: сходимость ряда не портит умножение на ограниченную последовательность, а улучшает сходимость ряда умножение на стремящуюся к нулю последовательность.

Предложение 8.3. *Для равномерной на X сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ достаточно выполнения хотя бы одного из следующих условий:*

(i) *ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$ равномерно сходится и $b_n(x)$ равномерно ограниченная последовательность;*

(ii) *частичные суммы $\sum_{n=1}^{N} |a_n(x)|$ равномерно ограничены и b_n равномерно сходится к нулю.*

Доказательство. Пункт (i) немедленно следует из признака Вейерштрасса. Пункт (ii) следует из неравенства

$$\sum_{n=M}^{N} |a_n(x)||b_n(x)| \leqslant \max_{M \leqslant n \leqslant N} |b_n(x)| \sum_{n=M}^{N} |a_n(x)|$$

и критерия Коши. $\square$

Более тонкие признаки сходимости можно получить с помощью преобразования Абеля. Напомним, что преобразованием Абеля называется следующая цепочка равенств:

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n}^{m} a_k(B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=n}^{m} a_k B_k - \sum_{k=n}^{m} a_k B_{k-1} = a_m B_m - a_n B_{n-1} - \sum_{k=n}^{m}(a_{k+1} - a_k)B_k,$$

где последовательность B_k задана соотношениями $B_k = B_{k-1} + b_k$, $B_0 = 0$. Заметим, что для всякой функции $B(x)$ верно равенство:

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = a_m(B_m - B) - a_n(B_{n-1} - B) - \sum_{k=n}^{m}(a_{k+1} - a_k)(B_k - B).$$

Преобразование Абеля позволяет при исследовании равномерной сходимости заменить исходный ряд новым рядом, в котором усиливаются свойства a_n и b_n. Если a_n стремятся к нулю, то разности $a_{n+1} - a_n$ обычно стремятся быстрее. Если множитель b_n не просто ограничен, но и меняет знак, то уже частичная сумма B_n обычно оказывается ограниченной.

Теорема 8.4. *Пусть функции a_n и b_n определены на X. Предположим, что для некоторой функции B последовательность $a_n(B_n - B)$ сходится равномерно на X, тогда ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)(B_n - B)$$

одновременно сходятся равномерно и не сходятся равномерно на X.

Доказательство. С помощью преобразования Абеля выводим равенство:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = a_N(B_N - B) + a_1 B - \sum_{n=M}^{N}(a_{n+1} - a_n)(B_n - B),$$

из которого немедленно следует наше утверждение. $\square$

Следствие 8.1. (Признаки Абеля–Дирихле)

(i) *Если последовательность вещественнозначных функций $a_n(x)$ монотонно и равномерно на X стремится к нулю, а последовательность $B_n(x)$ равномерно ограничена, т. е. $\sup_{n,x} |B_n(x)| < \infty$, то ряд $\sum_n a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится на X.*

(ii) *Если последовательность вещественнозначных функций $a_n(x)$ монотонна и равномерно ограничена на X, а ряд $\sum_n b_n(x)$ равномерно на X сходится, то ряд $\sum_n a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится на X.*

Доказательство. Обоснуем (i). Применим доказанную выше теорему с $B \equiv 0$. Ясно, что $a_n B_n$ сходится равномерно к нулю. Так как ряд $\sum_n |a_{n+1} - a_n|$ сходится равномерно и $|B_n|$ равномерно ограничены, то ряд $\sum_n (a_{n+1} - a_n)B_n$ сходится равномерно.

Обоснуем (ii). Примерим доказанную выше теорему с $B = \sum_n b_n$. По условию мы знаем, что $B_n - B$ равномерно стремится к нулю. Следовательно, $a_n(B_n - B)$ равномерно стремится к нулю. Так как частичные суммы $\sum_{n=1}^{N} |a_{n+1} - a_n|$ равномерно ограничены и $B_n - B$ равномерно стремится к нулю, то ряд $\sum_n (a_{n+1} - a_n)(B_n - B)$ сходится равномерно. $\square$

9. Свойства равномерной сходимости: непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость.

Равномерный предел удобен тем, что он сохраняет многие важные свойства функций.

Теорема 9.1. *Пусть X – подмножество метрического пространства и a – предельная точка для X. Предположим, что последовательность функций f_n сходится к функции f равномерно на X. Если $b_n = \lim_{x\to a} f_n(x)$, то $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{x\to a} f(x)$, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty}\Bigl(\lim_{x\to a} f_n(x)\Bigr) = \lim_{x\to a}\Bigl(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Bigr).$$

Доказательство. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для всяких $n, m > N$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X.$$

Устремляя в этом неравенстве $x \to a$ заключаем, что b_n является фундаментальной последовательностью. Следовательно существует предел $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Теперь утверждение следует из неравенства

$$|f(x) - b| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - b_n| + |b_n - b|.$$

□

Следствие 9.1. *Пусть X – подмножество метрического пространства и $a \in X$. Если функции f_n непрерывны в точке a и f_n сходятся к функции f равномерно на X, то f непрерывна в точке a.*

Доказательство. Если a – изолированная точка X, то f непрерывна в точке a по определению. Если a является предельной точкой X, то по предыдущей теореме

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\Bigl(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Bigr) = \lim_{n\to\infty}\Bigl(\lim_{x\to a} f_n(x)\Bigr) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a).$$

□

Следствие 9.2. *Пусть X – подмножество метрического пространства. Пространство непрерывных и ограниченных функций $C_b(X)$ с нормой*

$$\|f\| = \sup_X |f(x)|$$

является банаховым пространством.

Теорема 9.2. *Предположим, что последовательность интегрируемых по Риману на $[a, b]$ функций f_n равномерно сходится к функции f. Тогда f интегрируема по Риману на $[a, b]$ и верно равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,dx = \int_a^b f\,dx.$$

Доказательство. Так как

$$\Bigl|\int_a^b f_n\,dx - \int_a^b f_m\,dx\Bigr| \leqslant \sup_{[a,b]} |f_n - f_m||b - a|,$$

то последовательность I_n интегралов от f_n фундаментальна и сходится к некоторому числу I. Покажем, что суммы Римана функции f сходятся к I. Пусть $(\mathbb{T}, \xi)$ – отмеченное разбиение $[a, b]$. Утверждение следует из неравенства

$$\Bigl|\sigma(\mathbb{T}, \xi, f) - I\Bigr| \leqslant |b - a| \sup_{[a,b]} |f - f_n| + \Bigl|\sigma(\mathbb{T}, \xi, f_n) - I_n\Bigr| + \Bigl|I_n - I\Bigr|.$$

□

Следующее утверждение логически сильно отличается от только что доказанных, а именно, не из сходимости функций следует сходимость производных, а из сходимости производных следует сходимость функций.

