# АЛГЕБрА-3
# спИсоК ЗАДАч

Ю.Г. ПРОХОРОВ

## Содержание



## 1. Прямые произведения групп, нормальные подгруппы. Факторгруппы

1.1. Разлагаются ли в нетривиальное прямое произведение группы $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$?

1.2. Когда группа диэдра $D_n$ представляется нетривиальным образом в виде прямого произведения?

1.3. Можно ли представить нетривиальным образом в виде прямого произведения группы
   (a) кватернионов $Q_8$,
   (b) четных подстановок $A_4$,
   (c) симметрическую группу $S_4$?

1.4. Докажите, что $S_n$ не представляется нетривиальным образом в виде прямого произведения.

1.5. Сколько элементов порядка 4 в группе $(Q_8 \times Q_8)/\{(1,1),(-1,-1)\}$? Сколько элементов порядка 2 в этой группе? Ответ обоснуйте.

1.6. Сколько элементов порядка 4 в группе $(D_4 \times D_4)/\{(E,E),(-E,-E)\}$? Сколько элементов порядка 2 в этой группе? Ответ обоснуйте.

1.7. Сколько элементов порядка 4 в группе $(Q_8 \times D_4)/\{(1,E),(-1,-E)\}$? Сколько элементов порядка 2 в этой группе? Ответ обоснуйте.

1.8. Найдите все нормальные подгруппы в группе $S_3 \times \mathbb{Z}_n$.

1.9. Найдите все нормальные подгруппы в группе $S_3 \times S_3$.

1.10. Найдите все нормальные подгруппы в группе диэдра $D_4$.

1.11. Найдите все нормальные подгруппы в группе $D_4 \times D_4$.

1.12. Найдите все нормальные подгруппы в группе $D_4 \times S_3$.

1.13. Найдите все нормальные подгруппы в группе диэдра $D_n$.

1.14. Пусть $G$ – конечная группа и пусть $p$ – наименьшее простое, делящее порядок $G$. Предположим, что существует подгруппа $H \subset G$ индекса $p$. Докажите, что она нормальна.

## 2. Абелевы группы

2.1. Пусть в группе $G$ каждый неединичный элемент имеет порядок 2.
   (a) Докажите, что $G$ абелева.
   (b) Рассмотрим $G$ в аддитивной записи. Докажите, что на $G$ ввести структуру векторного пространства над полем $\mathbb{Z}_2$.
   (c) Предположим, что $G$ конечна. Используя предыдущий пункт, доказать, что группа $G$ изоморфна прямой сумме групп $\mathbb{Z}_2$.

2.2. Докажите, что мультипликативная и аддитивная группы поля не могут быть изоморфны.

2.3. Пусть $\Bbbk$ – поле. Пусть $\Bbbk$ и $\Bbbk^*$ – его мультипликативная и аддитивная группы, соответственно.
   (a) Когда $\Bbbk^*$ – циклическая?
   (b) Когда $\Bbbk$ – циклическая?
   (c) Когда $\Bbbk^*$ конечно порождена?
   (d) Когда $\Bbbk$ конечно порождена?

2.4. Пусть $U$ – подгруппа, состоящая из всех элементов конечного порядка в группе $\mathbb{C}^*$. Является ли $U$ конечно порожденной?

2.5. Разложите группу $\mathbb{Z}_{2^n}^*$ в прямое произведение примарных циклических.

2.6. Пусть $A$ – конечная абелева $p$-группа и пусть $a \in A$ – элемент максимального порядка. Докажите, что подгруппа $\langle a \rangle$ выделяется прямым слагаемым.

## 3. Автоморфизмы групп. Центры групп

3.1. Докажите, что *любая* группа порядка $> 2$ имеет нетривиальный изоморфизм.

3.2. Докажите, что группа внутренних автоморфизмов группы $G$ изоморфна фактору $G$ по ее центру.

3.3. Докажите, что при $n \neq 6$ группа автоморфизмов группы $S_n$ изоморфна $S_n$.

3.4. Докажите, что группа автоморфизмов неабелевой группы не может быть циклической.

3.5. Пусть $\Bbbk$ – поле. Найдите центры групп $GL_n(\Bbbk)$ и $SL_n(\Bbbk)$.

