



ФИЗИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# ТЕОРИЯ ВОЛН

## ЧАСТЬ 2

ЦЫСАРЬ  
СЕРГЕЙ АЛЕКСЕЕВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН  
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ  
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ  
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.  
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ  
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ  
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,  
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,  
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ  
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА  
ВЫПУСКНИКА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ  
**АЛЕШИНУ МАРИЮ АНДРЕЕВНУ**



## Содержание

<b>Лекция 1. Нелинейные волны. Уравнение простых волн</b>	<b>5</b>
Получение уравнения простых волн из уравнений гидродинамики помощью инвариантов Римана.....	5
Решение уравнения простых волн произвольной амплитуды методом характеристик.....	7
<b>Лекция 2. Уравнение простых волн при малых числах Маха</b>	<b>9</b>
Уравнение простых волн для адиабатического уравнения состояния.....	9
Уравнение простых волн при малых числах Маха.....	10
Графический анализ решения уравнения простых волн при малых числах Маха.....	11
О сохранении энергии и количества движения для уравнения простых волн при малых числах Маха.....	13
<b>Лекция 3. Уравнение Кортевега-де Фриза</b>	<b>15</b>
Нелинейные акустические волны в среде со слабой дисперсией. Уравнение Кортевега – де – Фриза.....	15
О сохранении энергии и количества движения в среде.....	15
Стационарное решение уравнения Кортевега – де – Фриза в виде солитона....	16
<b>Лекция 4. Взаимодействие двух волн в среде с квадратичной нелинейностью</b>	<b>18</b>
Взаимодействие двух волн в среде с квадратичной нелинейностью. Генерация второй гармоники.....	18
Укороченное уравнение при генерации второй гармоники.....	18
Генерация второй гармоники при приближении заданного поля.....	21
<b>Лекция 5. Соотношения Мэнли-Роу</b>	<b>22</b>
Взаимодействие трех волн в среде с квадратичной нелинейностью. Соотношения Мэнли – Роу.....	22
Укороченные уравнения для случая трехчастотного взаимодействия.....	22
Соотношения Мэнли - Роу.....	23
<b>Лекция 6. Низкочастотные и высокочастотные волны накачки</b>	<b>25</b>
Предел изменения $N_j$ при трехчастотном взаимодействии.....	25
Решение укороченных уравнений комплексных амплитуд в случае низкочастотной волны накачки.....	26
Решение укороченных уравнений комплексных амплитуд в случае высокочастотной волны накачки.....	27
<b>Лекция 7. Условие фазового синхронизма</b>	<b>29</b>

---

Соотношение $L_{\text{ког}}$ и $L_{\text{нелин}}$ при ПЗП.....	29
Сильное взаимодействие при генерации второй гармоники.....	30
<b>Лекция 8. Взаимодействие ВП в среде с квадратичной нелинейностью</b>	<b>33</b>
Взаимодействие волновых пакетов в среде с квадратичной нелинейностью.	
Укороченные уравнения для огибающих волновых пакетов.....	33
Генерация волнового пакета второй гармоники.....	34
Примеры.....	36
<b>Лекция 9. Волновые явления в средах с кубичной нелинейностью. Часть 1</b>	<b>38</b>
Волновые явления в средах с кубичной нелинейностью-1.....	38
Самовоздействие волн в средах с кубичной нелинейностью.....	38
Нелинейная дисперсия без учета поглощения.....	39
Самовоздействие волновых пучков. Самофокусировка (дефокусировка) в тонком нелинейном слое.....	39
<b>Лекция 10. Волновые явления в средах с кубичной нелинейностью. Часть 2</b>	<b>41</b>
Нахождение фокусного расстояния для распространяющегося в среде с кубической нелинейностью волнового пучка с частотой $\omega$ .....	41
Самофокусировка в «толстом» нелинейном слое.....	43
Самофокусировка (дефокусировка) в среде с кубической нелинейностью.....	44

## Лекция 1. Нелинейные волны. Уравнение простых волн

### Получение уравнения простых волн из уравнений гидродинамики с помощью инвариантов Римана

В нелинейной среде не выполняется принцип суперпозиции: сумма откликов на единичное возмущение не равна суммарному отклику на все возмущения.

Рассмотрим одномерную идеальную среду ( $\vec{u} = (u, 0, 0)$ ). Запишем уравнения гидродинамики:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \text{ (уравнение непрерывности)} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \text{ (уравнение движения (Эйлера))} \\ p = p(\rho) \text{ (уравнение состояния)} \end{array} \right. \quad (1)$$

Данная система уравнений необходима для получения и рассмотрения простых волн в самом простом случае. Нелинейности  $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}$  и  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  называют геометрическими. Они получены из законов сохранения масс и уравнения движения. Нелинейность  $p(\rho)$  называется физической. Она складывается из термодинамического закона, связывающего макропараметры: плотность и давление.

Слово «инвариант» означает, что это некие функции, связывающие набор параметров возмущений, сохраняющие при каких-то условиях.

Введем дополнительную вспомогательную функцию:

$$\sigma(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{c}{\rho} d\rho - \text{функция Римана, } \left[ \frac{M}{C} \right] \quad (2)$$

где  $c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$ .

Смысл функции Римана – это поправка к скорости распространения волны.

Заметим, что

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Введем  $\sigma(\rho)$  в уравнения гидродинамики:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ p = p(\rho) \end{array} \right.$$

Подставим функцию  $\sigma(\rho)$ :

$$\begin{cases} \frac{\rho}{c} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u\rho}{c} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{c^2 \rho}{\rho c} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ p = p(\rho) \end{cases}$$

Приведем первое и второе уравнения к одной размерности. Умножим первое уравнение на  $c$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \quad (a) \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \quad (b) \\ p = p(\rho) \end{cases}$$

Получим линейную комбинацию первых двух уравнений:  $(a) \pm (b)$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial I_+}{\partial t} + (c + u) \frac{\partial I_+}{\partial x} = 0 \quad (c) \\ \frac{\partial I_-}{\partial t} - (c - u) \frac{\partial I_-}{\partial x} = 0 \quad (d) \\ p = p(\rho) \end{cases} \quad (3)$$

где  $I_+ = u + \sigma$ ,  $I_- = u - \sigma$ .

Уравнение (c) имеет вид переноса для конструкции, распространяющейся в правую сторону. Уравнение (d) – для конструкции, распространяющейся в левую сторону.

$I_+$  и  $I_-$  – инварианты Римана.

$I_+$  – функция  $(x, t)$ , распространяющаяся вправо по оси  $x$ .

$I_-$  – функция  $(x, t)$ , распространяющаяся влево по оси  $x$ .

Рассмотрим возмущение, распространяющееся вправо (нет волны, бегущей влево). Уравнение

$$\frac{\partial I_-}{\partial t} - (c - u) \frac{\partial I_-}{\partial x} = 0$$

выполняется для любой точки пространства в любой момент времени, то есть тождественно равно нулю. Это возможно, когда величина, соответствующая конструкции, бегущей влево, будет обращать это уравнение в тождество. То есть

$I_- = const$ .

**Простые волны** – это возмущения, распространяющиеся в нелинейной среде только в одну сторону.

Следствие: для простой волны три параметра  $p, \rho, u$  могут быть выражены через один из них. В случае, когда присутствуют волны, бегущие и вправо и влево, такие волны называются составными.

Рассмотрим простую волну, бегущую вправо ( $I_- = const = u - \sigma \Rightarrow \sigma = \sigma(u)$ ).

$$\frac{\partial I_+}{\partial t} + (c + u) \frac{\partial I_+}{\partial x} = 0$$
$$I_+ = u + \sigma(u) \Rightarrow I_+ = I_+(u)$$

Получим:

$$\frac{\partial I_+}{\partial t} = \frac{\partial I_+}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial I_+}{\partial x} = \frac{\partial I_+}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

↓

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad - \quad (4)$$

уравнение простых волн произвольной амплитуды

## Решение уравнения простых волн произвольной амплитуды методом характеристик

Уравнение простых волн произвольной амплитуды

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Метод характеристик – это метод получения общего решения дифференциального уравнения с помощью выделения характеристик (семейство параметрических областей параметров, по которым мы можем перебирать решения, удовлетворяющие заданному уравнению).

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{V} = \frac{du}{0}$$

↓

$$\frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow u = C_1$$

$$dt = \frac{dx}{V} \Rightarrow t - \frac{x}{V} = C_2$$

7

Мы нашли две характеристики, которые образованы набором всех возможных значений  $C_1$  и  $C_2$ . Конструируем общее решение в виде функции:

$$u = F(C_1, C_2) = F\left(u, t - \frac{x}{V(u)}\right) = \Phi\left(t - \frac{x}{V(u)}\right) \quad (5)$$

Обозначим  $t - \frac{x}{V(u)} = \xi$ , где  $\Phi(\xi) = u$  – профиль на входе в среду.

Убедимся, что это действительно решение  $\Phi(\xi)$ .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d\Phi}{d\xi} \left[ 1 - \frac{x}{V^2} \frac{dV}{du} \frac{\partial u}{\partial t} \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\Phi}{d\xi} \left[ -\frac{1}{V} + \frac{x}{V^2} \frac{dV}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \right]$$

Подставим в исходное уравнение (4) и приводим подобные слагаемые:

$$\frac{d\Phi}{d\xi} \left[ 1 + \frac{x}{V^2} \frac{dV}{du} \frac{\partial u}{\partial t} - 1 + \frac{x}{V} \frac{dV}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{d\Phi}{d\xi} \frac{dV}{du} \frac{x}{V} \left[ \frac{1}{V} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0$$

при  $d\Phi/d\xi = 0$  (тривиальное решение); при  $dV/du = 0$  ( $V(u) = \text{const}$ );

⇓

$$\frac{1}{V} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$



## Лекция 2. Уравнение простых волн при малых числах Маха

### Уравнение простых волн для адиабатического уравнения состояния

Уравнение адиабаты:

$$p(\rho) = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (6)$$

$$c(\rho) = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1}} = c_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

$\gamma$  – показатель адиабаты.  $\gamma = C_p/C_v$ .

Рассмотрим простую волну, бегущую вправо.

$$u(\rho) = \text{const} + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c}{\rho} d\rho = \text{const} + c_0 \int_{\rho_0}^{\rho} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} d\left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) = \text{const} + \frac{2c_0}{\gamma-1} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1 \right]$$

Найдем константу. Для этого конкретизируем начальные условия и рассмотрим ограниченную в пространстве и во времени функцию  $u(\rho)$  и  $u|_{\pm\infty} = 0$ .

$$\Rightarrow u(\rho) = \pm \frac{2}{\gamma-1} [c(\rho) - c_0]$$

Знак «+» - простая волна бежит вправо, знак «-» - простая волна бежит влево.

$$c(u) = c_0 \pm \frac{\gamma-1}{2} u \quad (7)$$

Для нахождения уравнения простых волн в для адиабатического случая подставим  $c(u)$  в функцию  $V(u)$ .

$$V(u) = u \pm c(u) = u \pm \left( c_0 \pm \frac{\gamma-1}{2} u \right) = \left( \frac{\gamma-1}{2} + 1 \right) u \pm c_0$$

$$V(u) = \varepsilon u \pm c_0,$$

где  $\varepsilon = \gamma + 1/2$ .  $\varepsilon$  – показатель акустической нелинейности.

