МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

ДЬЯЧЕНКО
МИХАИЛ ИВАНОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ
НЕДОЛИВКО ЮЛИЮ НИКОЛАЕВНУ

Содержание

Лекция 1. Модули непрерывности. Теорема Джексона **5**
Основные обозначения . . . 5
Теорема . . . 6
Модули непрерывности . . . 8
Теорема Джексона . . . 11

Лекция 2. Ортонормированные системы в $L_2(T)$ **14**
Теорема Джексона (доказательство) . . . 14
Ортонормированные системы в $L_2(T)$ . . . 16
Неравенство Бесселя . . . 16
Теорема Риса – Фишера . . . 18
Теорема об ортонормированной системе в $L_2(T)$ . . . 19

Лекция 3. Общие тригонометрические ряды. Оценки коэффициентов Фурье **23**
Общие тригонометрические ряды . . . 23
Теорема Кантора – Лебега . . . 24
Теорема Лузина – Данжуа . . . 25
Теоремы о формальном интегрировании и дифференцировании ряда Фурье 26
Модуль непрерывности и коэффициенты Фурье . . . 28

Лекция 4. Простейшие результаты о сходимости рядов Фурье. Часть 1 **31**
Окончательность оценки коэффициентов Фурье через модуль непрерывности 31
Простейшие результаты о сходимости рядов Фурье . . . 33
Условие Дини . . . 34
Теорема. Достаточное условие сходимости ряда Фурье почти всюду . . . 34
Следствие из второй теоремы о среднем значении . . . 35

Лекция 5. Простейшие результаты о сходимости рядов Фурье. Часть 2 **38**
Принцип локализации . . . 38
Признак Жордана . . . 39
Оценки констант Лебега . . . 41
Признак Дини – Липшица. Невозможность его усиления . . . 42

Лекция 6. Сходимость рядов Фурье почти всюду. Часть 1 **45**
Невозможность усиления признака Дини – Липшица (завершение доказательства) . . . 45
Теорема Плеснера – Ульянова . . . 49

Лекция 7. Сходимость рядов Фурье почти всюду. Часть 2 **52**
Теорема Колмогорова – Селиверстова . . . 52
Теорема Плеснера – Ульянова . . . 56

Лекция 8. Пример А.Н.Колмогорова ряда Фурье, расходящегося почти всюду **58**
Вспомогательные леммы . . . 58
Лемма А.Н. Колмогорова . . . 60

Лекция 9. Построение примера Колмогорова. Частный случай интерполяционной теоремы Марцинкевича **65**
Теорема А.Н. Колмогорова . . . 65
Частный случай интерполяционной теоремы Марцинкевича . . . 67
Теорема о представлении интеграла от степени функции с помощью функции распределения . . . 67
Необхомые определения . . . 68
Частный случай интерполяционной теоремы Марцинкевича (начало доказательства) . . . 69

Лекция 10. Частный случай интерполяционной теоремы Марцинкевича (продолжение доказательства). Теорема Пэли **71**
Частный случай интерполяционной теоремы Марцинкевича (продолжение доказательства) . . . 71
Теорема Пэли (формулировка) . . . 74

Лекция 11. Доказательство теоремы Пэли. Формулировка теоремы Рисса. Построение полиномов Рудина-Шапиро **77**
Теорема Пэли (доказательство) . . . 77
Теорема Рисса (формулировка) . . . 79
Построение полиномов Рудина – Шапиро . . . 80

Лекция 12. Теорема Пэли, неравенство Бернштейна **84**
Невозможность усиления теоремы Пэли для тригонометрических систем . 84
Неравенство Бернштейна в $C\left(\overline{T}\right)$ . . . 86
Абсолютная сходимость рядов Фурье . . . 89

Лекция 13. Абсолютная сходимость рядов Фурье **90**
Теорема Лоренца . . . 90
Тригонометрические ряды с монотонными коэффицентами . . . 94

Лекция 14. Тригонометрические ряды с монотонными коэффициентами. Часть 1 **96**
Тригонометрические ряды с монотонными коэффициентами . . . 96
Теорема о дифференцируемости внутри отрезка суммы тригонометрического ряда с выпуклыми коэффициентами . . . 97
Тригонометрические ряды с монотонными коэффициентами из пространств L_p, $1 < p < \infty$ . . . 100

Лекция 15. Тригонометрические ряды с монотонными коэффициентами. Часть 2 **102**

Теорема Харди – Литтльвуда для тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами . . . 102

Ряды Фурье с монотонными коэффициентами и классы Lipα, $0 < \alpha < 1$ . . 106

Асимптотика вблизи нуля сумм рядов с монотонными коэффициентами . . 107

Лекция 16. Асимптотика вблизи нуля сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами **109**

Оценка снизу вблизи нуля суммы синус-ряда с выпуклыми коэффициентами 109

Оценка сверху вблизи нуля суммы косинус-ряда с выпуклыми коэффициентами . . . 113

Примеры . . . 114

Лекция 1. Модули непрерывности. Теорема Джексона

Основные обозначения

Данный курс является курсом естественно-научного содержания. Главным образом речь пойдет о тригонометрических рядах. Может показаться, что тема достаточно специальная, однако по ходу курса будет видно, что тригонометрические ряды связаны с различными областями математики. В частности, в курсе будет рассматриваться[1] теория приближения, теория интерполирования операторов и их приложения.

Изложение курса будет построено, исходя, в частности, из предположения, что слушатели знакомы с теорией интеграла Лебега[2].

В курсе будут рассматриваться тригонометрические ряды по системе

$$\{1, \cos nx, \sin nx\}$$

(отметим, что все функции такой системы являются 2π-периодическими). Чаще всего в качестве рассматриваемого промежутка будет выбираться

$$T = [-\pi, \pi), \quad \overline{T} = [-\pi, \pi].$$

Под $C\left(\overline{T}\right)$ будем понимать

$$C\left(\overline{T}\right) = \left\{ \text{ непрерывные ф-ии на } \mathbb{R}, \quad 2pi\text{- пер. с } \|f\|_C = \max_{x \in \overline{T}} |f(x)| \right\}.$$

Отсюда, в частности, $f(\pi) = f(-\pi)$.

Пусть $1 \leq p < \infty$. Тогда

$$L_p(T) = \widehat{L}_p(T)/_{L_0(T)},$$

где $\widehat{L}_p(T)$ – измеримые[3] функции на T такие, что

$$\int\limits_T |f(x))^p \, d\mu < \infty,$$

а $L_0(T)$ – измеримые на T функции, равные 0 почти всюду на T.

В $L_p(T)$ ввыодится норма

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_T (f(x))^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

[1] Не очень углубленно, поскольку длительность курса всего семестр.
[2] В объеме университетского курса.
[3] Относительно классической меры Лебега μ.

Теорема

Докажем сначала два простых утверждения.

Лемма 1.1. *Пусть $f(x)$ – 2π-периодическая функция на $\mathbb{R}$ такая, что $f(x) \in L(T)$. Тогда $\forall\ s \in \mathbb{R}$*

$$\int\limits_T f(x)d\mu = \int\limits_{[-\pi+a,\pi+a} f(x)d\mu.$$

Иными словами, интеграл 2π-периодической функции по отрезку длины, равной периоду, не зависит от расположения этого отрезка на прямой.

Доказательство. Рассмотрим

$$\int\limits_T f(x)d\mu - \int\limits_{[-\pi+a,\pi+a]} f(x)d\mu = \int\limits_{[-\pi,-\pi+a]} f(x)d\mu + \int\limits_{[\pi,\pi+a]} f(x)d\mu =$$

$$= \int\limits_{[-\pi,-\pi+a]} f(x)d\mu - \int\limits_{[-\pi,-\pi+a]} f(x+2\pi)d\mu = 0.$$

□

Теорема 1.1. *(Теорема о плотности непрерывных функций в $L_p(T)$) Пусть*[4] $1 \leq p < \infty$, *функция*[5]

$$f(x) \in L_p(T).$$

Тогда $\forall\ \varepsilon > 0$

$$\exists\ g_\varepsilon(x) \in C\left(\overline{T}\right)$$

такая, что

$$\|f(x) - g_\varepsilon(x)\|_p < \varepsilon.$$

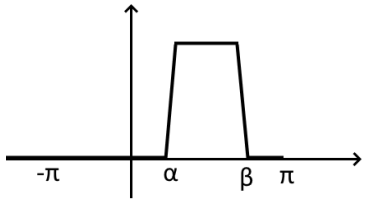

Рис. 1.1. Функция $g_n(x)$

Иными словами, $C\left(\overline{T}\right)$ является всюду плотным подмножеством $L_p(T)$.

[4]Пространство существенно ограниченных функций $L_\infty(T)$ в курсе не рассматривается, так как в контексте тригонометрических рядов не представляет собой интересного случая. Заметим, что конкретно теорема 1.1 неверна для $p = \infty$.

[5]На самом деле, некоторый функциональный класс.

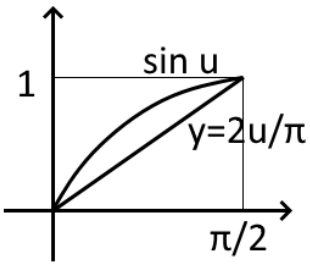

Рис. 1.2. Сравнение $\sin u$ и $\frac{2}{\pi}u$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = \chi_{\{\alpha,\beta\}}(x),$$

где $\{\alpha, \beta\} \subseteq T$. Напомним, $\{\alpha, \beta\}$ – любое из четырех множеств

$$[\alpha, \beta], \quad [\alpha, \beta), \quad (\alpha, \beta], \quad (\alpha, \beta).$$

Определим тогда

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in T \setminus \{\alpha, \beta\} \\ 1, & x \in \left[\alpha + \frac{1}{n}, \beta - \frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

и на оставшихся промежутках T $g_n(x)$ доопределяется линейно и непрерывно (рис. 1.1) и 2π-периодически продолжена. Здесь считаем, что

$$\frac{1}{n} < \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Тогда при достаточно большом n

$$\left\| g_n(x) - \chi_{\{\alpha,\beta\}} \right\| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что непрерывные функции всюду плотны в множестве

$$\left\{ \chi_{\sqcup_{k=1}^{r}\{\alpha_k,\beta_k\}}(x) \right\}.$$

Обратимся далее к теории меры Лебега. Если $E \subset T$ и E измеримо относительно классической меры Лебега, то $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ множество

$$E_\varepsilon = \sqcup_{k=1}^{r}\{\alpha_k, \beta_k\}$$

такое, что внешняя мера Лебега

$$\mu^* \left(E \Delta E_\varepsilon\right) \leq \varepsilon.$$

Рассмотрим[6]

$$\left\| \chi_E(x) - \chi_{E_\varepsilon}(x) \right\|_p = \left(\int\limits_{E \Delta E_\varepsilon} 1^p d\mu \right)^{1/p} = \left(\mu \left(E \Delta E_\varepsilon\right)\right)^{1/p}.$$

[6]Здесь пишем μ вместо μ^*, так как множество измеримо.

Получаем, что $\forall$ измеримого E, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$

$$h_\varepsilon(x) \in C\left(\overline{T}\right)$$

такая, что

$$\|\chi_E(x) - h_\varepsilon(x)\|_p < \varepsilon.$$

Отсюда $C\left(\overline{T}\right)$ всюду плотно в множестве всех простых функций в смысле L_p. Напомним, *простой функцией на* T называется функция вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^{l} c_k \chi_{E_k}(x),$$

где все E_k измеримы и

$$\sqcup_{k=1}^{l} E_k = T.$$

Но простые функции всюду плотны в $L_p(T)$ по определению интеграла Лебега. Отсюда получаем утверждение теоремы. $\square$

Модули непрерывности

Определение модуля непрерывности будет дано и для $C\left(\overline{T}\right)$, и для $L_p(T)$. Чаще всего мы будем рассматривать модуль непрерывности в $C\left(\overline{T}\right)$.

Определение 1.1. (Для $C\left(\overline{T}\right)$) Пусть 2π-периодическая $f(x) \in C\left(\overline{T}\right)$. Тогда $\forall$ $t \geq 0$ определим ее *модуль непрерывности*

$$\omega_c(f,t) = \omega(f,t) = \sup_{0 \leq |h| \leq t} \|f(x+h) - f(x)\|_{C\left(\overline{T}\right)}. \tag{1}$$

Отметим, что в (1) норма берется по x.

Определение 1.2. (Для $L_p(T)$) Аналогично, если $1 \leq p < \infty$, а $f(x) \in L_p(T)$, то *модуль непрерывности* определяется как

$$\omega_p(f,t) = \sup_{0 \leq |h| \leq t} \|f(x+h) - f(x)\|_p.$$

Модуль непрерывности позволяет квалифицировать функции. Рассмотрим непрерывные функции. В курсе классического математического анализа утверждается, что множество непрерывно дифференцируемых функций $\subset$ множество непрерывных функций. В курсе действительного анализа обсуждалось, что множество непрерывно дифференцируемых функций является множеством II категории. Введение модуля непрерывности позволяет определить некие классы на оставшихся функциях (непрерывных, но не непрерывно дифференцируемых), то есть классифицировать эти функции. Например, в качестве условия на модуль непрерывности может браться

$$\omega(f,t) \leq \mathrm{const} t^\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \tag{2}$$

Получившиеся классы называют *классами Липшица* (в действительном анализе) или *классами Гёльдера* (в области дифференциальных уравнений). При различных α свойства классов, определяемых условием (2), различны.

Перейдем к **свойствам** модулей непрерывности. Доказывать свойства мы будем для $C\left(\overline{T}\right)$. В случае, если некоторое свойство отличается для $L_p(T)$, это будет оговорено отдельно.

1. $\forall\ f(x) \in C\left(\overline{T}\right)$
$$\omega(f,0) = 0 \text{ и } \omega(f,t) \geq 0, \quad t > 0.$$
Это свойство следует из неотрицательности нормы. Аналогично для $L_p(T)$.

2. $\omega(f,t)$ является неубывающей функцией на $[0,\infty)$.
Это следует из того, что $\sup\limits_{0\leq|h|\leq t}$ в (1) может только увеличиться при больших t. Аналогично для $L_p(T)$.

3. При $t > 2\pi$
$$\omega(f,t) = \omega(f,2\pi).$$
Действительно, пусть, например, $h \in [2\pi, 4\pi]$. Тогда
$$\|f(x+h) - f(x)\| = \|f(x+h-2\pi) - f(x)\|.$$
Аналогично для $L_p(T)$.

4. (Полуаддитивность) Если $t_1, t_2 > 0$, то
$$\omega(f, t_1+t_2) \leq \omega(f,t_1) + \omega(f,t_2). \tag{3}$$
Действительно, пусть h таково, что
$$0 < |h| \leq t_1 + t_2.$$
Тогда его можно представить в виде
$$h = h_1 + h_2, \quad |h_1| \leq t_1, \quad |h_2| \leq t_2.$$
Но тогда
$$\|f(x+h) - f(x)\|_{C\left(\overline{T}\right)} \leq \|f(x+h_1+h_2) - f(x+h_1)\|_{C\left(\overline{T}\right)} +$$
$$+ \|f(x+h_1) - f(x)\|_{C\left(\overline{T}\right)} \overset{(*)}{=} \|f(x+h_2) - f(x)\|_{C\left(\overline{T}\right)} + \|f(x+h_1) - f(x)\|_{C\left(\overline{T}\right)} \leq$$
$$\leq \omega(f,t_2) + \omega(f,t_1).$$
Здесь в (*) убираем h_1 в силу 2π-периодичности. Переходя слева к верхней грани по $|h| \leq t$, получим утверждение (3).

Для $L_p(T)$ аналогично, но в (*) требуется воспользоваться леммой 1.1.

5. $\omega(f,t) \in C\left([0,\infty)\right)$.

   У нас $\omega(f,0)=0$. В силу теоремы о равномерной непрерывности для $\forall\ \varepsilon>0$ $\exists\ \delta>0$ такое, что $\forall\ x\in\mathbb{R}$, $\forall\ h$ такого, что $|h|<\delta$ выполнено

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon.$$

   Отсюда

$$\omega(f,h)\le\varepsilon \text{ при } |h|<\delta,$$

   то есть $\omega(f,t)$ непрерывна в точке 0.

   Для $L_p(T)$ надо воспользоваться теоремой 1.1. Согласно идее, $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ g_\varepsilon(x)\in C\left(\overline{T}\right)$ такая, что

$$\|f(x)-g_\varepsilon(x)\|_p<\varepsilon.$$

   Далее, подберем $\delta>0$ такое, что $\forall\ x\in\mathbb{R}$, $\forall\ h$ такого, что $|h|<\delta$ верно

$$|g_\varepsilon(x+h)-g_\varepsilon(x)|<\varepsilon.$$

   Тогда при $|h|<\delta$ рассмотрим

$$\|f(x+h)-f(x)\|_p\le\|f(x+h)-g_\varepsilon(x+h)\|_p+\|g_\varepsilon(x+h)-g_\varepsilon(x)\|_p+$$

$$+\|g_\varepsilon(x)-f(x)\|_p<2\varepsilon+\left(\int\limits_T|g_\varepsilon(x+h)-g_\varepsilon(x)|^p\,d\mu\right)^{1/p}\le 2\varepsilon+\varepsilon\,(2\pi)^{1/p}.$$

   Здесь в силу леммы 1.1

$$\|f(x+h)-g_\varepsilon(x+h)\|_p=\|g_\varepsilon(x)-f(x)\|_p.$$

   Итак, получаем, что $\omega_p(f,t)$ непрерывен в точке 0.

   Из свойства 4 и доказанного выше следует, что $\omega(f,t)$ $(\omega_p(f,t))$ непрерывен в каждой точке.

   Действительно, пусть $f\in C\left(\overline{T}\right)$ и $t_0>0$. Тогда если $t>t_0$, то по свойству 4

$$\omega(f,t_0)\le\omega(f,t)\le\omega(f,t_0)+\underbrace{\omega(f,t-t_0)}_{\to 0,\ \ t\downarrow t_0}.$$

   Отсюда вытекает непрерывность $\omega(f,t)$ в t_0 справа. Непрерывность в t_0 слева проверяется аналогично.

   Непрерывность в произвольной точке для $f(x)\in L_p(T)$ проверяется аналогично.

6. Если $f(x)\in C\left(\overline{T}\right)$ и для некоторого $t>0$

$$\omega(f,t)=0,$$

   то $f\equiv\text{const}$.

Действительно, в таком случае по свойству 4 имеем[7], что $\forall\ k > 1$

$$\omega(f, kt) = 0.$$

Отсюда в силу монотонности

$$\omega(f, t) \equiv 0,$$

а значит, $f \equiv \text{const}$.

Аналогично для $L_p(T)$ $f \equiv \text{const}$ почти всюду.

7. Пусть $f(x) \in C\left(\overline{T}\right)$. Тогда

$$\frac{\omega(f,t)}{t}$$

почти убывает на $(0, \infty)$, то есть для $t_2 > t_1$

$$\frac{\omega(f,t_2)}{t_2} \leq 2\frac{\omega(f,t_1)}{t_1}.$$

Действительно, пусть $t_2 > t_1 > 0$. Подберем $k \in \mathbb{N}$ такое, что

$$kt_2 < t_2 \leq (k+1)t_1.$$

Тогда

$$\frac{\omega(f,t_2)}{t_2} \leq \frac{\omega\left(f,(k+1)t_1\right)}{t_1} \leq \underbrace{\frac{k+1}{k}}_{\leq 2}\frac{\omega(f,t_1)}{t_1}.$$

Для $L_p(T)$ аналогично.

Заметим, что из свойства 7 следует, что не любая функция является модулем непрерывности для какой-то функции. Она должна не слишком быстро расти.

Теорема Джексона

Отметим, что теорема Джексона является частным случаем прямой теоремы теории приближения.

Рассмотрим при $r \geq 0$ 2π-периодические функции

$$R_r(t) = \begin{cases} \left(r + \frac{1}{2}\right)^4, & t = 0 \\ \left(\frac{\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\right)^4, & t \in \overline{T} \setminus \{0\} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $R_r(t) \in C\left(\overline{T}\right)$.

[7] Кроме того, для $k \in \mathbb{N}$

$$\omega(f, kt) \leq k\omega(f, t).$$

Лемма 1.2. *Для $\forall\ r$ $R_r(t)$ является тригонометрическим полиномом степени $4r$.*

Доказательство. При $t \in \overline{T} \setminus \{0\}$ имеем

$$\frac{1}{2} + \cos t + \ldots + \cos rt = \frac{\sin\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2} + \sin\frac{3}{2}t + \ldots + \sin\left(r+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

При $t = 0$, очевидно,

$$\frac{1}{2} + \cos t + \ldots + \cos rt = r + \frac{1}{2}.$$

Возводя

$$\frac{1}{2} + \cos t + \ldots + \cos rt$$

в четвертую степень, получим утверждение леммы. □

Лемма 1.3. *Пусть $r \geq 0$,*

$$\gamma_r = \int\limits_T R_r(t)d\mu.$$

Тогда

$$C_1\left(r+1\right)^3 \leq \gamma_r \leq C_2\left(r+1\right)^3, \tag{4}$$

где C_1 и C_2 – положительные постоянные, не зависящие от r.