Теорема 9.3. *Пусть B_r – шар радиуса r в $\mathbb{R}^m$. Предположим, что функции f_n дифференцируемы на B_r и производные f'_n (каждая частная производная) сходятся равномерно на B_r к g. Если для некоторой точки $x_0 \in B_r$ последовательность $f_n(x_0)$ сходится, то существует такая дифференцируемая функция f, что $f' = g$ и f_n сходится к f равномерно.*

Доказательство. Так как

$$\sup_{B_r} |f_n(x) - f_k(x)| \leqslant |f_n(x_0) - f_k(x_0)| + 2r \sup_{B_r} |f'_n(x) - f'_k(x)|,$$

то последовательность f_n сходится равномерно на B_r к некоторой функции f. Фиксируем $x \in B_r$. Рассмотрим функции

$$F_n(h) = \frac{f_n(x+h) - f_n(x) - f'_n(x)h}{\|h\|}, \quad F(h) = \frac{f(x+h) - f(x) - g'(x)h}{\|h\|}.$$

Так как

$$|F_n(h) - F_k(h)| \leqslant 2 \sup |f'_n - f'_k|,$$

то F_n равномерно сходится к F. Более того, $\lim_{h\to 0} F_n(h) = 0$ для всякого n. По теореме о перестановочности пределов заключаем

$$\lim_{h\to 0} F(h) = \lim_{h\to 0}\Bigl(\lim_{n\to\infty} F_n(h)\Bigr) = \lim_{n\to\infty}\Bigl(\lim_{h\to 0} F_n(h)\Bigr) = 0,$$

что означает дифференцируемость f в точке x и равенство $f' = g$. □

Следствие 9.3. *Пусть U – открытое множество в $\mathbb{R}^m$. Пространство $C^k_b(U)$, состоящее из k-раз непрерывно дифференцируемых и ограниченных вместе с производными функций, с нормой*

$$\|f\| = \sup_U |f| + \sum_{i\leqslant k} \sup_U |f^{(i)}(x)|$$

является банаховым пространством.

10. Степенные ряды.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ называется степенным рядом. Здесь $c_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$, точка z_0 называется центром ряда, а c_n называются коэффициентами ряда. Поскольку всегда можно сделать замену $z \to z - z_0$, то далее всегда считаем $z_0 = 0$. Исследование степенных рядов естественно проводить именно на множестве комплексных числе, что демонстрирует следующий пример. Используя сумму геометрической прогрессии легко вывести равенство:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

Этот ряд сходится только при $|x| < 1$, но сумма этого ряда является гладкой функцией на всей числовой прямой. Возникает естественный вопрос о свойстве суммы, которое является препятствием для сходимости этого ряда. Это свойство можно увидеть, если допустить комплексные x. В комплексной области функция $1/(1 + x^2)$ имеет особенности $x = \pm i$.

Предложение 10.1. *Если в некоторой точке $z^* \neq 0$ ряд $\sum_n c_n z^n$ сходится абсолютно, то он сходится абсолютно для всякой точки z такой, что $|z| < |z^*|$. Если в некоторой точке z^* ряд $\sum_n c_n z^n$ расходится, то степенной ряд расходится для всякой точки z такой, что $|z| > |z^*|$.*

Доказательство. Второе утверждение следует из первого. Докажем первое. Так как ряд с z^* сходится, то последовательность $|c_n||z^*|^n$ стремится к нулю и ограничена, т. е. найдется такое число C, что $|c_n||z^*|^n \leqslant C$ для всех n. Сходимость ряда при $|z| < |z^*|$ следует из неравенств

$$|c_n||z|^n \leqslant C\left(\frac{|z|}{|z^*|}\right)^n, \quad \frac{|z|}{|z^*|} < 1.$$

□

Таким образом, степенный ряды сходятся на кругах. Следующее утверждение позволяет находить радиус самого большого круга сходимости.

Теорема 10.1. (Формула Коши–Адамара) *Пусть*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \in [0, +\infty].$$

Тогда ряд сходится абсолютно в каждой точке круга $|z| < R$ и расходится в каждой точке $|z| > R$.

Доказательство. Так как

$$q = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n||z|^n} = |z|\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|},$$

то $q < 1$ при $|z| < R$ и ряд сходится по признаку Коши, $q > 1$ при $|z| > R$ и ряд расходится по признаку Коши. □

Число R называется радиусом сходимости, а круг $|z| < R$ называется кругом сходимости. При $|z| = R$ степенной ряд может сходится и расходится.

Теорема 10.2. *Для всякого $R_1 < R$ ряд $\sum_n c_n z^n$ сходится равномерно на круге $|z| \leqslant R_1$.*

Доказательство. Так как ряд $\sum_n |c_n| R_1^n$ сходится и $|c_n||z|^n \leqslant |c_n|R_1^n$ при $|z| \leqslant R_1$, то по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_n c_n z^n$ сходится равномерно при $|z| \leqslant R_1$. □

Теорема 10.3. (Абель) *Если в точке z_0 ряд $\sum_n c_n z^n$ сходится, то на отрезке $[0, z_0]$ ряд сходится равномерно.*

Доказательство. Надо доказать, что ряд $\sum_n t^n c_n z_0^n$ сходится равномерно на $[0,1]$. Это следует из признака Абеля: ряд $\sum_n c_n z_0^n$ сходится и последовательность t^n монотонна и равномерно ограничена. □

В качестве примера докажем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2.$$

Заметим, что ряд $\sum_n z^n/n$ сходится в точке $z = -1$. Следовательно, этот ряд сходится равномерно на отрезке $[-1, 0]$, а на интервале $(-1, 0)$ он сходится к $\ln(1-x)$. Получаем

$$\ln 2 = \lim_{x\to -1} \ln(1-x) = \sum_n \lim_{x\to -1} \frac{x^n}{n} = \sum_n \frac{(-1)^n}{n}.$$

Предложение 10.2. *Радиусы сходимости рядов $\sum_n c_n z^n$ и $\sum_n n c_n z^{n-1}$ равны и второй ряд является производной первого ряда, т. е.*

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{\sum_n c_n (z+\Delta z)^n - \sum_n c_n z^n}{\Delta z} = \sum_n n c_n z^{n-1}$$

для всякой точки z внутри круга сходимости. Более того, сумма степенного ряда является бесконечно гладкой функцией внутри круга сходимости.

Доказательство. Утверждение следует из формулы Коши–Адамара и теоремы о перестановочности пределов. □

Из доказанного утверждения следует, что у суммы $f(z)$ степенного ряда $\sum_n c_n z^n$ есть первообразная

$$\int f(z)\,dz = C + \sum_n \frac{c_n z^{n+1}}{n+1}.$$

Предложение 10.3. *Предположим, что радиус сходимости ряда* $\sum_n c_n z^n$ *больше нуля, а сумма равна* $f(z)$. *Тогда*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Доказательство. Проверяется прямым вычислением. □

Таким образом, степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы.

11. Производящие функции.

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ называют производящей функцией последовательности $\{c_n\}$, причем не предполагается, что радиус сходимости положителен. С производящими функциями определены формальные операции сложения, умножения, дифференцирования и интегрирования:

$$\sum_n c_n z^n + \sum_n d_n z^n = \sum_n (c_n + d_n) z^n, \quad \sum_n c_n z^n \cdot \sum_n d_n z^n = \sum_n (c_0 d_n + c_1 d_{n-1} + \ldots + c_n d_0) z^n,$$

$$\Big(\sum_n c_n z^n\Big)' = \sum_n n c_n z^{n-1}, \quad \int \Big(\sum_n c_n z^n\Big)\,dz = \sum_n c_n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

Если радиусы сходимости у исходных рядов положительны, то на общем круге сходимости эти формальные операции совпадают с обычными правилами сложения, умножения, дифференцирования и интегрирования степенных рядов.

Производящие функции позволяют решать многие задачи комбинаторики.

Хорошо известна последовательность чисел Фибоначчи: $f_0 = f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Найдем производящую функцию для этой последовательности. Заметим, что верны равенства $f_n + f_{n-1} - f_{n+1} = 0$ и

$$(1 - z - z^2)F(z) = f_0 + (f_1 - f_0)z + (f_2 - f_1 - f_0)z^2 + (f_3 - f_2 - f_1)z^3 + \ldots = f_0 = 1.$$

Следовательно,

$$F(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}.$$

Раскладывая эту дробь на простейшие и используя разложение для геометрической прогрессии можно получить формулу n-го числа Фибоначчи:

$$f_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}\Big(\Big(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} - \Big(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}\Big).$$

Оказывается линейные рекуррентные последовательности – это в точности те последовательности, у которых рациональные производящие функции.