Подставим  $V(u)$  в уравнение (4):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} \pm c_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

уравнение простых волн для адиабаты

Общее решение:

$$u = \Phi \left( t - \frac{x}{\varepsilon u \pm c_0} \right) \quad (9)$$

## Уравнение простых волн при малых числах Маха

Число Маха – отношение колебательной скорости к скорости звука в линейном случае.

$$M = \frac{u}{c_0}, \quad (10)$$

где

$$c_0^2 = \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho_0} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}$$

В нашем случае скорость волны зависит от ее амплитуды в отличие от линейного случая. Нелинейность проявляется при распространении мощных волн. В уравнении простых волн слагаемое  $\varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x}$  дает искажение профиля в среде для мощных волн.

Рассмотрим общее решение для простой волны, бегущей вправо:

$$u = \Phi \left( t - \frac{x}{c_0(1 + \varepsilon M)} \right) \xrightarrow{M \ll 1} u = \Phi \left( 1 - \frac{x}{c_0} (1 - \varepsilon M + x) \right) = \Phi \left( t - \frac{x}{c_0} + \frac{\varepsilon x}{c_0^2} u \right) \quad (11)$$

Обозначим  $\tau = t - x/c_0$ . Классическое бегущее время  $\tau$  не зависит от  $u$ . Мы привязываем систему координат в инерциальной системе отсчета, которая движется вправо вместе с простой волной со скоростью  $c_0$ .  $c_0$  – это адиабатическая скорость звука.

Найдем уравнение простых волн при малых числах Маха, для которого функция  $u(x, \tau)$  (11) будет являться общим решением. Найдем частые производные:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{d\Phi}{d\xi} \frac{d\xi(x, \tau, u)}{d\tau} = \dot{\Phi} \left[ 1 + \frac{\varepsilon x}{c_0^2} \frac{\partial u}{\partial \tau} \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\dot{\Phi}}{1 - \dot{\Phi} \frac{\varepsilon x}{c_0^2}} \quad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \Phi \left[ \frac{\varepsilon}{c_0^2} u \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\varepsilon x}{c_0^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Phi \frac{\varepsilon}{c_0^2} u}{1 - \Phi \frac{\varepsilon x}{c_0^2}} \quad (13)$$

Получим тождественное равенство нулю, то есть уравнение простых волн, имеющее нелинейный вид. Для этого сделаем:

$$(13) - (12) \cdot \frac{\varepsilon}{c_0^2} u = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0 \quad - \quad (14)$$

уравнение простых волн при  $M \ll 1$  в переменных  $(x, \tau)$

Общее решение:  $u = \Phi \left( \tau + \varepsilon u x / c_0^2 \right)$ .

## Графический анализ решения уравнения простых волн при малых числах Маха

$$u = \Phi \left( \tau + \varepsilon u x / c_0^2 \right) \quad (15)$$

Решение в неявном виде. Можно явно выразить  $\tau(u)$ , если существует обратная функция  $\Phi^{-1}$ , то есть эта функция обратима.

$$\tau(u) = \Phi^{-1}(u) - \frac{\varepsilon u x}{c_0^2} \quad (16)$$

$$\frac{\varepsilon u x}{c_0^2} = \tau_{\text{задержки}}(u, x)$$

Получим:

$$\tau(u) = \Phi^{-1}(u) + \tau_{\text{зад}}(u, x)$$

Время задержки имеет конкретные значения для конкретных значений  $u$  и расстояния, пройденного в среде от момента входа волны в среду.

Рассмотрим один период синуса в координатах  $(u, \tau)$  (рис.2.1). Мы можем рассмотреть обратную функцию в координатах  $(\tau, u)$  (рис.2.2). Черным цветом

изображены профиль волны при входе среду  $u(x = 0, \tau) = \Phi(\tau) = \Phi(t)$  на рис. 2.1 и обратная функция  $\tau = \Phi^{-1}(u, x = 0)$  на рис. 2.2. Для того чтобы найти решение в любой точке пространства во все моменты времени, нужно прибавить к имеющемуся решению  $\Phi^{-1}(u)$  характеристическую функцию  $\tau_{\text{зад}}(u, x)$ , которая есть линейная функция с коэффициентом наклона  $\varepsilon x / c_0^2$ . На рис. 2.2 нарисуем наклонную прямую  $\tau_{\text{зад}}(u, x = x_1 > 0)$ . Складывая два графика поточечно, получим профиль инвертированного сигнала  $\tau(u, x = x_1)$ . На рис. 2.1 воспользуемся формулой (16), аналогично поточечно вычитая два графика. Получим профиль сигнала при входе в среду. При определенном значении функция перестанет иметь обычный вид (зеленый цвет) (рис.2.1). До момента, когда профиль начнет перегибаться, будет однозначность. Как только появится неоднозначность, это будет означать нефизичность решения, которое нам дает уравнение простых волн при малых числах Маха. Начиная с некоторого расстояния  $x$ , существует возможность профилю принимать одно из трех значений. Это нефизично, так как в одной точке пространства в один момент времени все функции, описывающие поведение среды, должны быть однозначны и единственны.

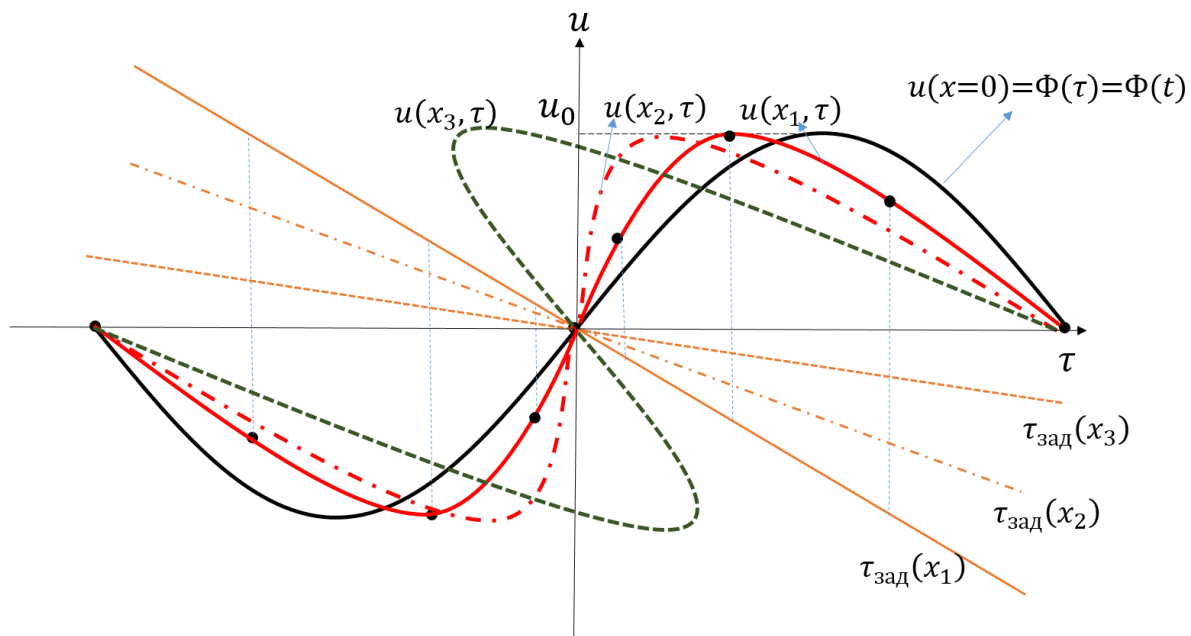


Рисунок 2.1. Изменение профиля волны в координатах  $u(t)$

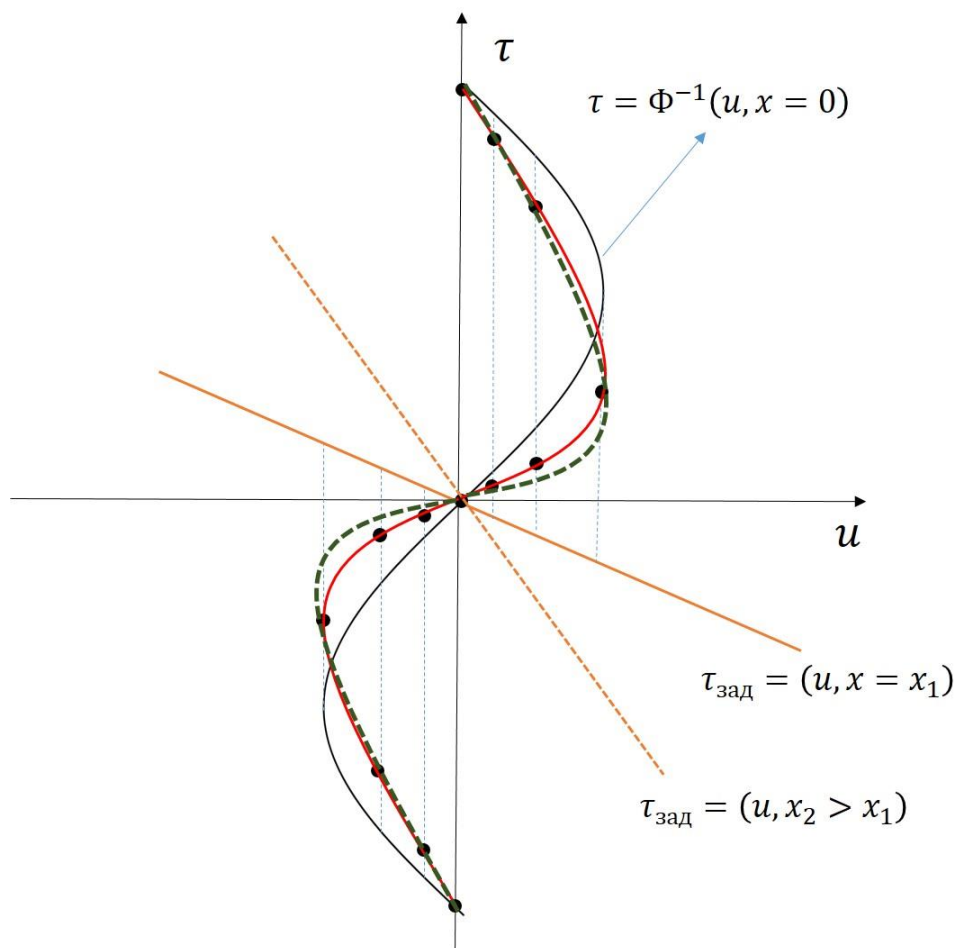


Рисунок 2.2. Изменение профиля инвертированного сигнала в координатах  $t(u)$

## О сохранении энергии и количества движения для уравнения простых волн при малых числах Маха

Необходимо уравнение простых волн доработать, то есть искусственным образом создать однозначность, обрубить профиль.

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0 \quad (17)$$

Энергия – это величина, пропорциональная интегралу от профиля в квадрате по области существования.