3.6. Докажите, что группа автоморфизмов группы $\underbrace{\mathbb{Z}_p \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p}_{n}$ изоморфна $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ ($p$ – простое).

3.7. Докажите, что группа автоморфизмов группы $\mathbb{Z}_n$ изоморфна $\mathbb{Z}_n^*$.

3.8. Докажите, что группа автоморфизмов неабелевой группы не может быть циклической. Может ли она быть абелевой?

3.9. Найдите группу автоморфизмов следующих групп: a) $S_3$, b) $D_4$, c) $D_n$, d) $Q_8$.

3.10. Докажите, что подгруппа внутренних автоморфизмов $\mathrm{Int}(G)$ нормальна во всей группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G)$.

## 4. Действия групп на множествах

4.1. Пусть конечная группа $G$ транзитивно действует на конечном множестве $M$. Может ли каждый элемент $g \in G$ иметь неподвижную точку?

4.2. Сопряжены ли в $S_6$ следующие подгруппы

$$\begin{aligned} H_1 &= \langle (1,2,3), \quad (4,5,6), \quad (1,2)(4,5)\rangle, \\ H_2 &= \langle (1,2,3), \quad (4,5,6), \quad (4,5)\rangle, \\ H_3 &= \langle (1,2,3), \quad (4,5,6), \quad (1,4)(2,5)(3,6)\rangle ? \end{aligned}$$

Ответ: Нет. Порядки всех групп равны 18.

4.3. Сопряжены ли в $S_6$ следующие подгруппы

$$\begin{aligned} H_1 &= \langle (1,2,3), \quad (4,5,6), \quad (1,2)(4,5), \quad (4,5)\rangle \\ H_2 &= \langle (1,2,3), \quad (4,5,6), \quad (1,2)(4,5), \quad (1,4)(2,5)(3,6)\rangle \\ H_3 &= \langle (1,2,3), \quad (4,5,6), \quad (1,2)(4,5), \quad (1,4)(2,5,3,6)\rangle ? \end{aligned}$$

Ответ: Нет, но порядки всех групп равны 36.

4.4. Найдите порядок подгруппы в $S_6$, порожденной подстановками

(a) $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(1,2)(4,5)$ Ответ: 18
(b) $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(4,5)$ Ответ: 18
(c) $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(1,4)(2,5)(3,6)$ Ответ: 18
(d) $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(1,2)(4,5)$, $(4,5)$ Ответ: 36
(e) $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(1,2)(4,5)$, $(1,4)(2,5)(3,6)$ Ответ: 36
(f) $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(1,2)(4,5)$, $(1,4)(2,5,3,6)$ Ответ: 36
(g) $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(1,2)(4,5)$, $(4,5)$, $(1,4)(2,5)(3,6)$ Ответ: 72
(h) $(1,2)(3,6)$, $(2,4,6,3,5)$ Ответ: 60
(i) $(1,2)(3,4)(5,6)$, $(2,4,6,3,5)$ Ответ: 120

4.5. Пусть $\mathbb{F}_q$ – поле из $q$ элементов. Найдите порядки групп $GL_n(\mathbb{F}_q)$ и $SL_n(\mathbb{F}_q)$.

4.6. Пусть $\mathbb{F}_q$ – поле из $q$ элементов. Найдите порядки групп $O_n(\mathbb{F}_q)$ и $SO_n(\mathbb{F}_q)$.

4.7. Построить вложение $D_4 \hookrightarrow S_4$.

4.8. Докажите, что имеют место изоморфизмы

(a) $GL_2(\mathbb{F}_2) \simeq SL_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$;
(b) $SL_2(\mathbb{F}_3) \not\simeq S_4$, $\quad PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4$, $\quad PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq S_4$;
(c) $SL_2(\mathbb{F}_4) \simeq A_5$;
(d) $PSL_2(\mathbb{F}_5) \simeq A_5$;
(e) $SL_3(\mathbb{F}_2) \simeq PSL_2(\mathbb{F}_7)$;
(f) $Sp_4(\mathbb{F}_2) \simeq S_6$;
(g) $PSL_2(\mathbb{F}_9) \simeq A_6$;
(h) $PSL_4(\mathbb{F}_2) \simeq A_8$;
(i) $SU_4(\mathbb{F}_2) \simeq PSp_4(\mathbb{F}_3) \simeq O_5(\mathbb{F}_3)'$.