Теорема 11.1. *Если последовательность* a_n *удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$a_n = q_1 a_{n-1} + \ldots + q_k a_{n-k},$$

то ее производящая функция является отношением двух многочленов P/Q, *причем степень знаменателя равна* k, *а степень числителя не превосходит* $k-1$. *Более того, верно обратное: если производящая функция рациональна, то начиная с некоторого номера последовательность задается линейным рекуррентным соотношением.*

Доказательство. Достаточно заметить, что произведение $(q_1 z + q_2 z^2 + \ldots + q_k z^k)$ и производящей функции $A(z)$ представляется в виде суммы некоторого многочлена и $A(z)$. $\square$

Рассмотрим еще один пример.

Сколькими способами можно разменять n рублей на монеты достоинством в 1 и 5 рублей? Обозначим искомое количество способов через a_n и найдем производящую функцию $A(z)$ для этой последовательности. Легко видеть, что раскрывая скобки и приводя подобные в выражении

$$(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots)(1 + z^5 + z^{10} + \ldots)$$

мы получим искомую производящую функцию. Используя формулу для геометрической прогрессии получаем

$$A(z) = \frac{1}{(1-z)(1-z^5)} = \frac{1}{1 - z - z^5 + z^6}.$$

Кроме того, имеет место рекуррентная формула $a_n = a_{n-1} + a_{n-5} + a_{n-6}$.

12. Функции Бесселя и многочлены Лежандра.

Задача Бернулли

Опишем колебания гибкой, тяжелой и однородной нити, верхний конец которой закреплен, а нижний свободен. Длина нити равна L. Направим ось OX вертикально через точку крепления нити, ось OY направим горизонтально, начало координат в конце покоящейся нити. В каждый момент времени функция $y = u(x,t)$ описывает форму нити. Пусть ϱ – линейная плотность нити. Рассмотрим участок нити, соответствующий $[x, x+\Delta x]$. На концы этого участка действуют силы натяжения $T(x)$ и $T(x+\Delta x)$. Записывая второй закон Ньютона в проекции на ось OY, получаем

$$\varrho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(x+\Delta x)\frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x} - T(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x}.$$

Делим на Δx и устремляем Δx к нулю. Получаем уравнение

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(T(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big).$$

Расписывая второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось можно приближенно считать, что $T(x) = g\varrho x$. Приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(gx\frac{\partial u}{\partial x}\Big).$$

Будем искать решение в виде $u(x,t) = y(x)\sin(\omega t + \varphi_0)$. На функцию y получаем уравнение

$$xy''(x) + y'(x) + \omega^2 g^{-1} y(x) = 0.$$

Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах

В многих задачах теории колебаний, электростатики, теплоты приходится исследовать уравнение Лапласа $\Delta u = 0$. Распишем это уравнение в цилиндрической системе координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$:

$$u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\varphi\varphi} + u_{zz} = 0.$$

Будем искать решение в виде $u(r,\varphi,z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$. Имеем

$$\frac{r\big(rR'\big)'}{R} + \frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{r^2 Z''}{Z} = 0.$$

Следовательно для некоторых констант $-n^2$ и λ^2 верны равенства

$$\Phi'' + n^2\Phi = 0, \quad Z'' - \lambda^2 Z = 0$$

и

$$r(rR')' + (\lambda^2 r^2 - n^2)R = 0.$$

Полагая $v = r\lambda$, приходим к уравнению на функцию $R(v)$:

$$v^2 R''(v) + vR'(v) + (v^2 - n^2)R(v) = 0,$$

которое называют уравнением Бесселя. Уравнение, полученное выше при решении задачи Бернулли, приводится заменой $x = gs^2/4\omega^2$ к уравнению Бесселя с $n = 0$.

Итак, представляет интерес поиск решений уравнения вида

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0.$$

Решение $J_n(x)$ этого уравнения с условием $J_n(0) = 1/2^n n!$, называется функцией Бесселя порядка n. Рассмотрим случай $n = 0$. Будем искать решение в виде степенного ряда $y = \sum_k c_k x^k$. Подставляя в уравнение, приходим к равенству

$$c_1 + \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 c_k + c_{k-2}) x^{k-1} = 0.$$

Следовательно, $c_1 = 0$ и $k^2 c_k + c_{k-2} = 0$. Таким образом,

$$J_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}.$$

Закон всемирного тяготения и объемный потенциал.

Согласно закону всемирного тяготения масса m_0, расположенная в точке x_0, притягивает массу m, расположенную в точке x, с силой

$$F = -\gamma m m_0 \frac{(x - x_0)}{|x - x_0|^3}$$

Сила, с которой массу m в точке x притягивает тело Q с плотностью ϱ, выражается формулой

$$F(x) = -\gamma m \int_Q \frac{x - y}{|x - y|^3} \varrho(y)\, dy,$$

а потенциал этой силы равен $\gamma m U$, где

$$U(x) = \int_Q \frac{1}{|x - y|} \varrho(y)\, dy.$$

Выписанный интеграл называется объемный потенциалом и играет важную роль в различных разделах физики. Если точка x находится на достаточно большом расстоянии от тела, то приближенно принимают $U(x) = M/|x - x_0|$, где M – масса тела и x_0 – центр масс. Найдем точную асимптотику объемного потенциала. Пусть $r_1 = |x_0 - y|$, $r = |x_0 - x|$, $t = \cos\theta$, где x_0 – центр масс, y – произвольная точка Q, x – точка вне тела и $r > r_1$, θ – угол между $x_0 - x$ и $x_0 - y$. Тогда

$$|x - y| = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\theta} = r\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha t}.$$

Разлагаем $1/|x - y|$ по степеням α:

$$\frac{1}{|x - y|} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k P_k(t).$$

Следовательно, имеем

$$U(x) = \frac{1}{r} \int_Q \varrho\, dy + \frac{1}{r^2} \int_Q r_1 P_1(t) \varrho\, dy + \dots$$

Легко понять, что

$$(k+1)P_{k+1}(t) = (2k+1)tP_k(t) - kP_{k-1}(t), \quad P_0 = 1, P_1 = t.$$

Таким образом, $P_k(t)$ является многочленом степени k. Более того, имеет место формула Родрига

$$P_k(t) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dt^k}\Big(t^2-1\Big)^n.$$

Многочлены P_k называются многочленами Лежандра и обладают многими замечательными свойствами.

13. Равномерный предел функций, зависящих от параметра.

Пусть X – некоторое непустое множество и Y – подмножество метрического пространства, причем a – предельная точка Y. Пусть $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) и $\varphi\colon X\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$. Будем говорить, что функция $f(x,y)$ сходится к φ при $y\to a$ равномерно на X, если

$$\lim_{y\to a}\sup_X |f(x,y)-\varphi(x)| = 0.$$

Предложение 13.1. *Функция $f(x,y)$ сходится к $\varphi(x)$ при $y\to a$ равномерно на X тогда и только тогда, когда для всякой последовательности $y_n\to a$, $y_n\neq a$ последовательность $f(x,y_n)$ сходится к φ равномерно на X.*

Доказательство. Утверждение является переформулировкой теоремы об эквивалентности определений предела по Коши и по Гейне для функции $h(y)=\sup_X|f(x,y)-\varphi(x)|$. $\square$

Доказанное предложение позволяет перенести все основные теоремы о перестановочности пределов, предела и дифференцирования, предела и интегрирования с последовательностей на эту более общую ситуацию.