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 d\tau \quad (18)$$

Количество движения:

$$N \sim \int_{-\infty}^{+\infty} u d\tau \quad (19)$$

Необходимо показать, что эти величины сохраняются, то есть их производные при изменении координаты равны нулю.

$$\frac{\partial W}{\partial x} \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial(u^2)}{\partial x} d\tau$$

Заметим, что

$$2u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(u^2)}{\partial x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\varepsilon}{c_0^2} \frac{\partial u^3}{\partial \tau}$$

Тогда

$$\frac{\partial W}{\partial x} \sim \frac{2}{3} \cdot \frac{\varepsilon}{c_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u^3}{\partial \tau} d\tau = \frac{2}{3} \cdot \frac{\varepsilon}{c_0^2} u^3 \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0 - 0 = 0$$

Так как профиль ограничен, то  $u(+\infty) = u(-\infty) = 0$ .

$$W = \text{const}$$

Мы доказали, что при распространении волны в нелинейной среде, описываемой уравнением простых волн при малых числах Маха, энергия сохраняется.

$$\frac{\partial N}{\partial x} \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x} d\tau = \frac{\varepsilon}{2c_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u^2}{\partial \tau} d\tau = 0$$

Нелинейность проявляется в том, что скорость звука зависит от величины возмущения. При нулевом возмущении скорость распространения равна адиабатической скорости звука.

## Лекция 3. Уравнение Кортевега-де Фриза

### Нелинейные акустические волны в среде со слабой дисперсией. Уравнение Кортевега – де – Фриза

Запишем уравнение Кортевега – де – Фриза для одномерного случая, когда вектор скорости имеет проекцию только на одну ось. Поглощение отсутствует.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3}, \quad (20)$$

где  $\varepsilon = \frac{\gamma+1}{2}$ .

Запишем уравнение Кортевега – де – Фриза в безразмерных переменных. Вводим функцию возмущения, нормированную на некоторую опорную величину, безразмерное время и расстояние:

$$V = \frac{u}{u_0},$$

$$\theta = \omega_0 \tau,$$

$$z = \frac{x}{x_{\text{нел}}} = \frac{\varepsilon u_0 \omega_0}{c_0^2} x;$$

Введем коэффициент дисперсии:

$$D = \frac{\beta c_0^2}{u_0 \varepsilon}$$

Подставив в уравнение безразмерные величины, получим:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = V \frac{\partial V}{\partial \theta} + D \frac{\partial^3 V}{\partial \theta^3} \quad - \quad (21)$$

уравнение Кортевега – де – Фриза в безразмерных переменных

### О сохранении количества движения и сохранении энергии в среде

Количество движения:

$$N \sim \int_{-\infty}^{+\infty} u d\tau$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x} d\tau = \frac{\varepsilon}{2c_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u^2}{\partial \tau} d\tau + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} d\tau = 0$$

Так как профиль ограничен, то  $u(+\infty) = u(-\infty) = 0$  и

$$\frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} (+\infty) = \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} (-\infty) = 0.$$

Энергия:

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 d\tau$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &\sim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u^2}{\partial x} d\tau = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{2c_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u^3}{\partial \tau} d\tau + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} u \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} d\tau = \\ &= 2\beta \int_{-\infty}^{+\infty} u d\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right) = 0 \end{aligned}$$

## Стационарное решение уравнения Кортевега – де – Вриза в виде солитона

Солитон – уединенная волна. Основное свойство солитона – распространение в среде без изменения своего профиля.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3}$$

Будем искать решение в виде

$$u = u_s S\left(\frac{t - \frac{x}{v_s}}{T_s}\right) \quad (22)$$

$u_s$  – амплитудное значение,  $S$  – функция солитона,  $T_s$  – длительность солитона,  $v_s$  – скорость солитона.

$$u = u_s S\left(\frac{\tau + \gamma_s x}{T_s}\right) = u_s S(\xi)$$

$$\tau = t - \frac{x}{c_0},$$

$$\gamma_s = \frac{1}{c_0} - \frac{1}{v_s} - \text{расстройка обратных скоростей}$$

$$\xi = \frac{\tau + \gamma_s x}{T_s}$$

Найдем производные в новых координатах:



$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= u_s \frac{ds}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{u_s \gamma_s}{T_s} \frac{ds}{d\xi} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= u_s \frac{ds}{d\xi} \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{u_s}{T_s} \frac{ds}{d\xi} \\ \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} &= \frac{u_s}{T_s^3} \frac{d^3 s}{d\xi^3}\end{aligned}$$

Подставим в уравнение Кортевега – де – Вриза и получим:

$$\frac{ds}{d\xi} = \frac{\varepsilon u_s}{c_0^2 \gamma_s} s \frac{ds}{d\xi} + \frac{\beta}{T_s^2 \gamma_s} \frac{d^3 s}{d\xi^3}$$

Это верно для случая, когда солитон записан в общем виде. Возьмем функцию  $S(\xi) = ch^{-2}(\xi)$ . Тогда уравнение Кортевега – де – Вриза будет иметь нетривиальное решение:

$$\begin{cases} \gamma_s T_s^2 = 4\beta \\ u_s T_s^2 = 12 \frac{\beta c_0^2}{\varepsilon} \end{cases} \quad (23)$$

## Лекция 4. Взаимодействие двух волн в среде с квадратичной нелинейностью. Генерация второй гармоники

### Взаимодействие двух волн в среде с квадратичной нелинейностью. Генерация второй гармоники.

Будем рассматривать идеальную среду: однородную, изотропную, немагнитную. Запишем уравнения Максвелла для этих условий:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 0 \\ \vec{B} &= \vec{H} \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \varepsilon(\vec{E})\vec{E} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (24)$$

Нас будут интересовать такие поля, электрическая напряженность поля  $|\vec{E}|$  которых много меньше электрической напряженности поля в атоме  $E_a$ , то есть  $\frac{|\vec{E}|}{E_a} \ll 1$ . Поскольку в дальнейшем будет использоваться метод медленно меняющихся амплитуд, то есть будет рассмотрена только первая поправка к линейности, то будет удобно сразу записать последнее уравнение системы в виде разложения по степеням величин возмущения, считая, что невозмущенное состояние – это  $E = 0$ :

$$\vec{D} = \varepsilon(\vec{E})\vec{E} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}(\vec{E}), \quad (25)$$

где  $\vec{P} = \chi^{(1)}\vec{e}_1 E + \chi^{(2)}\vec{e}_2 E^2 + \dots$  – поляризация,  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots$  – векторы поляризации. В случае однородных и изотропных сред:  $\chi^{(i)} = \text{const}, i = 1, 2, 3, \dots$  – диэлектрическая восприимчивость среды,  $\vec{e}_i = \vec{e} \uparrow \vec{E}, i = 1, 2, 3, \dots$ .

### Укороченное уравнение при генерации второй гармоники

Выведем из указанной выше системы волновое уравнение. Подействуем оператором ротора на второе уравнение системы:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = \operatorname{rot} \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right),$$

причем используя метод медленно меняющихся амплитуд и учитывая вышеуказанное условие малости поля, можно заключить, что  $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} = \vec{0}$ . Таким образом, с учетом однородности и изотропности среды, меняя местами операции ротора и производной по времени, а также учитывая пятое уравнение системы, можно записать:

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{H}.$$

Далее, подставляя первое уравнение системы и учитывая указанное разложение вектора электрического смещения через поляризацию, имеем:

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (\vec{E} + 4\pi \vec{P})}{\partial t^2}.$$

Таким образом, после алгебраических преобразований получаем:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \hat{L}E = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\chi^{(2)} \vec{e}_2 E^2 + \chi^{(3)} \vec{e}_3 E^3 + \dots),$$

где линейный оператор  $\hat{L} = -\frac{4\pi\chi^{(1)}}{c^2} \vec{e}_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ .

То есть мы получили искомое волновое уравнение.

Теперь рассмотрим одномерный случай распространения вдоль оси  $x$  волн с частотами  $\omega$  и  $2\omega$  (первая и вторая гармоника):

$$E = \frac{1}{2} A_1(x) e^{-i(\omega t - k(\omega)x)} + \frac{1}{2} A_2(x) e^{-i(2\omega t - k(2\omega)x)} + \frac{1}{2} A_1^*(x) e^{i(\omega t - k(\omega)x)} + \frac{1}{2} A_2^*(x) e^{i(2\omega t - k(2\omega)x)}.$$

Подставляем данное выражение в волновое уравнение и получаем для его левой части:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{v_\phi^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2 A_1}{dx^2} e^{-i(\omega t - k(\omega)x)} + \frac{1}{2} \frac{d^2 A_2}{dx^2} e^{-i(2\omega t - k(2\omega)x)} + \frac{ik(\omega)}{2} \frac{dA_1}{dx} e^{-i(\omega t - k(\omega)x)} \\ &+ \frac{ik(2\omega)}{2} \frac{dA_2}{dx} e^{-i(2\omega t - k(2\omega)x)} - \frac{k^2(\omega)}{2} A_1 e^{-i(\omega t - k(\omega)x)} \\ &- \frac{k^2(2\omega)}{2} A_2 e^{-i(2\omega t - k(2\omega)x)} + \frac{\omega^2}{2v_\phi^2(\omega)} A_1 e^{-i(\omega t - k(\omega)x)} \\ &+ \frac{4\omega^2}{2v_\phi^2(2\omega)} A_2 e^{-i(2\omega t - k(2\omega)x)} + \text{комплексно сопряженные члены,} \end{aligned}$$

где  $\frac{1}{v_\phi^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \hat{L}E$ .

Также для удобства введем обозначения:

$$k_1 \equiv k(\omega) = \frac{\omega}{v_\phi(\omega)},$$

$$k_2 \equiv k(2\omega) = \frac{2\omega}{v_\phi(2\omega)}.$$

Проводя сокращения с учетом этого, а также вводя метод медленно меняющихся амплитуд, то есть утверждая, что  $A_i(x)$ , где  $i = 1, 2$ , меняется слабо с ростом  $x$  по сравнению с тем как меняется  $e^{-i(\omega t - k(\omega)x)}$  и  $e^{-i(2\omega t - k(2\omega)x)}$  и отбрасывая все члены после первой поправки к линейному, имеем для левой части волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{v_\phi^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{ik_1}{2} \frac{dA_1}{dx} e^{-i(\omega t - k_1 x)} + \frac{ik_2}{2} \frac{dA_2}{dx} e^{-i(2\omega t - k_2 x)}.$$

Аналогично, работая в первом приближении метода медленно меняющихся амплитуд с правой частью волнового уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\chi^{(2)} \vec{e}_2 E^2 + \chi^{(3)} \vec{e}_3 E^3 + \dots) &= \frac{4\pi \chi^{(2)} \vec{e}_2}{c^2} \frac{\partial^2 E^2}{\partial t^2} \\ &= \frac{4\pi \chi^{(2)} \vec{e}_2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{1}{4} A_1^2 e^{-2i(\omega t - k_1 x)} + \frac{1}{4} A_2^2 e^{-2i(2\omega t - k_2 x)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} A_1 A_2 e^{-i(3\omega t - (k_1 + k_2)x)} + \frac{1}{2} A_1^* A_2 e^{-i(\omega t - (k_2 - k_1)x)} \right. \\ &\quad \left. + \text{комплексно сопряженные члены} \right) \\ &= \frac{4\pi \chi^{(2)} \vec{e}_2}{c^2} \left( -\frac{4\omega^2}{4} A_1^2 e^{-2i(\omega t - k_1 x)} - \frac{16\omega^2}{4} A_2^2 e^{-2i(2\omega t - k_2 x)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{9\omega^2}{2} A_1 A_2 e^{-i(3\omega t - (k_1 + k_2)x)} - \frac{\omega^2}{2} A_1^* A_2 e^{-i(\omega t - (k_2 - k_1)x)} \right. \\ &\quad \left. + \text{комплексно сопряженные члены} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, приравнявая коэффициенты при одинаковых экспонентах в левой и правой частях, имеем

$$\text{при } e^{-i\omega t}: \quad \frac{ik_1}{2} \frac{dA_1}{dx} e^{ik_1 x} = -\frac{2\pi \chi^{(2)} \vec{e}_2 \omega^2}{c^2} A_1^* A_2 e^{i(k_2 - k_1)x},$$

$$\text{при } e^{-2i\omega t}: \quad \frac{ik_2}{2} \frac{dA_2}{dx} e^{ik_2 x} = -\frac{4\pi \chi^{(2)} \vec{e}_2 \omega^2}{c^2} A_1^2 e^{2ik_1 x}.$$