4.9. Докажите, что все подгруппы в $A_5$, изоморфные $A_4$, сопряжены между собой.

## 5. $p$-группы

5.1. Пусть $G$ – группа порядка $p^3$. Докажите, что любая подгруппа порядка $p^2$ в $G$ нормальна. Верно ли это для подгрупп порядка $p$?

5.2. Пусть $p$-группа $G$ действует на конечном множестве $M$. Обозначим через $M^G \subset M$ множество неподвижных элементов. Докажите, что число элементов в $M$ сравнимо с числом элементов в $M^G$ по модулю $p$.

5.3. Докажите, что в $p$-группе любая нормальная подгруппа нетривиально пересекается с центром.

5.4. Пусть $G$ – $p$-группа и пусть $Z$ – ее центр. Предположим, что $Z$ имеет порядок $p$. Докажите, что $Z$ содержится в любой нетривиальной нормальной подгруппе.

5.5. Пусть $G$ – группа порядка $p^k$. Докажите, что для любого $l \leq k$ существует нормальная подгруппа $N$ в $G$ порядка $p^l$.
5.6. Пусть $G$ – $p$-группа такая, что любая подгруппа в ней нормальна. Докажите, что или $G$ абелева или $p = 2$.

## 6. Коммутант

6.1. Докажите, что коммутант произведения двух групп совпадает с произведением их коммутантов.
6.2. Пусть $G$ – группа всех движений трехмерного куба. Факторгруппу $G/G'$ разложить в прямое произведение примарных циклических.
6.3. Пусть $G = Q_8 \times Q_8/\{\pm 1\}$. Тогда $G' = Z(G)$. Рассмотрим факторгруппу $G/G'$ как векторное пространство $V$ над полем $\mathbb{F}_2$. Отображение взятия коммутанта $[\cdot,\cdot]\colon G \times G \to G' \simeq \mathbb{F}_2$ индуцирует (кососимметричную) билинейную форму $\Psi\colon V \times V \to \mathbb{F}_2$. Это индуцирует гомоморфизм $\operatorname{Aut} G \to Sp_4(\mathbb{F}_2)$. Докажите, что он является вложением.
6.4. Найдите коммутант группы диэдра $D_n$. Чему изоморфна факторгруппа $D_n/D_n'$?
6.5. Найдите коммутант группы кватернионов $Q_8$. Чему изоморфна факторгруппа $Q_8/Q_8'$?
6.6. Чему изоморфна факторгруппа $SL_2(\mathbb{Z})$ по ее коммутанту?

## 7. Централизаторы и нормализаторы

7.1. Чему равен порядок централизатора транспозиции в группе $S_6$. Ответ: 48
7.2. Чему равен порядок централизатора цикла длины $k$ в группе $S_6$.
7.3. Описать классы сопряженных элементов в группе $D_n$.
7.4. Описать классы сопряженных элементов в группе $A_n$ при $n = 4$ и 5.
7.5. Чему равен порядок централизатора подстановки $(i_1, i_2)(i_3, i_4)(i_5, i_6)$ в группе $S_6$. Ответ: 48
7.6. Чему равен порядок централизатора подстановки $(i_1, i_2, i_3)(i_4, i_5, i_6)$ в группе $S_6$. Ответ: 18

## 8. Полупрямые произведения групп

8.1. Докажите, что группа движений аффинного пространства является полупрямым произведением группы параллельных переносов и линейной группы.
8.2. Докажите, что группа $S_4$ разлагается в полупрямое произведение двумя существенно разными способами.
8.3. Докажите существование неабелевой группы порядка $p^3$, используя полупрямое произведение $\mathbb{F}_p^2$ с силовской $p$-подгруппой в $GL_2(\mathbb{F}_p)$.

## 9. Теоремы Силова

9.1. Содержит ли $S_4$ подгруппу, изоморфную группе кватернионов?
9.2. Содержит ли $S_5$ подгруппу, изоморфную группе кватернионов?
9.3. Содержит ли $S_6$ подгруппу, изоморфную группе кватернионов?
9.4. Раскладывается ли силовская 2-подгруппа в $S_6$ в прямое произведение?
9.5. Найдите центр силовской 2-подгруппы в $S_6$.
9.6. Найдите коммутант силовской 2-подгруппы в $S_6$.
9.7. Сколько имеется силовских 2-подгрупп в $S_6$?
9.8. Докажите, что силовская 2-подгруппа в $S_6$ является централизатором некоторого элемента порядка 2.
9.9. Докажите, что каждая подгруппа порядка 48 в $S_6$ содержит ровно три силовские 2-подгруппы.