Предложение 13.2. (Критерий Коши) *Функция $f(x,y)$ сходится при $y\to a$ равномерно на X тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всех $y_1,y_2\in B'_\delta(a)$ верно $\sup_X|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<\varepsilon$.*

Доказательство. Доказательство дословно повторяет доказательство критерия Коши для последовательности функций. $\square$

Приведем важнейший пример, когда появляется такого рода равномерная сходимость.

Предложение 13.3. *Если функция f непрерывна на прямоугольнике $\Pi=[a,b]\times[c,d]$, то для всякого $y_0\in[c,d]$ функции $f(x,y)$ сходятся к $f(x,y_0)$ при $y\to y_0$ равномерно на $[a,b]$.*

Доказательство. Следует из равномерной непрерывности непрерывной на компакте функции. $\square$

14. Признаки равномерной сходимости несобственного интеграла с параметром.

Пусть X – непустое множество. Предположим, что $f\colon X\times[a,b)\to\mathbb{R}$ при каждом x интегрируема по Риману на $[a,c]$ для всякого $c\in[a,b)$. Тогда на $X\times[a,b)$ определена функция

$$F(x,c)=\int_a^c f(x,t)\,dt.$$

Если в каждой точке $x \in X$ существует конечный предел $\lim_{c\to b} F(x,c)$, то этот предел называют несобственным интегралом с параметром и обозначают через

$$\int_a^b f(x,t)\,dt.$$

Если $F(x,c)$ сходится к $\int_a^b f(x,t)\,dt$ при $c \to b$ равномерно на X, то говорят, что несобственный интеграл с параметром сходится равномерно на X. По определению равномерная сходимость равносильна равенству

$$\lim_{c\to b}\sup_X\Big|\int_c^b f(x,t)\,dt\Big| = 0.$$

Несобственные интегралы с параметром имеют много общего с функциональными рядами и исследование равномерной сходимости интегралов очень похоже на исследование сходимости рядов. Однако, надо иметь ввиду некоторые отличия, например, необходимым условием сходимости ряда является сходимость к нулю его слагаемых, а для сходимости интеграла этого не требуется.

Предложение 14.1. (Критерий Коши) *Интеграл* $\int_a^b f(x,t)\,dt$ *сходится равномерно тогда и только тогда, когда для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для всех* $c_1, c_2 \in (b-\delta, b)$

$$\sup_X\Big|\int_{c_1}^{c_2} f(x,t)\,dt\Big| < \varepsilon.$$

Доказательство. Это переформулировка критерия Коши для функции $F(x,c)$. □

Теорема 14.1. (Признак Вейерштрасса) *Пусть* $\int_a^b g(x,t)\,dt$ *сходится равномерно и имеет место оценка* $|f(x,t)| \leqslant g(x,t)$ *на* $X\times[a,b)$. *Тогда* $\int_a^b f(x,t)\,dt$ *сходится равномерно. В частности, если* $|f(x,t)| \leqslant g(t)$ *и* $\int_a^b g(t)\,dt$ *сходится, то интеграл от* f *сходится равномерно.*

Доказательство. Утверждение следует из неравенство

$$\sup_X\Big|\int_{c_1}^{c_2} f(x,t)\,dt\Big| \leqslant \sup_X\int_{c_1}^{c_2} g(x,t)\,dt$$

и критерия Коши. □

Обсудим сходимость интегралов от произведения $f(x,t)g(x,t)$.

Предложение 14.2. *Для равномерной сходимости интеграла* $\int_a^b f(x,t)g(x,t)\,dt$ *достаточно выполнения хотя бы одного из следующих условий:*

(i) *интеграл* $\int_a^b |f(x,t)|\,dt$ *сходится равномерно и* g *равномерно ограничена на* $X\times[a,b)$*;*

(ii) *интегралы* $\int_a^c |f(x,t)|\,dt$ *равномерно ограничены и* g *равномерно стремится к нулю при* $t\to b$.

Доказательство. Первый пункт следует из признака Вейерштрасса. Второй пункт следует из неравенства

$$\int_{c_1}^{c_2} |f(x,t)||g(x,t)|\,dt \leqslant \sup_{t\in[c_1,c_2]}|g(x,t)|\int_{c_1}^{c_2}|f(x,t)|\,dt$$

и критерия Коши. □

Более тонкие признаки сходимости можно получить с помощью аналога преобразования Абеля:

$$\int_a^c g(x,t)f(x,t)\,dt = g(x,c)\Big(\int_a^c f(x,t)\,dt - h(x)\Big) + g(x,a)h(x) - \int_a^c g'_t(x,t)\Big(\int_a^t f(x,s)\,ds - h(x)\Big)\,dt,$$

где h – произвольная функция.

Теорема 14.2. *Предположим, что при каждом x по переменной t выполняются условия $f \in C([a,b))$, $g \in C^1([a,b])$. Если для некоторой функции h функция*

$$g(x,c)\Big(\int_a^c f(x,t)\,dt - h(x)\Big)$$

равномерно сходится при $c \to b$, то интегралы

$$\int_a^b g(x,t)f(x,t)\,dt \quad \text{и} \quad \int_a^b g'_t(x,t)\Big(\int_a^t f(x,s)\,ds - h(x)\Big)\,dt$$

одновременно сходятся равномерно или расходятся равномерно.

Доказательство. Следует из выписанного выше равенства. □

Следствие 14.1. (Признаки Абеля–Дирихле) *Предположим, что при каждом x по переменной t выполняются условия $f \in C([a,b))$, $g \in C^1([a,b])$ и $g'_t \geqslant 0$.*

(i) *Если $g(x,t)$ равномерно стремится к нулю при $t \to b$ и интегралы $\Big|\int_a^c f(x,t)\,dt\Big|$ равномерно ограничены на $X \times [a,b)$, то несобственный интеграл от fg по $[a,b)$ сходится равномерно на X.*

(ii) *Если g равномерно ограничена на $X \times [a,b)$ и несобственный интеграл от f по $[a,b)$ сходится равномерно на X, то сходится несобственный интеграл от fg по $[a,b)$.*

Доказательство. Обоснуем (i). Применим доказанную выше теорему с $h \equiv 0$. Ясно, что $g(x,c)\int_a^c f(x,t)\,dt$ сходится равномерно к нулю. Так как $\int_a^b |g'_t(x,t)|\,dt$ сходится равномерно и интегралы $\Big|\int_a^c f(x,t)\,dt\Big|$ равномерно ограничены, то интеграл $\int_a^b g'_t(x,t)\Big(\int_a^t f(x,s)\,ds\Big)\,dt$ сходится равномерно.

Обоснуем (ii). Примерим доказанную выше теорему с $h(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$. По условию мы знаем, что $\int_a^c f(x,t)\,dt - h(x)$ равномерно стремится к нулю при $c \to b$. Следовательно, $g(x,c)\Big(\int_a^c f(x,t)\,dt - h(x)\Big)$ равномерно стремится к нулю. Так как интегралы $\int_a^c |g'_t(x,t)|\,dt$ равномерно ограничены и $\int_a^c f(x,t)\,dt - h(x)$ равномерно стремится к нулю, то интеграл $\int_a^b g'_t(x,t)\Big(\int_a^t f(x,s)\,ds - h(x)\Big)\,dt$ сходится равномерно. □

15. Свойства собственных интегралов с параметром: непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость.

Пусть $f\colon X \times [a,b] \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) и при каждом $x \in X$ функция f интегрируема по Риману на $[a,b]$. Пусть $\alpha, \beta\colon X \to [a,b]$. Функцию

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\,dt$$

называют интегралом с параметром.