Отсюда получим уравнения эволюционного вида, а именно как меняется амплитуда первой и второй гармоники с расстоянием:

$$\frac{dA_1}{dx} = \frac{4\pi i \chi^{(2)} \vec{e}_2 \omega^2}{c^2 k_1} A_1^* A_2 e^{i(k_2 - 2k_1)x},$$

$$\frac{dA_2}{dx} = \frac{8\pi i \chi^{(2)} \vec{e}_2 \omega^2}{c^2 k_2} A_1^2 e^{i(2k_1 - k_2)x}.$$

Вспоминая, что

$$k_i = \frac{\omega * i}{v_{\phi i}} = \frac{\omega * i}{c} n_i = \begin{cases} \frac{\omega}{c} n_1, \text{ при } i = 1 \\ \frac{2\omega}{c} n_2, \text{ при } i = 2 \end{cases},$$

и вводя обозначение  $\Delta k \equiv k_2 - 2k_1$ , получаем

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = \frac{i\gamma\omega}{cn_1} A_1^* A_2 e^{i\Delta kx} \\ \frac{dA_2}{dx} = \frac{i\gamma\omega}{cn_2} A_1^2 e^{-i\Delta kx} \end{cases}, \quad (26)$$

где  $\gamma \equiv 4\pi\chi^{(2)}$ .

Последняя система представляет собой укороченные уравнения для амплитуд первой и второй гармоник. Ее удобство заключается в том, что в дальнейшем не потребуется еще раз проводить указанные преобразования, а достаточно будет рассмотреть граничные физические условия или начальные математические условия, чтобы решить задачу для комплексных амплитуд первой и второй гармоник.

### Генерация второй гармоники при приближении заданного поля.

Рассматривается слабая вторая гармоника по сравнению с первой (заданным полем), то есть

$$|A_1| \gg |A_2|.$$

Учитывая данное условие для системы укороченных уравнений, имеем

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dx} \approx 0 &\Rightarrow A_1(x) = \text{const} = A_{10}, \\ \frac{dA_2}{dx} = \frac{i\gamma\omega}{cn_2} A_{10}^2 e^{-i\Delta kx} &\Rightarrow A_2(x) = \frac{\gamma\omega A_{10}^2}{cn_2 \Delta k} (1 - e^{-i\Delta kx}) \Rightarrow \\ &\begin{cases} A_1(x) = \text{const} = A_{10} \\ A_2(x) = \frac{i\gamma\omega A_{10}^2 x}{cn_2} e^{-\frac{i\Delta kx}{2}} \sin \frac{\Delta kx}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

## Лекция 5. Соотношения Мэнли - Роу

### Взаимодействие трех волн в среде с квадратичной нелинейностью. Соотношения Мэнли — Роу.

Рассматриваются три частоты  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , связанные друг с другом следующим образом:  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ , то есть случай, когда генерируется суммарная частота при двух заданных, либо разностная  $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$ , или  $\omega_1 = \omega_3 - \omega_2$ , то есть рассмотрение случая суммарной частоты не нарушает общности, так как в этом случае автоматически находится случай генерации разностных частот. Также важно учесть, чтобы при вырожденном случае  $\omega_1 = \omega_2$ , то есть при  $\omega_3 = 2\omega_1$ , получались результаты рассмотрения случая генерации второй гармоники.

### Укороченные уравнения для случая трехчастотного взаимодействия

Рассмотрим одномерный случай для идеальной (без поглощения, однородной, изотропной) среды.

Из уравнений Максвелла получим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \hat{L} \vec{E} = \frac{2\gamma}{c^2} \frac{\partial^2 E^2}{\partial t^2} + o(E^2), \text{ где } \gamma \equiv 2\pi\chi^{(2)}.$$

$$\text{Далее } \frac{d^2 E}{dx^2} - \frac{1}{v_\phi^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{2\gamma}{c^2} \frac{\partial^2 E^2}{\partial t^2}.$$

Ищем решение в виде трех взаимодействующих волн по  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , то есть:

$$E = \frac{1}{2} A_1(x) e^{-i(\omega t - k_1 x)} + \frac{1}{2} A_2(x) e^{-i(2\omega t - k_2 x)} + \frac{1}{2} A_3(x) e^{-i(3\omega t - k_3 x)} \\ + \text{комплексно сопряженные члены.}$$

Применяя метод медленно меняющихся амплитуд и приравнявая множители при  $-i\omega_j t, j = 1, 2, 3$  в левой и правой частях уравнений, где  $\omega_1 = \omega, \omega_2 = 2\omega, \omega_3 = 3\omega$  с учетом членов до второго порядка малости, аналогично укороченным уравнениям для случая генерации второй гармоники, получим:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dA_1}{dx} &= \frac{i\gamma\omega_1}{cn_1} A_2^* A_3 e^{i\Delta k x}, \text{ где } \omega_1 = \omega_3 - \omega_2 \\ \frac{dA_2}{dx} &= \frac{i\gamma\omega_2}{cn_2} A_1^* A_3 e^{i\Delta k x} \text{ где } \omega_2 = \omega_3 - \omega_1, \\ \frac{dA_3}{dx} &= \frac{i\gamma\omega_3}{cn_3} A_1 A_2 e^{-i\Delta k x} \text{ где } \omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \end{aligned} \right. \quad (27)$$

и где введены обозначения  $\Delta k \equiv k_3 - k_1 - k_2$  и  $n_j = \frac{c}{v_\phi(\omega_j)}$ .

## Соотношения Мэнли-Роу

Получим связь между квадратами амплитуд первой и второй частот.

Умножим первое уравнение системы укороченных уравнений на  $\frac{\omega_2 A_1^*}{n_2}$  и сложим со вторым уравнением, умноженным на  $-\frac{\omega_1 A_2^*}{n_1}$  и получим:

$$\frac{\omega_2}{n_2} A_1^* \frac{dA_1}{dx} - \frac{\omega_1}{n_1} A_2^* \frac{dA_2}{dx} = 0.$$

Далее домножим полученное уравнение на  $\frac{\omega_1 \omega_2}{n_1 n_2}$  и произведем сложения с аналогичным выражением, но над которым дополнительно была выполнена операция комплексного сопряжения:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{n_1 |A_1|^2}{\omega_1} - \frac{n_2 |A_2|^2}{\omega_2} \right) = 0,$$

где  $|A_1|^2 = A_1 A_1^*$ ,

то есть

$$\frac{n_1 |A_1|^2}{\omega_1} - \frac{n_2 |A_2|^2}{\omega_2} = \text{const.}$$

Аналогичным образом можно получить:

$$\frac{n_1 |A_1|^2}{\omega_1} + \frac{n_3 |A_3|^2}{\omega_3} = \text{const.},$$

$$\frac{n_2 |A_2|^2}{\omega_2} + \frac{n_3 |A_3|^2}{\omega_3} = \text{const.}$$

Последние три соотношения называются соотношениями Мэнли-Роу для квадратов амплитуд, взаимодействующих частот  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , связанные друг с другом следующим образом:  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ .

Также вводя понятие интенсивности в виде  $I_j \equiv n_j |A_j|^2$ , будем иметь соотношения Мэнли-Роу для интенсивностей:

$$\begin{aligned} \frac{I_1}{\omega_1} - \frac{I_2}{\omega_2} &= \text{const} \\ \frac{I_1}{\omega_1} + \frac{I_3}{\omega_3} &= \text{const.} \\ \frac{I_2}{\omega_2} + \frac{I_3}{\omega_3} &= \text{const} \end{aligned} \quad (28)$$

Наконец, переходя на квантовый язык путем представления  $I_j \equiv n_j |A_j|^2 = N_j \frac{h}{2\pi} \omega_j$ , где  $N_j$  – поток квантов, то есть количество квантов, проходящих через единичную площадку в единицу времени, получим соотношения Мэнли-Роу для потока квантов:

$$\begin{cases} N_1 - N_2 = \text{const} \\ N_1 + N_3 = \text{const} \\ N_2 + N_3 = \text{const} \end{cases} \quad (29)$$

Рассмотрим физический смысл соотношений Мэнли-Роу. Для этого возьмем дифференциалы от уравнений последней системы:

$$\begin{cases} dN_1 = dN_2 \\ dN_1 = -dN_3 \\ dN_2 = -dN_3 \end{cases}$$

Таким образом, чтобы получить порцию квантов третьей частоты, их необходимо забрать из порции квантов первой и второй частоты. По обратному сценарию, имея порцию квантов на третьей частоте, чтобы их сгенерировать на первой и второй, нужно их просто отнять от первой. Иными словами, один квант третьей частоты “стоит” один квант первой частоты и один квант третьей частоты или из одного кванта третьей частоты можно получить два кванта: один первой частоты, другой – второй частоты.

Удобство соотношений Мэнли-Роу заключается в том, что можно узнать пределы изменений чисел квантов, интенсивностей или квадратов частот для трех взаимодействующих частот, зная параметры, которые были на входе.



## Лекция 6. Низкочастотные и высокочастотные волны накачки

### Предел изменения $N_j$ при трехчастотном взаимодействии

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$$

Вспомним, что число квантов  $N_j$  связано:

$$\omega_j \hbar N_j = I_j \quad (30)$$

$I_j$  – это интенсивность, т.е. количество квантов, проходящих за единицу времени через единичную площадь. С другой стороны, интенсивность связана с квадратом амплитуд:

$$I_j = n_j |A_j|^2$$

Запишем соотношение Мэнли – Роу для чисел квантов  $N_j$ :

$$\begin{cases} dN_1 = dN_2 \\ dN_1 = -dN_3 \\ dN_2 = -dN_3 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} N_1 - N_2 = const \\ N_1 + N_3 = const \\ N_2 + N_3 = const \end{cases}$$

Определим константу:

$$\begin{cases} N_1 - N_2 = const = N_{10} - N_{20} \quad (a) \\ N_1 + N_3 = const = N_{10} + N_{30} \quad (b) \\ N_2 + N_3 = const = N_{20} + N_{30} \quad (c) \end{cases}$$

где  $N_j(x=0) = N_{j0}$  задается на входе.

Рассмотрим случай мощной низкочастотную волну  $\omega_1$  и получим для нее предел изменения. Зададим условие, что  $N_{10} \gg N_{20}, N_{30}$ .

$$(a): N_1 = N_{10} - N_{20} + N_2 \Rightarrow N_1 \geq N_{10} - N_{20}$$

Найдем максимальное значение для  $N_1$ :

$$(b): N_1 = N_{10} + N_{30} - N_3 \Rightarrow N_1 \leq N_{10} + N_{30}$$

$\Downarrow$

$$N_{10} - N_{20} \leq N_1 \leq N_{10} + N_{30}$$

Виден факт устойчивости.  $N_1$  будет всегда находиться на уровне своего значения (ПЗП).