9.10. Докажите, что все подгруппы порядка 48 в $S_6$ сопряжены.
9.11. Докажите, что нормализатор подгруппы порядка 48 в $S_6$ совпадает с этой подгруппой.
9.12. Описать все силовские подгруппы и их нормализаторы в $\mathfrak{A}_5$.
9.13. Описать все силовские подгруппы и их нормализаторы в $\mathfrak{S}_5$.
9.14. Описать силовские $p$-подгруппы в группе $S_{p^2}$ ($p$ – простое).
9.15. Докажите, что группа порядка $pq^2$, где $p$ и $q$ – простые числа, не может быть простой.
9.16. Докажите, что группа порядка $pq^3$, где $p$ и $q$ – простые числа, не может быть простой.
9.17. Докажите, что группа порядка $pq^k$, где $p$ и $q$ – простые числа, не может быть простой.
9.18. Докажите, что группа порядка $pqr$, где $p$, $q$ и $r$ – простые числа, не может быть простой.
9.19. Докажите, что группа любого из следующих порядков не может быть простой
(a) $36 = 2^2 \cdot 3^2, \quad 48 = 2^4 \cdot 3, \quad 96 = 2^5 \cdot 3, \quad 100 = 2^2 \cdot 5^2, \quad 108 = 2^2 \cdot 3^3,$
(b) $80 = 2^4 \cdot 5, \quad 160 = 2^5 \cdot 5, \quad 112 = 2^4 \cdot 7$
(c) $72 = 2^3 \cdot 3^2, \quad 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7, \quad 156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13, \quad 140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7,$
(d) $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11,$
(e) $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7, \quad 150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$
9.20. Докажите, что группа порядка 144 не может быть простой.
9.21. Докажите, что группа порядка 120 не может быть простой.
9.22. Докажите, что группа порядка 90 не может быть простой.
9.23. Докажите, что простая группа порядка 60 изоморфна $\mathfrak{A}_5$.
9.24. Пусть $G$ – конечная группа такая, что ее силовская 2-подгруппа – циклическая. Докажите, что $G$ не может быть простой.

## 10. Разные задачи

10.1. Имеется ли в $A_5$ подгруппа порядка 10?
10.2. Имеется ли в $A_5$ подгруппа порядка 6?
10.3. Докажите, что подгруппа в $S_4$, порожденная подстановками (1234) и (13) изоморфна группе диэдра $D_4$.
10.4. Пусть $\Bbbk$ – поле. Могут ли быть изоморфными его мультипликативная $\Bbbk^*$ и аддитивная $\Bbbk$ группы?
10.5. Найдите все нетривиальные центральные расширения $A_4$ при помощи $\mathbb{Z}_2$. Ответ: $A_4 \times \boldsymbol{\mu}_2$, $SL_2(\mathbb{Z}_3)$ Указание: Ясно, что группы $A_4 \times \boldsymbol{\mu}_2$ и $SL_2(\mathbb{Z}_3)$ удовлетворяют условиям. Докажем, других возможностей нет. Пусть $Z := Z(G)$ и пусть $\varphi\colon G \to G/Z \simeq A_4$ – морфизм факторизации. Предположим, что $G \not\simeq A_4 \times \boldsymbol{\mu}_2$. Тогда $G$ не содержит подгрупп порядка 12. Более того, любая нормальная подгруппа $N \subset G$ имеет вид $N = \{1\}$, $Z$, $\varphi^{-1}(V_4)$, $G$. Действительно, $\varphi(N) = \{1\}$, $V_4$ или $A_4$. Если $N \supset Z$, мы получаем один из случаев выше. Если же $N \not\supset Z$, то имеем единственную возможность: $|N| = 4$ и $\varphi(N) = V_4$. Пусть $g \in G$ – элемент порядка 3. Согласно сказанному выше, $N$ и $g$ порождают всю группу $G$. С другой стороны, тогда $G/N$ – циклическая группа группа порядка 3, противоречие. Это доказывает наше утверждение. В частности имеем $|G'| = 8$ и $G' \supset Z$ Тогда группа $G$ имеет ровно три одномерных комплексных представления $\chi_1 = 1$, $\chi_2$, $\chi_3$ (все они тривиальны на $Z$). Учитывая, что $G$ имеет неприводимое трехмерное представления, из разложения 24 в сумму квадратов получаем, что у $G$ имеется три неприводимых двумерных представления $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$. Так как $\operatorname{Ker}\rho_i$ не может содержать $Z$, то все представления $\rho_i$ – точные. Ясно, что $\det\rho_i$ являются одномерными представлениями, а $\chi_i\rho_k$ – неприводимыми двумерными. Более того, $\det(\chi_i\rho_k) = \chi_i^2\rho_k$. Поэтому мы можем считать, что $\det\rho_1 = 1$ и $\rho_k = \chi_k\rho_1$. Таким образом, с точностью до сопряженности в $SL_2(\mathbb{C})$ имеется ровно одно вложение