Предложение 15.1. *Предположим, что X является подмножеством метрического пространства и x_0 – его предельная точка. Если $f(x,t)$ сходится к $\varphi(t)$ при $x \to x_0$ равномерно на $[a,b]$, то φ интегрируема по Риману на $[a,b]$ и верно равенство*

$$\lim_{x\to x_0}\int_a^b f(x,t)\,dt = \int_a^b \varphi(t)\,dt.$$

Доказательство. Пусть $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$. По условию $f(x_n,t)$ равномерно сходится к $\varphi(t)$ и утверждение следует из аналогичного утверждения про последовательности. □

Далее $X = [c,d]$.

Теорема 15.1. *Если f непрерывна на $[c,d]\times[a,b]$ и α,β – непрерывны на $[c,d]$, то F является непрерывной функцией на $[c,d]$.*

Доказательство. Функция

$$\Phi(x,c) = \int_a^c f(x,t)\,dt$$

непрерывна на $[c,d]\times[a,b]$. Действительно,

$$|\Phi(x_1,c_1)-\Phi(x_2,c_2)| \leqslant \max|f||c_1-c_2| + (b-a)\max_t|f(x_1,t)-f(x_2,t)|,$$

где второе слагаемое стремится к нулю в силу равномерной непрерывности f. Отстается заметить, что функция

$$F(x) = \Phi(x,\beta(x)) - \Phi(x,\alpha(x))$$

является непрерывной как композиция непрерывных функций. □

Теорема 15.2. *Если f и $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны на $[c,d]\times[a,b]$ и α,β непрерывно дифференцируемы на $[c,d]$, то F непрерывно дифференцируема и*

$$F'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt + f(x,\beta(x))\beta'(x) - f(x,\alpha(x))\alpha'(x).$$

Доказательство. Проверяем, что $\Phi(x,c)$ непрерывно дифференцируема по x (непрерывная дифференцируемость по c очевидна). Имеем

$$\frac{\Phi(x+h,c)-\Phi(x,c)}{h} = \int_a^c \frac{f(x+h,t)-f(x,t)}{h}\,dt.$$

Так как $h^{-1}(f(x+h,t)-f(x,t))$ сходится к $f_x(x,t)$ равномерно, то предел интегралов равен интегралу от предельной функции. Остается заметить, что $F(x)$ есть композиция непрерывно дифференцируемых функций. □

Теорема 15.3. *Если f непрерывна на $[c,d]\times[a,b]$, то*

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$$

интегрируема на $[c,d]$ и верно равенство

$$\int_c^d F(x)\,dx = \int_a^b\Big(\int_c^d f(x,t)\,dx\Big)\,dt.$$

Доказательство. Это частный случай теоремы Фубини, который можно доказать с помощью теоремы о дифференцируемости интеграла по параметру:

$$\frac{d}{dy}\left(\int_c^y\Big(\int_a^b f(x,t)\,dt\Big)\,dx - \int_a^b\Big(\int_c^y f(x,t)\,dx\Big)\,dt\right) = 0.$$

□

16. Свойства несобственных интегралов с параметром: непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость.

Пусть $f\colon X \times [a, b) \to \mathbb{R}$. Если для каждого $x \in X$ сходится несобственный интеграл от f по $[a, b)$, то функцию

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt,$$

называют несобственным интегралом с параметром.

Предложение 16.1. *Предположим, что X является подмножеством метрического пространства и x_0 – его предельная точка. Если $f(x,t)$ сходится к $\varphi(t)$ при $x \to x_0$ равномерно на $[a, c]$ для всякого $c \in [a, b)$ и интеграл $\int_a^b f(x,t)\,dt$ сходится равномерно, то φ интегрируема в несобственном смысле на $[a, b)$ и верно равенство*

$$\lim_{x\to x_0} \int_a^b f(x,t)\,dt = \int_a^b \varphi(t)\,dt.$$

Доказательство. Пусть $b_n \to b$, $b_n < b$. Рассмотрим последовательность функций

$$F_n(x) = \int_a^{b_n} f(x,t)\,dt.$$

Выполняются следующие условия: 1) F_n сходится равномерно к F 2) при каждом n

$$\lim_{x\to x_0} F_n(x) = \int_a^{b_n} \varphi(t)\,dt.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} \varphi(t)\,dt = \lim_{x\to x_0} \int_a^b f(x,t)\,dt.$$

□

Далее X совпадает или с отрезком $[c, d]$ или с полуинтервалом $[c, d)$.

Теорема 16.1. *Если f непрерывна на $[c, d] \times [a, b)$ и несобственный интеграл $\int_a^b f(x,t)\,dt$ сходится равномерно, то F непрерывна на $[c, d]$.*

Доказательство. Пусть $c_n \to b$. Функции $F_n(x) = \int_a^{c_n} f(x,t)\,dt$ непрерывны и равномерно сходятся к F. Следовательно, F непрерывна. □

Теорема 16.2. *Предположим, что f и f_x непрерывны на $[c, d] \times [a, b)$ и несобственный интеграл $\int_a^b f_x(x,t)\,dt$ сходится равномерно. Если для некоторого $x_0 \in [c, d]$ несобственный интеграл $\int_a^b f(x_0,t)\,dt$ сходится, то это интеграл сходится равномерно на $[c, d]$, задаваемая им функция $F(x)$ непрерывно дифференцируема и верно равенство*

$$F'(x) = \int_a^b f_x(x,t)\,dt.$$

Доказательство. Пусть $c_n \to b$. Последовательность $F_n(x) = \int_a^{c_n} f(x,t)\,dt$ удовлетворяет следующим условиям: 1) числовая последовательность $F_n(x_0)$ сходится, 2) функциональная последовательность $F_n'(x)$ сходится равномерно к $\int_a^b f_x(x,t)\,dt$. Утверждение следует из теоремы о перестановочности предела и дифференцирования. □

Теорема 16.3. *Предположим, что f непрерывна на $[c,d]\times[a,b)$ и несобственный интеграл $F(x)=\int_a^b f(x,t)\,dt$ сходится равномерно. Тогда $F(x)$ интегрируема на $[c,d]$ и верно равенство*

$$\int_c^d F(x)\,dx=\int_a^b\Big(\int_c^d f(x,t)\,dx\Big)\,dt.$$

Доказательство. Пусть $b_n\to b$ и $F_n(x)=\int_a^{b_n} f(x,t)\,dt$. По условию F_n равномерно сходится к F. Следовательно, верно равенство

$$\int_c^d F(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_c^d F_n(x)\,dx.$$

Остается заметить, что

$$\int_c^d F_n(x)\,dx=\int_a^{b_n}\Big(\int_c^d f(x,t)\,dx\Big)\,dt.$$

□

Теорема 16.4. *Пусть f непрерывна на $[c,d)\times[a,b)$. Предположим, что интегралы*

$$\int_a^b f(x,t)\,dt,\qquad \int_c^d f(x,t)\,dx$$

сходятся равномерно на всяком отрезке из $[c,d)$ и $[a,b)$ соответственно, сходится интеграл

$$\int_a^b\Big(\int_c^d |f(x,t)|\,dx\Big)\,dt.$$

Тогда верно равенство

$$\int_c^d\Big(\int_a^b f(x,t)\,dt\Big)\,dx=\int_a^b\Big(\int_c^d f(x,t)\,dx\Big)\,dt.$$

Доказательство. Пусть $u<d$. Имеем

$$\int_c^u\Big(\int_a^b f(x,t)\,dt\Big)\,dx=\int_a^b\Big(\int_c^u f(x,t)\,dx\Big)\,dt.$$

Осталось доказать, что в правой части можно перейти к пределу при $u\to d$. Положим

$$F(u,t)=\int_c^u f(x,t)\,dx.$$

Так как $|F(u,t)|\leqslant\int_c^d |f(x,t)|\,dx$, то по признаку Вейерштрасса интеграл $\int_a^b F(u,t)\,dt$ сходится равномерно. Кроме того, $F(u,t)$ равномерно сходится к $\int_c^d f(x,t)\,dx$. Следовательно, верно равенство

$$\lim_{u\to d}\int_a^b F(u,t)\,dt=\int_a^b\Big(\int_c^d f(x,t)\,dx\Big)\,dt.$$

□

17. Свертка функций и ее свойства. δ-образные последовательности. Теорема Вейерштрасса.