Рассмотрим случай мощной низкочастотную волну  $\omega_2$  и получим для нее предел изменения:

$$(c): N_2 = N_{20} + N_{30} - N_3 \Rightarrow N_2 \leq N_{20} + N_{30}$$

Найдем максимальное значение для  $N_2$ :

$$(a): N_2 = -N_{10} - N_{20} + N_1 \Rightarrow N_2 \geq -N_{10} - N_{20}$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leq N_2 \leq N_{20} + N_{30}$$

Для случая мощной низкочастотной волны  $\omega_3$ :

$$0 \leq N_3 \leq N_{20} + N_{30}$$

## Решение укороченных уравнений комплексных амплитуд в случае низкочастотной волны накачки

Рассмотрим мощную НЧ волну на частоте  $\omega_1$ :  $A_{10} \gg A_{20}, A_{30}$ . В этом случае  $|A_1| \gg |A_2|, |A_3|$  (ПЗП в силу устойчивости НЧ).

Система укороченных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dx} &= i \frac{\gamma \omega_1}{cn_1} A_3 A_2^* e^{i\Delta kx} = i\gamma_1 A_3 A_2^* e^{i\Delta kx} (d) \\ \frac{dA_2}{dx} &= i \frac{\gamma \omega_2}{cn_2} A_3 A_1^* e^{i\Delta kx} = i\gamma_2 A_3 A_1^* e^{i\Delta kx} (e) \\ \frac{dA_3}{dx} &= i \frac{\gamma \omega_3}{cn_3} A_1 A_2 e^{-i\Delta kx} = i\gamma_3 A_1 A_2 e^{-i\Delta kx} (f) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$$

$$\Delta k = k_3 - k_1 - k_2$$

Так как амплитуды  $|A_2|, |A_3|$  будут всегда меньше амплитуды  $|A_1|$ , то  $A_3 A_2^* \approx 0$

$\Downarrow$

$$\frac{dA_1}{dx} = i \frac{\gamma \omega_1}{cn_1} A_3 A_2^* e^{i\Delta kx} \approx 0$$

$$A_1 = A_{10} \text{ при любом } x$$

Исключим  $A_3$ . Подействуем на уравнение (e) оператором производной по  $x$ .

$$\frac{d^2 A_2}{dx^2} = i\gamma_2 A_{10} \left( \frac{dA_3}{dx} + i\Delta k A_3 \right) e^{i\Delta kx}$$

Подставим в последнее уравнение выражение (f).

$$\frac{d^2 A_2}{dx^2} = -\gamma_2 \gamma_3 A_{10}^2 A_2 - i\gamma_2 A_{10} A_3 e^{i\Delta kx}$$

Используя уравнение (e), получим:

$$\frac{d^2 A_2}{dx^2} - i\Delta k \frac{dA_2}{dx} + \gamma_2 \gamma_3 A_{10}^2 A_2 = 0$$

Это гармонический осциллятор затухания. Ищем решение в виде  $A_2 \sim e^{\lambda x}$ .

$$\lambda^2 - i\Delta k\lambda + \gamma_2\gamma_3 A_{10}^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{i\Delta k}{2} \pm \frac{\sqrt{-\Delta k^2 - 4\gamma_2\gamma_3 A_{10}^2}}{2} = \frac{i\Delta k}{2} \pm i \frac{\sqrt{\Delta k^2 + 4\gamma_2\gamma_3 A_{10}^2}}{2}$$

$$A_2 = A_{2\max} e^{\frac{i\Delta k}{2}x} \left( C_1 \sin \frac{x}{l_6} + C_2 \cos \frac{x}{l_6} \right)$$

Из (e) получим, что

$$A_3(x) = -i \frac{1}{\gamma_2 A_{10}} e^{-i\Delta kx} \frac{dA_2}{dx} = -ie^{-\frac{i\Delta kx}{2}} \left( C_3 \sin \frac{x}{l_6} + C_4 \cos \frac{x}{l_6} \right)$$

Будет фазовая модуляция огибающей для волн с частотой  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ .

$$l_6 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Delta k}{2}\right)^2 + \frac{\gamma^2 \omega_2 \omega_3}{c^2 n_2 n_3} A_{10}^2}} \quad (32)$$

## Решение укороченных уравнений комплексных амплитуд в случае высокочастотной волны накачки

Рассмотрим мощную ВЧ волну на частоте  $\omega_3$ :  $A_{30} \gg A_{10}, A_{20}$  и поведение на малых  $x$ , таких что  $|A_3| \gg |A_1|, |A_2|$ .

$$\frac{dA_1}{dx} = i\gamma_1 A_3 A_2^* e^{i\Delta kx}$$

$$\frac{dA_2}{dx} = i\gamma_2 A_3 A_1^* e^{i\Delta kx}$$

$$\left( \frac{dA_3}{dx} = i\gamma_3 A_1 A_2 e^{-i\Delta kx} \right.$$

$$\left. \frac{dA_3}{dx} = i\gamma_3 A_1 A_2 e^{i\Delta kx} \approx 0 \right.$$

Действуя аналогично случаю мощной НЧ волны, получим характеристическое уравнение на  $A_1$  или  $A_2$ .

$$\frac{d^2 A_2}{dx^2} + i\Delta k \frac{dA_2}{dx} + \gamma_1 \gamma_2 A_{30}^2 A_2 = 0$$

Подставляя в виде  $A_2 \sim e^{\lambda x}$ , получим

$$\lambda_{1,2} = -\frac{i\Delta k}{2} \pm \frac{\sqrt{-\Delta k^2 + 4\gamma_1 \gamma_2 A_{30}^2}}{2} = -\frac{i\Delta k}{2} \pm \Gamma$$

При  $\gamma_1 \gamma_2 A_{30}^2 > \left(\frac{\Delta k}{2}\right)^2$   $\Gamma$  – действительный  $\Rightarrow A_2 \sim e^{\Gamma x}$ . То есть присутствует параметрическое усиление второй частоты. Так как амплитуды первой и второй

частоты меняются синфазно, то  $A_1 \sim e^{\Gamma x}$ . При переходе порога будет параметрическое усиление. Это и есть параметрический нелинейный генератор волн на частотах  $\omega_1, \omega_2$ .



## Лекция 7. Условие фазового синхронизма

### Соотношение $L_{\text{ког}}$ и $L_{\text{нелин}}$ при ПЗП

Запишем укороченные уравнения

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = i \frac{\gamma \omega_1}{cn_1} A_2 A_1^* e^{i\Delta kx} \\ \frac{dA_2}{dx} = i \frac{\gamma \omega_2}{cn_2} A_1^2 e^{i\Delta kx} \end{cases} \quad (33)$$

где  $\gamma = 2\pi\chi^{(2)}$  ( $\chi^{(2)}$  – коэффициент восприимчивости с соответствующей поляризацией с квадратичной значимостью по полю E).

Мы рассмотрели ПЗП (приближение заданного поля) в случае фазового синхронизма  $\Delta k$  и получили, что

$$A_2(x) = i \frac{2\gamma\omega}{cn\Delta k} A_{10}^2 e^{-\frac{i\Delta kx}{2}} \left( \frac{A_1 = A_{10}}{e^{\frac{i\Delta kx}{2}} - e^{-\frac{i\Delta kx}{2}}} \right) = 2i \frac{\gamma\omega}{cn} A_{10}^2 e^{-\frac{i\Delta kx}{2}} \sin \frac{\Delta kx}{2}$$

Получим зависимость действительной амплитуды второй гармоники от расстояния.

$$\begin{aligned} A_{2\text{max}} &= i \frac{2\gamma\omega}{cn\Delta k} A_{10}^2 \\ |A_2(x)| &= A_{2\text{max}} \left| \sin \frac{\Delta kx}{2} \right| \end{aligned}$$

Волна первой частоты и волна второй гармоники бегут с одной и той же скоростью. Генерация второй гармоники происходит эффективно. Если скорости разные, то возникают биения.

Рассмотрим случай фазового синхронизма  $\Delta k \rightarrow 0$ .

$$|A_2(x)| = \frac{2\gamma\omega}{cn\Delta k} A_{10}^2 \frac{\Delta kx}{2} = \frac{\gamma\omega A_{10}^2}{cn} x$$

Амплитуда второй гармоники будет линейно возрастать при  $\Delta k \rightarrow 0$ . Это невозможно, так как нарушается закон сохранения энергии. Возможно до тех пор, пока выполнено ПЗП  $|A_1| \gg |A_2|$ .

Мы можем оценить масштаб взаимодействия и охарактеризовать его величиной расстояния, которая будет соответствовать равенству амплитуды второй и первой гармоники. По определению  $L_{\text{нелин}}$  это такое расстояние, при котором в ПЗП  $|A_2(x = L_{\text{нелин}})| = A_{10}$ .

$$L_{\text{нелин}} = \frac{cn}{\gamma\omega A_{10}} \quad (34)$$

$L_{\text{ког}}$  — это положение первого максимума амплитуды второй гармоники при  $\Delta k \neq 0$ .

$$L_{\text{ког}} = \frac{\pi}{\Delta k}$$

Мы определили масштабы когерентности первой и второй гармоники и масштаб нелинейности, на котором нелинейный эффект, а именно, генерация второй гармоники, существенен.

Если амплитуда волны второй гармоники

$$|A_2| = A_{2\text{max}} \left| \sin \frac{\Delta k x}{2} \right|,$$

то нам необходимо получить связь параметров, которые будут удовлетворять ПЗП. Нам достаточно проверить тот факт, что амплитуда осцилляций второй гармоники будет много меньше чем амплитуда первой гармоники.

$$\begin{aligned} A_{2\text{max}} &\ll A_{10} \\ \frac{2\gamma\omega}{cn_2\Delta k} A_{10}^2 &\ll A_{10} \end{aligned}$$

Найдем связь параметров, при которых выполняется это неравенство.

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} L_{\text{ког}} &\ll L_{\text{нелин}} \\ L_{\text{ког}} &\ll L_{\text{нелин}} \end{aligned}$$

При выполнении данного неравенства выполняется приближение заданного поля (ПЗП).