$\rho_1\colon G \hookrightarrow SL_2(\mathbb{C})$. По лемме Шура образ $Z$ – скалярные матрицы $\pm E$. Вводя инвариантную эрмитову форму, мы также можем считать, что $\rho_1(G) \subset SU_2(\mathbb{C})$. Рассмотрим гомоморфизм $\psi\colon SU_2(\mathbb{C}) \to SO_3(\mathbb{R})$. Имеем $\psi\rho_1(G) \simeq G/Z \simeq A_4$. Так как группа $A_4$ имеет ровно одно точное трехмерное представление, то для образа $G_0 := \psi\rho_1(G)$ имеется только одна возможность (с точностью до сопряженности в $SO_3(\mathbb{R})$) Следовательно, только одна возможность имеется и для $\rho_1(G) = \psi^{-1}(G_0)$. Утверждение доказано.

10.6. Найдите все нетривиальные центральные расширения $S_4$ при помощи $\mathbb{Z}_2$. Ответ: $S_4 \times \boldsymbol{\mu}_2$, $GL_2(\mathbb{Z}_3)$, группа октаэдра Указание: Пусть $Z := Z(G)$ и пусть $\varphi\colon G \to G/Z \simeq S_4$ – морфизм факторизации. Предположим, что $G \not\simeq S_4 \times \boldsymbol{\mu}_2$. Так как $\varphi(G') = A_4$, то $|G/G'| = 4$ или 2. Если $|G/G'| = 2$, то $G' \supset Z$ и $G$ имеет ровно два одномерных комплексных представления (оба тривиальны на $Z$). Если $|G/G'| = 4$, то $G' \simeq A_4$, $G' \not\supset Z$ и $G$ имеет ровно четыре одномерных комплексных представления (два из них тривиальны на $Z$). В обоих случаях из разложения в сумму квадратов получаем, что $G$ имеет по крайней мере одно неприводимое двумерное комплексное представление $\rho$ нетривиальное на $Z$. Пусть $N := \operatorname{Ker}\rho$. Так как $G/N$ – неабелева группа, то $|N| \le 8$ и для $\varphi(N)$ имеются следующие возможности: $\{1\}$ и $V_4$. Получаем, что имеется один из следующих случаев: $N = \{1\}$ или $N \simeq V_4$.

10.7. Найдите все нетривиальные центральные расширения $A_5$ при помощи $\mathbb{Z}_2$. Указание: Пусть $G$ – такое расширение. Используя простоту $A_5$, из разложения в сумму квадратов получаем, что $G$ имеет точное двумерное представление. Следовательно, имеется вложение $G \hookrightarrow SU(2)$. Образом $G$ при гомоморфизме $\Phi\colon SU(2) \to SO(3,\mathbb{R})$ будет группа, изоморфная $A_5$. Так как все подгруппы в $SO(3,\mathbb{R})$, изоморфные $A_5$, сопряжены, то с точностью до изоморфизма группа $G$ единственна. С другой стороны, $\Phi^{-1}(G)$ – нетривиальное расширение $A_5$, поскольку $A_5$ не имеет точных двумерных представлений.

10.8. Доказать простоту группы вращений икосаэдра (не используя изоморфизма с $A_5$).