Сверткой двух функций f и g называется выражение
$$f*g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt.$$

Предложение 17.1. *Пусть f и g определены на $\mathbb{R}$ и интегрируемы по Риману на всяком отрезке. Для существования свертки $f*g(x)$ достаточно выполнения хотя бы одного из следующих условий*

(i) *f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и g ограничена;*

(ii) *f^2 и g^2 интегрируемы на $\mathbb{R}$;*

(iii) *хотя бы одна из функций f и g тождественно равна нулю вне некоторого отрезка (такую функцию называют финитной или функцией с компактным носителем).*

Доказательство. Пункты (i) и (ii) очевидны. Пункт (ii) следует из неравенства
$$2|fg|\leqslant f^2+g^2.$$
□

Предложение 17.2. *Если существует $f*g(x)$, то существует $g*f(x)$ и $f*g(x)=g*f(x)$.*

Доказательство. Следует из формулы замены переменных. □

Предложение 17.3. *Если функция f непрерывна и функция g финитна и k-раз непрерывно дифференцируема, то $f*g$ является k-раз непрерывно дифференцируемой функцией и*
$$\Bigl(f*g\Bigr)^{(k)}(x)=f*(g^{(k)})(x).$$

Доказательство. Немедленно следует из теоремы о дифференцируемости интеграла с параметром. □

δ-образной называется последовательность интегрируемых функций ω_n, удовлетворяющая следующим свойствам:

(i) $\omega_n\geqslant 0$,

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\omega_n\,dx=1$,

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{|x|>\delta}\omega_n\,dx=0$ для всякого $\delta>0$.

Примеры:

1) $\omega_n(x)=0$ при $|x|>1/(2n)$ и $\omega_n(x)=n$.

2) $\omega_n(x)=n\omega(nx)$, где $\omega\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\omega\geqslant 0$ и $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\omega\,dx=1$.

3) $\omega_n(x)=(1-x^2)^n/c_n$, где $c_n=\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^n\,dx$, при $|x|\leqslant 1$ и $\omega_n(x)=0$ при $|x|>1$.

4) $\omega_n(x)=\cos^{2n}x/c_n$, где $c_n=\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2n}x\,dx$, при $|x|\leqslant\pi/2$ и $\omega_n(x)=0$ при $|x|>\pi/2$.

Предложение 17.4. *Пусть функция f непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$ и ω_n – δ-образная последовательность. Тогда $f*\omega_n$ сходится к f равномерно на всяком отрезке.*

Доказательство. Распишем разность $f*\omega_n$ и f:
$$|f*\omega_n(x)-f(x)|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-t)-f(x)|\omega_n(t)\,dt.$$

Пусть $\sup|f| = M$ и $x \in [a,b]$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(x)|\omega_n(t)\,dt \leqslant 2M\int_{|t|>\delta}\omega_n(t)\,dt + \sup_{|t|<\delta}|f(x-t) - f(x)|.$$

Остается воспользоваться равномерной непрерывностью f на отрезке. □

Теорема 17.1. (Вейерштрасс) *Пусть f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует многочлен P_ε такой, что*

$$\sup_{[a,b]}|P_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Более того, если непрерывная функция f является τ-периодической, то существует для всякого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен

$$T_\varepsilon(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}[a_k\cos\Bigl(\frac{k\tau x}{2\pi}\Bigr) + b_k\sin\Bigl(\frac{k\tau x}{2\pi}\Bigr)$$

такой, что

$$\sup_{\mathbb{R}}|T_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть свертки с δ-образными последовательностями из примеров 3) и 4). □

18. Критерий Вейля.

Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ чисел из отрезка $[0,1]$ имеет *равномерное распределение*, если

$$\frac{L_n}{n} \to b - a,$$

где L_n – количество чисел среди $x_1,\ldots,x_n$, принадлежащих $[a,b)$.

Предложение 18.1. *Последовательность $\{x_n\}$ имеет равномерное распределение тогда и только тогда, когда для всякой непрерывной функции f на $[0,1]$ верно равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Доказательство. Предположим, что для всякой непрерывной функции f

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Достаточно показать, что это равенство верно для индикатора $f = \mathbb{I}_{[a,b)}$.

Найдем две непрерывные функции g_ε и h_ε такие, что

$$g_\varepsilon \leqslant \mathbb{I}_{[a,b)} \leqslant h_\varepsilon$$

и

$$(b-a) - \varepsilon \leqslant \int_0^1 g_\varepsilon\,dx \leqslant \int_0^1 h_\varepsilon\,dx \leqslant (b-a) + \varepsilon.$$

Для функций g_ε и h_ε пределы существуют и равны интегралам от них. Остается заметить, что

$$\frac{g_\varepsilon(x_1) + \ldots + g_\varepsilon(x_n)}{n} \leqslant \frac{\mathbb{I}_{[a,b)}(x_1) + \ldots + \mathbb{I}_{[a,b)}(x_n)}{n} \leqslant \frac{h_\varepsilon(x_1) + \ldots + h_\varepsilon(x_n)}{n}.$$

Предположим теперь, что $\{x_n\}$ имеет равномерное распределение. Пусть задано некоторое разбиение $[a,b)$ на полуинтервалы Δ_i и функция f постоянна на каждом таком полуинтервале Δ_i и равна m_i. Пусть L_n^i – количество элементов из набора $x_1,\dots,x_n$, которые попали в Δ_i. Тогда

$$\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}=\sum_i \frac{L_n^i}{n}\cdot m_i\to\sum_i m_i|\Delta_i|=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Для завершения доказательства достаточно заметить, что всякую непрерывную функцию можно равномерно приблизить кусочно постоянной функцией. □

Отметим, что в доказанном утверждении можно дополнительно требовать от функции f условия $f(0)=f(1)$, т.е. считать, что f непрерывная функция с периодом 1.

Следствие 18.1. (Критерий Вейля) *Последовательность $\{x_n\}$ имеет равномерное распределение тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{2\pi i m x_k}=0.$$

для всякого целого $m\neq 0$.

Доказательство. Это утверждение выводится из предыдущего с помощью теоремы Вейерштрасса о равномерном приближения произвольной непрерывной 1-периодической функции f на $[0,1]$ тригонометрическим многочленом. □

Важный пример равномерно распределенной последовательности: $\{na\}$, где a – иррациональное число. Для такой последовательности указанная в критерии Вейля сумма вычисляется очень просто – сумма геометрической прогрессии.

Рассмотрим пример: *распределение первых цифр степеней двойки.*

Может ли 2^n начинаться с 3? Каких степеней 2^n больше тех, которые начинаются с 3, или тех, которые начинаются с 7?

