

Вопросы к экзамену по алгебре
осень 2018, группы 107–112, лектор И.В.Аржанцев

1. Системы линейных уравнений, матрица коэффициентов и расширенная матрица системы, совместные и определенные системы, однородные системы, эквивалентные системы, три типа элементарных преобразований, лидер строки, ступенчатые и верхнетреугольные матрицы.
2. Алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду. Улучшенный ступенчатый вид. Обратимость элементарных преобразований. Экзотические уравнения и критерий совместности. Строго ступенчатые матрицы и критерий определенности. Системы, где число уравнений меньше числа неизвестных.
3. Арифметическое векторное пространство. Линейная комбинация. Линейная зависимость и независимость. Подпространство. Линейная оболочка. Порождающее множество для подпространства.
4. Основная лемма о линейной зависимости.
5. Базис подпространства арифметического векторного пространства. Стандартный базис в \mathbb{R}^n . Дополнение линейно независимого набора до базиса. Размерность: корректность определения и свойства.
6. Множество решений системы является подпространством тогда и только тогда, когда система однородна. Фундаментальная система решений (ФСР). Размерность пространства решений равна числу свободных неизвестных. Алгоритм нахождения ФСР.
7. Множество решений системы является линейным подмножеством.
8. Ранг и база конечной системы векторов. Эквивалентные системы векторов. Неизменность ранга при элементарных преобразованиях.
9. Строчный и столбцовый ранги матрицы. Элементарные преобразования строк не изменяют линейных соотношений между столбцами. Совпадение строчного и столбцового рангов. Алгоритм нахождения базы.
10. Размерность пространства решений однородной системы равна $n - \text{rk } A$.
11. Любое линейное подмножество есть множество решений некоторой системы.
12. Теорема Кронекера-Капелли и критерий определенности системы в терминах рангов.
13. Сложение матриц и умножение матрицы на скаляр. Умножение матриц. Ассоциативность, дистрибутивность, отсутствие коммутативности. Умножение на диагональную матрицу. Скалярные матрицы.
14. Транспонирование и его свойства. След матрицы. Матричные единицы и символы Кронекера. Единичная матрица.
15. Элементарные матрицы. Обратная матрица. Алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований. Матрица обратима тогда и только тогда, когда она невырождена.
16. Ранг произведения матриц.
17. Подстановки, их количество. Умножение подстановок. Ассоциативность. Единичная и обратная подстановки. Разложение подстановки в произведение независимых циклов.
18. Транспозиции. Разложение подстановки в произведение транспозиций. Инверсия. Четность подстановки. Изменение четности при умножении на транспозицию. Число четных подстановок равно числу нечетных. Знак подстановки. Знак произведения. Четность обратной подстановки.
19. Определитель матрицы. Определитель верхнетреугольной матрицы. Свойства определителя: полилинейность, кососимметричность, поведение при транспонировании и при элементарных преобразованиях.
20. Матрицы с ненулевым определителем. Определитель как полилинейная кососимметрическая нормированная функция.
21. Определитель с углом нулей.
22. Определитель Вандермонда.
23. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке и по столбцу. Фальшивое разложение. Присоединенная матрица. Формула для обратной матрицы.
24. Определитель произведения матриц.
25. Теорема Крамера и формулы Крамера.
26. Теорема о ранге матрицы.

27. Полугруппа, моноид, группа и абелева группа. Мультипликативная и аддитивная формы записи. Примеры групп.
28. Кольцо. Обратимые элементы, делители нуля и нильпотенты. Кольцо вычетов.
29. Поле. Кольца вычетов, являющиеся полями. Характеристика поля. Малая теорема Ферма.
30. Поле комплексных чисел. Алгебраическая форма записи. Сопряжение и его свойства.
31. Комплексная плоскость и тригонометрическая форма записи. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.
32. Извлечение корней из комплексных чисел. Корни из единицы. Первообразные корни.
33. Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Степень многочлена. Формальное и функциональное равенство многочленов.
34. Задача интерполяции. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
35. Теорема о делении с остатком для многочленов. Теорема Безу. Кратность корня. Формальная производная многочлена. Формула Тейлора.
36. Понижение кратности корня при дифференцировании. Число корней многочлена с учетом кратности не превосходит степени.
37. Область целостности и евклидово кольцо. Алгоритм Евклида. НОД и его существование. Лемма о линейном представлении НОД. Взаимно простые элементы.
38. Однозначность разложения на простые множители в евклидовых кольцах.
39. Отделение кратных корней многочлена.
40. Лемма о возрастании модуля. Лемма Даламбера.
41. Доказательство основной теоремы алгебры. Алгебраически замкнутое поле.
42. Неприводимые многочлены над \mathbb{C} и \mathbb{R} . Рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами.
43. Теорема Декарта.
44. Поле частных области целостности. Рациональные дроби, правильные дроби и простейшие дроби.
45. Разложение правильной дроби в сумму простейших (без доказательства единственности).
46. Многочлены от многих переменных. Лексикографический порядок. Лемма о старшем члене.
47. Симметрические многочлены. Элементарные симметрические многочлены и степенные суммы. Основная теорема о симметрических многочленах.
48. Теорема Виета.
49. Дискриминант многочлена.
50. Результант двух многочленов. Связь с дискриминантом.
51. Группы и подгруппы. Гомоморфизмы, изоморфизмы, эндоморфизмы и автоморфизмы групп. Ядро и образ гомоморфизма. Порядок группы. Группы подстановок и группы матриц.
52. Порядок элемента. Циклическая подгруппа. Циклическая группа. Классификация циклических групп с точностью до изоморфизма.
53. Подгруппы циклических групп.
54. Смежные классы. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа и ее следствия.