10.9. Докажите, что группа, состоящая из кватернионов нормы 1, изоморфна группе $SU_2(\mathbb{C})$.

10.10. Описать все конечные подгруппы в мультипликативной группе тела кватернионов $\mathbb{H}$.

## 11. Представления

11.1. Докажите, что группа порядка $p^3$ ($p$ – нечетное простое) не имеет точных неприводимых комплексных двумерных представлений.

11.2. Докажите, что конечная 2-группа $G \subset GL_3(\mathbb{Q})$ имеет общий собственный вектор.

11.3. Пусть $\rho$ – неприводимое трехмерное представление группы $A_5$. Рассмотрим его ограничение на подгруппу $A_4$. Будет ли это представление неприводимым?

11.4. Пусть $\rho$ – комплексное представление конечной группы и пусть $\chi_\rho$ – его характер. Докажите, что если $\chi_\rho$ – рациональное число, то оно – целое.

11.5. Опишите (с точностью до сопряжения) все конечные подгруппы в $GL_2(\mathbb{Z})$.

11.6. Пусть $G$ – конечная группа такая, что ее любое неприводимое комплексное представление одномерно. Докажите, что $G$ абелева.

11.7. Могут ли размерности неприводимых комплексных представлений конечной группы быть следующими:

(a) * $1, 1, 1, 1, 1, 5$;

11.8. Докажите, что группа $SL_2(\mathbb{Z})$ не является нетривиальным прямым произведением. Указание: Пусть $SL_2(\mathbb{Z}) = G_1 \times G_2$. Мы можем считать, что $G_1$ неабелева. Тогда представление $\rho\colon G_1 \to SL_2(\mathbb{Z})$ неприводимо. По лемме Шура $G_2$ абелева и состоит из скалярных матриц. Следовательно, $G_2 = \{\pm E\}$. Рассмотрим элемент $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ясно, что $\pm A \in G_1$. С другой стороны, $(\pm A)^2 = -E \in G_2$. Противоречие.

## 12. Кольца

12.1. Пусть $n = n_1 n_2$, где НОД $(n_1, n_2) = 1$. Докажите, что $\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2}$.

12.2. Приведите пример области целостности, в которой процесс разложения на простые множители не обрывается.

12.3. Докажите, что кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ не факториально.

12.4. Пусть $G = V_4$ – группа Клейна. В групповом кольце $\mathbb{C}[G]$
- (a) найдите все идеалы;
- (b) найдите все делители нуля;
- (c) найдите все обратимые элементы.

12.5. Рассмотрим алгебру $\mathbb{R}^3$ умножение на которой – векторное умножение. Докажите, что эта алгебра проста.

12.6. Докажите простоту алгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Изоморфна ли она $\mathbb{R}^3$ с векторным умножением.

12.7. Докажите, что в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ элемент 6 разлагается на простые множители двумя, существенно различными способами.

12.8. Докажите, что кольцо целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$ евклидово.

12.9. Пусть $\omega$ – первообразный корень степени 3 из 1. Докажите, что кольцо $\mathbb{Z}[\omega]$ евклидово.

12.10. Пусть $\epsilon$ – первообразный корень степени 5 из 1. Докажите, что кольцо $\mathbb{Z}[\epsilon]$ евклидово.

12.11. Докажите, что $\mathbb{Z}_n$ – кольцо главных идеалов.

12.12. Докажите, что кольцо формальных степенных рядов $\Bbbk[x]$ над полем – кольцо главных идеалов.

12.13. Представим сумму $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}$ в виде несократимой дроби $\frac{n}{m}$. Докажите, что если $p$ – простое, то $n$ делится на $p$.

12.14. Опишите все простые идеалы в кольце многочленов от двух переменных над алгебраически замкнутым полем.

12.15. Привести пример ассоциативного коммутативного кольца с единицей и без делителей нуля, в котором процесс разложения в произведения необратимых сомножителей не обрывается.

12.16. Может ли идеал $(x^2, xy^2, y^4)$ в кольце $k[x, y]$ быть порожден двумя элементами?

12.17. Пусть $k$ – поле. Чему изоморфно факторкольцо кольца многочленов $k[x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots]$ (от бесконечного числа переменных) по идеалу порожденному $x_1 - x_2y_2$, $x_2 - x_3y_3$, ...