Число 2^n начинается с цифры A тогда и только тогда, когда найдется такое целое неотрицательное число k, что

$$A10^k\leqslant 2^n<(A+1)10^k.$$

Эти неравенства можно переписать так $\log_{10}A\leqslant n\log_{10}2-k\leqslant\log_{10}(A+1)$ Так как последовательность $\{n\log_{10}2\}$ равномерно распределена, то частота выполнения этих неравенств стремится к $\log_{10}(1+1/A)$. В частности для тройки и семерки $\log_1 0(1+1/3)>\log_1 0(1+1/7)$ и, следовательно, степени двойки чаще начинаются с тройки.

19. Ортонормированные системы. Коэффициенты Фурье.

Пусть E – линейное пространство над $\mathbb{R}$. Если задана функция $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon E\times E\to\mathbb{R}$ такая, что

(i) $\langle x,x\rangle\geqslant 0$ и $\langle x,x\rangle=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$,

(ii) $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$,

(iii) $\langle\alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle$,

то E называется евклидовым пространством. Если рассматривается линейное пространство на $\mathbb{C}$, то второе свойство надо заменить на равенство $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$.

Предложение 19.1. *Верно неравенство Коши–Буняковского*

$$|\langle x,y\rangle|\leqslant\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}.$$

Доказательство. Если ограничить это скалярное произведение на плоскость, натянутую на x и y, то получим скалярное произведение на $\mathbb{R}^2$, про которое данное неравенство хорошо известно. □

Евклидово пространство является нормированным с нормой $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Векторы x и y ортогональны, если $\langle x, y\rangle = 0$.

Предложение 19.2. (Теорема Пифагора) *Если вектора x и y ортогональны, то* $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Набор векторов $\{e_k\}_k$ называется *ортонормированной* системой векторов, если $\|e_i\| = 1$ и $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ для всех i и j. Для всякого вектора x число $x_i = \langle x, e_i\rangle$ называется коэффициентом Фурье.

Лемма 19.1. *Пусть L натянуто на ортонормированные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_N$. Вектор $x - (x_1e_1 + \ldots + x_ne_n)$ ортогонален пространству L. Более того, верно равенство*

$$\|x - (x_1e_1 + \ldots + x_ne_n)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\langle x - (x_1e_1 + \ldots + x_ne_n), e_i\rangle = x_i - x_i = 0.$$

□

Теорема 19.1. *Пусть линейное пространство L является линейной оболочкой ортонормированных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_N$. Тогда*

$$\min_{y\in L} \|x - y\| = \|x - (x_1e_1 + \ldots + x_ne_n)\|.$$

Доказательство. Пусть $y = c_1e_1 + \ldots + c_ne_n$. Имеем

$$\|x - y\|^2 = \|x - (x_1e_1 + \ldots + x_ne_n)\|^2 + \sum_{i=1}^{n}(c_i - x_i)^2 \geqslant \|x - (x_1e_1 + \ldots + x_ne_n)\|^2.$$

□

Следствие 19.1. (Неравенство Бесселя) *Пусть $\{e_k\}_k$ – ортонормированная система. Для всякого вектора x верно неравенство*

$$\sum_k |x_k|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Пусть заданы векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ и L – линейная оболочка этих векторов. Простым способом построения ортонормированных векторов с той же линейной оболочкой L является процедура *ортогонализации Грама–Шмидта.* Полагаем $e_1 = v_1/\|v_1\|$. Если уже построены ортонормированные векторы $e_1, \ldots, e_n$ такие, что их линейная оболочка совпадает с линейной оболочкой $v_1, \ldots, v_n$, то e_{n+1} строим следующим образом:

$$e_{n+1} = \lambda\Big(v_{n+1} - \sum_{i=1}^{n}\langle v_{n+1}, e_i\rangle e_i\Big),$$

где число λ выбирается так, что $\|e_{n+1}\| = 1$.

20. Полнота и замкнутость системы векторов. Равенство Парсеваля.

Система векторов *полна*, если замыкание линейной оболочки этих векторов совпадает со всем пространством E. Система векторов *замкнута*, если единственным ортогональным вектором к этой системе является нулевой.

Теорема 20.1. *Пусть $\{e_k\}$ – ортонормированная система векторов. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $x = \sum_k x_k e_k$ *для всякого вектора* x,

(ii) $\{e_k\}$ – *полная система векторов,*

Доказательство. Пункт (ii) из пункта (i) следует так как всякий вектор x приближается частичными суммами ряда $\sum_k x_k e_k$. Из (ii) выведем (i). Если y лежит в линейной оболочке $e_1, \ldots, e_n$, то

$$\|x - (x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n)\| \leqslant \|x - y\|.$$

Следовательно, приближая такими y вектор x получаем сходимость частичных сумм ряда $\sum_k x_k e_k$. □

Теорема 20.2. *Если $x = \sum_k x_k e_k$ тогда и только тогда, когда $\|x\|^2 = \sum_k |x_k|^2$. Если E полное пространство и числовая последовательность c_k такова, что $\sum_k |c_k|^2 < \infty$, то ряд $\sum_k c_k e_k$ сходится к некоторому вектору x и $c_k = x_k$.*

Доказательство. Первое утверждение следует из равенства

$$\|x - (x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2.$$

Второе утверждение следует из критерия Коши и равенства

$$\Big\| \sum_{k=m+1}^{n} c_k e_k \Big\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2.$$

□

Предложение 20.1. *Из полноты следует замкнутость. Если пространство полное, то из замкнутости следует полнота.*

Доказательство. Пусть система векторов $\{e_k\}$ полна и $\langle x, e_k\rangle = 0$ для всех k. Тогда для всякого y из линейной оболочки $\{e_k\}$ верно $\langle x, y\rangle = 0$. По условию найдется $y_n \to x$ и

$$\langle x, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, y_n\rangle = 0.$$

В случае, когда пространство полное, из замкнутости следует равенство $x = \sum_k x_k e_k$ для всякого x, так как $\langle x - \sum_k x_k e_k, e_m\rangle = 0$ для всех m. □

Полное евклидово пространство называется *гильбертовым.*

Выражение $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$, где $x_k = \langle x, e_k\rangle$ и $\{e_k\}$ – ортонормированная система векторов, называется *рядом Фурье.* Равенство $\|x\|^2 = \sum_k |x_k|^2$ называется равенством Парсеваля.

Важным примером полной ортонормированной системы является система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx$$

в евклидовом пространстве $R_2[0, 2\pi]$ интегрируемых по Риману функций на $[0, 2\pi]$ со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx.$$

Традиционно ряд Фурье по этой системе записывают в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[a_k \cos kx + b_k \sin kx \Big],$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Теорема 20.3. *Для всякой функции $f \in R_2[0, 2\pi]$ ее ряд Фурье*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[a_k \cos kx + b_k \sin kx \Big]$$

сходится к f по норме $\|f\| = \Big(\int_0^{2\pi} f^2(x) \, dx \Big)^{1/2}$.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса система функций $1, \cos kx, \sin kx$ является полной. □

Другой важный пример ортонормированной системы доставляют полиномы Лежандра $P_n(t)$, которые можно получить с помощью ортогонализации Грама–Шмидта векторов $1, x, x^2, \ldots$ в евклидовом пространстве $R_2[-1, 1]$.

21. Лемма Римана. Ядро Дирихле. Поточечная и равномерная сходимость тригонометрических рядов Фурье.