## Сильное взаимодействие при генерации второй гармоники

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = i \frac{\gamma\omega_1}{cn_1} A_2 A_1^* e^{i\Delta k x} \\ \frac{dA_2}{dx} = i \frac{\gamma\omega_2}{cn_2} A_1^2 e^{-i\Delta k x} \end{cases}$$

Рассмотрим случай фазового синхронизма, при котором  $\Delta k = 0$  ( $n_1 = n_2 = n$ ). Две волны имеют одинаковые скорости. Тогда получим:

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = i \frac{\gamma\omega_1}{cn} A_2 A_1^* \\ \frac{dA_2}{dx} = i \frac{\gamma\omega_2}{cn} A_1^2 \end{cases} \quad (35)$$

Разделим комплексные амплитуды на действительные амплитуды и фазы и подставим в укороченные уравнения (35):

$$\begin{aligned} A_1 &= B_1(x) e^{i\varphi_1(x)} \\ A_2 &= B_2(x) e^{i\varphi_2(x)} \end{aligned}$$

↓

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = \frac{dB_1}{dx} e^{i\varphi_1} + i \frac{d\varphi_1}{dx} B_1 e^{i\varphi_1} = i \frac{\gamma\omega}{cn} B_1 B_2 e^{-i\varphi_1 + i\varphi_2} \\ \frac{dA_2}{dx} = \frac{dB_2}{dx} e^{i\varphi_2} + i \frac{d\varphi_2}{dx} B_2 e^{i\varphi_2} = i \frac{\gamma\omega}{cn} B_1^2 e^{i2\varphi_1} \end{cases}$$

Пусть  $\Phi = \varphi_2 - 2\varphi_1$

$$\begin{cases} \frac{dB_1}{dx} + i \frac{d\varphi_1}{dx} B_1 = i \frac{\gamma\omega}{cn} B_1 B_2 e^{i\Phi} \\ \frac{dB_2}{dx} + i \frac{d\varphi_2}{dx} B_2 = i \frac{\gamma\omega}{cn} B_1^2 e^{-i\Phi} \end{cases}$$

Учтем, что  $e^{i\Phi} = \cos \Phi + i \sin \Phi$ .

$$\begin{aligned} \text{Re: } & \begin{cases} \frac{dB_1}{dx} = -\frac{\gamma\omega}{cn} B_1 B_2 \sin \Phi \\ \frac{dB_2}{dx} = \frac{\gamma\omega}{cn} B_1^2 \sin \Phi \\ \frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{\gamma\omega}{cn} B_2 \cos \Phi \end{cases} \\ \text{Im: } & \begin{cases} \frac{d\varphi_2}{dx} = \frac{\gamma\omega}{cn} \frac{B_1^2}{B_2} \cos \Phi \end{cases} \end{aligned}$$

↓

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\gamma\omega}{cn} \left( \frac{B_1^2}{B_2} - 2B_2 \right) \cos \Phi$$

Выделим инвариант:

$$\begin{aligned} B_1 \frac{dB_1}{dx} + B_2 \frac{dB_2}{dx} &= 0 \\ \frac{d}{dx} (B_1^2 + B_2^2) &= 0 \\ B_1^2 + B_2^2 &= \text{const} \end{aligned} \tag{36}$$

Полученное выражение прямо пропорционально энергии, следовательно, энергия сохраняется. Определим константу. Если на входе генератор нас интересует генератор второй гармоники, то на входе при  $x = 0$   $A_1 = B_1 = B_{10}$ . Введем параметр интенсивности  $I_{10} = I_0 = nB_{10}^2$ .

$$\begin{aligned} B_1^2 + B_2^2 &= \text{const} = \frac{I_0}{n} \\ B_1^2 = \frac{I_0}{n} - B_2^2 &\rightarrow \text{подставим в уравнение } \frac{dB_2}{dx} = \frac{\gamma\omega}{cn} B_1^2 \sin \Phi \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{dB_2}{dx} = \frac{\gamma\omega}{cn} \left( \frac{I_0}{n} - B_2^2 \right) \sin \Phi \\ \frac{d\Phi}{dx} = \frac{\gamma\omega}{cn} \left( \frac{I_0}{nB_2} - 3B_2 \right) \cos \Phi \end{cases}$$

Заметим, что существует еще один инвариант, который представляет собой конструкцию, сохраняющуюся при распространении волны первой и удвоенной частоты в среде с квадратичной нелинейностью:

$$B_1^2 B_2 \cos \Phi = \text{const}$$

Рассмотрим производную от инварианта:

$$\frac{d}{dx} (B_1^2 B_2 \cos \Phi) = 2B_1 \frac{dB_1}{dx} B_2 \cos \Phi + B_1^2 \frac{dB_2}{dx} \cos \Phi - B_1^2 B_2 \frac{d\Phi}{dx} \sin \Phi = 0$$

Нас интересует решение, при котором  $B_1 = B_2 \neq 0$  при любых  $x$ . Учтем, что  $B_2(x=0) = 0$ . Получим, что

$$\cos \Phi = 0 \Rightarrow \Phi = \pm \frac{\pi}{2} \text{ (выберем знак +)}$$

$$\sin \Phi = 1$$

↓

$$\frac{dB_2}{dx} = \frac{\gamma\omega}{cn} \left( \frac{I_0}{n} - B_2^2 \right)$$

Введем масштабную длину для нелинейности:

$$L_{\text{нелин}} = \frac{cn}{\gamma\omega A_{10}} \tag{37}$$

$$A_{10} = \sqrt{\frac{I_0}{n}}$$

↓

$$\frac{d(B_2/A_{10})}{d\left(\frac{x}{L_{\text{нелин}}}\right)} = 1 - (B_2/A_{10})^2$$

$$B_2 = A_{10} \text{th}\left(\frac{x}{L_{\text{нелин}}}\right)$$

$$B_1 = A_{10} \frac{1}{\text{ch}\left(\frac{x}{L_{\text{нелин}}}\right)}$$

Учтем, что  $\Phi = \varphi_2 - 2\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ . Так как  $\varphi_1 = 0$ , то  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ .

Запишем решение укороченных уравнений через комплексные амплитуды:



$$\begin{cases} A_1(x) = A_{10}/\operatorname{ch}\left(\frac{x}{L_{\text{нелин}}}\right) \\ A_2(x) = iA_{10}\operatorname{th}\left(\frac{x}{L_{\text{нелин}}}\right) \end{cases} \quad (38)$$

Построим зависимости амплитуд от расстояния на рис. 7.1.

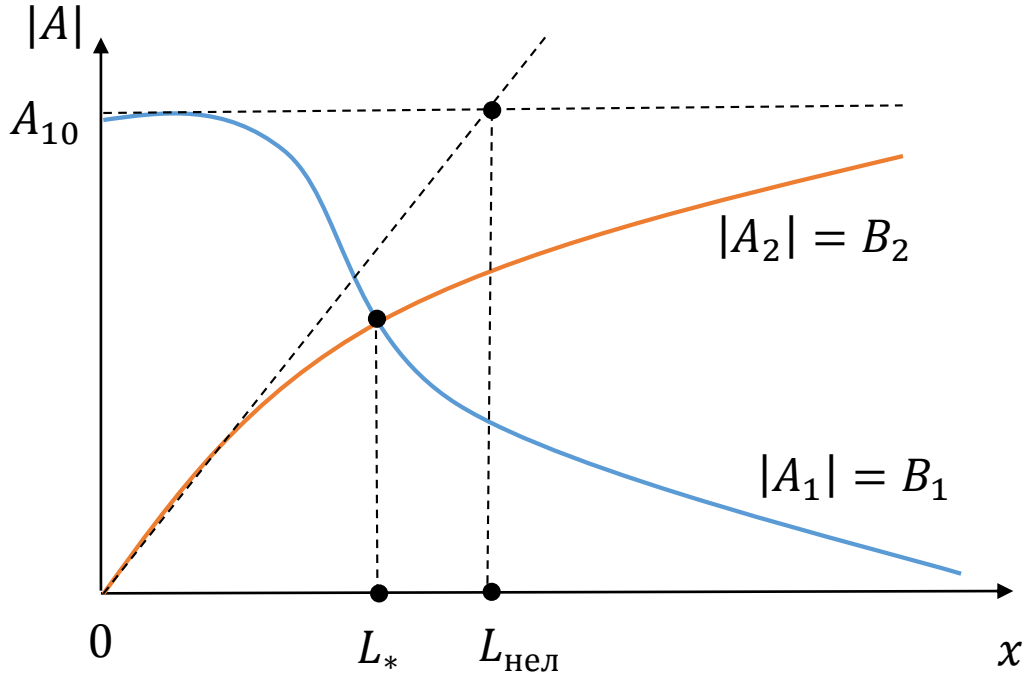


Рисунок 7.1. Зависимость амплитуд волн первой и второй гармоники от расстояния

Заметим, что

$$\begin{aligned} A_1(x = L_*) &= A_2(x = L_*) \\ \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{L_*}{L_{\text{нелин}}}\right)} &= \operatorname{th}\left(\frac{L_*}{L_{\text{нелин}}}\right) \\ L_* &= L_{\text{нелин}} \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0,88 L_{\text{нелин}} \end{aligned}$$

## Лекция 8. Взаимодействие ВП в среде с квадратичной нелинейностью

### Взаимодействие волновых пакетов в среде с квадратичной нелинейностью. Укороченные уравнения для огибающих волновых пакетов

Рассмотрим в общем случае волновые пакеты, распространяющиеся в среде, с центральными частотами  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , связанные друг с другом следующим образом:  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . Характерная ширина каждой спектральной области, в которых задан волновой пакет, должна быть много меньше центральной частоты этой области, то есть  $\Delta\omega_j \ll \omega_j, j = 1, 2, 3$ , иными словами волновой пакет представляет собой квазимонохроматическую волну.

Для одномерного случая распространения вдоль оси  $x$  в однородной и изотропной среде, полное поле в каждой точке пространства в каждый момент времени складывается из трех групп:

$$E(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 A_j(x, t) e^{-i(\omega_j t - k_j x)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 A_j^*(x, t) e^{i(\omega_j t - k_j x)}, \text{ при } \Delta\omega_j \ll \omega_j. \quad (39)$$

Главное отличие от монохроматического случая заключается в том, что амплитуды теперь зависят еще и от времени (рис. 8.1).

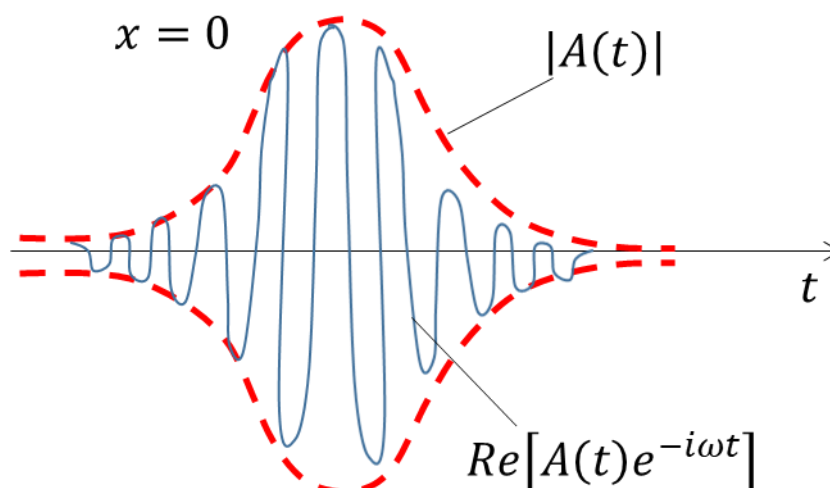


Рисунок 8.1 Иллюстрация временной зависимости волнового пакета

Одномерное волновое уравнение, получаемое из уравнений Максвелла для однородной, изотропной и немагнитной среды, будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (40)$$

где  $P = \chi^{(1)}E + \chi^{(2)}E^2 + \dots$  — поляризация (см. лекцию 4).

Данное уравнение преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{v_\phi^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi\chi^{(2)}}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.$$

Подставляем (39) в последнее уравнение и аналогично случаю монохроматических волн получаем укороченные уравнения для огибающих взаимодействующих волновых пакетов

$$\begin{cases} \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial A_1}{\partial t} = i\gamma_1 A_2^* A_3 e^{i\Delta k x}, \text{ где } \omega_1 = \omega_3 - \omega_2 \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial A_2}{\partial t} = i\gamma_2 A_1^* A_3 e^{i\Delta k x} \text{ где } \omega_2 = \omega_3 - \omega_1, \\ \frac{\partial A_3}{\partial x} + \frac{1}{u_3} \frac{\partial A_3}{\partial t} = i\gamma_3 A_1 A_2 e^{-i\Delta k x} \text{ где } \omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \end{cases}$$

где  $\Delta k \equiv k_3 - k_2 - k_1$ ,  $u_j = \frac{\partial \omega_j}{\partial k_j}$  — групповые скорости,  $\gamma_j = \frac{\gamma \omega_j}{c n_j}$ ,  $\gamma = 4\pi\chi^{(2)}$ .

Здесь было использовано первое приближение теории дисперсии,

$$k(\omega \pm \omega_j) = k(\omega_j) + \frac{\partial k}{\partial \omega}(\omega = \omega_j)\Delta\omega = k(\omega_j) + \frac{1}{u_j}\Delta\omega,$$

где  $\Delta\omega = \omega - \omega_j$ .

## Генерация волнового пакета второй гармоники

Рассмотрим случай, когда  $\omega_1 = \omega_2 = \omega \Rightarrow \omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = 2\omega$ . Запишем укороченные уравнения для этого случая

$$\begin{cases} \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial A_1}{\partial t} = i\gamma_1 A_1^* A_2 e^{i\Delta k x} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial A_2}{\partial t} = i\gamma_2 A_1^2 e^{-i\Delta k x} \end{cases}. \quad (41)$$

Будем называть групповой расстройкой величину  $v_{lm} = \frac{1}{u_l} - \frac{1}{u_m}$ , тогда  $t_{lm} = v_{lm}x$  — относительное запаздывание волновых пакетов  $l$  и  $m$ , которое они приобретут на расстоянии  $x$ . Тогда, если  $L$  — длина кристалла, то  $T_v = v_{lm}L$  — характерное время

запаздывания на длине кристалла.  $L_v = \frac{T_1}{v_{lm}}$  — длина группового запаздывания, где  $T_1$  — ширина огибающей мощного импульса (для случая генерации второй гармоники соответственно первого).

Пусть  $|A_{10}| \gg |A_{20}|$  (приближение заданного поля), тогда

$$\frac{\partial A_1(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial A_1(x, t)}{\partial t} = 0.$$

Введем  $\tau_j \equiv t - \frac{x}{u_j}$

$$\frac{\partial A_1(x, \tau_1)}{\partial x} = 0 \Rightarrow$$

$$A_1(x, \tau_1) = E_1(\tau_1),$$

где  $E_1(t) = A_1(x = 0, t)$ . Таким образом, огибающая волнового пакета на первой (несущей) частоте остается неизменной и будет бежать со скоростью  $u_1$ , а ее заполнение — с фазовой скоростью. Посмотрим, что будет с огибающей второго волнового пакета. Аналогичным образом переходя к координатам  $(x, \tau_2)$  и используя решение для огибающей первого волнового пакета, получим

$$\frac{\partial A_2(x, \tau_2)}{\partial x} = i\gamma_2 E_1^2(\tau_1) e^{-i\Delta k x},$$

где  $\Delta k = k_2 - 2k_1$ . Для решения этого уравнения необходимо перейти в одну систему координат для левой и правой частей уравнения. Перейдем к  $\tau_2$ , для этого представим  $\tau_1$  в следующем виде

$$\tau_1 = t - \frac{x}{u_1} + \frac{x}{u_2} - \frac{x}{u_2} = \tau_2 + x \left( \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) = \tau_2 + v_{21} x.$$

Тогда уравнение преобразуется к виду

$$\frac{\partial A_2(x, \tau_2)}{\partial x} = i\gamma_2 E_1^2(\tau_2 + v_{21} x) e^{-i\Delta k x},$$

которое уже можно проинтегрировать

$$A_2(x, \tau_2) = i\gamma_2 \int_0^x E_1^2(\tau_2 + v_{21} \xi) e^{-i\Delta k \xi} d\xi.$$

## Примеры

- 1) Прямоугольный импульс  $E_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ E_{10}, & 0 \leq t \leq T_1 \\ 0, & t > T_1 \end{cases}$

Рассмотрим случай фазового синхронизма  $\Delta k = 0$ .

1а)  $v_{21} = 0$

Подставляем заданное выражение для первой огибающей в решение для второй, полученное выше

$$A_2(x, \tau_2) = i\gamma_2 \int_0^x E_1^2(\tau_2) d\xi = i\gamma_2 E_1^2(\tau_2) = i\gamma_2 x \begin{cases} 0, \tau < 0 \\ E_{10}^2, 0 \leq \tau \leq T_1, \\ 0, \tau > T_1 \end{cases}$$

то есть получился аналогичный результат, что и в монохроматическом случае генерации второй гармоники.

1б)  $v_{21} > 0$

$$A_2(x, \tau_2) = i\gamma_2 \int_0^x E_1^2(\tau_2 + v_{21}\xi) d\xi.$$

Решается методом характеристик.

$$\tau_2 = t - \frac{x}{u_2} + \frac{x}{u_1} - \frac{x}{u_1} = \tau_1 - x \left( \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) = \tau_1 - v_{21}x$$

## Лекция 9. Волновые явления в средах с кубической нелинейностью. Ч1

### Волновые явления в средах с кубической нелинейностью-1

В отличие от сред с квадратичной нелинейностью, в которых были рассмотрены явления генерации второй гармоники и трехчастотного взаимодействия, в средах с кубической (или, в общем случае, с любой нечетной) нелинейностью имеет место эффект самовоздействия, то есть когда волна влияет на саму себя (более точно – на среду, которая меняет под этим воздействием свои свойства и, в свою очередь, влияет на волну):

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \hat{L}_1 u + \hat{L}_2 u^2 + \hat{L}_3 u^3 + \dots$$

$$\hat{L}_2 \sim \chi^{(2)}(\omega_i \pm \omega_j)$$

$$\hat{L}_3 \sim \chi^{(3)}(\omega_i \pm \omega_j \pm \omega_k)$$

$$\text{при } i = j = k: \omega = \omega + \omega - \omega.$$

### Самовоздействие волн в средах с кубической нелинейностью

Запишем уравнение Гельмгольца для одномерного случая вдоль оси  $z$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(u) u = 0, \quad (42)$$

где  $n = \sqrt{\varepsilon}$ .

Материальное уравнение для  $\vec{D}$ :

$$\begin{aligned} \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} &= \vec{E} + 4\pi\chi^{(1)}\vec{E} + 4\pi\chi^{(2)}\vec{e}_2 E^2 + 4\pi\chi^{(3)}\vec{e}_3 E^3 + \dots = \varepsilon\vec{E} \\ &= (\varepsilon_0 + \varepsilon_{\text{нл}}(|E|^2))\vec{E}. \end{aligned}$$

Используя метод медленно меняющихся амплитуд и учитывая зависимость  $u(z, t)$ :

$$u(z, t) = A(\mu z) e^{-i(\omega t - k(\omega)z)},$$

где  $\mu \ll 1$ . Подставляем данное представление в уравнение Гельмгольца:

$$\mu^2 \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2ik\mu \frac{\partial A}{\partial z} - k^2 A + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_0 + \varepsilon_{\text{нл}}(|A|^2)) A = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dA}{dz} = \frac{k}{2\varepsilon_0} (i\varepsilon' - \varepsilon_0'')A.$$

Мы получили укороченное уравнение для комплексной амплитуды при самовоздействии в кубичной нелинейной среде на частоте  $\omega$ .

Нелинейные эффекты при самовоздействии:

- 1) изменится  $v_\phi$  – нелинейная дисперсия ( $\varepsilon'_{\text{нл}}$ );
- 2) добавится поглощение – нелинейное положение ( $\varepsilon''_{\text{нл}}$ )

### Нелинейная дисперсия без учета поглощения

В данном случае  $\varepsilon''_0 = \varepsilon''_{\text{нл}} = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_0 = \varepsilon_0', \varepsilon_{\text{нл}} = \varepsilon'_{\text{нл}}$ .

Запишем выражение для комплексной амплитуды

$$A = A_0(z)e^{ik\varphi(z)},$$

где  $\varphi(z)$  – эйконал (действительная функция),  $A_0(z)$  – действительная амплитуда. Подставляем данное выражение в укороченное уравнение

$$\left(\frac{dA_0}{dz} + ikA_0 \frac{d\varphi}{dz}\right) e^{ik\varphi} = \frac{ik}{2\varepsilon_0} \varepsilon_{\text{нл}} A_0 e^{ik\varphi}.$$

Приравниваем действительные и мнимые части уравнения

$$\frac{dA_0}{dz} = 0 \Rightarrow A_0 = \text{const}$$

$$kA_0 \frac{d\varphi}{dz} = \frac{k}{2\varepsilon_0} \varepsilon_{\text{нл}} A_0 \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2\varepsilon_0} \int \varepsilon_{\text{нл}} (A_0^2) dz = \frac{\varepsilon_{\text{нл}}}{2\varepsilon_0} z$$

Таким образом, сама волна имеет вид

$$u \sim E(z, t) = A(z)e^{-i(\omega t - kz)} = A_0 e^{-i(\omega t - kz - k\varphi)} = A_0 e^{-i\left[\omega t - kz \left(1 + \frac{\varepsilon_{\text{нл}}}{2\varepsilon_0}\right)\right]}.$$

Следовательно

$$k_{\text{нл}} = k \left(1 + \frac{\varepsilon_{\text{нл}}}{2\varepsilon_0}\right) \Rightarrow$$

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_{\text{нл}}} = \frac{\omega}{k \left(1 + \frac{\varepsilon_{\text{нл}}}{2\varepsilon_0}\right)} \cong \frac{\omega}{k} \left(1 - \frac{\varepsilon_{\text{нл}}}{2\varepsilon_0}\right) = v_{\phi \text{ лин}} - \frac{\omega}{k} \frac{\varepsilon_{\text{нл}}}{2\varepsilon_0}.$$

Таким образом,

$$v_\phi > v_{\phi \text{ лин}}, \text{ при } \varepsilon_{\text{нл}} < 0,$$

$$v_{\phi} < v_{\phi \text{ лин}}, \text{ при } \varepsilon_{\text{нл}} > 0,$$

$$v_{\phi} = v_{\phi \text{ лин}}, \text{ при } \varepsilon_{\text{нл}} = 0.$$

При рассмотрении только кубической нелинейности:

$$\varepsilon_{\text{нл}}(|A|^2) = \varepsilon_2|A|^2 + \varepsilon_4|A|^4 + \dots$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_2|A|^2 = \varepsilon_0 + \varepsilon_0' + i\varepsilon_0'' + \varepsilon_2'|A|^2 + i\varepsilon_2''|A|^2.$$

### Самовоздействие волновых пучков. Самофокусировка (дефокусировка) в тонком нелинейном слое.

Рассмотрим тонкий нелинейный (с кубичной нелинейностью) слой толщины  $l$ , имеющий с обеих сторон линейную среду. Пусть  $z$  – продольная координата,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  – поперечная координата.

Волновой пучок – квазиплоская волна. Используем полное поле и метод медленно меняющихся амплитуд

$$E(x, y, z, t) = \frac{1}{2}A(\sqrt{\mu}x, \sqrt{\mu}y, \sqrt{\mu}z)e^{-i(\omega t - k(\omega)z)} + \frac{1}{2}A^*(\sqrt{\mu}x, \sqrt{\mu}y, \sqrt{\mu}z)e^{i(\omega t - k(\omega)z)}.$$

Подставим данное выражение в уравнение Гельмгольца

$$\Delta E + \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_0 + \varepsilon_2|A|^2)E = 0, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \Delta_{\perp} \quad (43)$$

и получим в первом приближении метода медленно меняющихся амплитуд

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{i}{2k}\Delta_{\perp}A + \frac{ik}{2\varepsilon_0'}(\varepsilon_2|A|^2 - \varepsilon_0'')A$$



## Лекция 10. Волновые явления в средах с кубической нелинейностью. Ч2

### Нахождение фокусного расстояния для распространяющегося в среде с кубической нелинейностью волнового пучка с частотой $\omega$

Укороченное уравнение для пучка в среде с кубической нелинейностью:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \underbrace{\frac{i}{2k} \Delta_{\perp} A}_{\text{Параболическое уравнение теории дифракции}} + \underbrace{\frac{ik}{2\varepsilon_0} (\varepsilon_2 |A|^2 - \varepsilon_0'') A}_{\text{Нелинейная рефракция}} \quad (44)$$

Правая часть уравнения имеет два слагаемых. Первое отвечает за линейную дифракцию и показывает, как расплывается в поперечном направлении волновой фронт при распространении волны вдоль  $z$ . Второе слагаемое в правой части отвечает за нелинейные эффекты. Происходит изменение формы пучка.

Рассмотрим среду с кубической нелинейностью без поглощения ( $\varepsilon_0'' = \varepsilon_2'' = 0$ ) и слабой нелинейностью ( $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_0$ ). Рассмотрим тонкий слой много меньше длины дифракции  $l \ll l_d = ka_0^2/2$ .

Модифицируем уравнение (44) в следующий вид:

$$\frac{\partial A(x, y, z)}{\partial z} = \cancel{\frac{i}{2k} \Delta_{\perp} A} + \frac{ik\varepsilon_2 |A|^2}{2\varepsilon_0} A$$

Исключаем первое слагаемое, так как мы рассматриваем тонкий слой. Линейная дифракция на таких расстояниях на комплексную огибающую никак не повлияет.

Комплексная огибающая для пучка:

$$A = A_0 e^{ik\varphi}$$

$A_0$  – действительная огибающая,  $e^{ik\varphi}$  – эйканал. Приравняем левую и правую часть для Re и Im.

$$\begin{aligned} \text{Re: } \frac{\partial A_0(x, y, z)}{\partial z} &= 0 \\ \text{Im: } \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial z} &= \frac{\varepsilon_2 |A|^2}{2\varepsilon_0} \\ &\Downarrow \\ A_0(x, y, z) &= \text{const} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\varepsilon_2 |A_0(x, y)|^2}{2\varepsilon_0}$$

Проинтегрируем по  $z$  и получим:

$$\varphi(x, y, z = l) = \frac{\varepsilon_2 |A_0(x, y)|^2 l}{2\varepsilon_0}$$

$l$  – толщина тонкого слоя.

Рассмотрим Гауссов пучок

$$A_0(x, y, z = 0) = E_{00} e^{-\frac{r^2}{a_0^2}}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Для любого  $z$   $A_0(x, y, z) = A_0(x, y)$ . Тогда комплексная огибающая

$$A(x, y, z) = E_{00} \exp\left(-\frac{r^2}{a_0^2} + ik \frac{\varepsilon_2 l}{2\varepsilon_0} E_{00}^2 e^{-\frac{2r^2}{a_0^2}}\right) \quad (45)$$

Весь пучок сосредоточен возле оси по сравнению со всеми доступными  $r$ , то есть  $r \ll a_0$  (осевое приближение).

$$e^{-\frac{2r^2}{a_0^2}} \approx \underbrace{1}_{\text{Поверхность}} - \underbrace{\frac{2r^2}{a_0^2}}_{\text{Нелинейное искривление волнового фронта}} \text{ при } z = l$$

Поверхность  
 постоянной фазы  
 (плоскость)

Нелинейное  
 искривление  
 волнового фронта

На выходе амплитуда также распределена по Гауссу, но волновой фронт искажается. Полная комплексная амплитуда:

$$A(x, y, z) = E_{00} \exp\left(ik \frac{\varepsilon_2 l}{2\varepsilon_0} E_{00}^2 - ik \frac{2r^2}{a_0^2} \frac{\varepsilon_2 l}{2\varepsilon_0} E_{00}^2 - \frac{r^2}{a_0^2}\right)$$

$$= -i \frac{kr^2}{2F_{\text{нл}}}$$

Искривление  
 волнового фронта

Найдем место, в которое будет фокусироваться Гауссов пучок после прохождения тонкого слоя.

$$-ik \frac{2r^2}{a_0^2} \frac{\varepsilon_2 l}{2\varepsilon_0} E_{00}^2 = -i \frac{kr^2}{2F_{\text{нл}}}$$

$$F_{\text{нл}} = \frac{\varepsilon_0 a_0^2}{2\varepsilon_2 E_{00}^2 l} \quad (46)$$

### – формула фокусного расстояния для тонкой нелинейной линзы

Тонкий слой абсолютно плоский, и только за счет нелинейности происходит искривление волнового фронта на коротком расстоянии  $l$ . На выходе из линзы мы получаем кривой волновой фронт фокусированный или дефокусированный в зависимости от знака  $\varepsilon_2$ . При  $\varepsilon_2 > 0$  линза фокусирующая,  $\varepsilon_2 < 0$  линза рассеивающая.

При фокусирующей линзе нелинейная фазовая скорость в середине пучка меньше чем линейная, и серединка отстает от краев. Она фокусируется на расстоянии  $F_{\text{нл}}$  (рис.10.1). В случае дефокусировки в месте, где профиль имел максимальную амплитуду около оси в Гауссовом распределении, серединка имеет фазовую скорость больше чем линейную. Она убегает вперед, и фронт выгибается наружу. Фронт расходится со все стороны так, что создает мнимый фокус  $-F_{\text{нл}}$ .

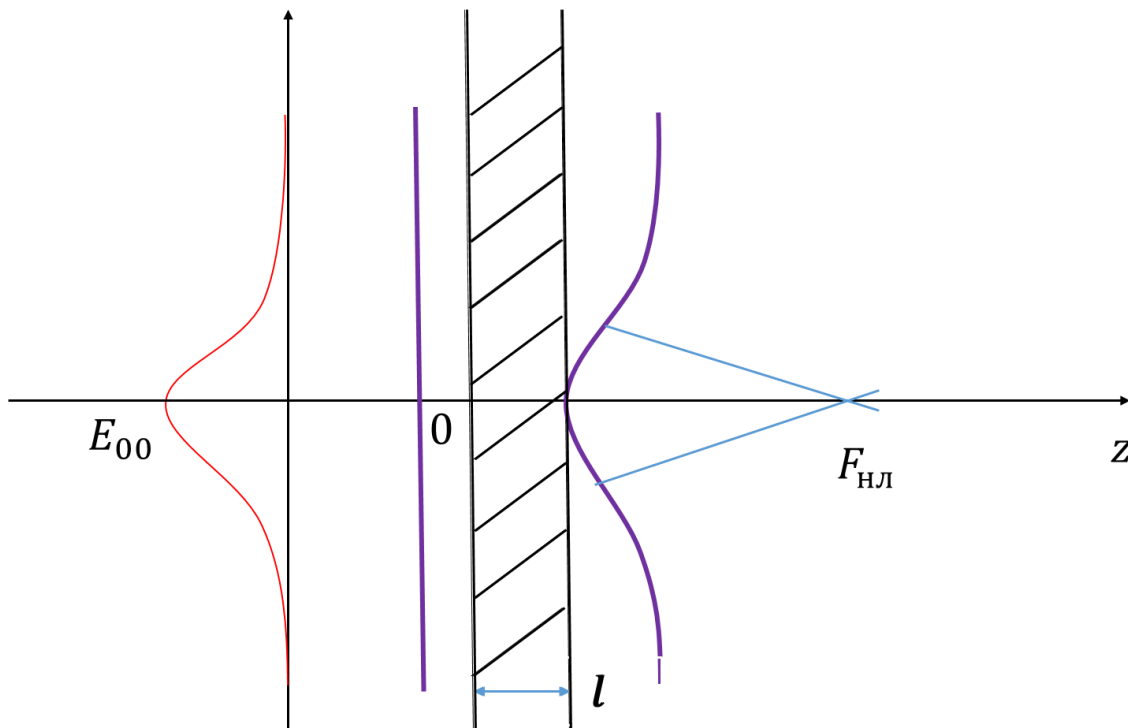


Рисунок 10.1. Искривление волнового фронта в среде с кубической нелинейностью

Условия тонкой нелинейной линзы:

- 1) Толщина слоя много меньше длины дифракции  $l \ll l_d$
- 2) Толщина много меньше фокусного расстояния  $l \ll |F_{\text{нл}}|$

## Самофокусировка в «толстом» нелинейном слое

Рассмотрим такое  $l$ , что условие  $l \ll l_d$  выполнено, а условие  $l \ll |F_{нл}|$  не выполняется. Примем  $l \sim |F_{нл}|$ .

Введем масштаб нелинейности  $R_{нл}$

$$R_{нл} \sim l \sim |F_{нл}|$$

$$F_{нл} = \frac{\varepsilon_0 a_0^2}{2\varepsilon_2 E_{00}^2 l}$$

$$\Downarrow$$

$$R_{нл}^2 \sim \frac{\varepsilon_0 a_0^2}{2\varepsilon_2 E_{00}^2}$$

Положим

$$R_{нл} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 a_0^2}{2\varepsilon_2 E_{00}^2}} \quad (47)$$

## Самофокусировка (дефокусировка) в среде с кубической нелинейностью

Используем укороченное уравнение для пучка:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} A + \frac{ik}{2\varepsilon_0} (\varepsilon_2 |A|^2 - \varepsilon_0) A$$

Используя Гауссов пучок:

$$A_0(x, y, z = 0) = E_{00} e^{-\frac{r^2}{a_0^2}}$$

Введем  $f(z) = \frac{A(z)}{A_0(z)}$  – безразмерный радиус пучка.

Получим решение вида:

$$A(x, y, z) = B(x, y, z) e^{-\frac{r^2}{a^2}} = B(x, y, z) e^{-\frac{r^2}{a_0^2 f^2(z)}}$$

и перейдем к уравнению для  $f$ .

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{1}{l_d^2 f^3} - \frac{\text{sing} \varepsilon_2}{R_{нл}^2} \quad (48)$$

Обозначим за

$$\gamma \equiv \frac{1}{l_d^2} - \frac{\text{sing} \varepsilon_2}{R_{нл}^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{\gamma}{f^3} = -\frac{\gamma}{2} \frac{d}{df} \left( \frac{1}{f^2} \right)$$

$$2 \frac{df}{dz} \frac{d}{dz} \left( \frac{df}{dz} \right) = - \frac{\gamma}{2} \frac{df}{dz} \frac{d}{df} \left( \frac{1}{f^2} \right)$$

$$\left( \frac{df}{dz} \right)^2 + \frac{\gamma}{f^2} = \text{const} = \gamma$$

$$\frac{df}{dz} = \pm \sqrt{\gamma \left( 1 - \frac{1}{f^2} \right)}$$

$$z = \mp \frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma f^2 - \gamma} + \text{const}$$

$$\text{const} = 0 \text{ при } f(0) = 1$$

↓

$$f^2 = 1 + \left( \frac{1}{l_{\text{д}}^2} - \frac{\text{sing} \varepsilon_2}{R_{\text{НЛ}}^2} \right) z^2 \quad (49)$$

$$a(z) = f a_0$$





ФИЗИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