12.18. Пусть $k$ – алгебраически замкнутое поле, характеристика которого отлична от 2. Рассмотрим факторкольцо $R := k[x, y]/(y^2 - x^3 + x)$. Докажите, что в кольце $R$ нет делителей нуля. Докажите, что обратимые элементы кольца $R$ – в точности ненулевые элементы $k$. Докажите, что в кольце $R$ разложение в произведение неприводимых множителей неоднозначно.

9.20. Имеем $144 = 16 \cdot 9$, $\#G_3 = 16$, $\#G_2 = 9$. Пусть $a \in G_3$, $a \neq 1$. Тогда $Z(a) \supset G_3^{(i)}$ для любой силовской подгруппы $G_3^{(i)}$, содержащей $a$. С другой стороны, $|\operatorname{Orb}(a)| \geq 5$. Отсюда $Z(a) = G_3$ или $G_3$ – подгруппа индекса 2 в $Z(a)$. Но это означает, что $a$ содержится в единственной силовской подгруппе. Тогда число элементов порядка 3 и 9 равно $8 \cdot 16 = 128$ и тогда подгруппа порядка 16 – единственная.

9.21. Имеем $120 = 8 \cdot 3 \cdot 5$, $\#G_5 = 6$. Поэтому имеется вложение $G \hookrightarrow S_6$. Рассматривая гомоморфизм знака, получим вложение $G \hookrightarrow A_6$. Здесь индекс группы равен 3. Действие на левых смежных классах дает гомоморфизм $G \to S_3$, который должен быть тривиален. Но это означает, что группа $G$ является нормальной в $A_6$. Противоречие.

9.11. Положим $G = S_6$ и пусть $H \subset G$ – группа порядка 48. Тогда $G_2$ изоморфна $\{\pm 1\} \times D_4$ и вкладывается в некоторое $\{1, \sigma\} \times S_4$, где $\sigma$ – некоторая транспозиция. Количество таких подгрупп – $3 \cdot 15 = 45$ и поэтому $G_2$ совпадает со своим нормализатором. Далее $G_2 = H_2$ (при подходящем выборе $G_2$). Если $H_2$ нормальна в $H$, то $H = N_H(H_2) \subset N_G(H_2)$. Противоречие. Следовательно, $H$ содержит ровно 3 силовских 2-подгруппы и $N_H(H_2) = N_G(H_2) = H_2$. Пусть $H_2$, $H_2'$, $H_2''$ – эти подгруппы. Тогда $H_2$ действует сопряжениями на $H_2'$, $H_2''$. Следовательно, существует подгруппа $Q \subset H_2$ индекса 2, оставляющая неподвижными $H_2'$ и $H_2''$. Такая подгруппа содержится в нормализаторах подгрупп $H_2$, $H_2'$, $H_2''$ и поэтому $Q = H_2 \cap H_2' \cap H_2''$. Таким образом, $Q \lhd H$ и $H/Q \simeq S_3$. Далее $Q \subset H_2 \simeq D_4 \times \{\pm 1\}$.

Мы утверждаем, что центр группы $H$ нетривиален и содержит элемент порядка 2. Это очевидно, если группа $Q$ неабелева (тогда $\mathbb{Z}_2 \simeq Z(Q) = Z(H_2)$). Если $Q \simeq \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$, то $Q$ сопряжена??? подгруппе $\langle (1,2), (3,4,5,6) \rangle$. Но тогда нормализатор $Q$ имеет порядок 16. Противоречие. Наконец, пусть $Q \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Тогда $Q$ сопряжена??? подгруппе $\langle (1,2), (3,4), (5,6) \rangle$ и элемент $(1,2)(3,4)(5,6)$ принадлежит центру $H = N(Q)$. Это доказывает утверждение.

Таким образом, $H$ содержится в централизаторе $Z(\sigma)$ некоторого элемента $\sigma$ порядка 2. Несложно вычислить, что тогда $H = Z(\sigma)$ и центр $H$ порождается $\sigma$. Более того, элемент $\sigma$ должен быть нечетным (иначе порядок $Z(\sigma)$ равен 16). Поэтому группа $H$ однозначно определяется нечетным элементом порядка 2. Имеется ровно 30 таких подгрупп.