Лемма 21.1. (Риман) *Для всякой интегрируемой по Риману функции f на $[a, b]$ верны равенства*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) \, dx = 0, \quad \lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) \, dx = 0.$$

Доказательство. Так как

$$\Big| \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) \, dx - \int_a^b g(x) \cos(\lambda x) \, dx \Big| \leqslant \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx,$$

то можно приблизить f гладкой функцией и доказывать требуемое утверждение только для гладкой f. Интегрируя по частям, приходим к равенству

$$\int_a^b f(x) \cos(\lambda x) \, dx = \frac{f(b) \sin(\lambda b) - f(a) \sin(\lambda b)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(x) \sin(\lambda x) \, dx.$$

Остается заметить, что правая часть оценивается сверху выражением

$$\frac{|f(a)| + |f(b)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_a^b |f'(x)| \, dx,$$

которое стремится к нулю при $\lambda \to \infty$. □

Пусть f интегрируема на $[0, 2\pi]$ и a_k, b_k – коэффициенты Фурье f по тригонометрической системе. Заметим, что

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(k(x - t)) \, dt$$

и

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin((n + 1/2)x)}{2 \sin x/2}.$$

Функция

$$D_n(x) = \frac{\sin((n + 1/2)x)}{\sin x/2}, \quad D_n(2\pi m) = 2n + 1,$$

называется ядром Дирихле. С помощью D_n частичную сумму ряда Фурье можно записать в следующем виде
$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt.$$
Легко проверить, что D_n является 2π периодической функцией и

(i) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t)\,dt=1,$

(ii) для всякого $\delta>0$ выполнено $\displaystyle\int_\delta^\pi D_n(t)\,dt\to 0$ при $n\to\infty$.

Пусть теперь f является 2π периодической функцией. Тогда
$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))D_n(t)\,dt.$$
Отметим, что всегда можно продолжить функцию f вне $[0,2\pi]$ до периодической функции с периодом 2π.

Далее в этом разделе всегда предполагаем функции 2π периодическими и интегрируемыми на $[0,2\pi]$.

Теорема 21.1. (Принцип локализации) *Если функции f и g совпадают в некоторой окрестности точки x_0, то их тригонометрические ряды Фурье сходятся или расходятся в этой точке одновременно, а если сходятся, то суммы в точке x_0 совпадают.*

Доказательство. Следует из приведенного выше представления и леммы Римана. □

Теорема 21.2. (Достаточное условие сходимости в точке) *Предположим, что*
$$|f(x_0)-f(x)|\leqslant C|x_0-x|^\gamma.$$
Тогда тригонометрический ряд Фурье функции f сходится к ней в точке x_0.

Доказательство. Имеет место равенство
$$|S_n(x_0)-f(x_0)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0))\frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin t/2}\,dt\right|.$$
Пусть $\delta>0$. Правая часть оценивается сверху выражением
$$\frac{C}{\pi}\int_0^\delta\frac{t^\gamma}{\sin t/2}\,dt+\frac{1}{2\pi}\left|\int_\delta^\pi\Bigl(\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)}{\sin t/2}\Bigr)\sin((n+1/2)t)\,dt\right|,$$
в котором первое слагаемое можно сделать сколь угодно малым с помощью выбора δ, а второе слагаемое стремится к нулю при $n\to\infty$ по лемме Римана. □

Основная техническая трудность обоснования поточечной сходимости ряда Фурье связана с тем, что ядро Дирихле не является δ-образной последовательностью. Функцию
$$F_n(t)=\frac{1}{n+1}\Bigl(D_0(t)+\ldots+D_n(t)\Bigr)$$
называют ядром Фейера. Замечательным образом оказывается, что функция $\omega_n(t)=(2\pi)^{-1}F_n(t)$ при $|t|\leqslant\pi$ и $\omega_n(t)=0$ при $|t|>\pi$ является δ-образной последовательностью. Так как
$$\Sigma_n(x)=\frac{1}{n+1}\Bigl(S_0(x)+\ldots+S_n(x)\Bigr)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)F_n(t)\,dt,$$
то для всякой непрерывной 2π периодической функции f последовательность Σ_n сходится равномерно к f.

Лемма 21.2. *Если 2π периодическая функция f непрерывно дифференцируема, то*
$$a_n(f')=nb_n(f),\quad b_n(f')=-na_n(f)$$

Доказательство. Равенства следуют из интегрирования по частям. □

Следствие 21.1. *Если 2π периодическая функция f k-раз непрерывно дифференцируема, то*

$$|a_n(f)| = \frac{\alpha_n}{n^k}, \quad |b_n(f)| = \frac{\beta_n}{n^k},$$

причем $\sum_n \alpha_n^2 < \infty$ и $\sum_n \beta_n^2 < \infty$.

Доказательство. Достаточно применить равенства из леммы и неравенство Бесселя. □

Теорема 21.3. *Если 2π периодическая функция f k раз непрерывно дифференцируема, то ряд Фурье f на $[0, 2\pi]$ сходится к f абсолютно и равномерно, причем*

$$\sup |f(x) - S_n(x)| \leqslant \frac{\gamma_n}{n^{k-1/2}}, \quad \gamma_n \to 0.$$

Доказательство. Поточечная сходимость очевидна. Равномерная сходимость следует из оценки

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \Big[m^{-k}|\alpha_m||\cos(mx)| + m^{-k}|\alpha_m||\sin(mx)|\Big] \leqslant \Big(\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{-2k}\Big)^{1/2} \Big(\sum_{m=n+1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|)^2\Big)^{1/2}.$$

□

22. Преобразование Фурье быстро убывающих функций.

Выражение

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy}\, dx$$

называется *преобразованием Фурье* функции f. Для существования преобразования Фурье достаточно абсолютной интегрируемости f на $\mathbb{R}$. Однако далее мы обсуждаем лишь преобразование Фурье быстро убывающих функций. Обозначим через S множество гладких функций f (со значениями в $\mathbb{C}$) таких, что для всяких m, k

$$\sup_{\mathbb{R}} (1 + |x|^k)|f^{(m)}(x)| < \infty.$$

Множество S называют пространством быстро убывающих функций.

Выражение

$$\check{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dx$$

называют *обратным преобразованием Фурье.*

Теорема 22.1. *Пусть $f, g \in S$. Тогда*

(i) $\widehat{f'}(y) = iy\widehat{f}(y)$,

(ii) $\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\widehat{f} \cdot \widehat{g}$,

(iii) $\check{\widehat{f}} = f$,

(iv) *преобразование Фурье $e^{-x^2/2}$ равно $e^{-x^2/2}$.*

Теорема 22.2. *Преобразование Фурье является изометрией евклидова пространства S со скалярным произведением*

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

В качестве иллюстрации к преобразованию Фурье и рядам Фурье приведем классическую *формулу Пуассона.*

Для быстро убывающих функций f имеет место равенство:

$$\sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{inx}.$$

Эта формула верна и при более слабых условиях на f, в частности для функции $f(x) = (a^2+x^2)^{-1}$, где $a > 0$. Преобразование Фурье функции $(a^2+x^2)^{-1}$ равно

$$\sqrt{\frac{\pi}{2a^2}}e^{-|ax|}.$$

Следовательно, по формуле суммирования Пуассона при $x = 0$

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{a^2} + 2\sqrt{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^2+(2\pi n)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2a^2}} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2a^2}}e^{-an}.$$

Получаем равенство

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^2+(2\pi n)^2} = \frac{1}{4a} - \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a}\frac{e^{-a}}{1-e^{-a}}.$$

Если в этом равенстве устремить $a \to 0$, то получим $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Литература

1. Зорич В.А.Математический анализ. – М.:МЦНМО,2007.
2. Фихтенгольц Г.М.Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.:Наука, 1969.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.:МГУ,Наука, 2004.
4. Ландо С.К. Лекции о производящих функциях. – М.:МЦНМО, 2007.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА