



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРИЯ ВОЛН ЧАСТЬ 1

ЦЫСАРЬ
СЕРГЕЙ АЛЕКСЕЕВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ТАРКАЕВУ ЕЛИЗАВЕТУ ВЛАДИМИРОВНУ



Содержание

Лекция 1. Введение	5
1.1. Введение. Линейные волны	5
1.2. Волны в однородной изотропной среде	5
1.2.1. Акустические волны в идеальной сплошной среде	5
1.2.2. Линеаризация уравнений сплошной среды	7
Лекция 2. Волновое уравнение для возмущения давления	9
2.1. Волновое уравнение для возмущения давления P'	9
2.2. Скалярный потенциал колебательной скорости	10
2.3. Продольность звуковых волн	11
2.4. Инварианты одномерных уравнений гидродинамики	12
2.4.1. Связь параметров в плоской волне	13
2.5. Акустические волны в вязкой сплошной среде	14
Лекция 3. Акустические волны в вязкой сплошной среде	15
3.1. Сдвиговые волны в вязкой сплошной среде	15
3.2. Акустические (звуковые) волны в вязкой сплошной среде	17
Лекция 4. Энергия акустических возмущений в вязкой сплошной среде	19
4.1. Энергия акустических возмущений в вязкой сплошной среде	19
4.2. Профиль акустического сигнала в вязкой среде	21
4.2.1. Уравнение медленно меняющегося профиля	21
4.2.2. Асимптотическое решение на больших расстояниях	22
4.2.3. Об убывании энергии с расстоянием в приближении медленно меняющегося профиля	23
Лекция 5. Электромагнитные волны	24
5.1. Электромагнитные волны	24
5.1.1. Уравнения Максвелла	24
5.1.2. Уравнения Максвелла для однородных плоских волн в идеаль- ной среде	25
5.2. Поперечность электромагнитных волн в идеальной среде	25
5.2.1. Волновые инварианты уравнений Максвелла в идеальном ди- электрике	26
5.2.2. Связь \vec{E} и \vec{H} в волне, распространяющейся вдоль оси ξ	27
5.2.3. Баланс энергии электромагнитного возмущения в проводящей среде	28
Лекция 6. Электромагнитные волны в проводящей среде	29
6.0.1. Убывание энергии электромагнитного поля в проводящей среде	29
6.1. Связь \vec{S} и w в плоской электромагнитной волне	30
6.2. Тангенс угла потерь	30
6.3. Волновое уравнение для \vec{E} в проводящей среде	31

6.4. Дисперсионное соотношение для электромагнитных волн в проводящей среде	32
Лекция 7. Теория дисперсии	34
7.1. Дисперсия на примере волновых пакетов	34
7.1.1. Волновой пакет	34
7.2. Понятия дисперсии, фазовой и групповой скорости	35
7.2.1. Связь фазовой и групповой скоростей	36
7.3. Общее решение волнового уравнения для волнового пакета в диспергирующей среде	36
7.4. Первое приближение теории дисперсии	38
Лекция 8. Второе приближение теории дисперсии	40
8.1. Второе приближение теории дисперсии	40
8.1.1. Вывод уравнения для огибающей волнового пакета во втором приближении теории дисперсии	40
8.2. Гауссов волновой пакет во втором приближении теории дисперсии	41
8.3. Дифракция квазиплоских волновых пучков	43
8.4. Гауссов волновой пучок	44
Лекция 9. Открытые резонаторы	46
9.1. Открытые резонаторы	46
9.2. Границы устойчивости открытого резонатора	47
9.3. Поведение пучка в открытом резонаторе с одинаковыми зеркалами	48
9.4. Волны в одноатомных цепочках	49
Лекция 10. Предельный переход к сплошной среде	51
10.1. Предельный переход к сплошной среде	52
10.2. Фазовая скорость и групповая скорость в одноатомной цепочке	52
10.3. Двухатомные цепочки	53
Лекция 11. Волны в однородной анизотропной среде	56
11.1. Волны в однородной анизотропной среде	56
11.1.1. Взаимная ориентация векторов \vec{E} , \vec{H} , \vec{B} , \vec{D} , \vec{S} , \vec{k} в электрически анизотропной среде	56
11.2. Уравнение Френеля	57
11.2.1. Нормальные волны в одноосных кристаллах	58
Лекция 12. Волны в неоднородной анизотропной среде	61
12.1. Волны в неоднородной изотропной среде	61
12.2. Плоско-слоистые среды. Уравнение траектории луча	63

Лекция 1. Введение

1.1. Введение. Линейные волны

Волны - распространяющиеся в пространстве возмущения. Колебания могут служить источником волны. Корректно говорить о линейности волнового процесса, а не о линейности среды или волны, так как в одной и той же среде могут возникать как линейные, так и нелинейные волны, и наоборот, волна, линейная в одной среде, может быть нелинейной в другой. Например, в воздухе линейный процесс - обычные звуковые волны при разговоре, нелинейный - взрыв. И наоборот, при высокой интенсивности воздух может начать проявлять себя как нелинейная среда. Если мы возьмем мощный источник звука, дающий нелинейное распространение волны в воздухе, в другой среде, например, воде, волны могут распространяться линейно.

Возмущение в среде вызывает отклик среды, частицы среды начинают двигаться, если были неподвижны. Меняют траекторию, если до этого находились в движении и т.д. Пропорциональность между возмущением и откликом определяется свойствами среды.

Определение: Линейный волновой процесс - свойства среды не зависят от величины возмущения.

Определение: В линейном волновом процессе отклик среды линейно зависит от величины возмущения.

Характерная ошибка, которую допускают в определении линейного волнового процесса - смешивание двух определений. Например, что в линейном волновом процессе свойства среды зависят от возмущения или отклик среды не зависит от возмущения. Определение нелинейного волнового процесса очевидным образом следует из определения линейного волнового процесса. Нелинейные волновые процессы будут рассмотрены в следующей части курса.

Как следствие этих определений можно отметить, что для линейных волновых процессов выполняется принцип суперпозиции. То есть отклик на сумму возмущений равен сумме откликов.

1.2. Волны в однородной изотропной среде

Определение: Однородная среда - среда, свойства которой не зависят от радиус-вектора.

Определение: Изотропная среда - среда, свойства которой не зависят от направления волны.

1.2.1. идеальная среда

Под идеальной средой понимается бездиссипативная среда.

Определение: Сплошная среда - среда, в которой проводится усреднение по

большому числу молекул, но в малой области относительно масштабов волны области.

Иными словами, сплошную среду можно разбить на большое число объемов, в каждом из которых одновременно находится достаточно большое число частиц, так, чтобы это разбиение не ухудшало рассмотрение волны.

$$l \ll \sqrt[3]{dV} \ll \lambda$$

Где λ - длина волны, l - среднее расстояние между объемами, на которые мы разбили среду, dV - объем такого трехмерного участка среды. То есть мы считаем, что любая точка физического пространства это не отдельный атом или пустота, а именно среда или вещество. В действительности мы рассматриваем не точку, а некоторый объем dV вокруг этой точки.

У среды, с которой мы будем работать, можно выделить три параметра, которых нам будет достаточно. $P(x, y, z, t)$ - давление, $\rho(x, y, z, t)$ - плотность, $\vec{U}(x, y, z, t)$ - скорость упорядоченного движения частиц. При этом важно помнить, что при разбиении мы исключаем броуновское или хаотическое движение частиц, так как внутри каждого объема при усреднении по всем частицам оно будет равно нулю. Также напомним, что давление измеряется в паскалях, плотность в СИ измеряется в килограммах, деленных на кубический метр, скорость измеряется в метрах в секунду. В итоге мы имеем пять неизвестных параметров (два скаляра и три вектора), описывающих среду и определенных на поле (x, y, z, t) . То есть нам необходимо иметь систему из пяти уравнений. Если эти уравнения будут дифференциальными, то вместе с начальными и граничными условиями можно решить конкретную задачу. Если начальных и граничных условий нет, то можем получить общее решение. Эти уравнения образуют систему уравнений гидродинамики идеальной среды.

1. Уравнение непрерывности (закон сохранения массы)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) = 0$$

2. Уравнение Эйлера (уравнение движения, 2 закон Ньютона)

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \nabla) \vec{U} \right) = - \text{grad } P$$

3. Уравнение состояния (берется из термодинамики)

$$P = P(\rho)$$

Покажем, почему уравнение Эйлера по сути является вторым законом Ньютона. Как мы знаем, второй закон Ньютона:

$$m \vec{a} = \vec{F}.$$

Поделим это уравнение на dV .

$$\frac{m}{dV} \vec{a} = \frac{F}{dV} = f$$

Где f -объемная плотность внешних сил, $\frac{m}{dV} = \rho$. С другой стороны, $f = -\text{grad } P$ - трехмерный аналог закона Гука. Минус говорит о сопротивлении среды. Сил трения и вязкости нет из-за идеальности среды. Члены в скобках - полная производная по времени в Эйлеровых координатах, то есть ускорение. В итоге, как мы говорили ранее, имеем систему из пяти уравнений, где уравнение состояния и уравнение непрерывности - скалярные, а уравнение Эйлера - векторное.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \nabla) \vec{U} \right) = -\text{grad } p \\ P = P(\rho) \end{cases} \quad (1)$$

Посмотрим на систему уравнений (1). Как мы видим, она однородна и изотропна. Но линейна ли она? Мы должны проверить линейность по всем трем параметрам. Если мы увидим какой-то из параметров появляется больше, чем в первой степени, либо один параметр умноженный на другой, то система очевидно будет нелинейной.

Разложим каждый из параметров на равновесную компоненту и возмущение параметра.

$$\begin{aligned} P &= P_0 + P' \\ \rho &= \rho_0 + \rho' \\ \vec{U} &= \vec{U}_0 + \vec{U}_y \end{aligned}$$

Будем рассматривать исходно неподвижную среду ($\vec{U}_0 = 0$). Будем называть скорость движения частиц колебательной скоростью. $\vec{U}_y = \vec{U}$ - колебательная скорость частиц. Для того, чтобы мы могли перейти из нашей нелинейной системы в линейную, проведя процедуру линеаризации, нам необходимо, чтобы возмущение параметра было мало относительно равновесного значения. Или, иначе, нам необходимо, чтобы свойства среды не зависели от величины этих малых возмущений. В линейной части будем рассматривать:

$$\frac{P'}{P_0} \sim \frac{\rho'}{\rho_0} \sim \frac{|\vec{U}|}{C_0} \sim \mu \ll 1.$$

Где C_0 - некий масштаб скорости.

1.2.2. Линеаризация уравнений сплошной среды

Подставим разложенные параметры в систему уравнений (1) .

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 \vec{U}) + \text{div}(\rho' \vec{U}) = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \rho_0 (\vec{U} \nabla) \vec{U} + \rho' \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \rho' (\vec{U} \nabla) \vec{U} = -\text{grad } P_0 - \text{grad } P' \\ P_0 + P' = P(\rho_0 + \rho') = P(\rho_0) + \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} \rho' + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right|_{\rho_0} \rho'^2 + \dots \end{cases}$$

Где последнее уравнение мы разложили в ряд Тейлора вблизи точки ρ_0 по малому параметру ρ' .

Нетрудно заметить, что $\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$, так как $\rho_0 = const$. Оценим все слагаемые по порядку малости. В первом уравнении все члены, за исключением $\text{div}(\rho' \vec{U})$ имеют порядок малости μ . $\text{div}(\rho' \vec{U})$ имеет порядок малости μ^2 . Поэтому мы можем его отбросить. Во втором уравнении слагаемые $\rho_0(\vec{U} \nabla) \vec{U}, \rho' \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$ имеют порядок малости μ^2 , слагаемое $\rho'(\vec{U} \nabla) \vec{U}$ имеет порядок малости μ^3 . Их мы тоже не рассматриваем. Также обратим внимание, что $\text{grad } P_0 = 0$, так как равновесные величины все постоянные. В третьем слагаемом по смыслу ряда Тейлора можем сократить P_0 в левой части с $P(\rho_0)$ в правой части. Аналогично, не учитываем слагаемые, более чем первого порядка малости. Таким образом, мы получили линейризованную систему уравнений гидродинамики (2).

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \vec{U} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = - \text{grad } P' \\ P' = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} \rho' \equiv C_0^2 \rho' \end{cases} \quad (2)$$

Где C_0 - характеристика жесткости или упругости среды.

Лекция 2. Волновое уравнение для возмущения давления

2.1. Волновое уравнение для возмущения давления P'

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{U} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = -\operatorname{grad} P' \\ P' = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} \rho' \equiv C_0^2 \rho' \end{cases} \quad (3)$$

Как из нашей системы уравнений получить волновое уравнение для P' ? Исключим из системы ρ' и \vec{U} . Скорее всего, мы опять получим дифференциальное уравнение. Из третьего уравнения системы (3) выразим возмущение плотности и подставим его в первое уравнение системы (3).

$$\begin{cases} \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial P'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{U} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = -\operatorname{grad} P' \end{cases} \quad (4)$$

Возьмем дивергенцию от второго уравнения системы (4) и производную по времени от первого уравнения, чтобы затем вычесть одно из другого и, таким образом, исключить \vec{U} .

$$\begin{cases} \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} + \rho_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = 0 \\ \rho_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \operatorname{div} \operatorname{grad} P' = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Как мы уже знаем, дивергенция градиента это оператор Лапласа. Вычитая из второго уравнения первое получаем волновое уравнение.

$$\Delta P' - \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

Еще одна возможная запись этого уравнения - через оператор Даламбера:

$$\square P' = 0.$$

Анализ общего решения проведем позже. Волновые уравнения для других параметров - ρ' и \vec{U} имеют такой же вид:

$$\Delta \rho' - \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = 0, \quad (7)$$

$$\Delta \vec{U} - \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = 0, \quad (8)$$

Получается, что в нашей среде все параметры ведут себя схожим волновым образом, а влияние среды в этих уравнениях отражается в коэффициенте жесткости среды, который в волновом уравнении стоит на месте скорости распространения волны. Получаем, что введенное нами C_0 - скорость звука.

2.2. Скалярный потенциал колебательной скорости

Исключив давление из системы (3) и получим следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{U} = 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + C_0^2 \operatorname{grad} \rho' = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Возьмем ротор от второго уравнения системы (9).

$$\rho_0 \frac{\partial \operatorname{rot} \vec{U}}{\partial t} + C_0^2 \operatorname{rot} \operatorname{grad} \rho' = 0.$$

Ротор градиента равен нулю по определению дифференциальных операторов. Отсюда следует, что ротор \vec{U} равен некоторой константе. Пользуясь возможностью выбирать начальные условия, положим \vec{U} равным нулю.

$$\operatorname{rot} \vec{U} = \operatorname{const} = 0$$

Таким образом, мы пришли к тому, что ротор некоторого векторного поля во все моменты времени во всех точках пространства равен нулю, то есть можем сказать, что это поле можно представить в виде градиента некоторого скалярного поля. Это скалярное поле называется скалярным потенциалом.

$$\vec{U} = -\operatorname{grad} \phi \quad (10)$$

Подставим новую запись для \vec{U} (10) в систему (9).

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} - \rho_0 \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = 0, \\ -\rho_0 \frac{\partial \operatorname{grad} \phi}{\partial t} + C_0^2 \operatorname{grad} \rho' = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Теперь, если мы проинтегрируем второе уравнение системы (11) по координатам, то градиент пропадет и мы получим уравнение:

$$-\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + C_0^2 \rho' = \operatorname{const}. \quad (12)$$

Для того, чтобы исключить ρ' , смотря на первое уравнение системы (11) и уравнение (12), видим, что остается только взять производную по времени от уравнения (12). На самом деле, константа интегрирования в правой части в общем случае при взятии производной по времени не дает ноль, но мы примем, что все начальные возмущения равны нулю.

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + C_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение системы (11) и получим выражение только для ϕ .

$$\Delta \phi - \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (13)$$

Получили точно такое же волновое уравнение. С помощью этого волнового уравнения для потенциала можно показать важный факт, что акустические волны являются продольными.

2.3. Продольность звуковых волн

Так как мы уже знаем, что $\vec{U} = -\text{grad } \phi$ в идеальной сплошной среде. Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль некоторого направления \vec{m} , такую, что $|\vec{m}| = 1$ как изображено на рисунке 1.

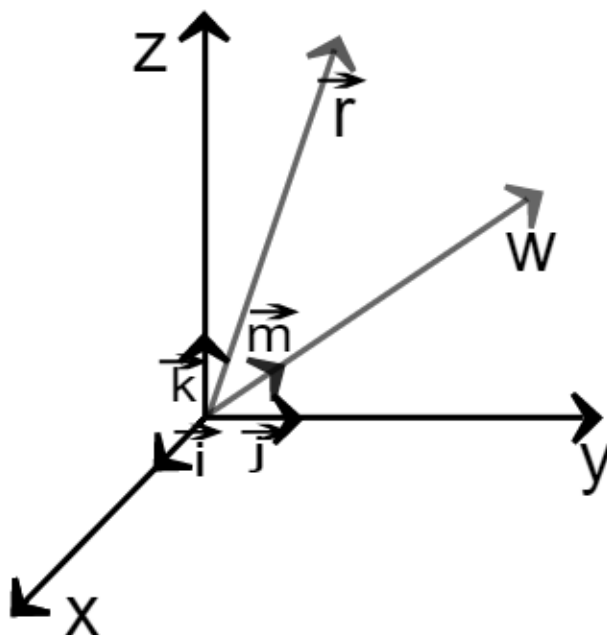


Рисунок 1 – Введенная система координат

Введем ось w вдоль направления вектора \vec{m} следующим образом:

$$w = (\vec{m}\vec{r}).$$

Где \vec{r} - некоторый радиус-вектор. Так как волна плоская, ее фронт тоже плоский, то значения всех параметров волны будут зависеть только от значения проекции радиус-вектора на ось w . То есть, для данной волны:

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi(w, t) = \phi(w(\vec{r}), t).$$

Рассмотрим градиент потенциала.

$$\text{grad } \phi = \vec{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Рассмотрим, например, компоненту вдоль оси x как производную сложной функции.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi(w(x, y, z), t)}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial w} m_x$$

Таким образом мы получаем следующее выражение для градиента:

$$\text{grad } \phi = \vec{m} \frac{\partial \phi}{\partial w} = -\vec{U} \quad (14)$$

То есть вектора параллельны - $\vec{U} \parallel \vec{m}$. Откуда следует, что частицы колеблются только вдоль одного направления, а следственно, звуковые волны являются продольными в идеальной среде. Это следствие того, что поле скорости потенциально.

2.4. Инварианты одномерных уравнений гидродинамики

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x . Запишем систему уравнений гидродинамики (9) в одномерном виде.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \\ \rho_0 \frac{\partial U}{\partial t} + C_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Для того, чтобы получить инварианты, нам нужно привести систему (15) к виду, из которого можно выделить полный дифференциал. Сперва приведем их к одной размерности. Для этого поделим первое уравнение системы на ρ_0 , а второе на $\rho_0 C_0$, затем вычтем и сложим их.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \right) + \frac{\partial U}{\partial x} \pm \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U}{C_0} \right) + C_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \right) \right) = 0$$

Вынесем отдельно производные по времени и по пространству.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \pm \frac{U}{C_0} \right) \pm C_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \pm \frac{U}{C_0} \right) = 0$$

Как мы видим, скобки после производных абсолютно одинаковые. Введем некоторые функции - искомые инварианты:

$$I_1 \equiv \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{U}{C_0}, I_2 \equiv \frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{U}{C_0}.$$

Тогда получаем два соотношения - (16) и (17).

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} + C_0 \frac{\partial I_2}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} - C_0 \frac{\partial I_2}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

Общее решение этих уравнений относительно переменных x и t будет выглядеть следующим образом:

$$I_1 = g_1 \left(t - \frac{x}{C_0} \right), \quad (18)$$

$$I_2 = g_2(t + \frac{x}{C_0}). \quad (19)$$

Вид общих решений (18) и (19) - бегущее возмущение, причем первое решение соответствует возмущению, распространяющемуся вдоль оси, а второе против оси.

2.4.1. Связь параметров в плоской волне

Рассмотрим волну, распространяющуюся в положительном направлении вдоль оси, то есть компоненты, распространяющейся против оси нет и второй (левый) инвариант будет нулевым. Тогда:

$$I_2 = \frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{U}{C_0} = 0.$$

Откуда следует (20):

$$\frac{U}{C_0} = \frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{P'}{\rho_0 C_0^2}. \quad (20)$$

Мы получили связь всех трех параметров в плоской волне, распространяющейся вправо.

Рассмотрим волну, распространяющуюся в отрицательном направлении относительно оси, то есть компоненты, распространяющейся по оси нет и первый (правый) инвариант будет нулевым. Тогда:

$$I_1 = \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{U}{C_0} = 0.$$

Откуда следует (21):

$$\frac{U}{C_0} = -\frac{\rho'}{\rho_0} = -\frac{P'}{\rho_0 C_0^2}. \quad (21)$$

Мы получили связь всех трех параметров в плоской волне, распространяющейся влево.

Обобщая, получаем выражение (22):

$$\pm \frac{U}{C_0} = \frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{P'}{\rho_0 C_0^2} \quad (22)$$

Еще одно полезное следствие - акустический закон Ома. Вспомним обычный закон Ома:

$$U = RI$$

Напряжение пропорционально давлению, поток заряда связан с потоком вещества - U , а $\rho_0 C_0$ - акустическое сопротивление среды или импеданс.

Тогда получаем:

$$P' = \pm \rho_0 C_0 U$$

2.5. Акустические волны в вязкой сплошной среде

Система уравнений гидродинамики с учетом вязкости без линеаризации (23):

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{U}) = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \nabla) \vec{U} \right) = -\operatorname{grad} P + \eta \Delta \vec{U} + \left(\xi + \frac{2}{3} \eta \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{U} \\ P = P(\rho, S) \end{cases} \quad (23)$$

Второе уравнение этой системы, все еще являющееся уравнением движения называется уравнением Навье-Стокса. Физический смысл слагаемых в правой части уравнения Навье-Стокса - первое слагаемое - объемная плотность силы упругости, оставшиеся два - объемная плотность вязких сил. ξ - коэффициент объемной вязкости, η - коэффициент сдвиговой вязкости.

Лекция 3. Волны в вязкой сплошной среде

Как мы понимаем, действие вязких сил будет приводить к нагреванию системы. Как следствие этого будет увеличиваться энтропия. Но мы будем считать, что диссипации, действие вязких сил мало. То есть на масштабе волны изменение амплитуды будет малым. При малой вязкости можем рассмотреть адиабатическое приближение.

$$P = P_0 + P'$$

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

$$\vec{U} = 0 + \vec{U}$$

Также считаем, что в такой задаче с малой вязкостью энтропия не меняется $-P = P(\rho)$. Рассматриваем малые возмущения:

$$\frac{P'}{P_0} \sim \frac{\rho'}{\rho_0} \sim \frac{|\vec{U}|}{C_0} \sim \mu \ll 1.$$

Тогда можем опять линеаризовать систему (23).

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\vec{U}) = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = -\operatorname{grad} P' + \eta \Delta \vec{U} + (\xi + \frac{2}{3}\eta) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{U} \\ P' = C_0^2 \rho' \end{cases}$$

Где $C_0^2 \equiv \frac{\partial P}{\partial \rho}|_{\rho_0}$.

Теорема Гельмгольца - любое векторное поле, обращающееся в ноль на бесконечности, можно представить в виде суммы двух компонент - потенциальной и завихренной.

$$\vec{U} = \operatorname{grad} \phi + \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{U}_l + \vec{U}_t, \operatorname{div} \vec{A} = 0.$$

3.1. Сдвиговые волны в вязкой сплошной среде

Рассмотрим только одну из двух компонент:

$$\vec{U} = \vec{U}_t = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

Учтем этот факт в системе (23) и получим систему (24).

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} \equiv 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \eta \Delta \vec{U} \\ P' = C_0^2 \rho' \end{cases} \quad (24)$$

Из первого уравнения этой системы и из начальных условий следует, что:

$$\rho' = \operatorname{const} = 0.$$

Второе уравнение этой системы - волновое уравнение сдвиговых волн в вязкой среде.

Рассмотрим граничные условия, такие, что:

$$\vec{U}(x, y, 0) = (U_0 e^{i\omega t}, 0, 0).$$

Их можно представить себе как плоскость, движущуюся гармонически вдоль оси x . Из соображений симметрии видно, что $U_y = 0$. Следовательно, $U_x, U_z = U_x(z), U_z(z)$. Также знаем, что:

$$\operatorname{div} \vec{U} = \operatorname{div} \vec{U}_x = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0.$$

Откуда следует, что:

$$\frac{\partial U_z(z)}{\partial z} = 0, z = \text{const} = 0.$$

Таким образом получаем, что сдвиговые волны имеют вид:

$$\vec{U} = (U_x(z), 0, 0).$$

Подставим полученное выражение в волновое уравнение.

$$\rho_0 \frac{\partial U_x}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \quad (25)$$

Будем искать решение в виде суперпозиции плоских гармонических волн. Рассмотрим одну рассмотрим одну плоскую гармоническую волну, движущуюся вдоль оси z вправо.

$$U_x = U_0 e^{-i(\omega t - kx)}$$

Подставим ее в волновое уравнение (25).

$$-i\omega \rho_0 U_0 e^{-i(\omega t - kx)} = \eta (ik)^2 U_0 e^{-i(\omega t - kx)}$$

Откуда получаем зависимость $k(\omega)$ - дисперсионное соотношение:

$$k(\omega) = +\sqrt{\frac{i\omega\rho_0}{\eta}} = k' + ik'' = \sqrt{\frac{\omega\rho_0}{2\eta}} + i\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{2\eta}}, k' = k''$$

Мы получили, что $k' = k''$. То есть они ведут себя одинаковым образом, зависят от корня частоты. Причина существования и затухания таких волн в вязкой сплошной среде - наличие сдвиговой вязкости. Так как k' и k'' одинаковые, то затухание будет очень сильное, так как именно k'' отвечает за затухание. Посмотрим, насколько сильным будет затухание на масштабе длины волны $z = \lambda$.

$$e^{-k''z} = e^{-k''\lambda} = e^{-2\pi} \approx \frac{1}{540}$$

То есть сдвиговые волны в вязкой среде практически не распространяются.

3.2. Акустические (звуковые) волны в вязкой сплошной среде

Тогда:

$$\vec{U} = \vec{U}_l = \text{grad } \phi, \quad \vec{U}_t = 0.$$

Запишем линеаризованную систему уравнений гидродинамики (23) в виде (26).

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \vec{U} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = -C_0^2 \text{grad } \rho' + \eta \Delta \vec{U} + (\xi + \frac{\eta}{3}) \text{grad div } \vec{U} = \\ = -C_0^2 \text{grad } \rho' + \eta \Delta \vec{U} + b \Delta \vec{U} \\ P' = C_0^2 \rho' \end{cases} \quad (26)$$

Где $b = \xi + \frac{\eta}{3}$. Получим волновое уравнение. Для этого возьмем от второго уравнения системы (26) производную по времени.

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} + C_0^2 \text{grad } \frac{\partial \rho'}{\partial t} = b \Delta \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$$

Подставим в это выражение первое уравнение системы (26).

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} - \rho_0 C_0^2 \Delta \vec{U} = b \Delta \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$$

Домножением на коэффициент $-\frac{1}{\rho_0 C_0^2}$ получаем волновое уравнение продольных или звуковых волн в вязкой среде (27):

$$\Delta \vec{U} - \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = -\frac{b}{\rho_0 C_0^2} \Delta \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right) \quad (27)$$

Рассмотрим плоскую гармоническую волну вдоль оси x в виде:

$$\vec{U} = \vec{U}_0 e^{i(\omega t - kx)}.$$

Подставим такой вид волны в волновое уравнение (27).

$$-k^2 - \frac{1}{C_0^2} = -\frac{b}{\rho_0 C_0^2} (-k^2) (-i\omega)$$

Преобразуем его:

$$k^2 \left(1 - \frac{i\omega b}{\rho_0 C_0^2} \right) = \frac{\omega^2}{C_0^2}$$

Получаем дисперсионное соотношение (58):

$$k^2 = \frac{\omega^2}{C_0^2} \frac{1}{1 - \frac{i\omega b}{\rho_0 C_0^2}} \quad (28)$$

Рассматриваем волну вдоль оси вправо, можем представить волновое число в виде:

$$k = k' + k''$$

$$k^2 = k'^2 - k''^2 + 2ik'k''$$

Тогда умножим и разделим дисперсионное соотношение (58) на $1 + \frac{i\omega b}{\rho_0 C_0^2}$.

$$k^2 = \frac{\omega^2}{C_0^2} \frac{1 + \frac{i\omega b}{\rho_0 C_0^2}}{1 + \frac{\omega^2 b^2}{\rho_0^2 C_0^4}}$$

Можем выделить реальную и мнимую часть дисперсионного соотношения. Тогда получаем, что:

$$\begin{cases} k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{C_0^2} \frac{1}{1 + \frac{\omega^2 b^2}{\rho_0^2 C_0^4}} \equiv \beta \\ 2k'k'' = \beta \frac{\omega b}{\rho_0 C_0^2} \end{cases} \quad (29)$$

Из системы (29) можем получить k' и k'' .

$$k' = \frac{\omega}{\sqrt{2}C_0} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{\rho_0 C_0^2}\right)^2 \omega^2} + 1}{1 + \left(\frac{b\omega}{\rho_0 C_0^2}\right)^2}}$$

$$k'' = \frac{\omega}{\sqrt{2}C_0} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{\rho_0 C_0^2}\right)^2 \omega^2} - 1}{1 + \left(\frac{b\omega}{\rho_0 C_0^2}\right)^2}}$$

Нетрудно заметить, что при больших частотах:

$$k' \approx k'' \approx \sqrt{\omega}.$$

При малых частотах:

$$k' \approx \omega$$

$$k'' \approx \omega^2$$

Аналогично, на высоких частотах, звуковые волны в среде не распространяются. Чем больше разница между k' и k'' , тем лучше распространяются волны.

Лекция 4. Энергия акустических возмущений в вязкой сплошной среде

4.1. Энергия акустических возмущений в вязкой сплошной среде

Запишем линеаризованную систему уравнений гидродинамики (30).

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0(\nabla \vec{U}) = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \eta \Delta \vec{U} - \nabla P' + (\xi + \frac{\eta}{3}) \nabla(\nabla \vec{U}) \\ P' = C_0^2 \rho' \end{cases} \quad (30)$$

Где ξ - коэффициент объемной вязкости, η - коэффициент сдвиговой вязкости, $C_0^2 \equiv \frac{dP}{d\rho}|_{\rho_0}$. Все обозначения аналогичны введенным ранее.

Рассмотрим мощность сил трения в единице объема:

$$A_{vyazk} = (\vec{f}_{vyazk} \vec{U})$$

Выделим во втором уравнении системы (30) объемную плотность вязких сил и подставим в выражение для мощности, затем подставим первое уравнение системы (30) в получившееся выражение.

$$\begin{aligned} \vec{f}_{vyazk} &= \rho_0 \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla P' \\ A_{vyazk} &= (\rho_0 \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla P') \vec{U} = \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\rho_0 \vec{U}^2}{2}) + \nabla(\rho' \vec{U}) + \frac{P'}{\rho_0 C_0^2} \frac{\partial P'}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\rho_0 \vec{U}^2}{2} + \frac{P'^2}{2\rho_0 C_0^2}) + \nabla(P' \vec{U}) \end{aligned}$$

Выделим w - объемную плотность энергии (31) и \vec{S} - вектор плотности потока энергии или вектор Умова-Пойнтинга (32):

$$w = \frac{\rho_0 \vec{U}^2}{2} + \frac{P'^2}{2\rho_0 C_0^2} \quad (31)$$

$$\vec{S} = (P' \vec{U}) \quad (32)$$

Как можно заметить, первое слагаемое в выражении для объемной плотности энергии (31) несет в себе смысл кинетической энергии в единице объема, второе слагаемое - потенциальной энергии в единице объема.

С одной стороны мы получили:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div} \vec{S} = A_{vyazk}$$

С другой стороны,

$$A_{vyazk} = (\vec{f}_{vyazk} \vec{U}) = \eta(\Delta \vec{U} \vec{U}) + (\xi + \frac{\eta}{3})(\nabla(\nabla \vec{U}) \vec{U})$$

Распишем покомпонентно:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_n}$$

$$(\nabla \vec{U}) = \frac{\partial U_n}{\partial x_n}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} A_{vyazk} &= \eta U_n \frac{\partial^2 U_n}{\partial x_m^2} + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right) \left(U_m \frac{\partial^2 U_n}{\partial x_m \partial x_n} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\eta U_n \frac{\partial U_n}{\partial x_m} \right) - \eta \frac{\partial U_n}{\partial x_m} \frac{\partial U_n}{\partial x_m} + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\left(\xi + \frac{\eta}{3}\right) U_m \frac{\partial U_n}{\partial x_n} \right) - \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right) \frac{\partial U_m}{\partial x_m} \frac{\partial U_n}{\partial x_n} \end{aligned}$$

Выделим слагаемые с общей производной

$$A_{vyazk} = \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\eta U_n \frac{\partial U_m}{\partial x_m} + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right) U_m \frac{\partial U_n}{\partial x_n} \right) - \left(\eta \left(\frac{\partial U_m}{\partial x_m} \right)^2 + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right) \left(\frac{\partial U_n}{\partial x_n} \right)^2 \right)$$

Введем следующие обозначения:

$$Q = \eta \left(\frac{\partial U_m}{\partial x_m} \right)^2 + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right) \left(\frac{\partial U_n}{\partial x_n} \right)^2, \quad H_m = \eta U_n \frac{\partial U_m}{\partial x_m} + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right) U_m \frac{\partial U_n}{\partial x_n}. \quad (33)$$

Соответственно получили, что:

$$A_{vyazk} = \operatorname{div} \vec{H} - Q = \frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S}. \quad (34)$$

Заметим, что Q - неотрицательная величина. Рассмотрим полную энергию возмущений - $W = \int_{\infty} w dV$

Покажем, что полная энергия возмущений в вязкой среде убывает. Для этого достаточно рассмотреть производную полной энергии по времени.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_{\infty} \frac{\partial w}{\partial t} dV = \int_{\infty} \operatorname{div}(\vec{H} - \vec{S}) dV - \int_{\infty} Q dV$$

Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса.

$$\oint_{\sigma_{\infty}} (\vec{H} - \vec{S}) d\sigma = 0$$

Так как на бесконечности нет возмущений. Второй интеграл неотрицательный, так как в подынтегральной величине только квадраты вещественных чисел. Тогда, учитывая знак минус, получаем, что:

$$\frac{\partial W}{\partial t} < 0.$$

Что мы и хотели доказать.

4.2. Профиль акустического сигнала в вязкой среде

Дисперсия - зависимость свойств среды от частоты.

Нам будет удобно работать в системе координат с "бегущим временем".

$$\tau = t - \frac{x}{c_0}$$

4.2.1. Уравнение медленно меняющегося профиля

Мы уже знаем, как выглядит волновое уравнение в вязкой среде.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{C_0} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{b}{\rho_0 C_0^2} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \quad (35)$$

Рассматриваем продольные звуковые волны. Воспользуемся методом медленно меняющегося профиля. Он заключается в рассмотрении того же профиля в новой системе координат.

$$U(x, t) = U(x', \tau)$$

Где

$$\tau = t - \frac{x}{C_0}, \quad x' = \mu x, \quad \mu \ll 1$$

При распространении в среде профиль такого сигнала на характерном масштабе меняется слабо. Явная зависимость профиля от x параметрическая и медленная. Найдем, как будет выражаться производные из уравнения (35).

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x', \tau)}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x'} \mu + \frac{\partial U}{\partial \tau} \frac{1}{C_0} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial x'} - \frac{1}{C_0} \frac{\partial U}{\partial \tau} \right) = \mu^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} - \frac{2\mu}{C_0} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial x'} + \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \end{aligned}$$

Подставим полученные производные в волновое уравнение (35) и сократим одинаковые слагаемые.

$$\mu^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} - \frac{2\mu}{C_0} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial x'} = -\frac{b}{\rho_0 C_0^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\mu^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} - \frac{2\mu}{C_0} \frac{\partial^2 U}{\partial x' \partial \tau} + \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \right)$$

Оставим члены до первого порядка малости. b - тоже мало, так как в нашем приближении вязкость малая. Тогда получим:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{2\mu}{C_0} \frac{\partial U}{\partial x'} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{b}{\rho_0 C_0^4} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \right). \quad (36)$$

Проинтегрируем (36) по времени и умножим на константу $\frac{C_0}{2}$.

$$\mu \frac{\partial U}{\partial x'} = \frac{b}{2\rho C_0^3} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}$$

Константу интегрирования примем равной нулю, исходя из начальных условий. Перейдем к старой системе координат по x .

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{b}{2\rho_0 C_0^3} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \quad (37)$$

Уравнение (37) и есть уравнение медленно меняющегося профиля. Это уравнение параболического типа или эволюционное уравнение типа диффузии. Общее решение уравнений такого типа известно. Например, через формулу Грина.

$$U(x, \tau) = \int U_0(\tau') G(\tau - \tau') d\tau'$$

Где G - функция Грина.

$$G(\tau - \tau') = \frac{1}{\sqrt{4\pi D x}} e^{-\frac{(\tau - \tau')^2}{4D x}}$$

А U_0 - профиль на границе.

$$U_0(\tau) = U(x = 0, \tau)$$

Где $\frac{b}{2\rho_0 C_0^3} = D$ - коэффициент диффузии.

4.2.2. Асимптотическое решение на больших расстояниях

Рассмотрим U_0 такой, что:

$$\int U_0(\tau) d\tau \neq 0.$$

То есть переносимый волной импульс не равен нулю.

$$U(x, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(\tau') e^{-\frac{\tau'^2 - 2\tau\tau'}{4D x}} e^{-\frac{\tau^2}{4D x}} \frac{1}{\sqrt{4\pi D x}} d\tau'$$

Последние два множителя - константы. Вынесем их за знак интеграла.

$$U(x, \tau) = e^{-\frac{\tau^2}{4D x}} \frac{1}{\sqrt{4\pi D x}} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(\tau') e^{-\frac{\tau'^2 - 2\tau\tau'}{4D x}} d\tau'$$

Видим, что при x стремящемся к бесконечности, экспонента под знаком интеграла стремится к единице.

Введем обозначение:

$$N \equiv \int U_0(\tau) d\tau \neq 0$$

Тогда получаем, что при больших x , U ведет себя как функция Гаусса.

$$U(x, \tau) = \frac{N}{\sqrt{4\pi D x}} e^{-\frac{\tau^2}{4Dx}}$$

То есть на больших расстояниях исходный профиль забывается. Если мы возьмем какой-то импульс, то на больших расстояниях, каким бы он изначально ни был, в итоге он станет Гауссовым

Посмотрим на эволюцию импульса с расстоянием. Мы знаем, что :

$$\frac{\partial N}{\partial x} \approx \frac{\partial U}{\partial x} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} D \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} d\tau = D \frac{\partial U}{\partial \tau} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0 \quad (38)$$

Так как на бесконечности возмущения нет. Получили закон сохранения импульса (38).

4.2.3. Об убывании энергии с расстоянием в приближении медленно меняющегося профиля

Мы знаем, что:

$$w = \int U^2 d\tau$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \approx \int \frac{\partial U^2}{\partial x} d\tau = 2 \int \frac{\partial}{\partial \tau} \left(U \frac{\partial U}{\partial \tau} \right) d\tau - \int \frac{\partial U}{\partial \tau} \frac{\partial U}{\partial \tau} d\tau$$

Первое слагаемое в подстановках обращается в ноль, а второе всегда отрицательное, то есть объемная плотность энергии убывает с расстоянием.

Лекция 5. Электромагнитные волны

5.1. Электромагнитные волны

5.1.1. Уравнения Максвелла

Запишем систему уравнений Максвелла (39):

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \end{cases} \quad (39)$$

Для того, чтобы наша задача стала разрешимой, необходимо добавить к системе (39) материальные уравнения. Тогда все необходимые нам уравнения можно записать в виде системы (40):

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases} \quad (40)$$

Также вспомним дифференциальный закон сохранения заряда (41):

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (41)$$

Где: \vec{j} - плотность тока свободных зарядов, σ - проводимость, \vec{D} - электрическая индукция, ε - диэлектрическая проницаемость, μ - магнитная проницаемость. Дивергенция вектора \vec{B} означает, что магнитных зарядов нет, все источники электрического поля задаются наличием объемной плотности зарядов ρ . Первое уравнение системы - обобщенный вид закон Био-Савара - источниками завихренного магнитного поля являются токи свободных и связанных зарядов. Второе уравнение - обобщенный закон Фарадея. Минус обусловлен правилом Ленца. Вышеприведенная система (40) была записана в системе СГС, перепишем ее в системе СИ.

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \\ \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \end{cases} \quad (42)$$

Для использования системы в СИ, необходимо помнить значения констант - ε_0 и μ_0 . $\varepsilon = 8.85 * 10^{-12} \frac{F}{m}$. Получить вторую константу можно из выражения:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \rightarrow \mu_0 = \frac{1}{c^2 \varepsilon_0}$$

Упругие волны могли существовать только в среде, в случае электромагнитных волн требований к среде нет, они могут распространяться и в вакууме.

5.1.2. Уравнения Максвелла для однородных плоских волн в идеальной среде

Под идеальностью среды в первую очередь подразумевается отсутствие проводимости - $\sigma = 0$. Плоская волны - волна, у которой плоский волновой фронт. Однородная плоская волна - плоская волна, у которой амплитуда равномерно распределена по всему волновому фронту. Соответственно, мы снова можем пользоваться принципом суперпозиции и раскладывать пространственную и временную формы по любому удобному базису. Пространственное разложение нам удобно проводить по плоскостям, временное - по гармоническим. Также подразумеваем однородность и изотропность пространства - ε и μ - константы. Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль направления $\xi = (\vec{m}\vec{r})$, $|\vec{m}| = 1$. Аналогично тому, как мы делали во второй лекции. Перепишем уравнения Максвелла для этого случая. Для этого вспомним:

$$\text{rot } \vec{H} = [\nabla, \vec{H}] = [\nabla, \vec{H}(\xi, (\vec{r}))] = [\nabla_\xi, \frac{\partial \vec{H}}{\partial \xi}] = [\vec{m}, \frac{\partial \vec{H}}{\partial \xi}] = \frac{\partial}{\partial \xi} [\vec{m}, \vec{H}],$$

$$\text{div } \vec{D} = (\nabla, \vec{D}) = (\nabla_\xi, \frac{\partial \vec{D}}{\partial \xi}) = \frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{m}, \vec{D}).$$

Учитывая эти выражения и тот факт, что тока в идеальной среде нет, можем записать уравнения Максвелла (40). Также рассмотрим случай, когда $\rho = 0$.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} [\vec{m}, \vec{H}] = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} [\vec{m}, \vec{E}] = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \mu \frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{m}, \vec{H}) = 0 \\ \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{m}, \vec{E}) = 0 \end{cases} \quad (43)$$

Покажем, что электромагнитные волны в идеальной среде поперечные.

5.2. Поперечность электромагнитных волн в идеальной среде

Нам нужно показать, что скалярные произведения в двух последних уравнениях системы (43) равны нулю. Домножим первые два уравнения системы (43) скалярно на \vec{m} .

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} \vec{m}[\vec{m}, \vec{H}] = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{m} \vec{E}) \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \vec{m}[\vec{m}, \vec{E}] = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{m} \vec{H}) \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{m}, \vec{H}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{m}, \vec{E}) = 0 \end{cases} \quad (44)$$

Следовательно:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{m}, \vec{H}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\vec{m}, \vec{E}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{m}, \vec{H}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{m}, \vec{E}) = 0 \end{cases}$$

Для возмущений ($\vec{E}, \vec{H} \neq \text{const}$) из вышезаписанного следует, что

$$(\vec{m} \vec{E}) = (\vec{m} \vec{H}) = 0.$$

А это означает, что электромагнитные волны поперечные.

$$\begin{aligned} \vec{m} &\perp \vec{H} \\ \vec{m} &\perp \vec{E} \end{aligned}$$

5.2.1. Волновые инварианты уравнений Максвелла в идеальном диэлектрике

Идеальный диэлектрик линеен, изотропен и однороден, а проводимость и плотность свободных зарядов в нем равна нулю.

$$\sigma = 0, \rho = 0, \varepsilon, \mu = \text{const}$$

Рассмотрим компоненту возмущения, распространяющуюся вдоль направления $\xi = (\vec{m} \vec{r})$, $|\vec{m}| = 1$. Для этого преобразуем систему уравнений (43). Умножим второе уравнение системы (43) векторно на $\sqrt{\varepsilon} \vec{m}$ слева.

$$\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} [\vec{m}[\vec{m}, \vec{E}]] = -\frac{\mu \sqrt{\varepsilon}}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{m} \vec{H}]$$

Вспомним правило раскрытия двойного векторного произведения:

$$[\vec{m}[\vec{m} \vec{E}]] = \vec{m}(\vec{m} \vec{E}) - \vec{E}(\vec{m} \vec{m}) = -\vec{E}.$$

Аналогично поступаем со вторым уравнением системы (43). Тогда получаем:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [\vec{m} \sqrt{\mu} \vec{H}] = \frac{\sqrt{\mu \varepsilon}}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\varepsilon} \vec{E}), \quad (45)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\sqrt{\varepsilon} \vec{E}) = \frac{\sqrt{\mu \varepsilon}}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{m}, \sqrt{\mu} \vec{H}]. \quad (46)$$

Сложим и вычтем уравнения (45) и (46).

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sqrt{\varepsilon} \vec{E} \pm [\vec{m} \sqrt{\mu} \vec{H}] \right) \mp \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{\varepsilon} \vec{E} \pm [\vec{m} \sqrt{\mu} \vec{H}] \right) = 0$$

Ведem обозначения:

$$V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

$$I_{1,2} = \sqrt{\varepsilon} \vec{E} \pm [\vec{m} \sqrt{\mu} \vec{H}]$$

Какой инвариант соответствует какому направлению? Запишем получившиеся уравнения переноса.

$$\begin{cases} \frac{\partial I_1}{\partial \xi} - \frac{1}{V} \frac{\partial I_1}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial I_2}{\partial \xi} + \frac{1}{V} \frac{\partial I_2}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

Тогда видим, что:

$$I_1 = I_1 \left(t + \frac{\xi}{V} \right), \quad (47)$$

$$I_2 = I_2 \left(t - \frac{\xi}{V} \right). \quad (48)$$

Уравнение (47) - инвариант при распространении влево или против направления оси. Уравнение (48) - инвариант при распространении вправо или по направлению оси.

То есть:

$$I_1 = I_1 \left(t + \frac{\xi}{V} \right) = \sqrt{\varepsilon} \vec{E} + [\vec{m} \sqrt{\mu} \vec{H}],$$

$$I_2 = I_2 \left(t - \frac{\xi}{V} \right) = \sqrt{\varepsilon} \vec{E} - [\vec{m} \sqrt{\mu} \vec{H}].$$

5.2.2. Связь \vec{E} и \vec{H} в волне, распространяющейся вдоль оси ξ

Случай первый - волна распространяется вправо. То есть сохраняется второй инвариант. Следовательно, нет волны, распространяющейся влево и левый инвариант равен нулю.

$$I_1 = 0 = \sqrt{\varepsilon} \vec{E} + [\vec{m} \sqrt{\mu} \vec{H}]$$

Следовательно:

$$\vec{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} [\vec{m} \vec{H}].$$

Аналогичным образом:

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [\vec{m} \vec{E}].$$

Случай второй - волна распространяется влево. То есть сохраняется первый инвариант. Следовательно, нет волны, распространяющейся вправо и правый инвариант равен нулю.

$$I_2 = 0 = \sqrt{\varepsilon} \vec{E} - [\vec{m} \sqrt{\mu} \vec{H}]$$

Следовательно:

$$\vec{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} [\vec{m} \vec{H}].$$

Аналогичным образом:

$$\vec{H} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [\vec{m} \vec{E}].$$

5.2.3. Баланс энергии электромагнитного возмущения в проводящей среде

В проводящей среде $\sigma \neq 0$. Перепишем систему уравнений Максвелла (39) для данного случая.

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} = 0 \end{cases}$$

В проводящей среде поле совершает работу по перемещению зарядов. Работа по перемещению зарядов полем в единицу времени - мощность.

$$P_{diss} = \dot{A} = \vec{f} \vec{v}$$

Где \vec{f} - объемная плотность силы, действующий на заряд со стороны поля.

$$\vec{f} = \rho \vec{E}$$

Подставим выражение для объемной плотности сил в выражение для мощности диссипаций.

$$P_{diss} = \rho \vec{E} \vec{v}$$

По определению $\vec{j} = \rho \vec{v}$. Тогда:

$$P_{diss} = \vec{j} \vec{E}. \quad (49)$$

Лекция 6. Электромагнитные волны в проводящей среде

На прошлой лекции мы ввели мощность сил, затрачиваемых на перемещение зарядов (49):

$$P = \dot{A} = \vec{f}\vec{v} = \vec{E}\rho\vec{v} = \vec{j}\vec{E}.$$

Вспомним про уравнение Максвелла - $\text{rot } \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \vec{j}$ в однородной изотропной проводящей среде. Выделим из него \vec{j} :

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \vec{H} - \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Тогда получаем следующее выражение для мощности (50):

$$P = \left(\frac{c}{4\pi} \text{rot } \vec{H} - \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \vec{E} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \vec{H} \vec{E} - \frac{\varepsilon}{4\pi} \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (50)$$

Внесем во втором слагаемом \vec{E} под знак производной, первое слагаемое преобразуем, используя свойства дифференциальных операторов - $\vec{E} \text{rot } \vec{H} = \vec{E} [\nabla \vec{H}] = \vec{H} \text{rot } \vec{E} - \text{div } \vec{E} \vec{H}$.

$$P = -\frac{c}{4\pi} \text{div} [\vec{E} \vec{H}] + \frac{c}{4\pi} \vec{H} \text{rot } \vec{E} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \right)$$

Из другого уравнения Максвелла (39) знаем, что $\text{rot } \vec{E} = \frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$. Подставим это во второе слагаемое.

$$P = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu H^2 + \varepsilon E^2}{8\pi} \right) - \text{div} \left(\frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}] \right) = \sigma E^2 = -\frac{\partial w}{\partial t} - \text{div } \vec{S} \quad (51)$$

Где w - объемная плотность энергии электромагнитного поля, \vec{S} - вектора Умова-Пойнтинга.

Мы получили дифференциальный закон изменения энергии (52):

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div } \vec{S} = -\sigma E^2 \quad (52)$$

6.0.1. Убытие энергии электромагнитного поля в проводящей среде

Рассмотрим полную энергию в объеме $W = \int_{V_\infty} w dV$. Покажем, что производная по времени полной энергии всегда меньше нуля либо ноль.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_{V_\infty} \frac{\partial w}{\partial t} dV = - \int_{V_\infty} \text{div } \vec{S} - \int_{V_\infty} \sigma E^2 dV$$

Применим теорему Остроградского-Гаусса.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \oint_{\Sigma_\infty} \vec{S} \vec{n} d\Sigma - \sigma \int_{V_\infty} E^2 dV$$

Первый интеграл равен нулю, так как на бесконечности нет возмущений. Второй интеграл всегда либо меньше нуля, либо равен нулю, так как под знаком интеграла квадрат вектора. Причем равен нулю он в двух случаях. Если случай тривиальный, то есть поля нет, либо если $\sigma = 0$, то есть в идеальной среде.

6.1. Связь \vec{S} и w в плоской электромагнитной волне

Рассмотрим волну, распространяющуюся вдоль ранее введенной оси ξ . Из прошлой лекции знаем, что:

$$\vec{H} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}[\vec{m}\vec{E}]$$

Тогда:

$$w = \frac{\mu H^2}{4\pi} = \frac{\varepsilon E^2}{4\pi}.$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}\vec{H}] = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}[\vec{m}\vec{E}]]\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{\vec{m}c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{\varepsilon E^2}{4\pi}.$$

Получаем, что:

$$\vec{S} = \vec{m}\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}w = \vec{m}vw \quad (53)$$

6.2. Тангенс угла потерь

Рассмотрим уравнение Максвелла в однородной изотропной среде:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\sigma \vec{E} \quad (54)$$

Рассмотрим волну с зависимостью от времени $E \sim e^{-i\omega t}$. Тогда:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}.$$

Используем этот факт в уравнении Максвелла (54).

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma \vec{E} - i\frac{\varepsilon\omega}{c}\vec{E} \quad (55)$$

Введем комплексную проводимость и комплексную диэлектрическую проницаемость:

$$\mathbf{G} = \sigma - i\frac{\varepsilon\omega}{4\pi}, \quad \mathbf{E} = \varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

Тогда выражение (55) можно переписать двумя способами.

$$\text{rot } \vec{H} = \begin{cases} \frac{4\pi}{c}\mathbf{G}\vec{E} \\ -i\frac{\omega}{c}\mathbf{E}\vec{E} \end{cases}$$

Обычно используется комплексная диэлектрическая проницаемость. Нетрудно заметить, что в проекции на действительную ось мы получаем просто диэлектрическую проницаемость, а в проекции на мнимую ось - $\frac{4\pi\sigma}{\omega}$.

Также это комплексное число можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{E} = |\mathbf{E}|e^{i\delta}.$$

Где $\delta = \arctan \frac{Im\mathbf{E}}{Re\mathbf{E}} = \arctan \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega}$ - угол потерь. $\tan \delta = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega}$ - тангенс угла потерь в СГС или $\tan \delta = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon\omega}$ в СИ.

Соответственно, чем больше угол потерь, тем больше потери.

6.3. Волновое уравнение для \vec{E} в проводящей среде

Вспомним систему уравнений Максвелла в однородной изотропной среде.

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{H} = 0 \\ \text{div } \vec{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{cases} \quad (56)$$

Используем уравнение непрерывности - $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$. Из него получаем, что:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \rho = 0.$$

Решение такого уравнения мы знаем. Введем обозначение : $\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} = \frac{1}{T_0}$. Тогда решение - экспоненциальное затухание.

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{T_0}}$$

То есть, в зависимости от исходных данных, с разной скоростью ρ стремится к нулю. Будем считать, что рассматриваем систему с некоторого характерного времени, при котором ρ уже близко к нулю. Тогда можем сказать, что $\text{div } \vec{E} = 0$. Теперь исключим из системы уравнений (56) \vec{H} . Для этого продифференцируем по времени первое уравнение и возьмем ротор от второго, домножив его на $\frac{c}{\mu}$, а затем сложим их. Получим уравнение Лапласа.

$$\Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (57)$$

Перепишем выражение (57) в СИ.

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \sigma\mu_0\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

6.4. Дисперсионное соотношение для электромагнитных волн в проводящей среде

Рассмотрим плоскую гармоническую волну вдоль оси x - $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kx)}$. Подставим в выражение (57) с учетом вида волны.

$$\nabla \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow ik, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = ik\vec{E}.$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 \vec{E}, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}, \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$$

Тогда:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu (1 + i \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega}) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu (1 + i \tan \delta) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu.$$

Мы получили дисперсионное соотношение (58):

$$k = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu \sqrt{1 + i \tan \delta}}. \quad (58)$$

Где плюс соответствует бегущей вправо волне, минус - бегущей влево. Рассмотрим правую волну и найдем действительную и мнимую часть k . Представим k как $k = k' + ik''$.

Возведем k в квадрат.

$$k^2 = k'^2 - k''^2 + 2ik'k''$$

Исходя из полученного дисперсионного соотношения (58) можем составить уравнения, приравняв мнимые и действительные части выражений.

$$Re : k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu$$

$$Im : 2k'k'' = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \tan \delta$$

Решив эти уравнения, получаем:

$$k' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu} \sqrt{\sqrt{1 + \tan^2 \delta} + 1},$$

$$k'' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu} \sqrt{\sqrt{1 + \tan^2 \delta} - 1}.$$

Рассмотрим асимптотики. При $\omega \rightarrow 0 \leftrightarrow \tan \delta \rightarrow \infty$.

$$k' \approx k'' \approx \omega \sqrt{\sqrt{\tan^2 \delta}} \approx \frac{\omega}{\sqrt{\omega}} \approx \sqrt{\omega}$$

При $\omega \rightarrow \infty \leftrightarrow \tan \delta \rightarrow 0$.

$$k' \approx \omega$$
$$k'' \approx \frac{\omega}{c} \approx \frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \text{const}$$

То есть волны почти не распространяются при малых частотах и среда ведет себя как проводник. При больших частотах волны распространяются хорошо и среда ведет себя как диэлектрик.

Лекция 7. Теория дисперсии

7.1. Дисперсия на примере волновых пакетов

7.1.1. Волновой пакет

Определение: Волновой пакет - квазимонохроматическая волна.
На рисунке 2 изображена монохроматическая волна с длиной цуга τ_0

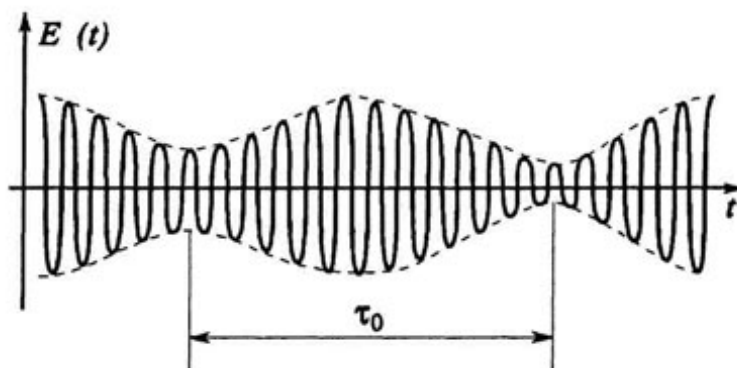


Рисунок 2 – Квазимонохроматическая волна

Спектр квазимонохроматической волны выглядит почти как дельта функция - узкий пик. На рисунке 3 сверху изображен спектр монохроматической волны, он состоит из пика на одной частоте волны - f_0 . Ширина пика $\Delta f_0 = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = 0$. Снизу на рисунке 3 изображен спектр квазимонохроматической волны. Его ширина $\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \neq 0$.

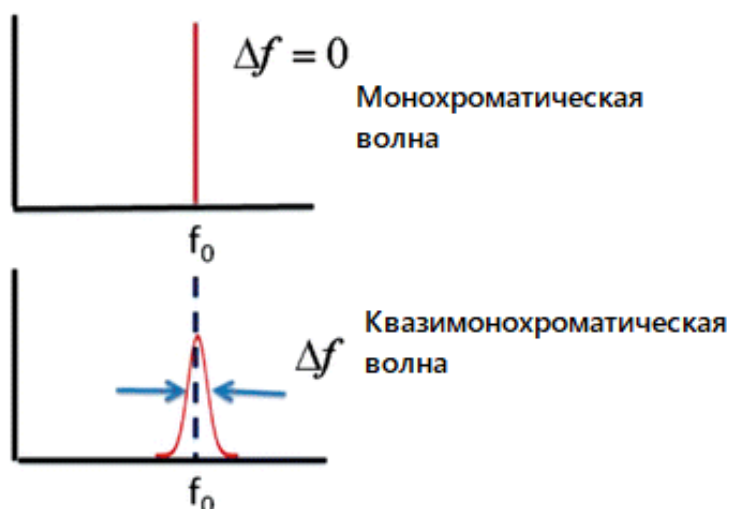


Рисунок 3 – Спектр монохроматической и квазимонохроматической волн

Форма пика определяется типом модуляции. Требование для волнового пакета:

$$\Delta\omega \ll \omega_0$$

Где $\Delta\omega$ - ширина волнового пакета. Еще один способ определить волновой пакет - сделать это через временную ширину пакета. Временная ширина пакета много больше сигнала несущей волны.

$$T_p \gg T_0$$

1. Монохроматическая волна. Сигнал на входе в среду - $U(x=0, t) = A_0 e^{-i\omega t}$. Где A_0 - постоянная.

2. Волновой пакет. Сигнал на входе в среду - $U(x=0, t) = A_0(t) e^{-i\omega t}$. Где $A_0(t)$ - комплексная амплитуда или огибающая.

7.2. Понятия дисперсии, фазовой и групповой скорости

Определение: Дисперсия - зависимость свойств среды от частоты. Дисперсия бывает временная и пространственная. Мы будем рассматривать временную.

Следствие - если $v_f = \text{const}$, $n = \text{const}$ - дисперсии нет.

Определение: Дисперсия - зависимость k от ω , отличная от линейной.

Определение: Фазовая скорость:

$$v_f \equiv \frac{\omega}{k'} \quad (59)$$

Будем рассматривать не поглощающие среды. Тогда $k'' = 0$. То есть $k = k' + ik'' = k' = k$. Тогда $v_f = \frac{\omega}{k}$

Определение: Групповая скорость:

$$v_{gr} \equiv \frac{\partial\omega(k)}{\partial k} = \left(\frac{\partial k(\omega)}{\partial \omega} \right)^{-1} \quad (60)$$

Фазовая скорость определяет скорость распределения фазы монохроматической волны на частоте ω . Групповая скорость определяет распространение энергии. В случае волнового пакета нас интересуют частоты вблизи ω_0 . Поэтому:

$$v_f \approx v_{gr}(\omega_0), \quad v_{gr} \approx v_f(\omega_0).$$

Какая из этих скоростей - вектор? В случае не только одномерного рассмотрения вектором является групповая скорость. Фазовая скорость - не вектор. Покажем это. Рассмотрим волну, распространяющуюся в плоскости yz под углом α к оси y . Тогда его проекция волнового числа на y - $k_y = k \cos \alpha$. Рассмотрим фазовую скорость (59) и ее проекцию на ось y .

$$v_f = \frac{\omega}{k}, \quad v_{fy} = \frac{\omega}{k_y} = \frac{\omega}{k \cos \alpha}$$

Видим, что проекция содержит косинус в знаменателе. А это значит, что фазовая скорость может оказаться больше скорости света. А при стремлении угла к $\frac{\pi}{2}$ фазовая скорость будет стремиться к бесконечности.

7.2.1. Связь фазовой и групповой скоростей

Выделим ω из определения фазовой скорости (59) и подставим в определение групповой скорости (60) - $\omega = v_f k$

$$v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k}(v_f k) = v_f + k \frac{\partial v_f}{\partial k}$$

В литературе чаще встречается запись через длину волны. Мы знаем, что $k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$, $\partial k = -\frac{2\pi}{\lambda^2} \partial \lambda$. Откуда следует формула Рэлея.

$$v_{gr} = v_f - \lambda \frac{\partial v_f}{\partial \lambda} \quad (61)$$

Также можно записать связь фазовой и групповой скоростей через показатель преломления. Из определения - $n(\omega) \equiv \frac{c}{v_f(\omega)}$, $k = \frac{\omega}{c} n$. Откуда:

$$v_{gr} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial(\omega n)}{\partial \omega} \right)^{-1} = c \left(n(\omega) + \omega \frac{\partial n(\omega)}{\partial \omega} \right)^{-1} = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{\partial n(\omega)}{\partial \omega}}$$

Можно выделить два случая.

1. Случай нормальной дисперсии:

$$\frac{\partial n}{\partial \omega} > 0 \rightarrow v_{gr} < \frac{c}{n} = v_f.$$

2. Случай аномальной дисперсии:

$$\frac{\partial n}{\partial \omega} < 0 \rightarrow v_{gr} > \frac{c}{n} = v_f.$$

7.3. Общее решение волнового уравнения для волнового пакета в диспергирующей среде

Рассмотрим одномерный случай.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - L(U) = 0$$

Где $L(U)$ - некоторый линейный оператор. Пусть на входе в среду задан волновой пакет: $U(x=0, t) = U_0(t) = A_0(t)e^{-i\omega_0 t}$. Где $A_0(t)$ - огибающая, $e^{-i\omega_0 t}$ - заполнение с частотой ω_0 . Найдем спектр - $S(\omega)$. Его прямое преобразование Фурье:

$$S(\omega) = \int U_0(t) e^{i\omega t} dt.$$

Обратное преобразование Фурье:

$$U_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int S(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

В теории волн преобразования Фурье удобно записывать именно в таком виде. Тогда:

$$S(\omega) = \int A_0(t)e^{i(\omega-\omega_0)t} dt = \int A_0(t)e^{i\Delta\omega t} dt.$$

Это спектр сигнала. Найдем спектр огибающей.

$$S_A(\omega) = \int A_0(t)e^{i\omega t} dt$$

$$S_A(\Delta\omega) = \int A_0(t)e^{i\Delta\omega t} dt = S(\omega)$$

Откуда видим, что у волнового пакета $\Delta\omega$ мало - $\Delta\omega \ll \omega_0$.

Спектр пакета полностью повторяет спектр огибающей, но он сдвинут на ω_0 - свойство преобразования Фурье.

Для каждой спектральной компоненты волнового уравнения ω :

$$S(\omega, x) = S(\omega)e^{ikx}.$$

Напишем обратное преобразование Фурье для сигнала в среде ($kx \neq 0$).

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int S(\omega)e^{-i(\omega t - k(\omega)x)} d\omega$$

Преобразуем это выражение добавив в показатель степени $\pm i\omega_0 t \pm ik_0 x$.

$$U(x, t) = e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)} \frac{1}{2\pi} \int S(\omega)e^{-i(\Delta\omega t + k_0 x - k(\Delta\omega)x)} d\omega$$

Так как в преобразованиях Фурье все вышенаписанные интегралы предполагаются по пределам от $-\infty$ до $+\infty$, можем перейти к новой переменной интегрирования - $\Delta\omega$.

$$U(x, t) = e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_A(\Delta\omega)e^{-i(\Delta\omega t + k_0 x - k(\Delta\omega)x)} d(\Delta\omega)$$

То есть можем записать сигнал в виде:

$$U(x, t) = A(x, t)e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)} \quad (62)$$

Где $A(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_A(\Delta\omega)e^{-i(\Delta\omega t + k_0 x - k(\Delta\omega)x)} d(\Delta\omega)$ - комплексная огибающая, $e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)}$ - несущая волна. Выражение (62) - общее решение волнового уравнения для волнового пакета в диспергирующей среде.

Исходя из определения волнового пакета нас интересует очень узкий спектр частот. Можем разложить дисперсионное соотношение в ряд Тейлора по ω .

$$k(\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \omega_0} = k(\omega_0) + \frac{\partial k}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} \Delta\omega + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega_0} \Delta\omega^2 + \dots$$

Найденная до нужной точности зависимость $k(\omega)$ фигурирует в выражении для $U(x, t)$.

7.4. Первое приближение теории дисперсии

Раскладываем в ряд Тейлора до второго слагаемого.

$$k(\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \omega_0} = k(\omega_0) + \frac{\partial k}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} \Delta\omega$$

Условия применимости:

1. Волновой пакет: $\Delta\omega \ll \omega_0$

2. Можем пренебречь третьим слагаемым в разложении функции в ряд.

$$\Delta\omega \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega_0} \ll \frac{\partial k}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0}$$

Тогда можем записать:

$$A(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int S_A(\Delta\omega) e^{-i\left(\Delta\omega t - \left(k(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{v_{gr}(\omega_0)}) - k(\omega_0)\right)x\right)} d(\Delta\omega) = \frac{1}{2\pi} \int S_A(\Delta\omega) e^{-i\Delta\omega\left(t - \frac{x}{v_{gr}(\omega_0)}\right)} d(\Delta\omega)$$

Видим конструкцию с "бегущим временем". Обозначим $\tau = t - \frac{x}{v_{gr}(\omega_0)}$. Тогда решение для огибающей:

$$A(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int S_A(\Delta\omega) e^{-i\Delta\omega\tau} d(\Delta\omega)$$

$A(x, t) = A(\tau) \forall x, t$, в том числе и для $x = 0$. Если $x = 0 \rightarrow \tau = t$, $A(x = 0, t) = A_0$.

$$\begin{cases} A(x, t) = A_0\left(t - \frac{x}{v_{gr}}\right) = A_0(\tau) \\ A(x = 0, t) = A_0(t) \end{cases}$$

Перейдем от (x, t) к (x, τ) . Тогда:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A(\tau(x))}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial \tau} \frac{\partial \tau(x)}{\partial x} = -\frac{1}{v_{gr}} \frac{\partial A}{\partial \tau} \quad (63)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A(\tau(t))}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial \tau} \frac{\partial \tau(t)}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial \tau} \quad (64)$$

Домножим уравнения (63) и (64) на $\frac{1}{v_{gr}}$ и сложим их. Получим уравнение переноса.

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{v_{gr}} \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (65)$$

Видим, что в первом приближении теории дисперсии профиль огибающей не меняется и распространяется с групповой скоростью.

Умножим уравнение переноса (65) на комплексно сопряженное к A .

$$A^* \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{A^*}{v_{gr}} \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

И возьмем от него комплексно сопряженное:

$$A \frac{\partial A^*}{\partial x} + \frac{A}{v_{gr}} \frac{\partial A^*}{\partial t} = 0.$$

Так как $AA^* = |A|^2 \sim w$, то есть пропорционально объемной плотности энергии. То есть мы получили уравнение переноса для энергии (66).

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{v_{gr}} \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (66)$$

Значит энергия в первом приближении теории дисперсии переносится с групповой скоростью, о чем уже ранее упоминалось.

Лекция 8. Второе приближение теории дисперсии

8.1. Второе приближение теории дисперсии

Раскладываем дисперсионное соотношение при ω вблизи центральной частоты волнового пакета.

Условия применимости:

1. Волновой пакет: $\Delta\omega \ll \omega_0$

2. Можем пренебречь четвертым слагаемым в разложении функции в ряд.

$$\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\Big|_{\omega_0} \gg \frac{\partial^3 k}{\partial\omega^3}\Big|_{\omega_0} \Delta\omega$$

Дисперсионное соотношение во втором приближении:

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \frac{\partial k}{\partial\omega}\Big|_{\omega_0} \Delta\omega + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial\omega^2}\Big|_{\omega_0} \Delta\omega^2$$

Вспомним как в нашем случае выглядит волновой пакет:

$$U(x, t) = A(x, t)e^{-i(\omega_0 - k_0 x)}$$

Где $A(x, t)$ - комплексная огибающая пакета, $e^{-i(\omega_0 - k_0 x)}$ - несущая волна. На прошлой лекции мы получили поведение амплитуды в диспергирующей среде:

$$A(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int S_A(\Delta\omega) e^{-i(\Delta\omega t - (k(\omega) - k(\omega_0))x)} d\Delta\omega. \quad (67)$$

В дисперсионном соотношении для второго приближения теории дисперсии обозначим $\frac{\partial k}{\partial\omega}\Big|_{\omega_0}$ по определению как $\frac{1}{v_{gr}}$, а $\frac{\partial^2 k}{\partial\omega^2}\Big|_{\omega_0}$ обозначим как γ .

$$\gamma \equiv \frac{\partial^2 k}{\partial\omega^2}\Big|_{\omega_0} = \frac{\partial}{\partial\omega} \frac{\partial k}{\partial\omega}\Big|_{\omega_0} = \frac{\partial}{\partial\omega} (v_{gr})^{-1}\Big|_{\omega_0}$$

То есть теперь мы считаем групповую скорость не постоянной величиной и пакет будет менять свою форму. Смысл второго приближения - учет "дисперсии" групповой скорости.

8.1.1. Вывод уравнения для огибающей волнового пакета во втором приближении теории дисперсии

Подставим $k(\omega)$ в ранее полученную формулу $A(x, t)$ (67).

$$A(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int S_A(\Delta\omega) e^{-i(\Delta\omega t - \frac{x}{v_{gr}} \Delta\omega - \frac{\gamma}{2} \Delta\omega^2 x)} d\Delta\omega.$$

Можем вынести $\Delta\omega$ из двух слагаемых в показателе экспоненты и обозначить $t - \frac{x}{v_{gr}} = \tau$. То есть можем от зависимости $A(x, t)$ перейти к зависимости $A(x, \tau)$.

$$A(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int S_A(\Delta\omega) e^{-i(\Delta\omega \tau - \frac{\gamma}{2} \Delta\omega^2 x)} d\Delta\omega$$

Возьмем производные по x и τ .

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int (i\frac{\gamma}{2}) \Delta\omega^2 S_A(\Delta\omega) e^{-i(\Delta\omega\tau - \frac{\gamma}{2}\Delta\omega^2 x)} d\Delta\omega$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} = \frac{1}{2\pi} \int (-i)^2 \Delta\omega^2 S_A(\Delta\omega) e^{-i(\Delta\omega\tau - \frac{\gamma}{2}\Delta\omega^2 x)} d\Delta\omega$$

Получим связывающее эти две производные уравнение - уравнение для комплексной огибающей волнового пакета во втором приближении теории дисперсии.

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -i\frac{\gamma}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} = D \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} \quad (68)$$

Где $D = -i\frac{\gamma}{2}$ - коэффициент диффузии. Расплывание волновых пакетов происходит не из-за поглощения, а из-за фазового перераспределения амплитуд.

Общее решение:

$$\begin{cases} A(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D x}} \int A_0(\xi) e^{-\frac{(\tau-\xi)^2}{4Dx}} d\xi \\ A_0(t) = A(t, x = 0) \end{cases}$$

8.2. Гауссов волновой пакет во втором приближении теории дисперсии

Гауссов волновой пакет изображен на рисунке 4:

$$A_0(t) = E_0 e^{-\frac{t^2}{\tau_0^2}}$$

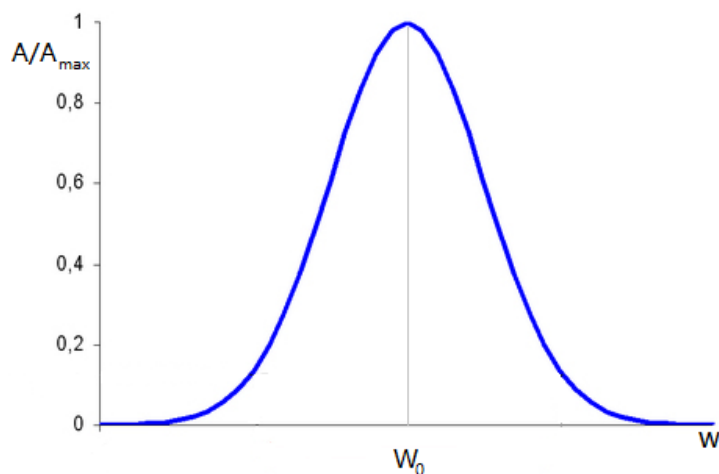


Рисунок 4 – Гауссов волновой пакет

Полный Гауссов волновой пакет изображен на рисунке 5:

$$U_0(t) = E_0 e^{-\frac{t^2}{\tau_0^2}} e^{-i\omega_0 t}$$

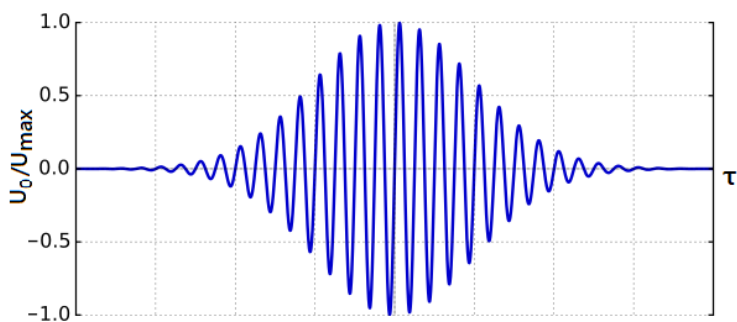


Рисунок 5 – Полный Гауссов волновой пакет

Если мы подставим Гауссов волновой пакет в вид общего решения, возьмем интеграл, то получим:

$$A(x, \tau) = \frac{E_0}{\sqrt{2i\gamma x}} e^{-\frac{\tau^2}{i2\gamma x \tau_0^2}} = B(x, \tau) e^{i\varphi(x, \tau)}.$$

Где:

$$B(x, \tau) = \frac{E_0}{\sqrt[4]{1 + \left(\frac{x}{x_r}\right)^2}} e^{-\frac{\tau^2}{T^2(x)}}.$$

Где $x_r = \frac{T^2}{2\gamma}$. Действительная длительность - $T(x) = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{x_r}\right)^2}$. Также введем амплитуду в центре сигнала - $|A(\tau = 0, x)|$

$$|A(\tau = 0, x)| = \frac{E_0}{\sqrt[4]{1 + \left(\frac{x}{x_r}\right)^2}}$$

Расплывание Гауссова волнового пакета изображено на рисунке 6.

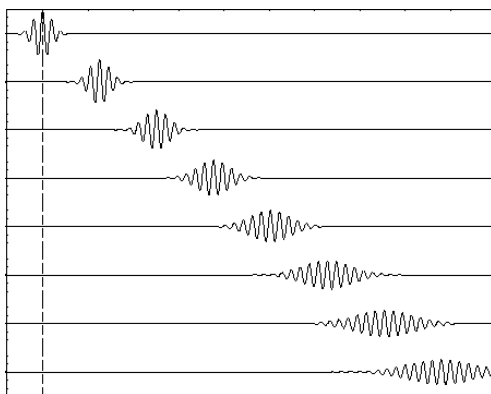


Рисунок 6 – Расплывание Гауссова волнового пакета в пространстве

Пакет изображен в последовательные моменты времени.

8.3. Дифракция квазиплоских волновых пучков

Определение: Волновые пучки - квазиплоские волны.

Плоская волна имеет бесконечный плоский волновой фронт, амплитуда распределена равномерно вдоль волнового фронта.

У квазиплоской волны волновые фронты могут быть не плоскими, амплитуда вдоль волновых фронтов распределена неравномерно. Считаем, что на бесконечности амплитуда стремится к нулю. Например, при попадании пучка на щель с большими размерами относительно длины волны, при удалении от щели волновой фронт искривляется и в асимптотике на бесконечность становится сферическим, а амплитуда при удалении от щели уменьшается.

Рассмотрим гармоническую компоненту волнового пучка и ее пространственное распределение (амплитуду):

$$U(x, y, z) = A(x, y, z)e^{ikz}.$$

Где e^{ikz} - плоская волна вдоль оси z . $A(x, y, z)$ - комплексная огибающая.

Рассмотрим электромагнитные волны в однородной изотропной среде без поглощения. Тогда:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Рассмотрим гармоническую компоненту ω_0 . Тогда полное поле \vec{E} :

$$\vec{E} = \vec{e}_p U(x, y, z) e^{-i\omega_0 t}$$

Где \vec{e}_p - вектор поляризации, $U(x, y, z)$ - пространственная комплексная амплитуда. Подставим это в волновое уравнение для \vec{E} в идеальной среде. Получится уравнение Гельмгольца.

$$\Delta U + kU = 0 \quad (69)$$

Если среда однородная и изотропная, то k - постоянная величина. Подставим выражение для волнового пучка $U(x, y, z)$ в уравнение Гельмгольца (69). Учтем свойства волнового пучка, используем метод медленно меняющейся амплитуды.

$$A(x, y, z) = A(\sqrt{\mu}x, \sqrt{\mu}y, \mu z)$$

То есть амплитуда слабо меняется вдоль оси z по сравнению с e^{ikz} . Сильнее по другим осям, но и по ним меняется слабее, чем e^{ikz} . Выделим слагаемые первого порядка малости в уравнении Гельмгольца (69). Также введем обозначение $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = D \Delta_{\perp} A \quad (70)$$

Где $D \equiv \frac{i}{2k}$. Выражение (70) - выражение для огибающей волнового пучка. Общее решение:

$$A(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dz}} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dz}} \iint_{-\infty}^{+\infty} A_0(\xi, \eta) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4Dz}} e^{-\frac{(\eta-y)^2}{4Dz}} d\xi d\eta$$

Где $A(x, y) = A(x, y, z = 0)$. Условие применимости такого решения:

$$\left| \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right| \ll |\Delta_{\perp} A|$$

8.4. Гауссов волновой пучок

Для Гауссова волнового пучка:

$$A_0(x, y) = E_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{a^2}}$$

На входе имеем плоский волновой фронт. Тогда можем задать E_0 действительной константой. Если $E_0 \sim e^{i\frac{kr^2}{2F}}$ - не плоский (параболический) волновой фронт. Подставим выражение для Гауссова пучка в общее решение и получим:

$$A(x, y, z) = \frac{E_0}{1 + i\frac{z}{z_d}} e^{\frac{i\frac{r^2}{a_0^2}}{1 + i\frac{z}{z_d}}}$$

Где $z_d = z_{diffraction} = \frac{ka_0^2}{2}$. Выделим в показателе экспоненты $Re + iIm$, а в множителе перед экспонентой $|B|e^{i\varphi_b}$. Получим:

$$A(x, y, z) = B_0 e^{-\frac{r^2}{a^2(z)} + i\frac{kr^2}{2R(z)} + i\varphi_b}$$

Где B_0 - действительная амплитуда или амплитуда в центре волнового пучка.

$$B_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_d}\right)^2}}$$

$a(z)$ - ширина или радиус волнового пучка.

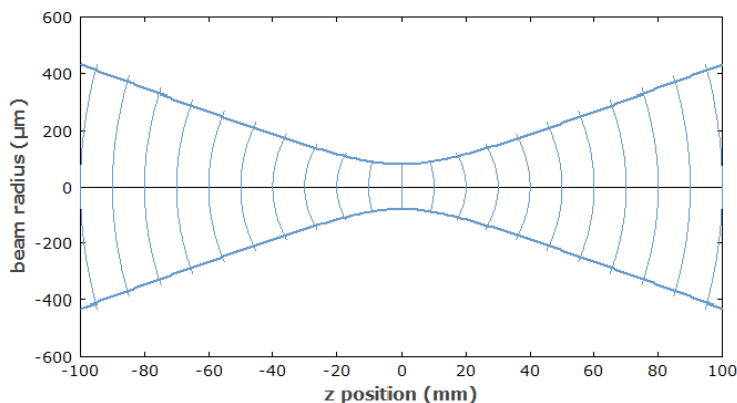


Рисунок 7 – Радиус Гауссова волнового пучка

$$a(z) = a_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_d}\right)^2}$$

$R(z)$ - радиус кривизны волнового фронта.

$$R(z) = z + \frac{z_d^2}{z}$$

φ_b - фазовая добавка.

$$\varphi_b = -\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{z_d}\right)$$

Лекция 9. Открытые резонаторы

9.1. Открытые резонаторы

Точку с минимальной толщиной пучка обычно принимают за ноль оси z , на рисунке 8: $2w_0$ - перетяжка пучка, d - длина резонатора. R_1, R_2 - радиусы кривизны зеркал 1 и 2 соответственно.

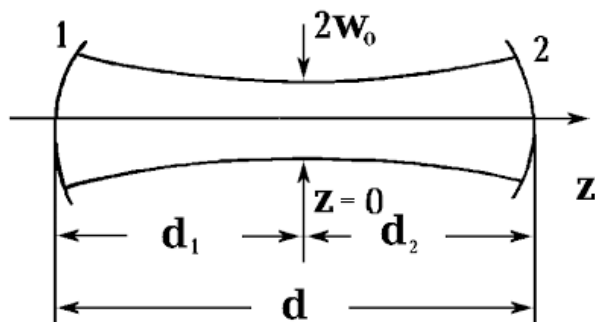


Рисунок 8 – Открытый резонатор

Частные случаи (Рисунок 9):

1. Концентрический резонатор. Оба сферических зеркала резонатора лежат на концентрических сферах.
2. Конфокальный резонатор. Состоит из зеркал с общим фокусом.
3. Полуконфокальный резонатор. Одно из зеркал конфокального резонатора заменяется плоским зеркалом, расположенным в фокусе второго зеркала.
4. Полуконцентрический. Одно из зеркал концентрического резонатора заменяется на плоское зеркало.

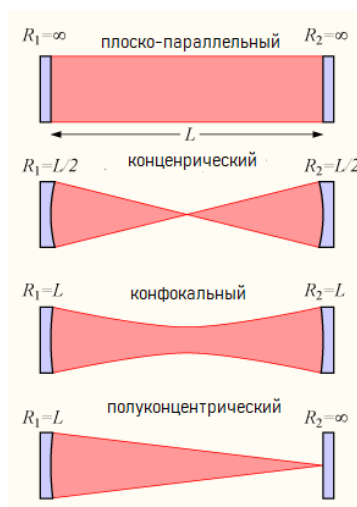


Рисунок 9 – Типы резонаторов

9.2. Границы устойчивости открытого резонатора

В точке $z = 0$ имеем плоский волновой фронт. Диаметр перетяжки - $2a_p$. Структура поля внутри резонатора похожа на гауссову.

Рассмотри Гауссов пучок в открытом резонаторе с зеркалами R_1 и R_2 . Одно из условий устойчивости - кривизна зеркала и волнового фронта должна совпадать. В таком случае отражение будет идти перпендикулярно к зеркалу и при отражении излучение не будет покидать резонатор, а в перетяжке пучка должен быть плоский волновой фронт. Запишем эти условия:

$$R(z)|_{z_1} = R_1, R(z)|_{z_2} = R_2, R(z)|_0 = \infty.$$

Из параболического приближения для Гауссова пучка знаем выражения для радиуса кривизны волнового фронта и для радиуса пучка:

$$R(z) = z + \frac{z_d^2}{z}, a(z) = a_p \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_d}\right)^2}.$$

L - длина резонатора. Введем $z_1 > 0$ и $z_2 > 0$. Тогда можем записать:

$$\begin{cases} R_1 = R(z_1) = z_1 + \frac{z_d^2}{z_1} \\ R_2 = R(z_2) = z_2 + \frac{z_d^2}{z_2} \\ z_1 + z_2 = L \\ z_d = \frac{ka_p^2}{2} = \frac{\pi a_p^2}{\lambda} \end{cases} \quad (71)$$

Введем $\alpha \equiv z_d^2 = \left(\frac{\pi a_p^2}{\lambda}\right)^2$. Исключим из системы (71) z_2 и получим:

$$\begin{cases} R_1 z_1 = z_1^2 + \alpha \\ R_2(L - z_1) = (L - z_1)^2 + \alpha \end{cases} \quad (72)$$

Нам нужно выразить α через параметры резонатора и найти область, в которой он принимает допустимые значения. Вычтем первое уравнение системы (72) из второго.

$$R_1 z_1 - R_2 L + R_2 z_1 = z_1^2 - L^2 + 2Lz_1 - z_1^2$$

Тогда можем выразить z_1 :

$$z_1 = \frac{L(R_2 - L)}{R_1 + R_2 - 2L}$$

Подставив полученное выражение в первое уравнение системы (72) $\alpha = z_1(R_1 - z_1)$ получим:

$$\alpha = \frac{L(R_2 - L)}{R_1 + R_2 - 2L} \left(R_1 - \frac{L(R_2 - L)}{R_1 + R_2 - 2L} \right) = \frac{L(R_2 - L) \left(R_1(R_1 + R_2 - 2L) - L(R_2 - L) \right)}{(R_1 + R_2 - 2L)^2}$$

Существование действительного решения, то есть для $\alpha \geq 0$ возможно при числителе больше или равном нулю. Введем $a = 1 - \frac{L}{R_1}$, $b = 1 - \frac{L}{R_2}$.

$$\begin{aligned} L(R_2 - L) \left(R_1(R_1 + R_2 - 2L) - L(R_2 - L) \right) &= L(R_2 - L) \left((R_1 - L)^2 + R_2(R_1 - L) \right) = \\ &= L(R_2 - L)(R_1 - L)(R_1 + R_2 - L) = (R_1 R_2)^2 \left(1 - \frac{L}{R_1} \right) \left(1 - \frac{L}{R_2} \right) \left(\frac{L}{R_1} + \frac{L}{R_2} - \frac{L}{R_1 R_2} \right) = \\ &= (R_1 R_2)^2 ab(1 - ab) \end{aligned}$$

Так как величина в квадрате всегда является неотрицательной величиной, то условие устойчивости можно записать в следующем виде:

$$ab(1 - ab) \geq 0 \quad (73)$$

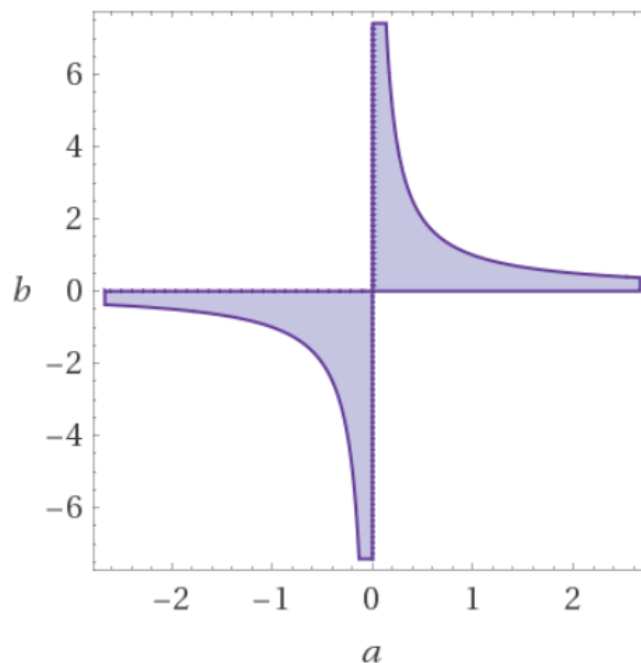


Рисунок 10 – Условие устойчивости

Решение этого неравенства изображено на рисунке 10. Рассмотрим точки пересечения решения с диагональю $a = b$. Точка пересечения с гиперболой в первом квадранте - плоский резонатор, в нуле - конфокальный, пересечение в третьем квадранте - концентрический резонатор.

9.3. Поведение пучка в открытом резонаторе с одинаковыми зеркалами

По условию $R_1 = R_2 = R$, L - расстояние между зеркалами, которое мы можем менять. Для одинаковых зеркал перетяжка будет посередине: $z = \frac{L}{2}$. Также знаем, что $R = z + \frac{z^2}{z}$. Тогда:

$$R = \frac{L}{2} + \frac{2}{L} \left(\frac{\pi a_p^2}{\lambda} \right) = \frac{L}{2} + \frac{2}{L} \alpha.$$

$$\alpha = \frac{L}{2} \left(R - \frac{L}{2} \right)$$

$$a_p = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \sqrt[4]{L(2R - L)}$$

Теперь найдем радиус пучка на зеркалах.

$$a(z) \Big|_{z=\frac{L}{2}} = a_p \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_d^2}} \Big|_{z=\frac{L}{2}} = \sqrt{\frac{\lambda R}{\pi}} \sqrt[4]{\frac{L}{2R - L}}$$

Как видно, и a_p , и $a(z) \Big|_{z=\frac{L}{2}}$ остаются действительными до $L = 2R$.

9.4. Волны в одноатомных цепочках

Рассмотрим одномерную цепочку из одинаковых атомов, на каждый из которых действует сила упругости с коэффициентом α как изображено на рисунке 11. Смещение каждого атома обозначается как U_l , расстояние между атомами в положении равновесия обозначим a .

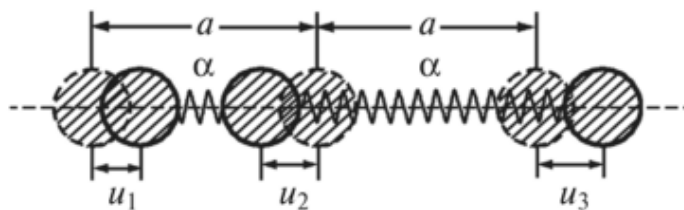


Рисунок 11 – Одноатомная цепочка

Рассмотрим l -й атом в цепочке на рисунке 11. Сила, действующая на него слева, определяется деформацией пружинки, прикрепленной к нему слева. Аналогично с силой, действующей справа. Деформация пружинки определяется отклонениями от положения равновесия атомов на концах пружинки. Запишем силы, действующие слева и справа на l -й атом.

$$F_l^{(-)} = -\alpha(U_l - U_{l-1})$$

$$F_l^{(+)} = -\alpha(U_{l+1} - U_l)$$

Где α - коэффициент жесткости. Тогда полная сила в проекции на ось x :

$$F_l = F_l^{(-)} + F_l^{(+)} = -\alpha(2U_l - U_{l-1} - U_{l+1}). \quad (74)$$

Запишем второй закон Ньютона для атома, на который действует сила (74):

$$m \frac{d^2 U}{dt^2} = -\alpha(2U_l - U_{l-1} - U_{l+1}).$$

Где m - масса атома. Обозначим расстояние между атомами в положении равновесия - a , тогда положение l -го атома по оси вдоль цепочки будет $x = al$. Рассмотрим возмущение в виде плоской гармонической волны $U_l \sim e^{-i(\omega t - kx_l)} = e^{-i(\omega t - kal)}$. Подставив это во второй закон Ньютона получим дисперсионное соотношение:

$$\omega = 2\sqrt{\frac{\alpha}{m}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right| \quad (75)$$

То есть дисперсионное соотношение - периодическая функция с максимумом $2\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$ и периодом $\frac{2\pi}{a}$.

Лекция 10. Предельный переход к сплошной среде

Обозначим $2\sqrt{\frac{\alpha}{m}} = \omega_{max}$. Тогда дисперсионное соотношение (изображено на рисунке 12) (75) примет вид:

$$\omega(k) = \omega_{max} \left| \sin \frac{ka}{2} \right| \quad (76)$$

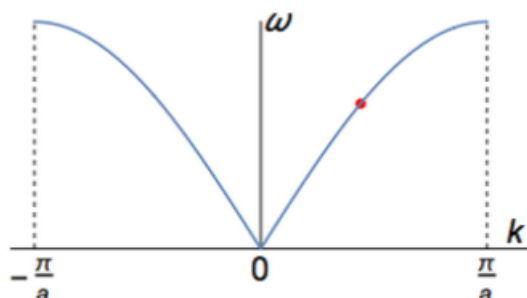


Рисунок 12 – Дисперсионное соотношение для линейной цепочки

Если мы передаем цепочке колебания в частотой от 0 до ω_{max} , то такая система за счет упругих связей будет с конечной скоростью распространять эти колебания. Если мы будем "раскачивать" систему с частотой большей, чем ω_{max} , то волна не будет распространяться по цепочке, экспоненциально затухая. Волны с положительными k будут распространяться вправо, с отрицательными k - влево. При этом имеем неоднозначную зависимость. Так как функция периодическая, одному значению ω соответствует бесконечное количество значений k (рисунок 13). Как же быть с этой неоднозначностью?

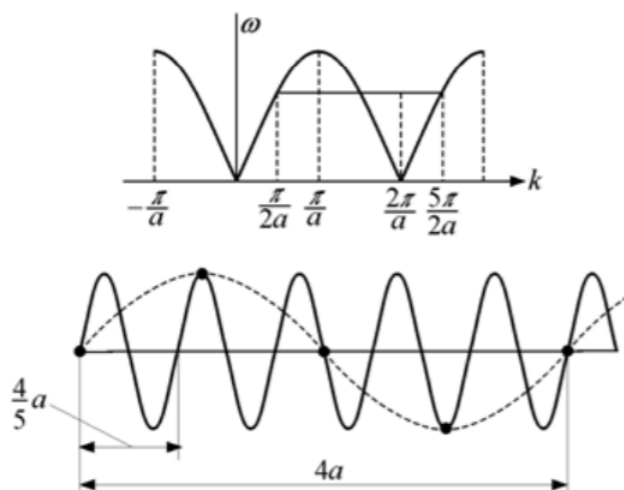


Рисунок 13 – Неоднозначность выбора k

Рассмотрим $\omega_* = \omega(k_1) = \omega(k_2)$. Положение системы можно задать смещениями всех атомов относительно положения равновесия во все моменты времени. Также

положение системы можно описать бесконечным количеством волн, которые описываются непрерывной функцией. Обе волны, изображенные на рисунке 13 несут одинаковую информацию, несмотря на разную частоту, поэтому нет никакого парадокса в неоднозначности. Но нам будет удобно рассматривать промежуток от $-\frac{\pi}{a}$ до $\frac{\pi}{a}$, так как он содержит все возможные частоты от 0 до ω_{max} , и волны, бегущие как в положительном, так и в отрицательном направлениях.

10.1. Предельный переход к сплошной среде

Сплошная среда определяется соотношением малости масштабных коэффициентов самой среды по сравнению с масштабным коэффициентом нашей структуры.

$$\lambda \gg a$$

Вспомним второй закон Ньютона для l -го атома:

$$m \frac{d^2 U}{dt^2} = -\alpha(2U_l - U_{l-1} - U_{l+1}).$$

Воспользовавшись нашим длинноволновым пределом попробуем модифицировать правую часть уравнения. Введем непрерывную функцию $U(x)$, которая равна значениям дискретной функции U_l в узлах. То есть $U(x = al) = U_l$. Так как длина волны много больше расстояния между атомами, воспользуемся методом медленно меняющегося профиля:

$$U(x = al \pm a) = U(al) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=al} (\pm a) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{x=al} a^2 + \dots$$

Подставим полученное выражение во второй закон Ньютона с учетом перехода к новой непрерывной функции.

$$m \left. \frac{d^2 U(x, t)}{dt^2} \right|_{x=al} = -\alpha \left(2U_l - U_l + a \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=al} - \frac{a^2}{2} \left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{x=al} - U_l - a \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=al} - \frac{a^2}{2} \left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{x=al} \right) \quad (77)$$

Так как выражение (77) верно для любой точки l , то выполняется и для любой точки пространства.

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{m}{a^2 \alpha} \frac{d^2 U}{dt^2} = 0$$

Мы получили одномерное волновое уравнение, где $\frac{m}{a^2 \alpha} = \frac{1}{c^2}$. Или можем написать:

$$c = a \sqrt{\frac{\alpha}{m}}, \quad \omega_{max} = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = \frac{2c}{a}$$

10.2. Фазовая скорость и групповая скорость в одноатомной цепочке

Мы уже знаем, что $\omega(k) = \omega_{max} \left| \sin \frac{ka}{2} \right|$. Тогда:

$$k(\omega) = \pm \frac{2}{a} \arcsin \frac{\omega}{\omega_{max}}$$

Где плюс соответствует волне бегущей вправо, а минус - волне, бегущей влево. Найдем фазовую и групповую скорости.

$$v_f = \frac{\omega}{k(\omega)} = \pm \frac{\omega a}{2 \arcsin \frac{\omega}{\omega_{max}}}$$

$$v_{gr} = \frac{d\omega(k)}{dk} = \omega_{max} \frac{a}{2} \cos \frac{ka}{2} = c \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{max}^2}}$$

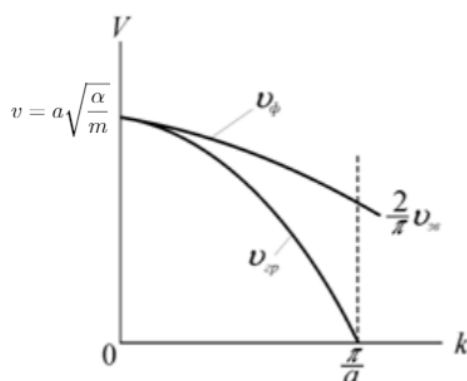


Рисунок 14 – Зависимости фазовой и групповой скоростей правой волны от волнового числа

10.3. Двухатомные цепочки

Обозначим атомы на рисунке 15 массой M четными номерами, а массой m - нечетными. Ось x направим вправо вдоль цепочки. a - расстояние между атомами в положении равновесия, α - коэффициент упругости.

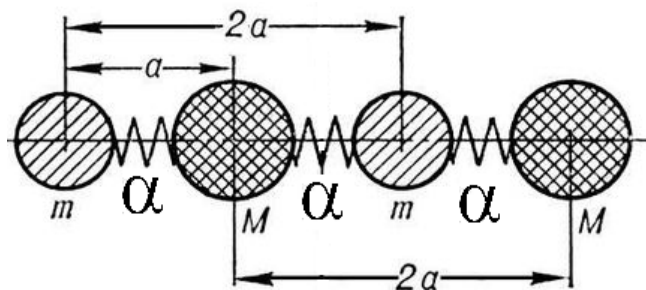


Рисунок 15 – Двухатомная одномерная цепочка

Запишем второй закон Ньютона для атомов разных масс.

$$\begin{cases} M \frac{d^2 U}{dt^2} = -\alpha(2U_l - U_{l-1} - U_{l+1}), l = 0, \pm 2, \pm 4 \dots \\ m \frac{d^2 U}{dt^2} = -\alpha(2U_l - U_{l-1} - U_{l+1}), l = \pm 1, \pm 3 \dots \end{cases}$$

Аналогично переходя к волнам определяем $U(x, t) \sim e^{-i(\omega t - kx)}$, где $U_l = U(x = al)$. Для разных атомов будут разные амплитудные значения, поэтому запишем:

$$\begin{cases} U(x = al, t) = Ae^{-i(\omega t - kal)}, l = 0, \pm 2, \pm 4 \dots \\ U(x = al, t) = Be^{-i(\omega t - kal)}, l = \pm 1, \pm 3 \dots \end{cases} \quad (78)$$

Подставим выражения (78) во второй закон Ньютона.

$$\begin{cases} A\omega^2 = \frac{\alpha}{M}(2A - 2B \cos ka) \\ B\omega^2 = \frac{\alpha}{m}(2B - 2A \cos ka) \end{cases}$$

Введем $\omega_1 = \sqrt{2\frac{\alpha}{M}}$, $\omega_2 = \sqrt{2\frac{\alpha}{m}}$. Для существования нетривиального решения необходимо, чтобы детерминант системы был равен нулю.

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 - \omega^2 & -\omega_1^2 \cos ka \\ -\omega_2^2 \cos ka & \omega_2^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

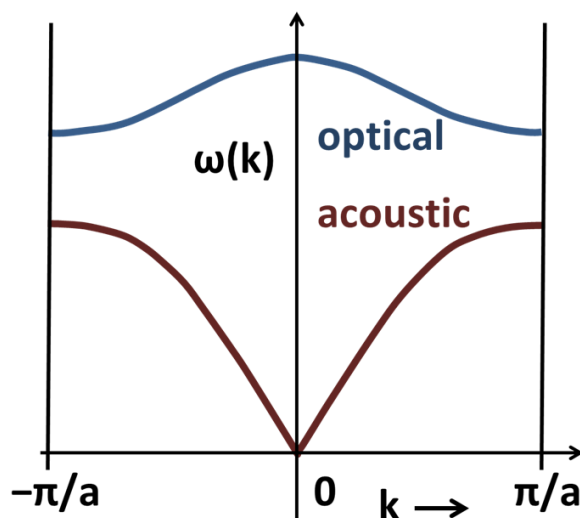


Рисунок 16 – Дисперсионные кривые для двухатомной линейной цепочки

Решив биквадратное уравнение относительно ω получим:

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}\right)^2 - \omega_1^2 \omega_2^2 \sin^2 ka}.$$

Запрещенная зона на рисунке 16 находится между максимумом акустической ветви и минимумом оптической. Нижняя ветвь - $\omega^{(-)}$, верхняя - $\omega^{(+)}$.

$$\omega_{min}^{(-)} = 0, \omega_{max}^{(-)} = \omega_1 = \sqrt{2\frac{\alpha}{M}}, \omega_{min}^{(+)} = \omega_2 = \sqrt{2\frac{\alpha}{m}}, \omega_{max}^{(+)} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{2\left(\frac{\alpha}{m} + \frac{\alpha}{M}\right)}$$

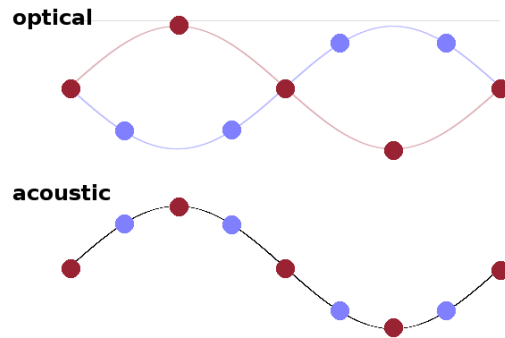


Рисунок 17 – Колебания атомов в оптическом и акустическом спектрах

Также отметим, что в акустической ветви атомы колеблются синфазно, а в оптической в противофазе, как изображено на рисунке 17.

Лекция 11. Волны в однородной анизотропной среде

11.1. Волны в однородной анизотропной среде

Анизотропная среда - среда, свойства которой зависят от направления.

11.1.1. Взаимная ориентация векторов \vec{E} , \vec{H} , \vec{B} , \vec{D} , \vec{S} , \vec{k} в электрически анизотропной среде

Рассмотрим идеальный диэлектрик: $\rho = 0$, $\mu = 1$. Тогда уравнения Максвелла можно будет записать в следующем виде.

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{div } \vec{D} = 0 \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{D} = \hat{\epsilon} \vec{E} \end{cases}$$

Где $\hat{\epsilon}$ - тензор диэлектрической проницаемости. Рассмотрим \vec{E} , \vec{H} , \vec{B} , $\vec{D} \sim e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{t})}$ как волну, бегущую вправо. Как и до этого:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Leftrightarrow -i\omega, \nabla \Leftrightarrow i\vec{k}.$$

Получим систему уравнений Максвелла с учетом анизотропии среды.

$$\begin{cases} [\vec{k}\vec{H}] = -\frac{\omega}{c} \vec{D} \\ [\vec{k}\vec{E}] = \frac{\omega}{c} \vec{B} \\ (\vec{k}\vec{B}) = 0 \\ (\vec{k}\vec{D}) = 0 \\ \vec{B} = \vec{H} \\ \vec{D} = \hat{\epsilon} \vec{E} \end{cases}$$

Из этой системы видим взаимную ориентацию векторов, изображенную на рисунке 18.

$$\begin{cases} \vec{D} \perp \vec{H}, \vec{k} \\ \vec{B} \perp \vec{k}, \vec{E} \\ \vec{B} \perp \vec{k} \\ \vec{B} \perp \vec{H} \\ \vec{B} \parallel \vec{H} \\ \vec{D} \nparallel \vec{E} \end{cases}$$

Также знаем, что вектор Умова-Пойнтинга: $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}]$, что означает, что $\vec{S} \perp \vec{E}\vec{H}$.

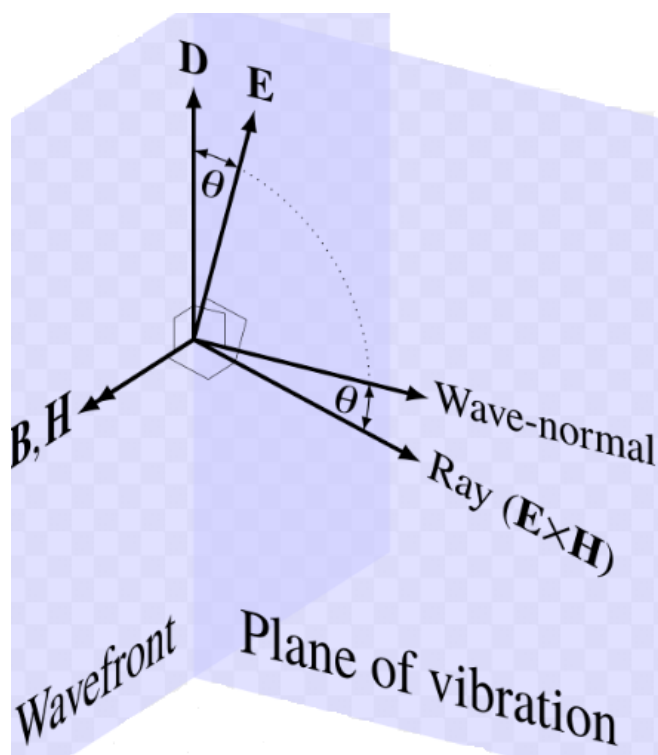


Рисунок 18 – Ориентация векторов в анизотропной электрической среде

11.2. Уравнение Френеля

Уравнение, связывающее вектора \vec{D} и \vec{E} через тензор диэлектрической проницаемости будет выглядеть следующим образом:

$$\vec{D} = \hat{\epsilon} \vec{E}$$

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

Введем вектор \vec{n} , такой, что по модулю он будет равен показателю преломления и сонаправлен с \vec{k} : $|\vec{n}| = n = \frac{c}{v_f} = \frac{c}{\omega} |\vec{k}|$, $\vec{n} \parallel \vec{k}$.

$$\vec{n} \equiv \frac{c}{\omega} \vec{k}$$

Заменим в уравнениях Максвелла \vec{k} на \vec{n} .

$$\begin{cases} [\vec{n} \vec{H}] = -\vec{D} \\ [\vec{n} \vec{E}] = \vec{B} = \vec{H} \end{cases} \quad (79)$$

Подставим второе уравнение системы (79) в первое уравнение системы.

$$[\vec{n} [\vec{n} \vec{E}]] + \vec{D} = 0 \quad (80)$$

Подставим в уравнение (80) выражение \vec{D} через тензор диэлектрической проницаемости.

$$\begin{aligned} \left[\vec{n}[\vec{n}\vec{E}] \right] + \hat{\varepsilon}\vec{E} &= 0 \\ \vec{n}(\vec{n}\vec{E}) - n^2\vec{E} + \hat{\varepsilon}\vec{E} &= 0 \end{aligned} \quad (81)$$

Мы получили уравнение, связывающее в каждой точке среды в любой момент времени свойства волны, свойства среды и значение вектора напряженности, который описывает возмущение. Запишем (81) покомпонентно:

$$\begin{aligned} n_j n_i E_i - n^2 E_j + \varepsilon_{ji} E_i &= 0 \\ (n_j n_i - n^2 \delta_{ji} + \varepsilon_{ji}) E_i &= 0 \end{aligned}$$

Нетривиальное решение системы существует, когда определитель системы равен нулю. Это условие и есть уравнение Френеля - уравнение относительно $n_j = \frac{c}{\omega} k_j \Leftrightarrow \omega = \omega(k_1, k_2, k_3) = \omega(\vec{k})$ - дисперсионное соотношение с учетом направления.

$$\det(n_j n_i - n^2 \delta_{ji} + \varepsilon_{ji}) = 0 \quad (82)$$

Когда мы решим это уравнение, получим однозначную связь параметров среды, частоты и либо \vec{n} , либо \vec{k} . С помощью уравнения Френеля можно получить дисперсионное соотношение для любой анизотропной среды.

11.2.1. Нормальные волны в одноосных кристаллах

В одноосных кристаллах вдоль одного направления - оси OO' , будут одни свойства, а поперек - другие. Рассмотрим волну с волновым вектором \vec{k} под углом θ к оптической оси кристалла. Они образуют плоскость Σ - сечение кристалла. $\vec{k}, OO' \in \Sigma$. Заметим, что существует целое семейство осей OO' , векторов \vec{k} и плоскостей Σ . В силу принципа суперпозиции можем разложить вектор \vec{D} на составляющую, перпендикулярную плоскости Σ и лежащую в ней, как изображено на рисунке 19.

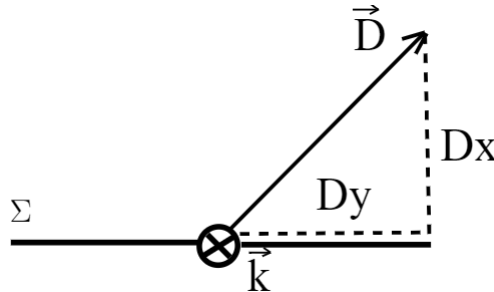


Рисунок 19 – Разложение вектора \vec{D}

На рисунке 19: $D_x = D_o$ - обыкновенная волна, $D_y = D_e$ - необыкновенная. Обыкновенный называется так, потому что он перпендикулярен оптической оси $D_o \perp OO'$, а значит ведет себя как в изотропной среде вне зависимости от θ .

Необыкновенная волна зависит от направления. Из уравнений Максвелла ранее мы получили:

$$\vec{n}(\vec{n}\vec{E}) - n^2\vec{E} + \vec{D} = 0. \quad (83)$$

Скалярно умножим выражение (83) на \vec{D} .

$$(\vec{n}\vec{D})(\vec{n}\vec{E}) - n^2(\vec{E}\vec{D}) + D^2 = 0$$

Так как $\text{div } \vec{D} = 0$, то из уравнения остаются два последних слагаемых, и, выразив оттуда \vec{n} , получаем:

$$|\vec{n}| = \left| \frac{\vec{D}}{\sqrt{\vec{E}\vec{D}}} \right|$$

$$v_f = c \frac{\sqrt{\vec{E}\vec{D}}}{|\vec{D}|}$$

Если мы совместим ось OZ и OO' , то тензор диэлектрической проницаемости примет диагональный вид в одноосном кристалле:

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix}$$

1. Обыкновенная волна (о-волна):

$$\vec{D} = \hat{\epsilon}\vec{E}$$

$$\begin{cases} D_x = \epsilon_{\perp} E_x \\ D_y = \epsilon_{\perp} E_y \end{cases} \rightarrow D_{\perp} = \epsilon_{\perp} E_{\perp}$$

Откуда получаем, что:

$$n_{\perp} = \sqrt{\epsilon_{\perp}}, \forall \theta$$

То есть скорость распространения нормальной волны не зависит от изначального направления \vec{k} . Обычно обозначают $n_0 \equiv \sqrt{\epsilon_{\perp}}$.

2. Необыкновенная волна (е-волна):

Рассмотрим плоскость главного сечения кристалла σ .

Распишем скалярное произведение векторов \vec{E} и \vec{D} .

$$(\vec{E}\vec{D}) = E_{\parallel}D_{\parallel} + E_{\perp}D_{\perp} = \frac{D_{\perp}^2}{\epsilon_{\perp}} + \frac{D_{\parallel}^2}{\epsilon_{\parallel}}$$

$$n_{\parallel}^2 = \frac{D^2}{(\vec{E}\vec{D})} = \frac{D^2}{\frac{D_{\perp}^2}{\epsilon_{\perp}} + \frac{D_{\parallel}^2}{\epsilon_{\parallel}}} = \left(\frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_{\perp}} + \frac{\sin^2 \theta}{\epsilon_{\parallel}} \right)^{-1}$$

На рисунке 20 $E_{\parallel}, D_{\parallel}$ - проекции векторов \vec{E}, \vec{D} на ось OO' . E_{\perp}, D_{\perp} - проекции векторов \vec{E}, \vec{D} на ось, перпендикулярную оси OO' . k - волновой вектор, θ - угол между волновым вектором и осью OO' .

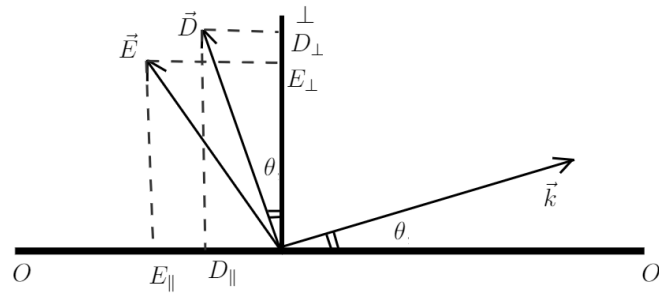


Рисунок 20 – Ориентация векторов в одноосном кристалле

$$n_{\parallel}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon_{\parallel}}}}$$

Можно переписать это выражение с учетом общепринятых обозначений - $n_o \equiv \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$, $n_e \equiv \sqrt{\varepsilon_{\parallel}}$

$$n_{\parallel}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}}}$$

Нормальные волны - обыкновенная и необыкновенная. Обыкновенная не зависит от θ .

Лекция 12. Волны в неоднородной изотропной среде

12.1. Волны в неоднородной изотропной среде

Будем работать в геометрическом приближении. Рассматриваем неоднородности масштаба $L \gg \lambda$ и среду без поглощения. Запишем уравнения геометрической оптики. Волновое уравнение:

$$\Delta U - \frac{1}{v_f^2(\vec{r})} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (84)$$

Неоднородность среды - зависимость свойств среды от пространственных координат. При этом неоднородные и анизотропные одновременно среды встречаются достаточно редко. Разложим U на составляющие по координатам и времени.

$$U(\vec{r}, t) = u(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

Подставим это выражение в волновое уравнение (84) и получим уравнение Гельмгольца.

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{v_f^2(\vec{r})} u = 0 \quad (85)$$

Это уравнение Гельмгольца может не иметь аналитического решения из-за зависимости параметров среды от координаты, поэтому часто используют разные приближения, в нашем случае, геометрическое. Попробуем упростить уравнение Гельмгольца. Введем $n(\vec{r}) = \frac{c}{v_f(\vec{r})}$, где c - характерное значение фазовой скорости. Также введем некоторое равновесное значение, относительно которого будут меняться параметры среды: $k_0 \equiv \frac{\omega}{c}$. Тогда уравнение Гельмгольца (85) примет вид:

$$\Delta u + n^2(\vec{r})k_0^2 u = 0.$$

Будем искать $u(\vec{r})$ в виде:

$$u(\vec{r}) = A(\vec{r})e^{ik_0\psi(\vec{r})}.$$

Где $A(\vec{r})$ - амплитуда, $\psi(\vec{r})$ - эйконал. Поверхность $\psi(\vec{r}) = \text{const}$ - волновой фронт

$$\nabla u = \nabla A e^{ik_0\psi} + ik_0 A e^{ik_0\psi} \nabla \psi$$

Можем использовать метод медленно меняющейся амплитуды.

$$\Delta u = \left(\Delta A + ik_0 \Delta \psi A + 2ik_0 \nabla A \nabla \psi - k_0^2 (\Delta \psi)^2 A \right) e^{ik_0\psi}$$

Подставим в уравнение Гельмгольца.

$$\Delta A + ik_0 A \Delta \psi + 2ik_0 \nabla A \nabla \psi - k_0^2 A (\nabla \psi)^2 + n^2 k_0^2 A = 0$$

Разделим это уравнение на уравнение для действительной и мнимой части.

$$\begin{cases} Re : \Delta A - k_0^2 A (\nabla \psi)^2 + n^2 k_0^2 A = 0 \\ Im : A \Delta \psi + 2 \nabla A \nabla \psi = 0 \end{cases}$$

Уравнение для действительной части можно записать в следующем виде:

$$(\nabla \psi)^2 = n^2 + \frac{\Delta A}{k_0^2 A}$$

Учтем, что в нашем приближении $L \gg \lambda$. L - масштаб изменения амплитуды A . Так как фазовая скорость меняется слабо относительно своей опорной, то $n^2 \sim 1$ - величина нулевого порядка малости.

$$\frac{\Delta A}{k_0^2 A} = \frac{\frac{|A|}{L^2}}{\frac{|A|}{\lambda^2}} = \frac{\lambda^2}{L^2} \ll 1$$

То есть в наших приближениях мы можем пренебречь вторым слагаемым. Мы получили уравнение эйконала.

$$(\nabla \psi)^2 = n^2$$

Уравнение эйконала связывает траектории лучей параметры неоднородности среды. Явление искривления лучей в неоднородной среде - рефракция.

Уравнение для мнимой части домножим на A

$$A^2 \Delta \psi + 2A \nabla A \nabla \psi = 0$$

$$\nabla(A^2 \nabla \psi) = 0 \quad (86)$$

Уравнение (86) - уравнение переноса энергии. Проинтегрируем уравнение переноса по объему трубки тока.

$$I = \int_V \operatorname{div}(nA^2 \vec{l}) = \int_{S_{бок}} nA^2 \vec{l} N_{бок} ds + \int_{S_1} nA^2 \vec{l} N_1 ds + \int_{S_2} nA^2 \vec{l} N_2 ds$$

Где \vec{N} - вектор нормали к поверхности. Из определения трубки тока следует, что $N_{бок} \vec{l} = 0$, $N_1 \vec{l} = -1$, $N_2 \vec{l} = 1$.

$$I = nA^2 S_2 - nA^2 S_1 - 1 = 0 \rightarrow nA^2 S = \text{const}$$

$nA^2 S$ по размерности имеет смысл мощности. Мы получили уравнения геометрической оптики:

$$\begin{cases} (\nabla \psi)^2 = n^2 \\ \nabla(A^2 \nabla \psi) = 0 \end{cases} \quad (87)$$

12.2. Плоско-слоистые среды. Уравнение траектории луча

$$\begin{cases} (\nabla\psi)^2 = n^2 \\ \nabla\psi = n\vec{l} \end{cases} \rightarrow \frac{d}{ds} \left(n(\vec{r}) \frac{d\vec{R}}{ds} \right) = \nabla n(\vec{r}) \quad (88)$$

Где s - координата вдоль луча. Плоско-слоистая среда - среда, в которой неоднородность проявляется только в одном из трех направлений: $n(\vec{r}) = n(z)$. Рассмотрим исходный луч, входящий с координатами $R_0 = (x_0, 0, z_0)$. Распишем уравнение (88) покомпонентно.

$$\begin{cases} OX : \frac{d}{ds} \left(n(z) \frac{dx}{ds} \right) = \frac{dn(z)}{dz} = 0 \\ OY : \frac{d}{ds} \left(n(z) \frac{dy}{ds} \right) = \frac{dn(z)}{dz} = 0 \rightarrow y(s) = 0 \\ OZ : \frac{d}{ds} \left(n(z) \frac{dz}{ds} \right) = \frac{dn(z)}{dz} \end{cases}$$

Пусть луч вошел под углом θ_0 к оси z . Из нашей системы видим, что луч останется в плоскости XZ . $\frac{dx}{ds} = \sin \theta$, тогда:

$$\frac{d}{ds} (n \sin \theta) = 0$$

$$n \sin \theta = \text{const} = n_0 \sin \theta_0 \quad (89)$$

(89) - закон Снеллиуса.

Перейдем от параметрической записи к явной - $z(x)$. $ds = \frac{dx}{\sin \theta}$. Подставим это в уравнение по оси Z .

$$\sin \theta \frac{d}{dx} \left(n \sin \theta \frac{dz(x)}{dx} \right) = \frac{dn}{dz}$$

$$\sin \theta = \frac{n_0}{n} \sin \theta_0$$

Тогда:

$$\frac{n_0}{n} \sin \theta_0 \frac{d}{dx} \left(n_0 \sin \theta_0 \frac{dz}{dx} \right) = \frac{dn}{dz}$$

Мы получили уравнение траектории луча в виде явной зависимости $z(x)$ в плоско-слоистой среде.

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{2n_0^2 \sin^2 \theta_0} \frac{d(n^2)}{dz}$$



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