Доказательство. Докажем сначала оценку снизу (4). Так как

$$R_r(t) \geq 0\ \forall\ t,$$

то

$$\gamma_r \geq \int\limits_{\left(0,\frac{\pi}{2(r+1/2)}\right)} R_r(t)d\mu. \tag{5}$$

Заметим, что

$$\left|2\sin\frac{t}{2}\right| \leq |t|$$

и при $0 < t < \frac{\pi}{2)r+1/2)}$

$$\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)t \leq \frac{2}{\pi}\left(r+\frac{1}{2}\right)t$$

(рис. 1.2). Отсюда

$$(5) \geq \int\limits_0^{\frac{\pi}{2(r+1/2)}} \left(\frac{\frac{2}{\pi}(r+1/2)t}{t}\right)^4 dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^4\left(r+\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{\pi}{2(r+1/2)}\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^3\left(r+\frac{1}{2}\right)^3 \geq \frac{1}{8}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\left(r+1\right)^3.$$

Перейдем к доказательству оценки сверху (4). Воспользовавшись четностью $R_r(t)$, запишем

$$\gamma_r = 2\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\right)^4 dt \le$$

$$\le 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2(r+1/2)}}\left(\frac{(r+1/2)t}{\frac{2}{\pi}t}\right)^4 dt + 2\int\limits_{\frac{\pi}{2(r+1/2)}}^{\pi}\frac{1}{\left(\frac{2}{\pi}t\right)^4}dt =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\left(r+\frac{1}{2}\right)^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2(r+1/2)}}dt + \int\limits_{\frac{\pi}{2(r+1/2)}}^{\pi}\frac{1}{t^4}dt \le$$

$$\le 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\left(\left(r+\frac{1}{2}\right)^4\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\frac{\pi^3(r+1/2)^3}{2^3}\right) \le C_2\left(r+\frac{1}{2}\right)^3 \le C_2(r+1)^3.$$

□

Перейдем к теореме Джексона. Отметим, что эта теорема справедлива для любых $L_p(T)$, но докажем мы ее только для $C\left(\overline{T}\right)$.[8]

Теорема 1.2. *(Джексона)* $\exists$ *абсолютная постоянная* $C > 0$ *такая, что* $\forall\ f(x) \in C\left(\overline{T}\right)$ *и* $\forall\ n \ge 0\ \exists$ *тригонометрический полином* $Q_n(t)$ *степени* $\le n$ *такой, что*

$$|f(x) - Q_n(x)|_{C(\overline{T})} \le C\omega\left(f, \frac{1}{n+1}\right). \tag{6}$$

Замечание 1.1. Н.П. Корнейчук доказал, что точное значение константы в (6) равно 1. Заметим, однако, что в его работе в правой части (6) рассматривалась

$$\omega\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right).$$

[8] Для доказательства в $L_p(T)$ необходимы некоторые технические детали (например, обобщенное неравенство Минковского).

Лекция 2. Ортонормированные системы в $L_2(T)$

Теорема Джексона (доказательство)

Докажем теорему Джексона, сформулированную в прошлый раз.

Теорема 1.2. *(Джексона)* $\exists$ *абсолютная постоянная* $C > 0$ *такая, что* $\forall\ f(x) \in C\left(\overline{T}\right)$ *и* $\forall\ n \geq 0\ \exists$ *тригонометрический полином* $Q_n(t)$ *степени*[9] $\leq n$ *такой, что*

$$|f(x) - Q_n(x)|_{C(\overline{T})} \leq C\omega\left(f, \frac{1}{n+1}\right).$$

Доказательство. Пусть дана $f(x) \in C\left(\overline{T}\right)$ и пусть

$$r = \left[\frac{n}{4}\right].$$

Напомним,

$$R_r(\tau) = c_0 + \sum_{k=1}^{4r} \left(c_k \cos k\tau + d_k \sin k\tau\right).$$

Рассмотрим функцию

$$Q_n(t) = \frac{1}{\gamma_r} \int\limits_T f(x+t) R_r(t) dt = \frac{1}{\gamma_r} \int\limits_{-\pi+x}^{\pi+x} f(u) R_r(u-x) du \overset{\text{Лемма 1.1}}{=}$$

$$= \frac{1}{\gamma_r} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u) R_r(u-x) du = \frac{1}{\gamma_r} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big(c_0 f(u) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{4r} \left(c_k \cos ku f(u) \cos kx + c_k \sin ku f(u) \sin kx + d_k \sin ku f(u)\right) \cos kx -$$

$$- d_k \cos ku f(u) \sin kx\Big) du = f_0 + \sum_{k=1}^{r} \left(\alpha_k \cos kx + \beta \sin kx\right)$$

– тригонометрический полином степени $\leq 4r \leq n$.

Пусть $x \in \overline{T}$. Заметим, что

$$\frac{1}{\gamma_r} \int\limits_T R_r(t) dt = 1.$$

[9]Например, полином

$$1 + \sin t + \cos t$$

является полиномом 1 степени, а

$$1 + \cos 5t$$

– полиномом 5 степени.

Рассмотрим

$$|f(x)-Q_n(x)| = \left|\frac{1}{\gamma_r}\int\limits_T f(x)R_r(t)dt - \frac{1}{\gamma_r}\int\limits_T f(x+t)R_r(t)dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\gamma_r}\int\limits_T |f(x+t)-f(x)|\,R_r(t)dt \le \frac{1}{\gamma_r}\int\limits_T \omega\left(f,|t|\right)R_r(t)dt = \frac{2}{\gamma_r}\int\limits_0^\pi \omega(f,t)R_r(t)dt \le$$

$$\le \frac{2}{\gamma_r}\int\limits_0^{\frac{1}{n+1}} \omega(f,t)R_r(t)dt + \frac{2}{\gamma_r}\int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\pi} \omega(f,t)R_r(t)dt \le$$

$$\le \omega\left(f,\frac{1}{n+1}\right)\underbrace{\frac{2}{\gamma_r}\int\limits_0^\pi R_r(t)dt}_{=1} + \frac{2}{\gamma_r}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\pi}\omega(f,t)\frac{dt}{t^4}. \tag{7}$$

Второе слагаемое здесь оценено с учетом

$$R_r(t) = \left(\frac{\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\right)^4 \le \frac{1}{\left(\frac{2}{\pi}t\right)^4} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^4\frac{1}{t^4},$$

так как при $0<t<\pi$

$$\sin\frac{t}{2} \ge \frac{2}{\pi} - \frac{t}{2}.$$

Далее,

$$(7) = \omega\left(f,\frac{1}{n+1}\right) + \frac{2}{\gamma_r}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\pi}\frac{\omega(f,t)}{t}\frac{dt}{t^3} \overset{(*)}{\le} \omega\left(f,\frac{1}{n+1}\right) +$$

$$+\frac{n}{\gamma_r}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\frac{\omega\left(f,\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}}\int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\pi}\frac{dt}{t^3} \le$$

$$\le \omega\left(f,\frac{1}{n+1}\right) + \frac{2}{\gamma_r}\omega\left(f,\frac{1}{n+1}\right)(n+1)^3\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \overset{\text{Лемма 1.3}}{\le}$$

$$\le \omega\left(f,\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{2\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{C_1\left(r+1\right)^3}(n+1)^3\right) \le \omega\left(f,\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{2\cdot 8^3\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{C_1}\right),$$

так как при $n>0$

$$\frac{n+1}{r+1} \le \frac{n+1}{\frac{n}{4}} = 4\frac{n+1}{n} \le 8$$

и при $n=0$ это тоже верно. Здесь (*) возможно в силу свойства 7 модуля непрерывности.

Отсюда следует, что

$$\|f(x) - Q_n(x)\|_{C(\overline{T})} \leq C\omega\left(f, \frac{1}{n+1}\right).$$

□

Ортонормированные системы в $L_2(T)$

Определение 2.1. Система

$$\{\psi_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset L_2(T)$$

называется *ортонормированной (ОНС)* $\iff$ $\forall\ n, m \geq 1$

$$\int\limits_T \psi_n(t)\overline{\psi_m(t)}d\mu = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

Пример 2.1. Система

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right\}_{n=1}^{\infty}\right\}$$

является ортонормированной в $L_2(T)$. Иногда будем пользоваться для нее записью

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

Для $\forall\ f(x) \in L_2(T)$ можно определить коэффиценты Фурье по системе $\{\psi_n\}$:

$$a_n(f) = \int\limits_T f(x)\overline{\psi_n(x)}d\mu.$$

Неравенство Бесселя

Теорема 2.3. *(Неравенство Бесселя)* $\forall\ f \in L_2(T)$ *имеем*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2. \tag{8}$$

Доказательство. $\forall\ N$ положим

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n(f)\psi_n(x)$$

и рассмотрим

$$0 \leq \|f(x) - S_N(x)\|_2^2 = \int\limits_T (f(x) - S_N(x))\,\overline{(f(x) - S_N(x))}d\mu =$$

$$= \int\limits_T f(x)\overline{f(x)}d\mu - \int\limits_T f(x)\overline{S_N(x)}d\mu - \int\limits_T S_N(x)\overline{f(x)}d\mu + \int\limits_T S_N(x)\overline{S_N(x)}d\mu =$$

$$= \|f\|_2^2 - \sum_{n=1}^{N}\overline{a_n(f)}\int\limits_T \underbrace{f(x)\overline{\psi_n(x)}}_{=a_n(f)}d\mu - \sum_{n=1}^{N}a_n(f)\int\limits_T \psi_n(x)\underbrace{\overline{f(x)}}_{\overline{a_n(f)}} +$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}a_n(f)\overline{a_m(f)}\int\limits_T \psi_n(x)\overline{\psi_m(x)}d\mu = \|f\|_2^2 - \sum_{n=1}^{N}|a_n(f)|^2 - \sum_{n=1}^{N}|a_n(f)|^2 + \sum_{n=1}^{N}|a_n(f)|^2.$$

Последние два слагаемых сокращаются. Итак, получаем, что

$$\sum_{n=1}^{N}|a_n(f)|^2 \le \|f\|_2^2.$$

Так как это верно для $\forall\ N$, получаем утверждение теоремы. □

Следствие 2.1. Если функция $f(x) \in L_2(T)$ и

$$\{a_n(t),\quad b_n(t)\}$$

– коэффиценты Фурье по системе

$$\{\cos nx,\quad \sin nx\},$$

то

$$a_n(t),\quad b_n(t)\ \to\ 0,\quad n\to\infty.$$

Следствие 2.2. Пусть $f(x) \in L(T)$,

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_T f(x)d\mu,\quad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_T f(x)\cos nx d\mu,$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_T f(x)\sin nx d\mu,$$

то

$$a_n(f),\quad b_n(f)\ \to\ 0,\quad n\to\infty.$$

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Подберем согласно теореме 1.1 функцию $g_\varepsilon(x) \in C\left(\overline{T}\right)$ такую, что

$$\|f(x) - g_\varepsilon(x)\|_1 \equiv \int\limits_T |f(x) - g_\varepsilon(x)|\,d\mu < \varepsilon.$$

Поскольку

$$g_\varepsilon(x) \in C\left(\overline{T}\right) \subset L_2(T),$$

$\exists\ N$ такое, что

$$|a_n(g_\varepsilon)|\,,\quad |b_n(g_\varepsilon)| < \varepsilon$$

при $n \geq N$. Но тогда при $n \geq N$

$$|a_n(f)| \leq |a_n(f-g_\varepsilon)| + |a_n(g_\varepsilon)| = \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_T (f(x)-g_\varepsilon(x))\cos nx d\mu\right| + |a_n(g_\varepsilon)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\left\|f-g_\varepsilon\right\|_2 + \varepsilon < 2\varepsilon,$$

откуда и вытекает утверждение. Для $b_n(f)$ аналогично. □

Теорема Риса – Фишера

Теорема 2.4. *(Риса – Фишера) Пусть $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ – ОНС в $L_2(T)$ и*

$$\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \subset l_2,$$

то есть

$$\sum_{n=1}^\infty |\alpha_n|^2 < \infty.$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty \alpha_n\psi_n(x)$ сходится в $L_2(T)$ к некоторой функции $y(x) \in L_2(T)$ такой, что

1. *$\forall\ n$*

$$a_n(y) = \alpha_n;$$

2. *Справедливо равенство Парсеваля*

$$\sum_{n=1}^\infty |\alpha|^2 = \|y\|_2^2. \tag{9}$$

Доказательство. Рассмотрим $\forall\ N$

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N \alpha_n\psi_n(x).$$

Если $M > N \geq 1$, то

$$\|S_M(x) - S_N(x)\|_2^2 = \int\limits_T \left(\sum_{n=N+1}^M \alpha_n\psi_n(x)\right)\left(\overline{\sum_{n=N+1}^M \alpha_n\psi_n(x)}\right) d\mu = \sum_{n=N+1}^M |\alpha_n|^2,$$

откуда получаем, что последовательность $\{S_N(x)\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна в $L_2(T)$.

Тогда $\exists\ y(x) \in L_2(T)$ такой, что

$$S_n(x) \overset{L_2(T)}{\to} y(x), \quad N \to \infty.$$

Пусть задано $n \geq 1$. Тогда $\forall\ N \geq n$ имеем

$$|a_n(y) - \alpha_n| = \left| \int\limits_T y(x)\overline{\psi_n(x)}d\mu - \int\limits_T S_N(x)\overline{\psi_n(x)}d\mu \right| \leq \tag{10}$$

$$\leq \int\limits_T |y(x) - S_N(x)|\,|\psi_n(x)|\,d\mu \leq \underbrace{\|y_n - S_N(x)\|_2}_{\to 0,\quad N\to\infty} \underbrace{\|\psi_n\|_2}_{=1}.$$

Так как $|a_n(y) - \alpha_n|$ в (10) не зависит от N, получаем, что

$$a_n(y) = \alpha_n.$$

Докажем теперь (9). Согласно неравенству Бесселя (8),

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(y)|^2 \leq \|y\|_2^2.$$

С другой стороны, $\forall\ N$

$$\|y\|_2 = \|y - S_N(x)\|_2 + \|S_N(x)\|_2 \leq$$

$$\leq \|y - S_N(x)\|_2 + \left(\sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2\right)^{1/2} \leq \underbrace{\|y - S_N(x)\|_2}_{\to 0,\quad N\to\infty} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2\right)^{1/2}.$$

Отсюда получаем, что

$$\|y\|_2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2\right)^{1/2}.$$

□

Теорема об ортонормированной системе в $L_2(T)$

Определение 2.2. Пусть система

$$\{\psi_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset L_2(T).$$

Тогда она называется *базисом* в $L_2(T) \iff \forall\ y(x) \in L_2(T)\ \exists!$ ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha\psi_n(x) \overset{L_2(T)}{\to} y(x).$$

Замечание 2.1. Если система $\{\psi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система (ОНС) в $L_2(T)$, то не может существовать два различных разложения по ней, сходящихся к $y(x)$.

Доказательство. Действительно, предположим, что это неверно. Тогда для некоторой $y(x) \in L_2(T)$ $\exists$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \psi_n(t) \ \to \ y(t),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \psi_n(t) \ \to \ y(t).$$

Предположим, что

$$\alpha_{n_0} \neq \beta_{n_0}.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n)\, \psi_n(t) \ \overset{L_2(t)}{\to} \ 0,$$

причем $\alpha_{n_0} - \beta_{n_0} \neq 0$. Если $N \geq n_0$, то

$$|\alpha_{n_0} - \beta_{n_0}| \left| \int\limits_T \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n - \beta_n)\, \psi_{n_0}(t) \overset{\psi_{n_0}}{(} t) d\mu \right| \leq \underbrace{\left\| \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n - \beta_n)\, \psi_n(t) \right\|_2}_{\to 0, \quad N \to \infty} \underbrace{\|\psi_{n_0}(t)\|_2}_{=1}.$$

Получаем противоречие. $\square$

Теорема 2.5. *Пусть $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – ОНС в $L_2(T)$. Тогда следующие условия эквивалетны:*

1. *$\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – базис в $L_2(T)$;*
2. *Система $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L_2(T)$, то есть $\forall\ y(x) \in L_2(T)$ и $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists$ полином*
$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \psi_n(x)$$
такой, что
$$\|y(x) - S_N(x)\|_2 < \varepsilon;$$
3. *Система $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута в $L_2(T)$, то есть, если $y(x) \in L_2(T)$ и $\forall\ n$*
$$\int\limits_T y(x) \underbrace{\overline{\psi_n(x)}}_{a_n(y)} d\mu = 0,$$
то
$$y \equiv 0;$$
4. *$\forall\ y(x) \in L_2(T)$ выполнено равенство Парсеваля, то есть*
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(y)|^2 = \|y\|_2^2.$$

Доказательство. Будем строить доказательство по следующей схеме:

$$(1) \;\Rightarrow\; (2) \;\Rightarrow\; (3) \;\Rightarrow\; (4) \;\Rightarrow\; (1).$$

(1) ⇒ (2) Так как $\{\psi_n\}$ – базис, $\forall\ y(x) \in L_2(T)\ \exists$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \psi_n(x) \overset{L_2(T)}{\to} y(x),$$

то его частичная сумма сколь угодно хорошо приближает $y(x)$.

(2) ⇒ (3) Предположим, что $\exists\ h(x) \in L_2(T)$ такой, что $\forall\ n$

$$a_n(h) = 0, \text{ но } h \neq 0.$$

Тогда

$$\|h\| > 0.$$

Подберем полином $\sum\limits_{n=1}^{N} \alpha_n \psi_n(x) = S_n$ так, чтобы

$$\|h(x) - S(x)\|_2 < \frac{\|h\|}{2}.$$

Тогда имеем

$$\|h\|_2^2 = \int\limits_T h(x)\overline{h(x)}d\mu = \int\limits_T h(x)\overline{(h(x) - S(x))}d\mu \leq$$

$$\leq \|h\|_2 \|h - S\|_2 < \frac{\|h\|_2^2}{2}.$$

Получаем противоречие.

(3) ⇒ (4) Пусть $y(x) \in L_2(T)$. Согласно неравенству Бесселя (8),

$$\{a_n(y)\}_{n=1}^{\infty} \subset l_2.$$

Тогда по теореме 2.4 Риса – Фишера $\exists\ z(x) \in L_2(T)$ такое, что

1) $\forall\ n$

$$a_n(z) = a_n(y);$$

2) $\|z\|_2^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n(y)|^2.$

Но тогда

$$a_n(y - z) = 0\ \forall\ n,$$

откуда из пункта (3) получаем, что $y = z$, а значит,

$$\|y\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(y)|^2 .$$

(4) $\Rightarrow$ (5) Пусть $y(x) \in L_2(T)$. Тогда

$$\{a_n(y)\}_{n=1}^{\infty} \subset l_2.$$

По теореме 2.4 Риса – Фишера, $\exists\ z(x) \in L_2(T)$ такой, что

$$\sum_{n=1}^{N} a_n(y)\psi_n(x) \overset{L_2(T)}{\to} z(x),$$

причем

$$a_n(z) = a_n(y)\ \forall\ n.$$

Согласно равенству Парсеваля,

$$\|z-y\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(z-y)|^2 = 0,$$

откуда получаем, что

$$z \equiv y,$$

а значит,

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y)\psi_n(x).$$

□

Следствие 2.3. Тригонометрическая система является базисом в $L_2(T)$.

Доказательство. По теореме 1.2 Джексона любую непрерывную функцию $f(x)$ можно сколь угодно хорошо приблизить тригонометрическим полиномом в равномерной метрике. Так как

$$\|f-Q\|_2 \le \|f-Q\|_{C(T)}\sqrt{2\pi},$$

где Q – тригонометрический полином. Отсюда получаем, что любую непрерывную функцию можно сколь угодно хорошо приблизить тригонометрическим полиномом в $L_2(T)$.

Так как непрерывные функции всюду плотны в $L_2(T)$ (теорема 1.1), получаем, что $\forall\ f \in L_2(T)$, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ тригонометрический полином $Q(x)$ такой, что

$$\|f(x) - Q(x)\|_2 < \varepsilon.$$

Далее воспользуемся теоремой 2.5. □

Лекция 3. Общие тригонометрические ряды. Оценки коэффициентов Фурье

Общие тригонометрические ряды

Общим тригонометрическим рядом называется

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \tag{11}$$

где $a_n, b_n \in \mathbb{R}^1$.

Иногда для ряда (11) будет удобнее использовать комплексную форму записи

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \tag{12}$$

Связь между коэффицентами для (11) и (12) такова:

$$c_0 = \frac{a_0}{2},$$

а при $n \geq 1$

$$\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = ic_n - ic_{-n} \end{cases}$$

Можно записать эту систему в виде

$$\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ -ib_n = c_n - c_{-n} \end{cases}$$

Отсюда

$$c_n = \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right),$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right) = \overline{c_n}.$$

Заметим, что мы пока не предполагали ничего про коэффиценты ряда (11) (кроме того, что они $\in \mathbb{R}^1$), про сходимость ряда и про то, что он связан с некоторой функцией.

Обсудим подробнее связь ряда[10] (11) с функцией. Пусть 2π-периодическая функция $f(x) \in L(T)$. В соответствие f ставится ряд вида (11), где

$$a_n = a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_T f(x) \cos nx d\mu, \quad n = 0,\, 1,\, 2, \ldots$$

$$b_n = b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_T f(x) \sin nx d\mu, \quad n = 1,\, 2,\, 3, \ldots,$$

или, по-другому, ряд (12), где

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int f(x) e^{inx} d\mu, \quad n \in (-\infty, \infty).$$

[10]Вообще говоря, это свойство относится к рядам Фурье, а не общим тригонометрическим рядам.

Теорема Кантора – Лебега

Теорема 3.1. *(Кантора – Лебега) Если ряд (11) сходится на множестве положительной меры,*

$$a_n, \quad b_n \ \to \ 0, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. По теореме Егорова $\exists$

$$E_0 \subset E \subseteq T$$

такое, что

$$\mu(E_0) > 0$$

и на E_0 ряд (11) сходится равномерно. Тогда

$$|S_n(x) - S_{n-1}(x)| \ \rightrightarrows \ 0 \text{ на } E_0,$$

где

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right).$$

С другой стороны,

$$|S_n(x) - S_{n-1}(x)| = |a_n \cos nx + b_n \sin nx| = \rho_n \left|\cos\left(nx + \varphi_n\right)\right|,$$

где φ_n – некоторый аргумент (его вид нам сейчас не важен), а

$$\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}. \tag{13}$$

Отсюда, тем более,

$$\rho_n \cos^2(nx + \varphi_n) \ \rightrightarrows \ 0 \text{ на } E_0.$$

Тогда

$$\int\limits_{E_0} \rho \cos^2\left(nx + \varphi_n\right) d\mu \ \to \ 0, \quad n \to \infty.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{E_0} \rho \cos^2\left(nx + \varphi_n\right) d\mu = \rho_n \int\limits_{E_0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(2nx + 2\varphi_n\right)\right) d\mu =$$

$$= \rho_n \frac{1}{2}\mu(E_0) + \frac{\rho_n}{2} \int\limits_{E_0} \cos(2nx + 2\varphi_n) d\mu. \tag{14}$$

Воспользовавшись элементарными тригонометрическими формулами, можем записать

$$\frac{\rho_n}{2} \int\limits_{E_0} \cos(2nx + 2\varphi_n) d\mu = \cos 2\varphi_n \int\limits_{E_0} \cos 2nx d\mu - \sin 2\varphi_n \int\limits_{E_0} \sin 2nx d\mu =$$

$$= \pi \cos 2\varphi_n a_{2n}(\chi_{E_0}) - \pi \sin 2\varphi_n b_{2n}(\chi_{E_0}) \ \to \ 0, \quad n \to \infty$$

по неравенству Бесселя.

Отсюда получаем, что $\exists\ N$ такое, что $\forall\ n \geq N$

$$\left| \int\limits_{E_0} \cos(2nx + 2\varphi_n) d\mu \right| < \frac{1}{2}\mu(E_0).$$

Тогда при $n \geq N$

$$(14) \geq \frac{1}{4}\mu(E_0)\rho_n.$$

Отсюда

$$\rho_n \ \to \ 0, \quad n \to \infty.$$

С учетом (13) получаем утверждение теоремы. □

Теорема Лузина – Данжуа

Определение 3.1. Скажем, что ряд (11) *абсолютно сходится* в точке $x \iff$

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| < \infty.$$

Теорема 3.2. *(Лузина – Данжуа) Если ряд (11) абсолютно сходится на некотором множестве E,*

$$\mu(E) > 0,$$

то

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty.$$

Доказательство. По условию, на E сходится ряд

$$\frac{\rho_n}{2} \int\limits_{E_0} \cos(2nx + 2\varphi_n) d\mu \equiv \left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left|\cos(nx + \varphi_n)\right|. \tag{15}$$

По теореме Егорова, $\exists$

$$E_0 \subset E \subseteq T$$

такое, что

$$\mu(E_0) > 0$$

и на E_0 ряд (15) сходится равномерно.

Аналогично доказательству теоремы 3.1 Кантора – Лебега, на E_0 равномерно сходится и ряд

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \cos^2(nx + \varphi_n). \tag{16}$$

Поскольку ряд (16) равномерно сходится на E_0, его можно ценить так: если

$$\varphi(x) \equiv \left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \cos^2(nx + \varphi_n), \quad x \in E_0,$$

то на некотором замкнутом

$$E_1 \subset E_0$$

с мерой

$$\mu(E_1) > \frac{3}{4}\mu(E_0)$$

функция $\varphi(x)$ является ограниченной. $\exists\ N$ такое, что $\forall\ n \geq N$

$$\int\limits_{E_1} \cos^2(nx + \varphi_n) d\mu \geq \frac{1}{4}\mu(E_1).$$

Пусть

$$C = \max_{x \in E_1} \varphi(x).$$

Тогда

$$C\mu(E_1) \geq \int\limits_{E_1} \varphi(x) d\mu \geq \rho_n \cos^2(nx + \varphi_n) d\mu \geq \int\limits_{E_1} \sum_{n=N}^{\infty} \rho_n \cos^2(nx + \varphi_n) d\mu \geq \frac{1}{4} \sum_{n=N}^{\infty} \rho_n.$$

Отсюда получаем, что абсолютно сходится ряд

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n| + |b_n|\right).$$

□

Теоремы о формальном интегрировании и дифференцировании ряда Фурье

Пусть действительнозначная функция $f(x) \in L(T)$. Рассмотрим

$$F(x) = \int\limits_{[0,x]} f(t) d\mu - c_0(f) \cdot x. \tag{17}$$

Второе слагаемое берется из следующих соображений. Хотим, чтобы $F(x)$ оставалась 2π-периодической. Если определить

$$F(x) = \int\limits_{[0,x]} f(t) d\mu,$$

то

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) d\mu = c_0(f) - 2\pi.$$

Поэтому для $F(x)$ (17)

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)d\mu - c_0(f) \cdot 2\pi = 0.$$

Теорема 3.3. *Пусть $c_n(f)$, $n \in (-\infty, \infty)$ – коэффиценты Фурье 2π-периодической функции $f(x) \in L(T)$.*

Тогда при $n \neq 0$

$$c_n(F) = \frac{c_n(f)}{in},$$

где $F(x)$ определяется формулой (17).

Доказательство. При $n \neq 0$ рассмотрим

$$c_n(F) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_T F(x)e^{-inx}d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi(-in)} \int\limits_T F(x)de^{-inx} = \overbrace{\frac{F(x)e^{-inx}}{2\pi(-in)}\Big|_{-\pi}^{\pi}}^{2\pi\text{-период.}} + \frac{1}{2\pi in} \int\limits_T e^{-inx}dF(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi in} \int\limits_T \left(f(x) - C_0(f)\right) e^{-inx}d\mu. \tag{18}$$

Осталось заметить, что

$$\int\limits_T C_0(f)e^{-inx}d\mu = 0.$$

Тогда

$$(18) = \frac{1}{2\pi in} \int\limits_T f(x)e^{-inx}d\mu = \frac{c_n(f)}{in}.$$

□

Теорема 3.4. *Если 2π-периодическая $G(x) \in AC\left(\overline{T}\right)$ и*

$$G'(x) = g(x),$$

то

$$g(x) = \sum_{n \neq 0} (in)c_n(G)e^{inx},$$

$$c_n(g) = inc_n(G), \quad n \neq 0.$$

Доказательство. Имеем

$$C_0(g) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_T g(x)d\mu = \frac{1}{2\pi} \int\limits_T G'(c)d\mu = \frac{G(\pi) - G(-\pi)}{2\pi} = 0.$$

По теореме 3.3 при $n \neq 0$

$$c_n(G) = \frac{c_n(g)}{in},$$

что эквивалетно утверждению теоремы. □

Модуль непрерывности и коэффициенты Фурье

Теорема 3.5. *Пусть $f(x) \in L(T)$. Тогда при $n > 0$*

$$|a_n(f)|, \quad |b_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\omega_1\left(f, \frac{\pi}{n}\right).$$

Доказательство. При $n > 0$ имеем

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_T f(x)e^{-inx}d\mu = \frac{-1}{2\pi}\int\limits_T f(x)e^{-in\left(x-\frac{\pi}{n}\right)}d\mu \overline{\text{Лемма 1.1}}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_T f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)e^{-inx}d\mu.$$

Отсюда

$$c_n(f) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_T \left(f(x) - f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right)e^{-inx}d\mu,$$

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{4\pi}\int\limits_T \left(f\left(x+\frac{\pi}{n}\right) - f(x)\right)d\mu \leq \frac{\omega_1\left(f, \frac{\pi}{n}\right)}{4\pi}.$$

Наконец,

$$|a_n(f)| = |\operatorname{Re} c_n(f)| \leq \frac{\omega_1\left(f, \frac{\pi}{n}\right)}{4\pi}.$$

□

Замечание 3.1. Если $p > 1$, $f(x) \in L_p(T)$, то $f(x) \in L(T)$ и $\forall\ n$

$$\int\limits_T |f(x+n) - f(x)|\, d\mu_x \leq \left(\int\limits_T |f(x+n) - f(x)|^p\, d\mu_x\right)^{1/p}\left(\int\limits_T 1 d\mu_x\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Отсюда следует, что

$$\omega_1(f,t) \leq \omega_p(f,t)(2\pi)^{1-\frac{1}{p}},$$

откуда

$$|a_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi}(2\pi)^{1-\frac{1}{p}}\,\omega_p\left(f, \frac{\pi}{n}\right).$$

Аналогично для $b_n(f)$.

Аналогично для $f \in C\left(\overline{T}\right)$.

Теорема 3.6. *Пусть 2π-периодическая*[11] *$f(x) \in V\left(\overline{T}\right)$. Тогда $\forall\ n \neq 0$*

$$|a_n(f)|, \quad |b_n(f)| \leq \frac{V_{\overline{T}}(f)}{n}.$$

[11] Напомним, $V\left(\overline{T}\right)$ – множество функций ограниченной вариации на $\overline{T}$.

Доказательство. Пусть $n > 0$. Тогда при $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$ имеем

$$c_n(f) = \frac{(-1)^k}{2\pi} \int\limits_T f(x) e^{-in\left(x - \frac{\pi k}{n}\right)} d\mu = \frac{(-1)^n}{2\pi} \int\limits_T f\left(x + \frac{\pi k}{n}\right) e^{-inx} d\mu.$$

Тогда

$$2nc_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_T \left(f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) + f\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) - f\left(x + \frac{3\pi}{n}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\ldots - f\left(x + \frac{(2n-1)\pi}{n}\right)\right) d\mu,$$

откуда

$$2n\left|c_n(f)\right| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_T \left(\left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right)\right| + \left| f\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) - \ldots \right| + \ldots \right) d\mu \leq \frac{V_{\overline{T}}(f)}{2\pi} 2\pi.$$

Итак, получаем, что

$$\left|c_n(f)\right| \leq \frac{V_{\overline{T}}(f)}{2n},$$

откуда

$$\left|a_n(f)\right|, \quad \left|b_n(f)\right| \leq \frac{V_{\overline{T}}(f)}{n}.$$

□

Обсудим, что полученные оценки окончательны и усилить результаты теорем 3.5 и 3.6 нельзя.

Пример 3.1. (К теореме 3.6) Пусть дана 2π-периодическая нечетная функция

$$g(t) = \frac{\pi - t}{2}, \quad t \in [0, \pi].$$

Тогда все

$$a_n(g) = 0,$$

а при $n \geq 1$

$$b_n(g) = \frac{1}{\pi} \int\limits_T g(t) \sin nt d\mu = \frac{2}{\pi} \int\limits_{(0,\pi)} \frac{\pi - t}{2} \sin nt d\mu =$$

$$= \frac{-1}{\pi n} \int\limits_0^\pi (\pi - t) d \cos nt = -\frac{1}{\pi n} (\pi - t) \cos nt \Big|_0^\pi - \frac{1}{\pi n} \underbrace{\int\limits_0^\pi \cos nx dx}_{=0} = \frac{1}{\pi n} \pi = \frac{1}{n}.$$

Пример 3.2. (К теореме 3.5) Пусть $\alpha \in (0,1)$ и дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\alpha} \cos 2^n x.$$

Тогда этот ряд равномерно сходится к некоторой функции $f(x) \in C\left(\overline{T}\right)$, является ее рядом Фурье и $f(x) \in \mathrm{Lip}\alpha$.

Напомним, по определению $f(x) \in \mathrm{Lip}\alpha \iff$

$$\omega_C(f,t) = \underline{\underline{O}}\left(t^\alpha\right), \quad t \to 0,$$

то есть $\exists\, C$ такое, что $\forall\, x, y \in \overline{T}$

$$|f(x) - f(y)| \le C\,|x-y|^\alpha\,.$$

Доказательство. Предположим, что некоторый тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

равномерно на $\overline{T}$ сходится к функции $f(x)$. Проверим, что тогда

$$a_n(f) = a_n, \quad b_n(f) = b_n \ \forall\, n.$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ подберем N такое, что

$$|f(x) - S_k(x)| < \varepsilon \ \forall\, x \in T, \quad \forall\, k \ge N,$$

где

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2/} + \sum_{n=1}^{k} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right).$$

Тогда, если $n \le N$, то

$$|a_n(f) - a_n| = \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_T f(x) \cos nx d\mu - a_n \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_T f(x) \cos nx d\mu - \frac{1}{\pi} \int\limits_T S_N(x) \cos nx d\mu \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left| \int\limits_T \left(f(x) - S_N(x)\right) \cos nx d\mu \right| \le \frac{\varepsilon}{\pi} 2\pi.$$

Отсюда, так как ε произвольное, получаем, что

$$a_n(f) = a_n.$$

Аналогично для $b_n(f)$.

Доказательство будет продолжено на следующей лекции. □

Лекция 4. Простейшие результаты о сходимости рядов Фурье. Часть 1

Окончательность оценки коэффициентов Фурье через модуль непрерывности

Продолжим говорить о примере 3.2, который показывает невозможность усиления теоремы 3.5.

Пример 3.2. *Доказательство.* (Продолжение) Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\alpha} < \infty,$$

то по теореме Вейерштрасса ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\alpha} \cos 2^n x$$

равномерно сходится к некоторой $f(x) \in C\left(\overline{T}\right)$.

Рассмотрим произвольное $x \in \overline{T}$ и $t \in (0,1)$. Подберем N так, чтобы

$$2^{-N-1} < t \leq 2^{-N}.$$

Рассмотрим

$$f(x+t)-f(x) = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n\alpha} \left(\cos 2^n(x+t) - \cos 2^n x\right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n\alpha} \left(\cos 2^n(x+t) - \cos 2^n x\right).$$

Тогда

$$|f(x+t) - f(x)| \leq \sum_{n=1}^{N} 2^{-n\alpha} \left|\cos 2^n(x+t) - \cos 2^n x\right| + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n\alpha} \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} 2^{-n\alpha} 2^n t + 2\frac{2^{-(N+1)\alpha}}{1-2^{-\alpha}} = t\sum_{n=1}^{N} 2^{n(1-\alpha)} + 2\frac{2^{-(N+1)\alpha}}{1-2^{-\alpha}} \leq$$

$$\leq t\frac{2^{N(1-\alpha)}}{1-2^{-\alpha}} + \frac{2}{1-2^{-\alpha}} t^{\alpha} leq t^{\alpha} \frac{3}{1-2^{-\alpha}}.$$

Здесь последний переход возможен в силу того, что

$$t \cdot 2^n = 1,$$

$$t^{(1-\alpha)} 2^{N(1-\alpha)} \leq 1.$$

Тогда

$$\omega_C(f,t) = \underline{\underline{O}}(t^{\alpha}), \quad t \to 0.$$

□

Таким образом,

$$\omega_1(f,t) \leq Ct^{\alpha}.$$

Тогда

$$\omega_1\left(f, \frac{\pi}{2^n}\right) = \underline{\underline{O}}\left(2^{-n\alpha}\right), \quad n \to \infty.$$

С другой стороны,

$$|a_n(f)| = 2^{-n\alpha}.$$

Мы видим, что эти величины одинаковы по порядку.

Замечание 4.1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\alpha} \cos 2^n x$$

называется *лакунарным.*

Второй пример к теореме 3.5 сформулируем в виде теоремы. Это в каком-то смысле обратное утверждение к теореме 3.5.

Теорема 4.1. *Пусть $\alpha \in (0,1)$ и дан ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

и для некоторой $C > 0$ и $\forall\ n$

$$|a_n| \leq \frac{C}{n^{1+alpha}}, \quad |b_n| \leq \frac{C}{n^{1+\alpha}}.$$

Тогда этот ряд равномерно на $\overline{T}$ сходится к функции $f(x) \in C\left(\overline{T}\right)$, является ее рядом Фурье и $f(x) \in Lip\alpha$.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса ряд равномерно сходится и его сумма $f(x) \in C\left(\overline{T}\right)$). В примере 3.2 было показано, что наш ряд есть ряд Фурье для $f(x)$.

Покажем, что $f(x) \in \mathrm{Lip}\alpha$. Пусть $x \in \overline{T}$ и $t \in (0,1)$. Подберем N так, чтобы

$$\frac{1}{N+1} < t \leq \frac{1}{N}.$$

Рассмотрим

$$|f(x+t) - f(x)| \leq \left|\sum_{n=1}^{N} \left(a_n \left(\cos n(x+t) - \cos nx\right) + b_n \left(\sin n(x+t) - \sin nx\right)\right)\right| +$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(|a_n| \left(|\cos n(x+t)| + |\cos nx|\right) + |b_n| \left(|\sin n(x+t)| + |\sin nx|\right)\right) \leq$$

$$2C^t \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1+\alpha}} n + 4C \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}. \tag{19}$$

Заметим, что

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \leq \int\limits_N^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = \frac{N^{-\alpha}}{\alpha} \leq \frac{2}{\alpha}\frac{1}{(n+1)^{\alpha}} \leq \frac{2}{\alpha}t^{\alpha}.$$

Аналогично,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\alpha}} \leq \int\limits_0^{N} x^{-\alpha}dx = \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \frac{t^{\alpha-1}}{1-\alpha},$$

так как по условию

$$n \leq \frac{1}{t} \;\Rightarrow\; N^{1-\alpha} \leq t^{\alpha-1}.$$

Тогда

$$19 \leq 2Ct\frac{t^{\alpha-1}}{1-\alpha} + \frac{8C}{\alpha}t^{\alpha} = t^{\alpha}C(\alpha).$$

□

Простейшие результаты о сходимости рядов Фурье

Пусть 2π-периодическая функция $f(x) \in L(T)$ и

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx)$$

– ее ряд Фурье. Тогда частичная сумма

$$S_n(f,x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_T f(t)d\mu_t + \sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_T f(t)\cos kx d\mu_t\right) + \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_T f(t)\sin kt d\mu_t\right)\sin kx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_T f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx)\right)d\mu_t =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_T f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right)d\mu_t. \tag{20}$$

Напомним,

$$\frac{1}{2} + \cos u + \ldots + \cos nu = \frac{\sin(n+1/2)u}{2\sin\frac{u}{2}} = D_n(u)$$

– n-ное ядро Дирихле. Тогда

$$(20) = \frac{1}{\pi}\int\limits_T f(t)D_n(t-x)d\mu_t \overline{\text{Лемма 1.1}} = \frac{1}{\pi}\int\limits_T f(x+t)D_n(t)d\mu_t.$$

Условие Дини

Теорема 4.2. *(Условие Дини) Пусть $f(u) \in L(T)$, $x \in T$ и для некоторого $A \in \mathbb{R}^1$*

$$\int\limits_T \frac{|f(x+t)-A|}{|t|} d\mu_t < \infty.$$

Тогда ряд Фурье функции f сходится в точке x к значению A.

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_T D_n(t)d = 1 \ \forall\ n.$$

Тогда

$$|S_n(t,x)-A| = \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_T (f(x+t)-A)\, D_n(t)d\mu_t\right|. \tag{21}$$

Далее, преобразуем

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{t}{2}\cos nt}{2\sin\frac{t}{2}} + \frac{\cos\frac{t}{2}\sin nt}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}\cos nt + \frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}.$$

Тогда

$$(21) \le \underbrace{\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_T (f(x+t)-A)\cos nt d\mu_t\right|}_{\frac{1}{2}a_n\left(\overbrace{f(x+t)}^{\in L(T)}-A\right)\to 0,\quad n\to\infty} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_T \left(\frac{f(x+t)-A}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\right)\sin nt d\mu_t\right|}_{b_n(\varphi)\to 0,\quad n\to\infty},$$

так как если

$$\varphi(t) = \frac{f(x+t)-A}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}, \quad t \in T,$$

то

$$|\varphi(t)| \le \frac{(f(x+t)-A)}{|t|}.$$

□

Теорема. Достаточное условие сходимости ряда Фурье почти всюду

Заметим, что в теории тригонометрических рядов самые сложные теоремы (о сходимости рядов), как правило, связаны не с равномерной и поточечной сходимостями, а со сходимостью почти всюду.

Вопросом о сходимости ряда Фурье к функции из C почти всюду занимались около полувека. Эта проблема была наконец решена шведским математиком Ленартом Карлесоном для функций из L_2. Позднее было показано, что утверждение о сходимости рядов Фурье почти всюду верно для $f \in L_p$, $p > 1$. Через несколько лекций нами будет рассмотрен пример А.Н. Колмогорова, показывающий, что для $f \in L(T)$ это утверждение неверно.

Докажем следующее утверждение о сходимости почти всюду рядов Фурье с помощью модулей нпрерывности. Отметим, что усилить его до сих пор никто не смог. Можно сказать, усиление этого утверждения – одна из самых сложных нерешенных проблем одномерных тригонометрических рядов.

Теорема 4.3. *Пусть $f(x) \in L(T)$ и*

$$\int\limits_0^\pi \frac{\omega_1(f,t)}{t} dt < \infty.$$

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится почти всюду.

Доказательство. Рассмотрим

$$\int\limits_T \int\limits_T \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|} d\mu_x d\mu_t \leq \int\limits_T \frac{1}{|t|} \omega_1(f, |t|) d\mu_t = 2 \int\limits_0^\pi \frac{\omega_1(f,t)}{t} dt < \infty.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_T \int\limits_T \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|} d\mu_t d\mu_x = \int\limits_T \int\limits_T \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|} d\mu_x d\mu_t.$$

Тогда для почти всех $x \in T$

$$\int\limits_T \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|} d\mu_t < \infty,$$

и по теореме 4.2 (условию Дини)

$$S_n(f,x) \ \to \ f(x) \text{почти всюду}.$$

□

Следствие из второй теоремы о среднем значении

Итак, мы обсудили признак Дини. Чтобы доказать другой признак, признак Жордана, нам понадобится вторая теорема о среднем. Заметим, что в лекционных курсах и учебниках второй теоремой о среднем зачастую называют довольно простое утверждение. Настоящая вторая теорема о среднем является достаточно тонким инструментом.

Теорема 4.4. *(Следствие из 2-й теоремы о среднем значении) Пусть* $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$, $g(x) \in R([a,b])$, $f(x)$ *неотрицательна и невозрастает на* $[a,b]$.

Тогда $f(x)g(x) \in R([a,b])$ *и*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq f(a) \max_{c\in[a,b]} \left|\int\limits_a^c g(t)dt\right|.$$

Доказательство. Заметим, что по критерию Лебега $f(x)g(x) \in R([a,b])$. Напомним: пусть L – разбиение $[a,b]$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

с отмеченными точками $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Тогда интегральная сумма

$$\sigma_L(\varphi) \overset{\text{опр.}}{=} \sum_{k=1}^n \varphi(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \quad \lambda(L) = \max_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1}).$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Подберем $\delta > 0$ так, чтобы при $\lambda(L) < \delta$ имеем $\forall$ двух разбиений L_1 и L_2,

$$\lambda(L_1), \quad \lambda(L_2) < \delta,$$

$$|\delta_{L_1}(g) - \delta_{L_2}(g)| < \varepsilon.$$

Отметим, что тогда для любого разбиения L с $\lambda(L) < \delta$

$$\left|\sigma_L(g) - \int\limits_a^b g(t)dt\right| \leq \varepsilon.$$

Более того, если $c \in (a,b)$ и L_1' и L_2' – разбиение $[a,c]$ с

$$\lambda(L_1'), \quad \lambda(L_2') < \delta,$$

то

$$\left|\delta_{L_1'}(g) - \delta_{L_2'}(g)\right| < \varepsilon,$$

то есть мы можем дополнить L_1' и L_2' одинаково до L_1, L_2 отрезка $[a,b]$ так, чтобы $\lambda(L_i) < \delta$, $i = 1,2$.

Отсюда следует, что если L_1' – разбиение $[a,b]$, $\lambda(L_1') < \delta$, то

$$\left|\delta_{L_1'}(g) - \int\limits_a^c g(t)d\mu\right| \leq \varepsilon.$$

Пусть теперь L – разбиение $[a,b]$ с $\lambda(L) < \delta$. Рассмотрим

$$|\sigma_L(fg)| = \left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n-1} (f(\xi) - f(\xi_{k+1})) \sum_{r=1}^{k} g(\xi_r)(x_r - x_{r-1}) + f(n) \sum_{r=1}^{n} g(\xi_r)(x_r - x_{r-1}) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n-1} |f(\xi_k) - f(\xi_{k+1})| \left|\sigma_{L\cap[a,x_k]}(g)\right| + |f(\xi_n)| \, |\sigma_L(g)| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} (f(\xi_k) - f(\xi_{k+1})) \left(\left| \int\limits_a^{x_k} g(t)dt \right| + \varepsilon \right) + f(\xi_n) \left| \int\limits_a^{b} g(t)dt + \varepsilon \right| \leq$$

$$\leq \left(\max_{c\in[a,b]} \left| \int\limits_a^{c} g(t)dt \right| + \varepsilon \right) f(a).$$

Тогда при $\lambda(L) \to 0$

$$\left| \int\limits_a^{b} g(t)dt \right|$$

меньше той же самой оценки. Так как ε произвольно, получаем утверждение теоремы. $\square$

Лекция 5. Простейшие результаты о сходимости рядов Фурье. Часть 2

Принцип локализации

Напомним, на прошлой лекции доказали следствие из 2-й теоремы о среднем.

Лемма 5.1. *Пусть* $f(x) \in L(0,\delta)$. *Тогда*

$$\int\limits_{(0,\pi)} f(x)D_n(x)d\mu = \int\limits_{(0,\pi)} f(x)\frac{\sin nx}{x}d\mu + \overline{\overline{o}}(1), \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_{(0,\pi)} f(x)D_n(x)d\mu = \int\limits_{(0,\pi)} f(x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{t}{2}}d\mu =$$

$$= \int\limits_{(0,\pi)} f(x)\frac{\sin n\pi x\cos\frac{x}{2}}{2\sin nx\frac{x}{2}}d\mu + \int\limits_{(0,\pi)} f(x)\frac{\cos nx\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}dx\mu =$$

$$= \int\limits_{(0,\pi)} f(x)\frac{\sin nx}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}d\mu + \frac{1}{2}\int\limits_{(0,\pi)} f(x)\cos nxd\mu =$$

$$= \int\limits_{(0,\pi)} f(x)\frac{\sin nx}{x}d\mu + \int\limits_{(0,\pi)} f(x)\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}} - \frac{1}{x}\right)\sin nxd\mu + \frac{1}{2}\int\limits_{(0,\pi)} \underbrace{f(x)}_{\in L(0,\pi)}\cos nxd\mu. \quad (22)$$

Здесь $\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}} - \frac{1}{x}$ ограничена на $(0,\pi)$, откуда

$$f(x)\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}} - \frac{1}{x}\right) \in L(0,\pi),$$

а значит, второй (и третий) из интегралов в (22) $\to 0$ как коэффицент Фурье интегрируемой функции. □

Следствие 5.1. (Принцип локализации) Если $f(x) \in L(T)$, $x_0 \in T$ и для некоторого $\delta > 0$

$$f(x) = 0, \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

то

$$S_n(f, x_0) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right) \ \to \ 0.$$

Доказательство. Распишем

$$S_n(f, x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_T f(x_0+t)D_n(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{(-\pi,0)} f(x_0+t)\frac{\sin nt}{t}dt + \overline{\overline{o}}(1) + \frac{1}{\pi} \int\limits_{(0,\pi)} f(x_0+t)\frac{\sin nt}{t}dt + \overline{\overline{o}}(1), \quad n \to \infty.$$

По условию,

$$\frac{f(x_0+t)}{t} \in L(T),$$

так как равна 0 в окрестности 0, $\forall\ t \in T$

$$\frac{|f(x_0-t)|}{|t|} \leq \frac{|f(x_0+t)|}{\delta}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_T \frac{f(x_0+t)}{t} \sin nt dt \ \to\ 0, \quad n \to \infty$$

как коэффицент Фурье интегрируемой функции. □

Признак Жордана

В прошлый раз сформулировали признак Дини. Отметим, что признак Дини носит метрический характер. Признак Жордана, сформулированный ниже, носит качественный характер.

Теорема 5.1. *(признак Жордана) Пусть 2π-периодическая $f(x) \in V\left(\overline{T}\right)$. Тогда $\forall\ x_0 \in T$ имеем*

$$S_n(f, x_0) \ \to\ \frac{f(x_{0+}) + f(x_{0-})}{2}.$$

Доказательство. Как известно,

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_T D_n(t)dt = 1.$$

Положим при $t \in T$

$$\varphi(t) = f(x_0+t).$$

Тогда $\varphi(t)$ – 2π-периодическая и $\varphi(t) \in V\left(\overline{T}\right)$. Поэтому ее можно представить в виде

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t),$$

где φ_1 и φ_2 – монотонно неубывающие функции на T. При этом

$$\frac{f(x_{0+}) + f(x_{0-})}{2} = \frac{\varphi_1(x_{0+}) + \varphi_1(x_{0-})}{2} - \frac{\varphi_2(x_{0+}) + \varphi_2(x_{0-})}{2}.$$

Для доказательства теоремы достаточно установить, что для $i = 1, 2$

$$S_n(\varphi_i, 0) \ \to\ \frac{\varphi_1(0_+) + \varphi_i(0_-)}{2}, \quad n \to \infty$$

Проверим для $i = 1$. Имеем

$$S_n(\varphi_1, 0) - \frac{\varphi_1(t) + \varphi_1(0_-)}{2} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{(-\pi,0)} \varphi_1(0_+) D_n(t) dt - \frac{1}{\pi} \int\limits_{(-\pi,0)} \varphi_1(0_-) D_n(t) dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{(0,\pi)} \varphi_1(t) D_n(t) dt - \frac{1}{\pi} \int\limits_{(0,\pi)} \varphi_1(0_+) D_n(t) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{(-\pi,0)} (\varphi_1(t) - \varphi_1(0_-)) D_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int\limits_{(0,\pi)} (\varphi_1(t) - \varphi_1(0_+)) D_n(t) dt \overset{\text{Лемма 5.1}}{=}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{(-\pi,0)} (\varphi_1(t) - \varphi_1(0_-)) \frac{\sin nt}{t} dt + \frac{1}{\pi} \int (0, \pi) (\varphi_1(t) - \varphi_1(0_+)) \frac{\sin nt}{t} dt + \overline{\overline{o}}(1) \equiv$$

$$\equiv \sigma_1 + \sigma_2 + \overline{\overline{o}}(1), \quad n \to \infty.$$

Так как σ_1 и σ_2 оцениваются одинаково, ограничимся оценкой σ_2.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Заметим, что так как $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t} dt$ сходится как несобственный интеграл Римана, $\exists\, C > 0$ такое, что $\forall$

$$-\infty < \alpha < \beta < \infty$$

$$\left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq C.$$

Но в этом случае имеет $\forall$

$$-\infty < \alpha < \beta < \infty$$

$$\left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin t}{t} dt \right| = \left| \int\limits_{n\alpha}^{n\beta} \frac{\sin u}{u} du \right| \leq C.$$

Выберем $\delta \in (0, 1)$ такое, что

$$0 \leq \varphi_1(\delta) - \varphi_1(0_+) < \frac{\varepsilon}{2C}.$$

Тогда

$$\sigma_2 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{(0,\delta)} (\varphi_1(t) - \varphi_1(0_+)) \frac{\sin nt}{t} dt + \frac{1}{\pi} \int\limits_{[\delta,\pi)} (\varphi_1(t) - \varphi_1(0_+)) \frac{\sin nt}{t} dt \equiv \sigma_{2,1} + \sigma_{2,2}.$$

Согласно теореме 4.4,

$$|\sigma_{2,1}| \leq \frac{1}{\pi} (\varphi_1(\delta) - \varphi_1(0_+)) \max_{0 \leq \alpha \leq \delta} \left| \int\limits_{\alpha}^{\delta} \frac{\sin nt}{t} dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Наконец, заметим, что при фиксированном δ

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{(\delta,\pi)} \frac{|varphi_1(t)-\varphi_1(0_+)}{t}\sin ntdt \ \to \ 0$$

как коэффицент Фурье интегрируемой функции. Итак, при $n \geq N$ имеем

$$|\sigma_{2,2}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Утверждение теоремы доказано. □

Оценки констант Лебега

Сформулируем наиболее употребительные оценки констант Лебега L_n.

Лемма 5.2. *Пусть* $n \geq 1$,

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}, \quad t \in T \setminus \{0\},$$

и

$$L_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_T |D_n(t)|\,dt. \tag{23}$$

Тогда справедливы оценки

$$\frac{1}{\pi}\ln(2n+1) \leq L_n \leq \frac{3}{2}\ln(2n+1).$$

Доказательство. Заметим, что

$$\sin u \geq \frac{2}{\pi}u, \quad u \in (0,\pi/2)$$

(рис. 1.2). Отсюда при $t \in (0,\pi)$

$$\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{t}.$$

Тогда

$$L_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{(0,\pi)} \left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\right| dt \leq \frac{2}{\pi}\int\limits_{(0,\pi)} \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{t}dt \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{2n+1}} \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{t}dt + \int\limits_{\frac{1}{2n+1}}^{\pi} \frac{dt}{t}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(2n+1)} + \ln\pi - \ln\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \underbrace{\ln\pi} < 3/2 + \underbrace{\ln(2n+1)} > 1\right) \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi}\left(2+\ln(2n+1)\right) \leq \frac{6\ln(2n+1)}{\pi} < 2\ln(2n+1).$$

Оценим снизу

$$L_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{(0,\pi)} \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{2\sin\frac{t}{2}}dt \geq \frac{2}{\pi}\int\limits_{(0,\pi)} \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{t}dt \geq$$

$$\geq \frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\pi} \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{t}dt \geq \frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \frac{\sin^2\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\pi} \frac{dt}{t} - \int\limits_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\pi} \frac{\cos(2n+1)t}{t}dt\right) =$$

$$= frac1\pi\left(\ln\pi - \ln\frac{\pi}{2} + \ln(2n+1) - \int\limits_{\pi/2}^{\pi(2n+1)} \frac{\cos u}{u}du\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\pi}\ln(2n-1) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^{\pi(2n+1)} \frac{\cos u}{u}du. \tag{24}$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi(2n+1)} \frac{\cos u}{u}du \leq \int\limits_{\pi/2}^{2\pi n+\pi/2} \frac{\cos u}{u}du =$$

$$= \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} \underbrace{\cos u}_{<0}\left(\underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{u+\pi}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{u+2\pi}}_{\geq 0} + \ldots - \underbrace{\frac{1}{u+2\pi n-\pi}}_{\geq 0}\right)du < 0.$$

Тогда

$$(24) \geq \frac{1}{\pi}\ln(2n+1).$$

□

Признак Дини – Липшица. Невозможность его усиления

Теорема 5.2. *(Признак Дини – Липшица) Если $f(x) \in C\left(\overline{T}\right)$ и*

$$\omega_C\left(f, \frac{\pi}{n}\right)\ln n \ \to\ 0, \quad n \to \infty,$$

то

$$S_n(f,x) \ \overset{\overline{T}}{\rightrightarrows}\ f(x), \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Заметим, что $\forall\ g(t) \in C\left(\overline{T}\right)$

$$|S_n(g,x)| = \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_T g(x_0+t)D_n(t)dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\|g\|_{C(\overline{T})}\int\limits_T |D_n(t)|\,dt \leq \|g\|_{C(\overline{T})}L_n.$$

Здесь L_n (23) – величина из леммы 5.2.

По теореме 1.2 Джексона $\forall\ n$ найдется тригонометрический полином $P_n(x)$ степени $\leq n$ такой, что

$$\|f-P_n\|_{C(\overline{T})} \leq C\omega_C\left(f,\frac{\pi}{n}\right).$$

Но тогда, так как

$$S_n(P_n,x) \equiv P_n(x),$$

имеем

$$\|f(x)-S_n(f,x)|_{C(\overline{T})} \leq \|f(x)-P_n(x)\|_{C(\overline{T})} + \|S_n\left((P_n-f),x\right)\|_{C(\overline{T})} \leq$$

$$\leq C\omega_C\left(f,\frac{\pi}{n}\right) + |f(x)-P_n(x)\|_{C(\overline{T})}\,2\ln(2n+1) \leq$$

$$\leq C_1\omega_C\left(f,\frac{\pi}{n}\right)(1+\ln(2n+1)) \ \to\ 0, \quad n\to\infty.$$

□

Покажем, что признак Дини – Липшица (теорема 5.2) невозможно усилить.

Теорема 5.3. $\exists\ f(x) \in C\left(\overline{T}\right)$ *такая, что*

$$\omega_C(f,t) \leq C\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-1}, \quad t\in(0,1/2),$$

и такая, что $S_n(f,0)$ *не сходится.*

Доказательство. Так как

$$\left(\frac{\ln t}{t}\right)' = \frac{1}{t^2} - \frac{\ln t}{t^2} < 0$$

для достаточно больших t, то $\exists\ a>0$ такое, что

$$\frac{\ln t}{t}\ \downarrow\ \text{на } [a,\infty).$$

Выберем индуктивно возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $\forall\ k\geq 1$

$$n_{k+1} > 2n_k^2.$$

Затем $\forall\ k$ положим

$$m_k = n_k^2$$

и определим функцию

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{\sin m_k x}{\ln m_k}, & x \in \left(\left[\frac{\pi}{m_k}, \frac{\pi}{n_k}\right] \equiv I_k\right) \\ 0, & x \in T \setminus I_k \end{cases}$$

Тогда $\varphi_k(x) \in C\left(\overline{T}\right)$ и

$$I_k \cap I_l = \emptyset, \quad k \neq l.$$

Тогда положим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \in C\left(\overline{T}\right).$$

Здесь кроме точки 0 непрерывность $f(x)$ очевидна,

$$f(0) = 0$$

и $\forall\ k > 0\ \exists\ k_0$ такое, что

$$\|\varphi_k\|_C < \varepsilon, \quad k > k_0.$$

Это же можно доказать и следующим образом. Заметим, что

$$\|\varphi_k\|_{C(\overline{T})} = \frac{1}{\ln m_k}.$$

Так как

$$\ln m_k = \ln n_k^2 = 2 \ln n_{k+1} > 2 \ln m_k,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln m_k} < \infty.$$

Доказательство будет продолжено на следующей лекции. □

Лекция 6. Сходимость рядов Фурье почти всюду. Часть 1

Невозможность усиления признака Дини – Липшица (завершение доказательства)

Доказательство. (Продолжение доказательства теоремы 5.3)

I. Проверим, что для некоторого $C > 0$

$$\omega_C(f,t) \le C\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-1} \text{ при } t \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Пусть $x, y \in \overline{T}$ и

$$|x-y| = t.$$

Возможны четыре случая:

1. $\exists\, k$ такое, что $x, y \in I_k$. Тогда, если $\frac{1}{m_k} \le t$, то $m_k \ge \frac{1}{t}$, что эквивалетно тому, что

$$\ln m_k \ge \ln\frac{1}{t},$$

$$\frac{1}{\ln m_k} \le \frac{1}{\ln\frac{1}{t}}.$$

Тогда

$$|f(x)-f(y)| = |\varphi_k(x)-\varphi_k(y)| \le |\varphi_k(x)| + |\varphi_k(y)| \le \frac{2}{\ln m_k} \le \frac{2}{\ln\frac{1}{t}}.$$

Если же $m_k < \frac{1}{t}$, то

$$|f(x)-f(y)| = |\varphi_k(x)-\varphi_k(y)| = \frac{1}{\ln m_k}\left|\sin m_k x - \sin m_k y\right| \le$$

$$\le \frac{m_k|x-y|}{\ln m_k} = \frac{m_k}{\ln m_k}t = \frac{m_k}{\ln m_k}\frac{\ln\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}\frac{1}{\ln\frac{1}{t}}. \tag{25}$$

Если

$$\psi(u) = \frac{\ln u}{u},$$

то первые два множителя в первой части (25)

$$\frac{\psi\left(\frac{1}{t}\right)}{\psi(m_k)} \le 1,$$

так как ψ монотонно убывает на $[a, +\infty)$ и $1/t > m_k$. Отсюда

$$(25) \le \frac{1}{\ln\frac{1}{t}}.$$

2. $\exists\ k, l,\ k \neq l$, такие, что $x \in I_k$, $y \in I_l$. Пусть для определенности $k > l$. Тогда
$$x \leq \frac{\pi}{n_k} < \frac{\pi}{m_l} \leq y,$$
при этом
$$f\left(\frac{\pi}{n_k}\right) = f\left(\frac{\pi}{m_l}\right) = 0.$$
Поэтому (с учетом доказанного выше)
$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| =$$
$$= \left|f(x) - f\left(\frac{\pi}{n_k}\right)\right| + \left|f(y) - f\left(\frac{\pi}{m_l}\right)\right| \leq$$
$$\leq \frac{2}{\ln \frac{1}{\left|x - \frac{\pi}{n_k}\right|}} + \frac{2}{\ln \frac{1}{\left|y - \frac{\pi}{m_l}\right|}} \leq \frac{4}{\ln \frac{1}{t}}.$$

3. $\exists\ k$ такое, что
$$x \in I_k, \quad y \notin \sqcup_{l=1}^{\infty} I_l.$$
Тогда
$$f(y) = 0$$
и либо $y > \frac{\pi}{n_k}$, либо $y < \frac{\pi}{m_k}$. Тогда в первом случае
$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| = \left|f(x) - f\left(\frac{\pi}{n_k}\right)\right| \leq \frac{2}{\ln \frac{1}{\left|x - \frac{\pi}{n_k}\right|}} \leq \frac{2}{\ln \frac{1}{t}}.$$

4. Наконец, возможен случай, когда
$$x, y \notin \sqcup_{k=1}^{\infty} I_k,$$
откуда следует, что
$$f(x) = f(y) = 0$$
и все очевидно.

II. Проверим, что $S_n(f, 0)$ расходится. Имеем
$$S_n(f,0) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{(0,\pi)} f(t) D_n(t) dt \overset{\text{Лемма 5.1}}{=} \underbrace{\frac{1}{\pi} \int\limits_{(0,\pi)} f(t) \frac{\sin nt}{t} dt}_{\widetilde{S_n}(f,0)} + \overline{\overline{o}}(1), \quad n \to \infty.$$

Так как ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k\|_{C(\overline{T})} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln m_k} < \infty,$$

получаем, что

$$\widetilde{S_n}(f,0) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n_k}\int\limits_{I_k}\frac{\sin m_k t \sin nt}{t}dt.$$

Так как

$$\int\limits_{1/2}^{\infty}\frac{\cos u}{u}du$$

сходится как несобственный интеграл Римана, $\exists\, C > 0$ такое, что

$$\forall\ \frac{1}{2} \le \alpha < \beta < \infty$$

верна оценка

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\cos u}{u}du\right| \le C.$$

Фиксируем теперь k_0 так, чтобы

$$C\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{\ln n_k}{<}\frac{1}{32}.$$

Заметим, что $\forall$ фиксированного k

$$\int\limits_{I_k}\underbrace{\frac{\sin m_k t}{t}}_{\in C(I_k)}\sin nt dt \ \to\ 0, \quad n\to\infty.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{\ln m_k}\int\limits_{I_k}\frac{\sin m_k t\sin nt}{t}dt \ \to\ 0, \quad n\to\infty.$$

Отметим, что если $k > k_0$ и $n > 2m_k$, то

$$\frac{1}{\ln m_k}\left|\int\limits_{I_k}\frac{\sin m_k t\sin nt}{t}dt\right| \le \frac{1}{2\ln m_k}\left(\left|\int\limits_{\frac{\pi}{m_k}}^{\frac{\pi}{n_k}}\frac{\cos(n-m_k)t}{t}dt\right| + \left|\int\limits_{\frac{\pi}{m_k}}^{\frac{\pi}{n_k}}\frac{\cos(n+m_k)t}{t}dt\right|\right) =$$

$$\frac{1}{2\ln m_k}\left(\left|\int\limits_{\frac{\pi(n-m_k)}{m_k}}^{\frac{\pi(n-m_k)}{n_k}}\frac{\cos u}{u}du\right| + \left|\int\limits_{\frac{\pi(n-m_k)}{m_k}}^{\frac{\pi(n-m_k)}{n_k}}\frac{\cos u}{u}du\right|\right) \le \frac{C}{\ln m_k}.$$

Аналогично, если $n \le \frac{m_k}{2}$, то

$$\frac{1}{\ln m_k}\left|\int\limits_{I_k}\frac{\sin m_k t\sin nt}{t}dt\right| \le \frac{1}{2\ln m_k}\left(\left|\int\limits_{\frac{\pi(m_k-n)}{m_k}}^{\frac{\pi(m_k-n)}{m_k}}\frac{\cos u}{u}du\right| + \right.$$

$$+\left|\int\limits_{\frac{\pi(m_k-n)}{m_k}}^{\frac{\pi(m_k-n)}{m_k}} \frac{\cos u}{u}du\right|\Bigg) \le \frac{C}{\ln m_k}.$$

Заметим, что если $k \ge k_0+1$ и $n = n_k$, то $\forall\ l$ либо $n \ge 2m_l$, либо $n \le \frac{m_l}{2}$.

Поэтому $\forall\ k \ge k_0$

$$\widetilde{S_{n_k}}(f,0) = \overline{\overline{o}}(1) + \sum_{l=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{\pi \ln m_l},$$

$$\left|\int\limits_{I_k} \frac{\sin m_l x \sin m_k x}{x}dx\right| \le \overline{\overline{o}}(1) + \frac{C}{\pi}\sum_{l=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{\ln m_l} < \frac{1}{32\pi}$$

при достаточно больших k.

Если $n = m_k$, $k \ge k_0+1$, то при $l \ne k$

$$\frac{1}{\ln m_l}\left|\int\limits_{I_l} \frac{\sin m_l x \sin m_k x}{x}dx\right| \le \frac{C}{\ln m_l}$$

по доказанному выше, так как тогда либо $m_k > 2m_l$, либо $m_k < m_l/2$.

Наконец,

$$\frac{1}{\ln m_k}\left(\left|\int\limits_{I_k} \frac{\sin m_k x \sin m_k x}{x}dx\right| \ge \frac{1}{2\ln m_k}\left|\int\limits_{\frac{\pi}{m_k}}^{\frac{\pi}{n_k}} \frac{1}{x}dx\right| - \left|\int\limits_{\frac{\pi}{m_k}}^{\frac{\pi}{n_k}} \frac{\cos 2m_k x}{x}dx\right|\right) \ge$$

$$\ge \frac{1}{2\ln m_k}\left(\underbrace{\ln\frac{\pi}{n_k} - \ln\frac{\pi}{m_k}}_{=\ln m_k - \ln n_k = \ln m_k - \frac{1}{2}\ln m_k = \frac{1}{2}\ln m_k} - \left|\int\limits_{2\pi}^{\frac{2\pi m_k}{n_k}} \frac{\cos u}{u}du\right|\right) \ge$$

$$\ge \left(\frac{1}{2\ln m_k}\left(\frac{1}{2}\ln m_k - C\right)\right) \ge \frac{1}{4} - \frac{C}{2\ln m_k}.$$

Оценим при $k \ge k_0+1$

$$\left|\widetilde{S_{m_k}}(f,0)\right| \ge \overline{\overline{o}}(1) + \frac{1}{4\pi} - \frac{1}{\pi}\sum_{l=k_0+1}^{\infty}\frac{C}{\ln m_l} \ge \overline{\overline{o}}(1) - \frac{1}{4\pi} - \frac{1}{32\pi} > \frac{1}{8\pi}$$

при достаточно больших k. Отсюда получаем, что $\widetilde{S_n}(f,0)$ не сходится. □

Теорема Колмогорова – Селиверстова (вспомогательные утверждения)

Как упоминалось ранее, доказательство теоремы Карлесона (о сходимости почти всюду ряда Фурье) занимает порядка 100 страниц. Мы докажем более раннее и более слабое утверждение – теорему Колмогорова – Селиверстова. В ее доказательстве используются достаточно примечательные приемы.

Для доказательства нам понадобятся две леммы.

Лемма 6.1. *Пусть* $\{D_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ *– ядра Дирихле, а*

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t), \quad n = 0,\, 1,\, \ldots$$

– ядра Фейера. Тогда

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\frac{1-\cos(n+1)t}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^2} = \frac{\sin^2 fracn+12t}{(n+1)2\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Доказательство. Распишем

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)\sin\frac{t}{2}}\frac{2\sin\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2}+\sin\frac{3}{2}t+\ldots+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1-\cos(n+1)t}{(n+1)\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2}.$$

□

Следствие 6.1. 1. $K_n(t) \geq 0\ \forall\, n,\ \forall\, t$;

2. Верно

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_T K_n(t)dt = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\pi}\int\limits_T D_n(t)dt = 1.$$

Лемма 6.2. *Частичные суммы тригонометрического ряда* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{\ln n}$ *равномерно сходятся в метрике* $L(T)$.

Доказательство. Заметим, что

$$\left(\frac{1}{\ln x}\right)' = -\frac{1}{x\ln^2 x},$$

$$\left(\frac{1}{\ln x}\right)'' = \frac{1}{x^2\ln^2 x} + \frac{2}{x^2\ln^3 x} > 0.$$

Таким образом, $1/\ln x$ выпукла вниз на $[2, +\infty)$. Следовательно, $\forall\ k \geq 2$

$$\frac{1}{\ln k} = -\frac{2}{\ln(k+1)} + \frac{\ln(k+2)}{\geq} 0.$$

Определим последовательность

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{s}\ln k, & k \geq 2 \\ a_1, & k = 1 \\ a_2, & k = 0 \end{cases}$$

Здесь a_1 и a_2 выбраны так, чтобы

$$a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} > 0\ \forall\ k \geq 0.$$

Заметим, что заключение леммы эквивалентно тому, что частичные суммы ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

равномерно сходятся в $L(T)$.

Пусть $n \geq 2$. Рассмотрим

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \left(\frac{1}{2} + \ldots + \cos kx\right) +$$

$$+a_n \left(\frac{1}{2} + \ldots + \cos nx\right) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) D_k(x) + a_n D_n(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} (a_k - 2a_{k+1} + a_{k+1})\,(k+1) K_k(x) + (a_{n-1} - a_n)\, K_{n-1}(x) + a_n D_n(x) \equiv$$

$$\equiv f_1(x) + f_2(x) + f_3(x).$$

Согласно лемме 5.1,

$$\int\limits_T |f_3(x)|\, dx = a_n \int\limits_T |D_n(x)|\, dx \leq \frac{1}{\ln n} 2\pi \ln(2n+1) \leq C.$$

Затем (считая $n - 1 \geq 2$)

$$a_{n-1} - a_n = \frac{1}{\ln(n-1)} - \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{(n-1+\theta)\ln^2(n-1+\theta)}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Поэтому

$$\int\limits_T |f_2(x)|\, dx \leq \pi n \frac{1}{(n-1+\theta)\left(\ln^2(n-1+\theta)\right)} \leq C.$$

Наконец,

$$\int\limits_T |f_1(x)|\,dx = \int\limits_T f_1(x)dx = \sum_{k=0}^{n-2} (a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2})\,(k+1) \int\limits_T K_k(x)dx =$$

$$= \pi \sum_{k=0}^{n-2} (a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2})\,(k+1) \le C_1 + \sum_{k=2}^{n-2} (a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2})\,(k+1) =$$

$$= C_1 + \sum_{k=2}^{n-2} \left(\frac{1}{\ln k} - \frac{2}{\ln(k+1)} + \frac{1}{\ln(k+2)} \right)(k+1). \tag{26}$$

Запишем

$$\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)} - \left(\frac{1}{\ln(k+1)} - \frac{1}{\ln(k+2)} \right) = \frac{1}{(k+\theta_1)\ln^2(k+\theta_1)} +$$

$$+ \frac{1}{(k+1+\theta_2)} \ln^2 (\frac{1}{(k+1+\theta_2)\ln^2(k+1+\theta_2)} =$$

$$= (1+\theta_2-\theta_1)\,\frac{1}{(k+\theta_3)\ln^2(k+\theta_3)} + \frac{2}{(k+\theta_3)\ln^2(k+\theta_3)}$$

Здесь

$$0 < \theta_1, \quad \theta_2 < 1, \quad 0 < \theta_3 < 2.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\ln k} - \frac{2}{\ln(k+1)} + \frac{1}{\ln(k+2)} \le \frac{6}{k^2 \ln^2 k}.$$

Тогда

$$(26) \le C_1 + 6 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+1}{k^2 \ln^2 k} < \infty.$$

□

Лекция 7. Сходимость рядов Фурье почти всюду. Часть 2

Теорема Колмогорова – Селиверстова

Теорема 7.1. *(Колмогорова – Селиверстова) Пусть $f(x) \in L_2(T)$ и*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right) \ln k < \infty.$$

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней почти всюду.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать

$$a_0(f) = a_1(f) = b_1(f) = 0.$$

Для $n \geq 2$ определим

$$S_{n,+}(x) = \max_{0 \leq k \leq n} S_k(f,x) = S_{n(x)}(f,x) \geq 0,$$

так как $S_{0,+} \equiv S_{1,+} = 0$,

$$S_{n,-}(x) = \min_{0 \leq k \leq n} S_x(f,x) \leq 0.$$

Кроме того, пусть

$$E_n(u) = \sum_{k=2}^{n} \frac{\cos ku}{\sqrt{\ln k}},$$

а

$$H_n(u) = \sum_{k=2}^{n} \frac{\cos ku}{\ln k}.$$

Далее, по теореме Риса – Фишера, $\exists$

$$\exists \underbrace{g_f(x)}_{L_2(T)} \sim \sum_{k=2}^{\infty} \left(a_k(f)\sqrt{\ln k}\cos kx + b_n(f)\sqrt{|lnk}\sin kx\right).$$

Рассмотрим

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_T g_f(u)E_n(u-x)du = \frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{\ln k}}\int\limits_T g_f(u)\cos k(u-x)du =$$

$$= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{\ln k}}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_T g_f(u)\cos kudu\cos kx + \frac{1}{n}\int\limits_T g_f(u)\sin kudu\sin kx\right) =$$

$$= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\ln k}\left(a_k(f)\sqrt{\ln k}\cos kx + b_k(f)\sqrt{\ln k}\sin kx\right) = S_n(f,x).$$

Оценим

$$\|S_{n,+}(x)\|_{L_1(T)} = \int\limits_T |S_{n,+}(x)|\,dx = \int\limits_T S_{n,+}(x)dx = \int\limits_T S_{n(x)}(f,x)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_T\int\limits_T g_f(u)E_{n(x)}(u-x)dxdu = \frac{1}{\pi}\int\limits_T g_f(u)\int\limits_T E_{n(x)}(u-x)dxdu$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\|g_f\|_2\sqrt{\int\limits_T\left(\int\limits_T E_{n(x)}(u-x)dx\right)^2 du}. \tag{27}$$

Далее,

$$\int\limits_T\left(\int\limits_T E_{n(x)}(u-x)dx\right)^2 du = \int\limits_T\left(\int\limits_T E_{n(x)}(u-x)dx\int\limits_T E_{n(y)}(u-y)dy\right)du =$$

$$= \int\limits_T\int\limits_T\int\limits_T E_{n(x)}(u-x)E_{n(y)}(u-y)du\,dxdy. \tag{28}$$

Здесь

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_T\int\limits_T H_{\min(n(x),n(y))}(y-x)dxdy =$$

$$= \sum_{r=2}^{n(x)}\sum_{l=2}^{n(y)}\frac{1}{\pi\sqrt{\ln l}\sqrt{\ln r}}\int\limits_T \cos l(u-x)\cos r(u-y)du =$$

$$= \sum_{l=2}^{n(x)}\sum_{r=2}^{n(y)}\frac{1}{2\pi\sqrt{\ln l}\sqrt{\ln r}}\int\limits_T \left(\cos\left((l+r)u-lx-ry\right)+\cos\left((l-r)u-lx+ry\right)\right)du =$$

$$= \sum_{k=2}^{\min(n(x),n(y))}\frac{\cos k(y-x)}{\ln k} = H_{\min(n(x),n(y))}(y-x).$$

Тогда

$$(28) = \pi\int\limits_T\int\limits_T H_{\min(n(x),n(y))}(y-x)dxdy \leq$$

$$\leq \pi\left(\int\limits_T\int\limits_T \left(\left|H_{n(x)}(y-x)\right|+\left|H_{n(y)}(y-x)\right|\right)dxdy\right) \leq$$

$$\leq \pi\left(\int\limits_T\left(\int\limits_T\left|H_{n(x)}(y-x)\right|dy\right)dx + \int\limits_T\left(\int\limits_T\left|H_{n(y)}(y-x)\right|dx\right)dy\right) \overset{\text{Лемма}}{\leq}$$

$$\leq \pi \left(\int\limits_T C dx + \int\limits_T C dy \right) = C_1^2.$$

Итак, получаем, что

$$(27) \leq \frac{C_1}{\pi} \|g_f\|_2.$$

Заметим, что выше был описан самый существенный этап доказательства. Рассуждения, записанные далее, носят более технический характер.

Если

$$\overline{S}(x) = \sup_{n \geq 2} S_n(x) = \lim_{N \to \infty} S_{N,+}(x),$$

то по теореме Б. Леви

$$\left\| \overline{S}(x) \right\|_1 \leq \frac{C_1}{\pi} \|g_f\|_2.$$

Аналогичное неравенство верно и для

$$\underline{S}(x) = \int\limits_{n \geq 2} S_{n,-}(x).$$

Тогда

$$\left\| \sup_n |S_n(f,x)| \right\|_{L(T)} \leq C \|g_f\|_{L_2(T)}.$$

Полученное неравенство называется *максимальным неравенством.*

Для произвольного $k \geq 2$ подберем n_k таким образом, что

$$\sqrt{|pi}} \left(\sum_{r=n_k+1}^{\infty} \left(a_r^2(f) + b_r^2(f) \right) \ln r \right)^{1/2} < \frac{1}{k^4}$$

и обозначим

$$P_k(x) = \sum_{r=1}^{n_k} \left(a_r(f) \cos rx + b_r(f) \sin rx \right).$$

Тогда

$$\|g_{f-P_k}\|_{L_2(T)} < \frac{1}{k^4},$$

так как

$$\|g_{f-P_k}\|_{L_2(T)} = \sqrt{|pi}} \left(\sum_{r=n_k+1}^{\infty} \left(a_r^2(f) + b_r^2(f) \right) \ln r \right)^{1/2}.$$

Кроме того, при этом

$$\|f - P_k\|_{L_1(T)} = \sqrt{\pi} \left(\sum_{r=n_k+1}^{\infty} \left(a_r^2(f) + b_r^2(f) \right)^{1/2} \right) < \frac{1}{k^4},$$

если n_1, n_2, $\ldots \geq 3$. Без ограничения общности будем считать, что

$$3 \leq n_1 < n_2 < \ldots.$$

Введем $\forall\ k$ множества

$$A_k = \left\{ x \in T : \ |f(x) - P_k(x)| > \frac{1}{k} \right\},$$

$$B_k = \left\{ x \in T : \ \sup_{n \geq 0} |S_n(f - P_k, x)| > \frac{1}{k} \right\}.$$

Затем положим

$$E = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{k=r}^{\infty} (A_k \cup B_r).$$

По неравенству Чебышева,

$$\mu(A_k) \leq \frac{1}{\frac{1}{k}} \int\limits_T (f(x) - P_k(x))\, dx \leq k\|f - P_k\|_2 \sqrt{2\pi} \leq \frac{\sqrt{2\pi}k}{k^4} = \frac{2\pi}{k^3}.$$

Аналогично получаем, что

$$\mu(B_k) leq \frac{1}{\frac{1}{k}} \left\| \sup_n |S_n(f - P_k, x)| \right\|_{L_1(T)} \leq kC \left\| g_{f-P_k} \right\|_{L_1(T)} \leq \frac{C}{k^3}.$$

Отсюда

$$\mu\left(\bigcup_{k=r}^{\infty} (A_k \cup B_k) \right) \leq \sum_{k=r}^{\infty} \frac{C_1}{k^3} \ \to \ 0, \quad r \to \infty.$$

По теореме о непрерывности меры получаем, что

$$\mu(E) = 0.$$

Пусть $x \in E$ и задано $k > 0$. Тогда $\exists\ k_0$ такое, что

$$k_0 \notin \bigcup_{k=k_0}^{\infty} (A_k \cup B_k).$$

Выберем $k \geq k_0$ (а значит, и n_k) такое, что

$$\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Заметим, что при $N \geq n_k$ имеем

$$S_N(P_k, x) = P_k(x).$$

Тогда при $N \geq n_k$ имеем

$$|f(x) - S_N(f, x)| \leq |f(x) - P_k(x)| + |S_n(f - P_k, x)| \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} < \varepsilon.$$

□

Теорема Плеснера – Ульянова

Теорема 7.2. *(А.И. Плеснера – П.Л. Ульянова) Пусть $f(x) \in L_2(T)$ и*

$$\int\limits_{(0,\pi)} \frac{(\omega_2(f,t))^2}{t} dt < \infty.$$

Тогда ряд Фурье для $f(x)$ сходится к ней почти всюду.

Доказательство. Рассмотрим

$$I = \int\limits_T \int\limits_T \frac{|f(x+t) - f(x-t)|^2}{|t|} dxdt = \int\limits_T \frac{1}{|t|} \int\limits_T |f(x+t) - f(x-t)|^2 \, dxdt \leq$$

$$\leq \int\limits_T \frac{1}{|t|} \left(\omega_2(f, 2|t|)\right)^2 dt \leq 4 \int\limits_T \frac{(\omega_2(f,|t|))^2}{|t|} dt = 8 \int\limits_{(0,\pi)} \frac{(\omega_2(f,t))^2}{t} dt < \infty.$$

Рассмотрим при фиксированном $t \in T$ функцию

$$g(x) = f(x+t) - f(x-t).$$

Имеем

$$a_0(g) = 0,$$

а при $n \geq 1$

$$a_n(g) = \frac{1}{\pi} \int\limits_T g(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_T f(x+t) \cos nx dx - \frac{1}{\pi} \int\limits_T f(x-t) \cos nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_T f(u) \cos n(u-t) du - \frac{1}{\pi} \int\limits_T f(u) \cos n(u+t) du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_T f(u) \cos nu du \cos nt + \frac{1}{\pi} \int\limits_T f(u) \sin nu du \sin nt - \frac{1}{\pi} \int\limits_T f(u) \cos nu du \cos nt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_T f(u) \sin nu du \sin nt = 2 \ln(f) \sin nt.$$

Далее,

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_T g(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_T f(x+t) \sin nx dx - \frac{1}{\pi} \int\limits_T f(x-t) \sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_T f(u) \sin n(u-t) du - \frac{1}{\pi} \int\limits_T f(u) \sin n(u+t) du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_T f(u)\sin nudu\cos nt - \frac{1}{\pi}\int\limits_T f(u)\cos nudu\sin nt - \frac{1}{\pi}\int\limits_T f(u)\sin nudu\cos nt -$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_T f(u)\cos nudu\sin nt = -2a_n(f)\sin nt.$$

Согласно равенству Парсеваля,

$$\int\limits_T |f(x+t)-f(x-t)|^2\,dx = \|g\|_{L_2(T)} = \pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2(g)+b_k^2(g)\right) =$$

$$= 4\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)\sin^2 kt.$$

В силу неотрицательности

$$I = 4\pi\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)\int\limits_T \frac{\sin^2 kt}{|t|}dt. \tag{29}$$

Оценим

$$\int\limits_T \frac{\sin^2 kt}{|t|}dt = 2\int\limits_{(0,\pi)} \frac{\sin^2 kt}{t}dt \geq 2\int\limits_{1/k}^{\pi} \frac{\sin^2 kt}{t}dt =$$

$$= \int\limits_{1/k}^{\pi}\frac{dt}{t} - \int\limits_{1/k}^{\pi}\frac{\cos 2kt}{t}dt \geq \ln k - \int\limits_{2}^{2\pi k}\frac{\cos u}{u}du \geq \ln k - C \geq \frac{1}{2}\ln k$$

при $k \geq k_0$. Тогда

$$(29) \geq 2\pi\sum_{k=k_0}^{\infty}\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)\ln k.$$

Отсюда

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)\ln k < \infty.$$

По теореме 7.1 получаем, что ряд Фурье сходится почти всюду. □

Лекция 8. Пример А.Н.Колмогорова ряда Фурье, расходящегося почти всюду

Вспомогательные леммы

Рассмотрим один из самых известных в теории функций примеров – пример А.Н. Колмогорова ряда Фурье, расходящегося почти всюду.

Для этого докажем три леммы.

Лемма 8.1. *$\exists\, C > 0$ такое, что $\forall$*

$$[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^1$$

с $\beta - \alpha \leq \pi$ и $\forall\ N \geq 0$ имеем

$$\left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} D_N(u) du \right| \leq C.$$

Доказательство. Пользуясь периодичностью и четностью ядра Дирихле, можно считать, что

$$[\alpha, \beta] \subset [-\pi, \pi].$$

Тогда

$$\left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} D_N(u) du \right| = \left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} \cos N u du \right| + \left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin N u \cos \frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2}} du \right| \leq \frac{\beta - \alpha}{2} + \left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin N u}{u} du \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sin N u \underbrace{\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{u}{2}} - \frac{1}{u} \right)}_{\in C((-\pi, \pi))} du \right| \leq \frac{\pi}{2} + \left| \int\limits_{N\alpha}^{N\beta} \frac{\sin s}{s} ds \right| + \int\limits_{\alpha}^{\beta} 1 \cdot C_1 du \leq C.$$

□

Лемма 8.2. *Пусть*

$$[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi],$$

l – натуральное число,

$$s \frac{\pi}{l + \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{4} (\beta - \alpha),$$

число $\gamma \in (0, 1/4)$. Тогда, если

$$E_\gamma = \{x \in [\alpha, \beta] : \ |\sin(l + 1/2)x| > \gamma\},$$

то

$$\mu(E_\gamma) \geq (\beta - \alpha) \left(1 - \frac{4\gamma}{\pi} \right) - \frac{8\pi}{l + 1/2}.$$

Доказательство. Рассмотрим $\sin t$ на $(0, \pi)$. Тогда

$$\sin 2\gamma \geq \frac{2}{\pi} 2\gamma = \frac{4}{\pi}\gamma > \gamma,$$

откуда

$$\mu\left(t \in (0, \pi) : \ \sin t \leq \gamma\right) \leq 4\gamma = \mu\left([0, \pi)\right) \frac{4\gamma}{\pi}.$$

Тогда, если

$$I_k = \left[\frac{\pi(k-1)}{l+1/2}, \frac{\pi k}{l+1/2}\right],$$

то

$$\mu\left(t \in I_k : \ |\sin t| \leq \gamma\right) \leq \frac{4\gamma}{l+1/2} = \mu(I_k)\frac{4\gamma}{\pi}.$$

Обозначим

$$k_1 = \min\left\{k : \ \frac{\pi k}{l+1/2} \geq \alpha\right\},$$

$$k_2 = \max\left\{k : \ \frac{\pi k}{l+1/2} \geq \beta\right\}.$$

Очевидно, $k_2 > k_1$.

Для $\forall\ k \in [k_1 + 1, k_2]$ имеем

$$\mu\left\{x \in I_k : \ |\sin(l+1/2)x| \leq \gamma\right\} \leq \mu(I_k)\frac{4\gamma}{\pi},$$

$$\mu\left\{x \in \left[\alpha, \frac{\pi k_1}{l+1/2}\right] : \ |\sin(l+1/2)x| \leq \gamma\right\} \leq \frac{4\gamma}{l+1/2},$$

$$\mu\left\{x \in \left[\frac{\pi k_2}{l+1/2}, \beta\right] : \ |\sin(l+1/2)x| \leq \gamma\right\} \leq \frac{4\pi}{l+1/2},$$

откуда

$$\mu\left\{x \in [\alpha, \beta] : \ |\sin(l+1/2)x| \leq \gamma\right\} \leq \frac{8\gamma}{l+1/2} + \sum_{k=k_1+1}^{k_2} \mu(I_k)\frac{4\gamma}{\pi} \leq \frac{8\gamma}{l+1/2} + \frac{4\gamma}{\pi}\mu\left([\alpha, \beta]\right).$$

Отсюда получаем, что

$$\mu\left\{x \in [\alpha, \beta] : \ |\sin(l+1/2)x| > \gamma\right\} \geq (\beta - \alpha) - \frac{8\gamma}{l+1/2} - \frac{4\gamma}{\pi}(\beta - \alpha) =$$

$$= (\beta - \alpha)\left(1 - \frac{4\gamma}{\pi}\right) - \frac{8\gamma}{l+1/2}.$$

□

Лемма А.Н. Колмогорова

Лемма 8.3. *(А.Н. Колмогорова) Пусть n_0 – натуральное число такое, что*

$$\frac{\sqrt{\ln n_0}}{<}\frac{1}{4}.$$

Тогда $\exists$ последовательности

1. *2π-периодических функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=n_0}^{\infty}$;*
2. *Измеримых множеств*
$$\{E_n\}_{n=n_0}^{\infty}, \quad E_n \subset [0, 2\pi];$$
3. *Чисел $\{M_n\}_{n=n_0}^{\infty}$;*
4. *Натуральных чисел $\{q_n\}_{n=n_0}^{\infty}$.*

Эти последовательности таковы, что

I. $\forall\ n \geq n_0$
$$\varphi_n(x) \in V\left([0, 2\pi]\right),$$
$$\varphi_n(x) \geq 0\ \forall\ x,$$
$$\int\limits_{[0,2\pi]} \varphi_n(x)dx = 2$$
и $\exists$ постоянная B_n такая, что $\forall\ N \geq 0$, $\forall\ x$
$$|S_n(\varphi_n, x)| \leq B_n;$$

II. $\mu(E_n)\ \to\ 2\pi$, $n \to \infty$;

III. $M_n \uparrow \infty$ *при* $n \to \infty$;

IV. $\forall\ x \in E_n\ \exists$ *натуральное* $p = p(x) \leq q_n$ *такое, что*
$$|S_p(\varphi_n, x)| > M_n.$$

Доказательство. Пусть $n \geq n_0$ фиксированно. Построим индуктивно последовательность возрастающих нечетных чисел

$$\lambda_1 = 5 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n,$$

связанную с некоторой последовательностью натуральных чисел

$$m_1 < m_2 < \ldots < m_n,$$

где

$$(2m_k + 1) = \lambda_k(2n + 1)\ \forall\ k.$$

Положим
$$A_k = \frac{4\pi k}{2n+1}, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n,$$
отрезки
$$\Delta_k = \left[A_k - \frac{1}{m_k^2}, A_k + \frac{1}{m_k^2}\right], \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$$
и отрезки
$$\sigma_k = \left[A_{k-1} + \frac{2}{n^2}, A_k - \frac{2}{n^2}\right], \quad k = 2,\, \ldots,\, n.$$
Так как
$$A_1 - \frac{1}{m_1^2} = \frac{4\pi}{2n+1} - \frac{1}{m_1^2} > \frac{4\pi}{2n+1} - \frac{1}{n^2} > 0,$$
то все Δ_k лежат на $[0, 2\pi]$.

Затем,
$$\operatorname{dist}(\sigma_k, \Delta_{k-1} \cup \Delta_k) \geq \frac{1}{n^2}. \tag{30}$$
Сравним
$$\frac{4}{n^2} \vee A_k - A_{k-1},$$
что эквивалентно сравнению
$$\frac{4}{n^2} \vee \frac{4\pi}{2n+1}.$$
Очевидно,
$$\frac{4}{n^2} < \frac{4\pi}{2n+1},$$
откуда получаем, что σ_k невырождены.

Определим функции
$$\varphi_{n,k}(x) = \begin{cases} \frac{m_k^2}{n}, & x \in \Delta_k \\ 0, & x \in [0, 2\pi] \setminus \Delta_k. \end{cases}$$
Положим
$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{n,k}(x).$$
Очевидно, что $\varphi_n(x) \geq 0$,
$$\varphi_n(x) \in V([0, 2\pi])$$
и
$$\int\limits_{[0,2\pi]} \varphi_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k^2}{n}\mu(\Delta_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k^2}{n}\frac{2}{m_k^2} = 2.$$
Далее, имеем
$$|S_N(\varphi_n, x)| = \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{[0,2\pi]} \varphi_n(t)D_N(x-t)dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{\Delta_k}\varphi_{n,k}(t)D_N(x-t)dt\right| = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k^2}{n}\left|\int\limits_{\Delta_k}D_N(x-t)dt\right| \leq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k^2}{n}C = B_n.$$

Предположим, что уже построили

$$\lambda_1 = 5 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{k-1}.$$

Рассмотрим при $x \in \sigma_k$

$$\left|S_{m_k}\left(\sum_{r=1}^{n-1}\varphi_{n,r}, x\right)\right| \leq \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{n-1}\left|\int\limits_{\Delta_r}\varphi_{n,r}(t)D_{m_k}(x-t)dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{k-1}\frac{m_r^2}{n}\left|\int\limits_{\Delta_r}\frac{\sin(m_k+1/2)(x-t)}{2\sin\frac{x-t}{2}}dt\right|. \tag{31}$$

Заметим, что функция $\frac{1}{2\sin\frac{x-t}{2}}$, $x \in \sigma_k$, монотонна на любом Δ_r, кроме, может быть, одного, причем этот единственный отрезок можно разделить на две части, на каждой из которых функция $\frac{1}{2\sin\frac{x-t}{2}}$ монотонна.

Из (30) следует, что

$$\frac{1}{2\sin\frac{x-t}{2}} \leq \frac{1}{2\sin\frac{1}{2n^2}}.$$

Наконец, для $\forall\ \gamma$ и δ

$$\left|\int\limits_{\gamma}^{\delta}\sin\left(m_k - \frac{1}{2}\right)(x-t)dt\right| < \frac{2}{m_k + \frac{1}{2}}.$$

С учетом второй теоремы о среднем,

$$(31) \leq \frac{1}{\pi}2\frac{1}{2\sin\frac{1}{2n^2}}\sum_{r=1}^{k-1}\frac{m_k^2}{n}\frac{2}{m_k+1/2} < 1.$$

Здесь последнее неравенство верно в силу подбора $\lambda_k > \lambda_{k-1}$.

Заметим, что

1. Если $j > k$, то

$$(m_k + 1/2(A_j - x) - (m_k + 1/2)(A_k - x) = (m_k + 1/2)(A_j - A_k) =$$

$$= (m_k + 1/2)\frac{4\pi(j-k)}{2n+1} = \frac{(2m_k+1)}{2n+1}2\pi(j-k) = 2\pi\lambda_k(j-k).$$

Отсюда получаем, что

$$\sin(m_k + 1/2)(A_j - x) = \sin(m_K + 1/2)(A_k - x)\ \forall\ x,$$

в том числе $x \in \sigma_k$.

2. Очевидно, что $\forall$ натурального p, $\forall\ x$

$$\left|D_p'(x)\right| \le p^2.$$

Тогда, если $j \ge k$, $t \in \Delta_j$, $\forall\ x \in \sigma_k$

$$|D_{m_k}(t-x) - D_{m_k}(A_j - x)| \overset{\text{Теорема Лагранжа}}{\le} m_k^2\,|A_j - t| \le \frac{m_k^2}{m_j^2}.$$

Рассмотрим при $x \in \sigma_k$

$$\left|S_{m_k}\left(\sum_{j=k}^{n}\varphi_{n,j}, x\right)\right| = \frac{1}{\pi}\left|\sum_{j=k}^{n}\frac{m_j^2}{n}\int\limits_{\Delta_j} D_{m_k}(x-t)dt\right| \ge$$

$$\ge \frac{1}{\pi}\left|\sum_{j=k}^{n}\frac{m_j^2}{n}\int\limits_{\Delta_j} D_{m_k}(A_j - x)dt\right| - \frac{1}{\pi}\left|\sum_{j=k}^{n}\frac{m_j^2}{n}\underbrace{\int\limits_{\Delta_j}\left(D_{m_k}(t-x) - D_{m_k}(A_j - x)\right)dt}_{=I_1}\right|. \quad (32)$$

Оценим

$$I_1 \le \frac{1}{\pi}\sum_{j=k}^{n}\frac{m_j^2}{n}\frac{m_k^2}{m_j^2}\mu(\Delta_j) \le \frac{2}{\pi}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{n}\underbrace{\frac{m_k^2}{m_j^2}}_{\le 1} < 1.$$

Тогда

$$(32) \ge \frac{1}{\pi}\left|\sum_{j=k}^{n}\frac{m_j^2}{n}D_{m_k}(A_j - x)\frac{2}{m_j^2}\right| - 1 =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left|\sum_{j=k}^{n}\frac{\sin(m_k + 1/2)(A_j - x)}{2\sin\frac{A_j - x}{2}}\right| - 1 = \frac{2}{\pi n}\left|\sin(A_k - x)(m_k + 1/2)\right|\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{2\sin\frac{A_j - x}{2}} - 1 \ge$$

$$\ge \frac{2}{\pi n}\left|\sin(A_k - x)(m_k + 1/2)\right|\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{A_j - x} - 1 \ge$$

$$\ge \frac{2}{\pi n}\left|\sin(A_k - x)(m_k + 1/2)\right|\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{\frac{4\pi(j-k+1)}{2n+1}} - 1$$

$$= \frac{2n+1}{4\pi^2 n}\left|\sin(A_k - x)(m_k + 1/2)\right|\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j-k+1} - 1 \ge$$

$$\ge \frac{1}{2\pi^2}\left|\sin(A_k - x)(m_k + 1/2)\right|\ln\sqrt{n} - 1$$

для $2 \le k \le n - \sqrt{n}$.

Обозначим при $2 \le k \le n - \sqrt{n}$

$$E_{n,k} = \left\{ x \in \sigma_k : \ |\sin(m_k + 1/2)(A_k - x)| > \frac{1}{\sqrt{\ln n}} \right\}.$$

Заметим, что

$$\mu(\sigma_k) = \frac{4\pi}{2n+1} - \frac{4}{\pi^2} \ge \frac{2\pi}{2n+1},$$

так как для $k = 1$

$$(2m_1 + 1) = 5(2n + 1),$$

откуда

$$m_1 + 1/2 = 5(n + 1/2).$$

Положим

$$E_n = \sqcup_{k=2}^{n-\sqrt{n}} E_{n,k}.$$

По лемме 8.2,

$$\mu(E_{n,k}) \ge \mu(\sigma_k)\left(1 - \frac{4}{\pi\sqrt{\ln n}}\right) - \frac{8}{\sqrt{\ln n}(m_k + 1/2)} \ge \mu(\sigma_n)\left(1 - \frac{4}{\pi\sqrt{\ln n}}\right) - \frac{8}{n\sqrt{\ln n}}.$$

Отсюда

$$\mu(E_n) = (n - \sqrt{n} - 1)\left(\left(\frac{4\pi}{2n+1} - \frac{4}{n^2}\right)\left(1 - \frac{4}{\pi\sqrt{\ln n}}\right) - \frac{8}{b\sqrt{\ln n}}\right) = 2\pi + \overline{\overline{o}}(1), \ \ n \to \infty.$$

Положим

$$M_n = \frac{1}{4\pi^2\sqrt{\ln n}} - 2 \ \uparrow \ \infty,$$
$$q_n = m_n.$$

Тогда, если $x \in E_n$, получаем, что $\exists$

$$k_0 \in [2, n - \sqrt{n}]$$

такое, что

$$x \in E_{n,k}.$$

Получаем, что

$$|S_{m_k}(\varphi_n, x)| \ge \left| S_{m_k}\left(\sum_{j=k}^{n} \varphi_{n,j}, x\right)\right| - \left| S_{m_k}\left(\sum_{j=1}^{k-1} \varphi_{n,j}, x\right)\right| \ge \frac{1}{4\pi^2\sqrt{\ln n}} - 1 - 1 = M_n.$$

Заметим, что $\forall \ k$

$$m_k \le m_n = q_n.$$

$\square$

Лекция 9. Построение примера Колмогорова. Частный случай интерполяционной теоремы Марцинкевича

Теорема А.Н. Колмогорова

С помощью трех лемм, доказанных в прошлый раз, докажем теорему А.Н. Колмогорова.

Теорема 9.1. *(А.Н. Колмогоров)* $\exists\ f(x) \in L\left((0, 2\pi)\right)$ *такая, что ее ряд Фурье расходится почти всюду.*

Доказательство. Пусть $\varphi_n(x)$, M_n, B_n и q_n – последовательности, введенные в лемме 8.3 А.Н. Колмогорова.

Построим возрастающую последовательность номером n_i:

1. $n_1 \geq n_0$;
2. Верно
$$\frac{\sqrt{M_{n_i}}}{\leq}\frac{1}{2^i}, \quad i = 1,\, 2,\, \ldots;$$
3. $\forall\ i > 1$
$$\sum_{j=1}^{i-1} B_{n_j} \leq \frac{1}{2}\sqrt{M_{n_i}};$$
4. Выполнено
$$\frac{\max\limits_{1\leq j\leq i-1}\left(q_n, \pm\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{M_{n_j}}} \leq \frac{1}{2^i}, \quad i = 2,\, 3,\, \ldots.$$

Определим функцию
$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_i}}} \underbrace{\varphi_{n_j}}_{\geq 0}.$$

Имеем
$$\int\limits_{(0,2\pi)} f(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_i}}} \int\limits_{(0,2\pi)} \varphi_{n_i}(x)dx = 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_i}}} < \infty,$$
откуда получаем, что $f(x) \in L(T)$.

Пусть $i > 1$ и $x \in E_{n_i}$. Тогда, согласно лемме, $\exists\ p = p(x) \leq q_{n_i}$ такое, что
$$|S_p\left(\varphi_{n_i}, x\right)| > M_{n_i}.$$

Поскольку ядро Дирихле – непрерывная функция,
$$|S_p(f, x)| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} S_p\left(\varphi_n, x\right) \frac{1}{\sqrt{M_{n_j}}}\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{M_{n_i}}} \left|S_p\left(\varphi_{n_i}, x\right)\right| - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\sqrt{M_{n_j}}} \left|S_p\left(\varphi_{n_j}, x\right)\right| - \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_j}}} \left|S_p\left(\varphi_{n_j}, x\right)\right|. \qquad (33)$$

Отметим, что если $g(x) \in L(0, 2\pi)$, а p – натуральное, то

$$|S_p(g, x)| = \frac{1}{\pi} \left| \int\limits_{(0,2\pi)} g(t) D_p(x-t) dt \right| \leq \frac{p + 1/2}{\pi} \int\limits_{(0,2\pi)} |g(t)|\, dt.$$

Тогда

$$(33) > \sqrt{M_{n_i}} - \sum_{j=1}^{i-1} B_{n_j} - \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{p+1/2}{\sqrt{M_{n_j}}} \int\limits_0^{2\pi} \varphi_{n_j}(x) dx \geq$$

$$\geq \sqrt{M_{n_i}} - \frac{1}{2}\sqrt{M_{n_i}} - 2 \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{q_{n_i} + 1/2}{\sqrt{M_{n_i}}} \geq \frac{1}{2}\sqrt{M_{n_i}} - 2 \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2}\sqrt{M_{n_i}} - 1.$$

Напомним, оценка выше справедлива при $x \in E_{n_i}$.

Пусть

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} E_{n_i}.$$

Так как по лемме 8.3 А.Н. Колмогорова

$$\mu(E_{n_i}) \ \to \ 2\pi, \quad i \to \infty,$$

получаем, что

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n_i}\right) = 2\pi,$$

откуда

$$\mu(E) = 2\pi.$$

Если $x \in E$, то $\exists$ возрастающая последовательность i_r такая, что

$$x \in E_{n_{i_r}} \ \forall\ r.$$

Отсюда $\forall$ фиксированного A найдется номер i_r такой, что

$$\frac{1}{2}\sqrt{M_{n_{i_r}}} - 1 > A$$

и для некоторого индекса p

$$|S_p(f, x)| > \frac{1}{2}\sqrt{M_{n_{i_r}}} - 1 > A,$$

откуда получаем, что

$$\sup_N |S_N(f, x)| = \infty.$$

$\square$

Частный случай интерполяционной теоремы Марцинкевича

Теорема о представлении интеграла от степени функции с помощью функции распределения

Теорема 9.2. *(Представление интеграла от степени функции с помощью функции распределения) Пусть даны (X, M, μ) – измеримое пространство, $p \geq 1$ и $f(x)$ – измеримая функция на (X, M, μ). Пусть, кроме того, дана функция распределения*

$$F_f(y) = \mu\left\{x \in X : \ |f(x)| > y\right\}, \quad y > 0.$$

Тогда

$$\int\limits_X |f(x)|^p \, d\mu = p \int\limits_{(0,\infty)} y^{p-1} F_f(y) d\mu_y,$$

где μ_y – классическая мера Лебега на подмножествах $(0, \infty)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $f(x) \geq 0$.

Пусть вначале $f(x)$ простая $\iff$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_n \chi_{E_n}(x),$$

где $\forall\ k\ E_k \in M$,

$$E_k \cap E_j = \emptyset, \quad k \neq j,$$

$$0 < c_1 < \ldots < c_n$$

и $\forall\ k$

$$\mu(E_k) < \infty.$$

Формально положим $c_0 = 0$. Заметим, что

$$(f(x))^p = \sum_{k=1}^{n} c_k^p \chi_{E_k}(x).$$

Отсюда

$$\int\limits_X (f(x))^p \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k^p \mu(E_k). \tag{34}$$

Затем,

$$F_f(y) = \begin{cases} \mu\left(\sqcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(E_k), \quad 0 \leq y < c_1 \\ \sum\limits_{k=2}^{n} \mu(E_k), \quad c_1 \leq y < c_2 \\ \ldots \\ \mu(E_n), \quad c_{n-1} \leq y < c_n \\ 0, \quad y \geq c_n \end{cases}$$

Поэтому

$$p \int\limits_{(0,\infty)} y^{p-1} F_f(y) d\mu_y = \sum_{k=1}^{n} p \int\limits_{c_{k-1}}^{c_k} y^{k-1} dy \sum_{r=k}^{n} \mu(E_r) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(c_k^p - c_{k-1}^p\right) \sum_{r=k}^{n} \mu(E_r) = \sum_{k=1}^{n} c_k^p \mu(E_k).$$

Сравнивая получившийся результат с (34), получаем, что для простых функций утверждение теоремы доказано.

Если $f(x)$ – произвольная неотрицательная функция, то $\exists$ последовательность простых неотрицательных функций такая, что

$$f_n(x) \uparrow f(x), \quad n \to \infty \text{ на } X.$$

Заметим, что $\forall\ y < 0$

$$\{x \in X : \ f(x) > y\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : \ f_n(x) > y\}.$$

Отсюда по теореме о непрерывности меры получаем, что

$$F_{f_n}(y) \uparrow F_f(y).$$

Воспользуемся дважды теоремой Б. Леви: $\forall\ n$

$$\underbrace{\int\limits_X (f_n(x))^p \, d\mu}_{\to \int\limits_X (f(x))^p d\mu, \quad n\to\infty} = \underbrace{p \int\limits_{(0,\infty)} y^{p-1} F_{f_n}(y) d\mu_y}_{\to p \int\limits_{(0,\infty)} y^{p-1} F_f(y) d\mu_y, \quad n\to\infty}.$$

□

Необхомые определения

Пусть (X, M, μ) и (Y, N, ν) – измеримые пространства. Пусть K – подмножество измеримых на $X(, M, \mu)$ функций и A – линейный оператор, который отображает K в множество измеримых на (Y, N, ν) функций.

Определение 9.1. Пусть числа $p, r \geq 1$. Скажем, что оператор A имеет *сильный тип* (p, r) $\iff$

1. $K \supset L_p(X)$;
2. A является линейным непрерывным оператором (ЛНО) в $L_r(Y)$.

При этом *сильной нормой* A мы будем называть $\|A\|_{L_p \to L_r}$.

Определение 9.2. Пусть $p, r \geq 1$. Скажем, что A имеет *слабый типа* (p, r) $\iff$

1. $K \supset L_p(X)$;
2. $\exists\, C > 0$ такое, что $\forall\, f \in L_p(X)$

$$\bigcup \{y \in Y : \ |(Af)(y)| > \lambda\} \leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L_p(X)}\right)^2 \ \ \forall\, \lambda > 0.$$

При этом *слабой* (p, r) *нормой* A мы будем называть минимальное из таких C.

Утверждение 9.1. *Если A имеет сильный тип (p, r), то A имеет и слабый тип (p, r) и слабая (p, r) норма $\leq \|A\|_{L_p \to L_r}$.*

Доказательство. Пусть $\lambda > 0$ и

$$E_\lambda = \{y \in Y : \ |Af(y)| > \lambda\}.$$

Тогда $\forall\, f \in L_p(X)$

$$\|Af\|_{L_r(y)} \leq \|A|_{L_p(X) \to L_r(Y)} \|f\|_{L_p(x)}.$$

С другой стороны,

$$\|Af\|_{L_r(y)} = \left(\int\limits_Y |Af(y)|^2\, dy\right)^{1/2} \geq \left(\int\limits_{E_\lambda} |Af(y)|^2\, dy\right)^{1/2} \geq \pi\lambda\left(\mu(E_\lambda)\right)^{1/2}.$$

Итак, получаем, что

$$\mu(E_\lambda) \leq \left(\frac{\|A\|_{L_p \to L_r}}{\lambda}\|f\|_{L_p}\right)^2.$$

□

Частный случай интерполяционной теоремы Марцинкевича (начало доказательства)

Теорема 9.3. *(Частный случай интерполяционной теоремы Марцинкевича) Пусть даны (X, M, μ) и (Y, N, ν) – измеримые пространства, $1 \leq p < r < \infty$, и линейный оператор A, который одновременно является оператором слабого типа (p, p) (со слабой нормой M_1) и слабого типа (r, r) со слабой нормой M_2.*

Тогда $\forall\, q \in (p, r)$ оператор A будет иметь сильный тип (q, q) и

$$\|A\|_{L_q \to L_q} \leq E(t, p, r) M_1^t M_2^{1-t},$$

где $t \in (0, 1)$ таково, что

$$\frac{1}{q} = t\frac{1}{p} + (1 - t)\frac{1}{r},$$

и $\forall\, \varepsilon > 0$ постоянная $E(t, p, r)$ ограничена на $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ (по t).

Доказательство. Проверим вначале, что $L_q(x)$ лежит в области определения оператора A.

Пусть $f(x) \in L_q(X)$. Рассмотрим

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_2(x) \equiv f(x) - f_1(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| > 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Заметим, что

$$|f_1(x)|^r \leq |f(x)|^q .$$

Отсюда получаем, что $f_1(x) \in L_r(X)$. Аналогично,

$$|f_2(x)|^p \leq |f(x)|^q ,$$

откуда $f_2(x) \in L_p(X)$.

Оператор A линеен. Так как определены

$$Af_1 \text{ и } Af_2,$$

то определено и

$$Af = Af_1 + Af_2.$$

Выведем из

$$\frac{1}{q} = t\frac{1}{p} + (1-t)\frac{1}{r}$$

t и $1-t$:

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{r} = t\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right),$$

$$t = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} = \frac{pr - pq}{qr - pq} = \frac{p(r-q)}{q(r-p)},$$

и аналогично получим

$$1 - t = \frac{pr - pq}{qr - pq} - 1 = \frac{pr - pq - qr + pq}{q(r-p)} = \frac{pr - qr}{q(r-p)} = \frac{r(p-q)}{q(r-p)}.$$

Доказательство будет продолжено на следующей лекции. □

Лекция 10. Частный случай интерполяционной теоремы Марцинкевича (продолжение доказательства). Теорема Пэли

Частный случай интерполяционной теоремы Марцинкевича (продолжение доказательства)

Напомним формулировку теоремы, доказательство которой было начато на прошлой лекции.

Теорема 9.3. *(Частный случай интерполяционной теоремы Марцинкевича)*

Пусть даны (X, Σ, μ) и (Y, N, ν) – измеримые пространства, оператор A отображает некоторое подмножество измеримых на (X, Σ, μ) функций в функции, измеримые на (Y, N, ν), $1 \leq p < r < \infty$, и A одновременно является оператором слабого типа (p, p) со слабой нормой M_1 и слабого типа (r, r) со слабой нормой M_2.

Тогда $\forall\ q \in (p, r)$ оператор A имеет сильный тип (q, q) и

$$\|A\|_{L_q \to L_q} \leq K(t, p, r) M_1^t M_2^{1-t},$$

где $t \in (0, 1)$ таково, что

$$\frac{1}{q} = t\frac{1}{p} + (1-t)\frac{1}{r},$$

а постоянная $K(t, p, r)$ зависит от указанных параметром и $\forall\ \varepsilon > 0$ при $t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$

$$K(t, p, r) \leq C(\varepsilon, p, r).$$

Доказательство. (Продолжение) Было доказано, что Af определено для $\forall\ f(x) \in L_q(X)$. Рассмотрим при $f \in L_q(X)$

$$\|Af\|^q_{L_q(Y)} = \int\limits_Y |Af(y)|^q \, d\nu \overset{\text{Теорема 9.2}}{=} q \int\limits_{(0,\infty)} z^{q-1} F_{Af}(z) dz. \tag{35}$$

Напомним,

$$F_{Af}(z) = \nu \left\{ y \in Y : \ |Af(y)| > z \right\}.$$

Ю. Марцинкевич предложил проводить разбиение следующим образом. $\forall\ x \in (0, \infty)$ разобъем

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

следующим образом:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq \frac{z}{B} \\ \frac{z}{B}\mathrm{sgn} f(x), & |f(x)| > \frac{z}{B} \end{cases}$$

$$f_2(x) = f(x) - f_1(x).$$

Постоянную B подберем позднее.

Имеем

$$F_{f_1}(t) = \begin{cases} F_f(t), & 0 \le t < \frac{z}{B} \\ 0, & t > \frac{z}{B} \end{cases}$$

$$F_{f_2}(t) = F_f\left(t - \frac{z}{B}\right) \ \forall\, t.$$

Заметим, что $\forall\ z$

$$\{y \in Y:\ |Af(y)| > z\} \le \left\{y \in Y:\ |Af_1(y)| > \frac{z}{2}\right\} \cup \left\{y \in Y:\ |Af_2(y)| > \frac{z}{2}\right\}.$$

Это означает, что

$$F_{Af}(z) \le F_{Af_1}\left(\frac{z}{2}\right) + F_{Af_2}\left(\frac{z}{2}\right).$$

Продолжим оценку:

$$(35) \le q\left(\int\limits_{(0,\infty)} z^{q-1} F_{Af_1}\left(\frac{z}{2}\right) dz + \int\limits_{(0,\infty)} z^{q-1} F_{Af_2}\left(\frac{z}{2}\right) dz\right) \le$$

$$\le q2^q\left(\int\limits_{(0,\infty)} z^{q-1} F_{Af_1}(z) dz + \int\limits_{(0,\infty)} z^{q-1} F_{Af_2}(z) dz\right). \tag{36}$$

Проверим, что $f_1(x) \in L_r(X)$, а $f_2(x) \in L_p(X)$. Имеем

$$|f_1(x)|^r = |f_1(x)|^q\, |f_1(x)|^{r-q} \le \left(\frac{z}{B}\right)^{r-q} |f_1(x)|^q \le \left(\frac{z}{B}\right)^{r-q} |f(x)|^q \in L(X),$$

$$|f_2(x)|^p = |f_2(x)|^p\, \chi_{\left\{x \in X:\ |f(x)| \ge \frac{z}{B}\right\}}(x) \le |f(x)|^p\, \chi_{\left\{x \in X:\ |f(x)| \ge \frac{z}{B}\right\}}(x) =$$

$$= |f(x)|^q\, |f(x)|^{p-q}\, \chi_{\left\{x \in X:\ |f(x)| \ge \frac{z}{B}\right\}}(x) \le \left(\frac{B}{z}\right)^{q-p} |f(x)|^q \in L(X).$$

Далее,

$$(36) \le q2^q\left(\int\limits_{(0,\infty)} z^{q-1}\left(\frac{M_2}{z}\|f_1\|_r\right)^r dz + \int\limits_{(0,\infty)} z^{q-1}\left(\frac{M_1}{z}\|f_2\|_p\right)^r dz\right) =$$

$$= q2^q\left(M_2^r \int\limits_{(0,\infty)} z^{q-r-1} \int\limits_X |f_1(x)|^r\, d\mu dz + M_1^p \int\limits_{(0,\infty)} z^{q-p-1} \int\limits_X |f_2(x)|^p\, d\mu dz\right) =$$

$$= q2^q\left(M_2^r \int\limits_{(0,\infty)} z^{q-r-1} r \int\limits_{(0,\infty)} t^{r-1} F_{f_1}(t) dt dz + M_1^p \int\limits_{(0,\infty)} z^{q-p-1} p \int\limits_{(0,\infty)} t^{p-1} F_{f_1}(t) dt dz\right) =$$

$$= q2^q \left(rM_2^r \int\limits_{(0,\infty)} z^{q-r-1} \int\limits_{(0,z/B)} t^{r-1} F_f(t) dt dz + \right.$$

$$\left. + pM_1^p \int\limits_{(0,\infty)} z^{q-p-1} \int\limits_{(0,z/B)} t^{p-1} F_f(t + z/B) dt dz \right) =$$

$$= q2^q \left(rM_2^r \int\limits_{(0,\infty)} t^{r-1} F_f(t) \int\limits_{(tB,\infty)} z^{\overbrace{q-r-1}^{<-1}} dz dt + \right.$$

$$\left. + pM_1^p \int\limits_{(0,\infty)} z^{q-p-1} \int\limits_{(z/B,\infty)} \left(t - \frac{z}{B}\right)^{\overbrace{p-1}^{\geq 0}} F_f(t) dt dz \right) \leq$$

$$\leq q2^q \left(rM_2^r \int\limits_{(0,\infty)} t^{r-1} F_f(t) \frac{1}{r-q} (tB)^{q-r} dt + pM_1^p \int\limits_{(0,\infty)} z^{q-p-1} \int\limits_{(z/B,\infty)} t^{p-1} F_f(t) dt dz \right) =$$

$$= q2^q \left(\frac{rM_2^r}{r-q} \int\limits_{(0,\infty)} t^{q-1} F_f(t) dt \cdot B^{q-r} + pM_1^p \int\limits_{(0,\infty)} t^{p-1} F_f(t) \int\limits_{(0,Bt)} z^{q-p-1} dz dt \right) =$$

$$= q2^q \left(\frac{rM_2^r}{r-q} B^{q-r} \int\limits_{(0,\infty)} t^{q-1} F_f(t) dt + \frac{pM_1^p}{q-p} \int\limits_{(0,\infty)} t^{p-1} (Bt)^{q-p} F_f(t) dt \right) =$$

$$= q \int\limits_{(0,\infty)} t^{q-1} F_f(t) dt \left(\frac{rM_2^r}{r-q} B^{q-r} + \frac{pM_1^p}{q-p} B^{q-p} \right) 2^q =$$

$$= \|f\|_{L_q(X)}^q \, 2^q \left(\frac{rM_2^r}{r-q} B^{q-r} + \frac{pM_1^p}{q-p} B^{q-p} \right).$$

Заметим, что на этом моменте мы показали, что A является непрерывным линейным оператором из L_q в L_q.

Подберем B таким образом, чтобы

$$M_2^q B^{q-r} = M_1^p B^{q-p},$$

то есть

$$B^{r-p} = M_2^r M_1^{-p},$$
$$B = M_2^{\frac{r}{r-p}} M_1^{-\frac{p}{r-p}}.$$

Тогда

$$M_1^p B^{q-p} = M_2^{\frac{r(q-p)}{r-p}} M_1^{p-\frac{p(q-p)}{r-p}} = M_2^{\frac{r(q-p)}{r-p}} M_1^{\frac{p(r-q)}{r-p}}.$$

Итак,

$$\|Af\|_{L_q(Y)} \le \|f\|_{L_q(X)} r M^{\frac{r(q-p)}{q(r-p)}} M_1^{\frac{p(r-q)}{q(r-p)}} \left(\frac{r}{r-q} + \frac{p}{q-p}\right)^{1/q}. \tag{37}$$

Напомним выводы из

$$\frac{1}{q} = t\frac{1}{p} + (1-t)\frac{1}{r}$$

t и $1-t$:

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{r} = t\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right),$$

$$t = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} = \frac{pr - pq}{qr - pq} = \frac{p(r-q)}{q(r-p)},$$

$$1 - t = \frac{pr - pq}{qr - pq} - 1 = \frac{pr - pq - qr + pq}{q(r-p)} = \frac{pr - qr}{q(r-p)} = \frac{r(p-q)}{q(r-p)}.$$

Отсюда

$$(37) = r\|f\|_{L_q(X)} M_1^t M_2^{1-t} \left(\frac{r}{r-q} + \frac{p}{q-p}\right)^{1/q}.$$

Далее,

$$\frac{r}{r-q} + \frac{p}{q-p} = \frac{r\frac{1}{q}}{r\frac{1}{q} - 1} + \frac{p\frac{1}{q}}{1 - p\frac{1}{q}} =$$

$$= \frac{rt\frac{1}{p} + r(1-t)\frac{1}{r}}{rt\frac{1}{p} + r(1-t)\frac{1}{r}q} + \frac{pt\frac{1}{p} + p(1-t)\frac{1}{r}}{1 - \left(pt\frac{1}{p} + p(1-t)\frac{1}{q}\right)} =$$

$$\frac{\frac{r}{p}t + 1 - t}{\frac{r}{p}t - t} + \frac{t + \frac{p}{r}(1-t)}{1 - t - \frac{p}{r}(1-t)} =$$

$$\frac{1}{t}\frac{\frac{r}{p}t + 1 - t}{\frac{r}{p} - 1} + \frac{1}{1-t}\frac{t + \frac{p}{r}(1-t)}{1 - \frac{p}{r}}.$$

Отсюда вытекает оценка для $K(t,p,r)$ при $t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$. □

Теорема Пэли (формулировка)

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 10.1. *Пусть $1 < p < \infty$, сопряженный показатель*

$$p' = \frac{p}{p-1},$$

(X, M, μ) – измеримое пространство и

$$f(x) \in L_p(X, M, \mu).$$

Тогда

$$\|f\|_p = \sup_{g \in L_{p'}(X):\ \|g\|_{L_{p'}(X)} \le 1} \left| \int_X f(x)g(x)d\mu \right|.$$

Доказательство. С одной стороны, по неравенству Гёльдера,

$$\left|\int\limits_X f(x)g(x)d\mu\right| \leq \|f\|_{L_p(X)} \|g\|_{L_{p'}(X)} < \|f\|_{L_p(X)},$$

если $\|g\|_{L_{p'}(X)} \leq 1$.

Рассмотрим функцию

$$\psi(x) = |f(x)|^{p-1} \operatorname{sgn} f(x).$$

Вычислим

$$\int\limits_X |\psi(x)|^{p'} d\mu = \int\limits_X |f(x)|^p d\mu = \|f\|^p_{L_p(X)}.$$

Если $f(x) \neq 0$, то

$$g(x) = \frac{\psi(x)}{\|f\|^{p-1}_{L_p(x)}} \in L_{p'}(X)$$

и

$$\int\limits_X |g(x)|^{p'} d\mu = \frac{1}{\|f\|^p_{L_p(X)}} \int\limits_X |f(x)|^p d\mu = 1.$$

Но

$$\int\limits_X g(x)f(x)d\mu = \frac{1}{\|f\|^{p-1}_{L_p(X)}} \int\limits_X |f(x)|^p d\mu = \frac{\|f\|^p_{L_p(X)}}{\|f\|^{p-1}_{L_p(X)}} = \|f\|_{L_p(X)}.$$

Если $f(x)$, то утверждение леммы очевидно. □

Пусть (X, M, μ) – конечное измеримое пространство и $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в $L_2(X)$ такая, что $\exists\ M > 0$ с условием, что $\forall\ n$ и $\forall\ x \in X$

$$|\varphi_n(x)| \leq M.$$

Тогда коэффиценты Фурье

$$c_n(f) = \int\limits_X f(x)\varphi_n(x)d\mu$$

можно определить не только в $L_2(X)$, но и в любом пространстве $L_p(X)$, $1 \leq p < \infty$.

Теорема 10.1. *(Пэли) Пусть (X, M, μ) – конечное измеримое пространство,*

$$\{\varphi_n(x)\}$$

– ортонормированная система в $L_2(X)$ такая, что $\exists\ M > 0$, для которой

$$\forall\ n, \quad \forall\ x\ \in X\ \ |\varphi_n(x)| \leq M.$$

Тогда

1. *Если* $1 < p \leq 2$ *и* $f(x) \in L_p(X)$, *то*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^p \, n^{p-2}\right)^{1/p} \leq C(p) M^{\frac{2-p}{p}} \|f\|_{L_p(X)};$$

2. *Если* $2 \leq p < \infty$ *и последовательность* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такова, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p n^{p-2} < \infty,$$

то $\exists\ f(x) \in L_p(X)$ *такая, что*

1) $\forall\ n$

$$c_n(f) = c_n;$$

2) $\sum\limits_{n=1}^{N} c_n \varphi_n(x) \overset{L_p(X)}{\to} f(x)$;

3) Выполнено

$$\|f\|_{L_p(X)} \leq C(p') M^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p n^{p-2}\right)^{1/p},$$

где $p' = \frac{p}{p-1}$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 11. Доказательство теоремы Пэли. Формулировка теоремы Рисса. Построение полиномов Рудина-Шапиро

Теорема Пэли (доказательство)

Доказательство. (Доказательство теоремы 10.1 Пэли)

1. Рассмотрим два измеримых пространства: (X, M, μ) из условия и (N, Σ, μ). Здесь N – натуральные числа, Σ – все подмножества N,

$$\nu(\{n\}) = \frac{1}{n^2}.$$

Тогда $(\mathbb{N}, \Sigma, \mu)$ – конечное измеримое пространство.

Пусть оператор

$$A: \ L(X) \ \to \ N,$$
$$Af = (c_1(f), \, 2c_2(f), \, \ldots).$$

Тогда, с одной стороны, если $f \in L_2(X)$,

$$\|Af\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |nc_n(f)|^2 \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = \left(\sum n = 1^{\infty} |c_n(f)|^2\right)^{1/2} \underbrace{\leq}_{\text{Нер-во Бесселя}},$$

откуда получаем, что A имеет слабый типа $(2, 2)$ со слабой нормой ≤ 1.

Проверим, что A имеет и слабый тип $(1, 1)$, то есть для некоторого B

$$\mu\{n: \ |nc_n(f)| > \lambda\} \leq \frac{B}{\lambda}\|f\|_{L_1(X)} \ \forall \ \lambda > 0. \tag{38}$$

Имеет место оценка

$$\lambda < n\,|c_n(f)| = n\left|\int\limits_X f(x)\varphi_n(x)d\mu\right| \leq nm\|f\|_{L_1(X)}.$$

Отсюда, считая, что $f \neq 0$ в $L(X)$, получаем, что

$$n \geq \frac{\lambda}{M\|f\|_{L_1(X)}},$$

но

$$\bigcup\{\lambda: \ |c_n(f)|\, n > \lambda\} = \sum_{n:\ |c_n(f)|>\lambda} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n:\ n \geq \frac{\lambda}{M\|f\|_{L_1(X)}}} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2M\|f\|_{L_1(X)}}{\lambda},$$

так как

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k_0}.$$

Получаем, что оценка (38) верна при $B = 2M$.

Пусть теперь $p \in (1, 2)$ и t таково, что

$$\frac{1}{p} = t \cdot 1 + (1-t)\frac{1}{2},$$

то есть

$$t = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right).$$

По теореме Марценкевича, A имеет сильный тип (p, p) и

$$\|A\|_{L_p(X)\to L_p(N)} \le C(p) + (2M)^{2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)} == C'(p)M^{\frac{2-p}{p}},$$

то есть $\forall\ f \in L_p(X)$

$$\|Af\|_{L_p(N)} \le C'(p)M^{\frac{2-p}{p}}\|f\|_{L_p(X)}.$$

С другой стороны,

$$\|Af\|_{L_p(N)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |nc_n(f)|^p \frac{1}{n^2}\right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^p n^{p-2}\right)^{1/p}.$$

2. Перейдем ко второй части доказательства. Пусть задана последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда при некотором N

$$\|P_N(x)\|_{L_p(X)} = \left\|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \varphi_n(x)\right\|_{L_p(X)} \overset{\text{Лемма 10.1}}{=}$$

$$= \sup_{\substack{g\in L_{p'}(X),\, p'=\frac{p}{p-1}\\ \|g\|_{L_{p'}(X)}\le 1}} \left|\int_X P_N(x)g(x)d\mu\right| = \underbrace{\sup_{\|g\|_{L_{p'}(X)} g \in L_{p'}(X)}}\left|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \underbrace{\int_X g(x)\varphi_n(x)d\mu}_{=c_n(g)}\right| \le$$

$$\le \underbrace{\sup_{\|g\|_{L_{p'}(X)} g \in L_{p'}(X)}} \sum_{n=1}^{N} |c_n(g)| n^{\frac{2-p}{p}} |\alpha_n| n^{\frac{p-2}{p}} \le$$

$$\le \left(\sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^p n^{p-2}\right)^{1/p} \underbrace{\sup_{\|g\|_{L_{p'}(X)} g \in L_{p'}(X)}} \left(\sum_{n=1}^{N} |c_n(g)|^{p'} n^{p-2}\right)^{1/p'} \le$$

$$\le \left(\sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^p n^{p-2}\right)^{1/p} \underbrace{\sup_{\|g\|_{L_{p'}(X)}}}_{g\in L_{p'}(X)} C(p')M^{\frac{2-p'}{p}}\|g\|_{L_{p'}(N)} \le$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\leq C(p')M^{\frac{p-2}{2}}\left(\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|^p n^{p-2}\right)^{1/p}.$$

Отсюда следует, что последовательность

$$\psi_N(x)=\sum_{n=1}^{N}c_n\varphi_n(x)$$

фундаментальная в $L_p(X)$. Пусть

$$f(x)\overset{L_p(X)}{=}\lim_{N\to\infty}\psi_N(x).$$

Тогда $\forall$ фиксированного k, если $N\geq k$, имеем оценку

$$|c_k-c_k(f)|=\left|\int\limits_X\left(\sum_{k=1}^{N}c_k\varphi_k(x)d\mu-\int\limits_X f(x)\varphi_k(x)d\mu\right)\right|=$$

$$=\left|\int\limits_X\varphi_k(x)\left(\sum_{k=1}^{N}c_k\varphi_k(x)-f(x)\right)d\mu\right|\leq\|f-\psi_N\|_{L_p(X)}\left(\int\limits_X|\varphi_N(x)|^{p'}\,d\mu\right)^{1/p'}\leq$$

$$\leq\|f-\psi_N\|_{L_p(X)}M\left(\mu(x)\right)^{1/p'}\ \to\ 0,\quad N\to\infty.$$

так как левая часть оценки выше не зависит от N, получаем, что

$$c_k=c_k(f).$$

3. Наконец, $\forall$ N имеем

$$\|f\|_{L_p(X)}\leq|f-\psi_N\|_{L_p(X)}+\|\psi_N\|_{L_p(X)}\leq$$

$$\leq\underbrace{\|f-\psi_n\|_{L_p(X)}}_{\to 0,\quad N\to\infty}+C(p')M^{\frac{p-2}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^p n^{p-2}\right)^{1/p},$$

откуда получаем 3 свойство из утверждения теоремы.

□

Теорема Рисса (формулировка)

Следующая теорема дается без доказательства.

Теорема 11.1. *(Рисса) Пусть (X,M,μ) – конечное измеримое пространство,*

$$\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

– ортнормированная система в $L_2(X)$ такая, что для некоторого $M>0$

$$|\varphi_n(x)|\leq M\ \forall\ n,\quad\forall\ x\in X.$$

Тогда

1. *Если* $1 < p \leq 2$ *и* $f(x) \in L_p(x)$, *то*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^{p'}\right)^{1/p'} \leq C(p, M) \|f\|_{L_p(X)};$$

2. *Если* $2 \leq p < \infty$ *и последовательность* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такова, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^{p'} < \infty,$$

то $\exists\ f(x) \in L_p(X)$ *такое, что* $\forall\ n$

$$c_n(f) = c_n$$

и

$$\|f\|_{L_p(X)} \leq C(p, M) \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^{p'}\right)^{1/p'}.$$

Заметим, что теорему 11.1 Рисса можно вывести из теоремы 10.1 Пэли, но не наоборот.

Эти теоремы обобщают неравенство Бесселя и теорему 2.4 Риса – Фишера. Покажем, что их утверждения нельзя обобщить далее. Для этого нам понадобятся полиномы Рудина – Шапиро.

Построение полиномов Рудина – Шапиро

Скажем вначале несколько слов о происхождении полиномов Рудина – Шапиро. Рассмотрим полином

$$\sum_{n=0}^{N} e^{int} = P_N(t).$$

В различных пространствах его нормы равны следующим величинам:

$$\|P_N\|_{L_2(T)} = \sqrt{2\pi}\sqrt{N+1},$$

$$\|P_N\|_{C(\overline{T})} = N + 1,$$

$$\|P_N\|_{L_1(T)} \asymp \ln(N+1)$$

и так далее. Заметим, что норма в пространстве $L(T)$ достаточно мала, а затем растет до значения нормы в $C\left(\overline{T}\right)$ (это пространство, можно считать, является предельным).

Рассмотрим теперь полином

$$\sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n e^{int}, \quad \varepsilon_n = \pm 1\ \forall\ n. \tag{39}$$

Норма такого полинома в $L_2(T)$ остается равна $\sqrt{2\pi}\sqrt{N+1}$. Возникает вопрос: можно ли за счет выбора ε_n уменьшить норму полинома в $C\left(\overline{T}\right)$?

Заметим, что, очевидно, $\forall\ f$

$$\|f\|_{L_2(T)} \leq \sqrt{2\pi}\|f\|_{C\left(\overline{T}\right)},$$

поэтому сделать норму полинома (39) лучше по порядку, чем $2\pi\sqrt{N+1}$, никак не получится. Оказывается, что можно построить полином (39) так, чтобы его норма по порядку была в точности $\sqrt{N+1}$.

Теорема 11.2. *(Рудина – Шапиро) $\exists$ последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ такая, что $\forall\ n$*

$$\varepsilon_n = \pm 1$$

и $\forall\ N$

$$\left\|\sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n e^{int}\right\| \leq 5\sqrt{N+1}.$$

Доказательство. Обозначим

$$x = e^{it}$$

и построим индуктивно две последовательности полиномов

$$\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty} \text{ и } \{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$$

такие, что

$$P_0(x) \equiv Q_0(x) \equiv 1,$$

$$\begin{cases} P_k(x) = P_{k-1}(x) + x^{2^{k-1}} Q_{k-1}(x) \\ Q_k(x) = P_{k-1}(x) - x^{2^{k-1}} Q_{k-1}(x) \end{cases} \tag{40}$$

Заметим, что

1. Верно

$$\deg P_k = \deg Q_k = 2^k - 1\ \forall\ k \geq 0. \tag{41}$$

   Проверка осуществляется по индукции. Для $k = 0$ утверждение очевидно. Предположим теперь, что (41) верно для $k-1$. Тогда

$$\deg P_k = 2^{k-1} + \deg Q_{k-1} = 2^{k-1} + 2^{k-1} - 1 = 2^k - 1.$$

   Аналогично для Q_k.

2. $\forall$ фиксированного k при $n \in [0, 2^k - 1]$ коэффицент

$$c_n(P_k) = \pm 1$$

   и коэффицент

$$c_n(Q_k) = \pm 1.$$

   Проведем доказательство по индукции. При $k = 0$ очевидно. Если утверждение верно для $k-1$, то оно верно при $n \in [0, 2^{k-1} - 1]$, а при $n \in [2^{k-1}, 2^k - 1]$

$$c_n(P_k) = c_{n-2^{n-1}}(Q_{k-1}).$$

   Аналогично для Q_k.

3. (Только для P_k) Если $n \leq 2^k - 1$, то

$$c_n(P_k) = c_n(P_{k+1}) = \dots$$

Это утверждение верно в силу определения (40).

В дальнейшем будем полагать

$$\varepsilon_n = c_n(P_k), \quad k = \min\left\{l : \ n \leq 2^l - 1\right\}.$$

4. Рассмотрим при произвольном k

$$|P_k(x)|^2 + |Q_k(x)|^2 = P_k(x)\overline{P_k(x)} + Q_k(x)\overline{Q_k(x)} =$$

$$= P_{k-1}(x)\overline{P_{k-1}(x)} + P_{k-1}(x)x^{2^{k-1}}\overline{Q_{k-1}(x)} + x^{2^{k-1}}Q_{k-1}(x)\overline{P_{k-1}(x)} +$$
$$+ x^{2^{k-1}}Q_{k-1}(x)x^{2^{k-1}}\overline{Q_{k-1}(x)} + P_{k-1}\overline{P_{k-1}(x)} - P_{k-1}(x)x^{2^{k-1}}\overline{Q_{k-1}} =$$
$$= x^{2^{k-1}}Q_{k-1}(x)\overline{P_{k-1}(x)} + x^{2^{k-1}}Q_{k-1}(x)\overline{x^{2^{k-1}}}\overline{Q_{k-1}(x)} =$$
$$= 2P_{k-1}(x)\overline{P_{k-1}(x)} + 2Q_{k-1}(x)\overline{Q_{k-1}(x)} = 2\left(|Q_{k-1}(x)|^2 + |P_{k-1}(x)|^2\right) = \dots =$$
$$= 2^k\left(|P_0(x)|^2 + |Q_0(x)|^2\right) = 2^{k+1}.$$

Проверим по индукции, что если k – натуральное число или $k = 0$ и $N \leq 2^k - 1$, то

$$|S_N(P_k)(x)| \leq \left(2 + \sqrt{2}\right) 2^{k/2}$$

и

$$|S_N(Q_k(x))| \leq (2 + \sqrt{2})2^{k/2}.$$

Заметим, что, если

$$P_k(x) = \sum_{n=1}^{2^k-1} \varepsilon_n x^n,$$

то

$$S_N(P_k)(x) = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x^n.$$

Для $k = 0$ это очевидно. Предположим, что это верно для $k-1$. Тогда возможны 2 случая:

1. Первый случай, когда $N \leq 2^{k-1} - 1$. Тогда

$$S_N(P_k)(x) = S_N(P_{k-1})(x),$$

и по предположению индукции

$$|S_N(P_k)(x)| \leq (2 + \sqrt{2})2^{\frac{k-1}{2}} < (2 + \sqrt{2})2^{k/2}.$$

2. Второй случай: $2^{k-1} \leq N \leq 2^k - 1$. Тогда

$$S_N(P_k)(x) = P_{k-1}(x) + x^{2^{k-1}} S_{N-2^{k-1}}(Q_{k-1})(x).$$

Исходя из свойства 4 (см. выше) и предположения индукции, получим, что

$$|S_N(P_k)(x)| \leq |P_{k-1}(x)| + |S_{N-2^{k-1}}(Q_{k-1})(x)| \leq$$

$$\leq 2^{k/2} + (2+\sqrt{2})2^{\frac{k-1}{2}} = 2^{k/2}\left(1+\sqrt{2}+1\right) = (2+\sqrt{2})2^{k/2}.$$

Аналогично для $S_N(Q_k)$.

Пусть задано некоторое N. Выберем k так, чтобы

$$2^{k-1} \leq N < 2^k.$$

Тогда $\forall\ t$

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n e^{int}\right| = |S_N(P_k)(x)| \leq (2+\sqrt{2})2^{k/2} = (2+\sqrt{2})\sqrt{2}2^{\frac{k-1}{2}} \leq 5\sqrt{N+1}.$$

□

Обсудим следующий парадокс. Пусть

$$R_n(t) = \sum_{n=0}^{N} e^{int}.$$

Как обсуждалось ранее,

$$\|R_N\|_2 \asymp \sqrt{N+1},$$
$$\|R_N\|_{C(T)} \asymp N+1,$$
$$\|R_N\|_{L(T)} \asymp \ln(N+1).$$

Пусть теперь

$$\sigma_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n e^{int},$$

где ε_n – знаки Рудина – Шапиро. Тогда

$$\|\sigma_N\|_2 \asymp \sqrt{N+1},$$

$$\|\sigma_N\|_{C(T)} \asymp \sqrt{N+1}.$$

Однако

$$2\pi(N+1) = \|\sigma_N\|_{L_2}^2 = \int\limits_T |\sigma_N(t)|^2\, dt \leq \|\sigma_N\|_{C(T)}\|\sigma_N\|_{L(T)},$$

откуда

$$\|\sigma_N\|_{L(T)} \geq C\sqrt{N+1},$$

то есть норма полинома Рудина – Шапиро в $L(T)$ ухудшилась.

Лекция 12. Теорема Пэли, неравенство Бернштейна

Невозможность усиления теоремы Пэли для тригонометрических систем

Докажем с помощью полиномов Рудина – Шапиро, что теорему 10.1 Пэли нельзя усилить.

Теорема 12.1. *(Невозможность усиления теоремы Пэли для тригонометрических системы)*

a. $\exists\ f(x) \in C\left(\overline{T}\right)$, $f(x)$ *– четная и такая, что* $\forall\ p \in (2, \infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^p\, n^{p-2} = \infty;$$

b. $\exists$ *последовательность* $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что* $\forall\ p \in (1, 2)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\, n^{p-2} < \infty,$$

но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ *не является рядом Фурье интегрируемой по Лебегу функции.*

Доказательство. a. Пусть $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность знаков Рудина – Шапиро. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k/2} \frac{1}{k^2} \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \varepsilon_n \cos nx.$$

Обозначим

$$P_k(x) = \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \varepsilon_n \cos nx = \sum_{n=0}^{2^k-1} \varepsilon_n \cos nx - \sum_{n=0}^{2^{k-1}-1} \varepsilon_n \cos nx =$$

$$= \operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{2^k-1} \varepsilon_n e^{inx}\right) - \operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{2^{k-1}-1} \varepsilon_n e^{inx}\right).$$

Отсюда по теореме 11.2 $\forall\ k \geq 1$, $\forall\ x$

$$|P_k(x)| \leq 5\sqrt{2^k} + 5\sqrt{2^{k-1}} < 102^{k/2}.$$

Далее, по теореме Вейерштрасса,

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k/2} \frac{1}{k^2} P_k(x) \tag{42}$$

сходится равномерно к некоторой $f(x) \in C\left(\overline{T}\right)$.

Пусть задано некоторое $l \geq 1$. Тогда в силу равномерной сходимости ряда (42) имеем

$$a_l(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_T f(x)\cos lx d\mu = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k/2}\frac{1}{k^2}\int\limits_T P_k(x)\cos lx d\mu = 2^{-k/2}\frac{1}{k^2}\varepsilon_l,$$

если k таково, что $2^{k-1} \leq l \leq 2^k - 1$.

Пусть $p > 2$. Рассмотрим

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^p n^{p-2} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(2^{-k/2}\frac{1}{k^2}\right)^p \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} 1 \cdot n^{p-2} \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kp/2}\frac{1}{k^{2p}}2^{(k-1)(p-2)}2^{k-1} = 2^{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p}}2^{-\frac{kp}{2}+k(p-2)+k} =$$

$$= 2^{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p}}2^{k\left(\frac{p}{2}-1\right)} = \infty.$$

b. Рассмотрим полином

$$P_k(x) = \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \varepsilon_n \cos nx.$$

Имеем

$$\|P_k(x)\|_{C\left(\overline{T}\right)} \leq 10 \cdot 2^{k/2}.$$

С другой стороны,

$$\|P_k(x)\|_{L_2(T)} = \sqrt{\pi}\left(\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} 1\right)^{1/2} = \sqrt{\pi}2^{\frac{k-1}{2}}.$$

Отсюда

$$\pi 2^{k-1} = \int\limits_T |P_k(x)|^2 d\mu \leq \|P_k(x)\|_{C\left(\overline{T}\right)}\int\limits_T |P_k(x)| d\mu =$$

$$= \|P_k(x)\|_{C\left(\overline{T}\right)}\|P_k(x)\|_{L(T)} \leq 102^{k/2}\|P_k(x)\|_{L(T)},$$

то есть

$$\|P_k(x)\|_{L(T)} \geq \frac{\pi}{20}2^{k/2}.$$

Положим

$$a_n = 2^{-k/2}k^2\varepsilon_n,$$

если n и k таковы, что

$$2^{k-1} \leq n \leq 2^k - 1.$$

Здесь ε_n – знак Рудина – Шапиро.

Будем рассматривать ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k/2} k^2 \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k=1} \varepsilon_n \cos nx.$$

Предположим, что $\exists\ g(x) \in L(T)$ такая, что $\forall\ n$

$$a_n(g) = a_n.$$

Тогда

$$S_{2^k-1}(g,x) - S_{2^{k-1}-1}(g,x) = 2^{-k/2} k^2 P_k(x),$$

$$\|S_{2^k-1}(g,x) - S_{2^{k-1}-1}(g,x)\|_{L(T)} \geq \frac{\pi}{20} 2^{k/2} 2^{-k/2} k^2 = \frac{\pi}{20} k^2.$$

С другой стороны,

$$\|S_{2^k-1}(g,x)\|_{L(T)} = \int\limits_T \frac{1}{\pi} \left| \int\limits_T g(x-t) D_{2^k-1}(t) dt \right| dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int\limits_T \int\limits_T |g(x+t)|\, |D_{2^k-1}(t)|\, dt dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_T |D_{2^k-1}(t)| \left(\int\limits_T |g(x+t)|\, dx \right) dt =$$

$$= \frac{\|g\|_{L(T)}}{\pi} \int\limits_T |D_{2^k-1}(t)|\, dt \leq C \|g\|_{L(T)} \ln\big(2(2^k-1)+1\big) \leq C_1 \|g\|_{L(T)} (k+1).$$

Аналогично,

$$\|S_{2^{k-1}-1}(g,x)\|_{L(T)} \leq C_1 \|g\|_{L(T)} (k+1).$$

Получаем, что

$$\|S_{2^k-1}(g,x) - S_{2^{k-1}-1}(g,x)\|_{L(T)} \leq 2C_1 \|g\|_{L(T)} (k+1),$$

то есть приходим к противоречию.

□

Неравенство Бернштейна в $C\left(\overline{T}\right)$

Лемма 12.1. *Пусть $Q(t)$ – тригонометрический многочлен степени не выше n, то есть*

$$Q(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt \right).$$

Тогда он имеет на $T = [-\pi, \pi)$ не более $2n$ корней с учетом кратности.

Доказательство. Воспользуемся формулами

$$\cos kt = \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}, \quad \sin kt = \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2}.$$

Тогда

$$Q(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikt} = e^{-int} \underbrace{\sum_{k=0}^{2n} \beta_k e^{ikt}}_{=Q_1(t)}.$$

t – корень $Q(t) \iff t$ – корень $Q_1(t)$ (с учетом кратности). Но по основной теореме алгебры

$$Q_1(t) = \prod_{j=1}^{2n} \left(e^{ijt} - \gamma_j\right).$$

Любое уравнение вида

$$e^{ijt} = \gamma_j$$

имеет не более одного корня на $[-\pi, \pi)$. □

Лемма 12.2. *Пусть $Q(x)$ – тригонометрический многочлен степени $\leq n$, $Q(x) \not\equiv 0$ и*

$$M = \max_{x \in \overline{T}} |Q(x)| = |Q(x_0)|$$

(для определенности считаем, что $Q(x_0) > 0$).

Тогда при $t \in \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right)$ выполнено неравенство

$$Q(x_0 + t) \geq M \cos nt.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\psi(t) = Q(x_0 + t) - M \cos nt$$

– это тригонометрический многочлен степени $\leq n$. Предположим, что $\exists\, t_0 \in \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right)$ такое, что

$$\psi(t_0) < 0.$$

Для определенности будем считать, что $t_0 > 0$.

Заметим, что в точке 0

$$\psi(0) = 0 \text{ и } \psi'(0) = 0,$$

так как 0 – точка экстремума и для $Q(x_0 + t)$, и для $\cos nt$.

Рассмотрим отрезки

$$\left[t_0, \frac{\pi}{n}\right], \quad \left[\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}\right], \quad \ldots, \quad \left[\frac{\pi(2n-2)}{n}, \frac{\pi(2n-1)}{n}\right] \subset (0, 2\pi). \tag{43}$$

По предположению, $\psi(t_0) < 0$, затем

$$\psi\left(\frac{k\pi}{n}\right) = Q\left(x_0 + \frac{k\pi}{n}\right) - M(-1)^k, \quad 1 \leq k \leq 2n - 1.$$

Заметим, что

$$\psi\left(\frac{k\pi}{n}\right) \geq 0, \text{ для нечетных } k,$$

$$\psi\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq 0, \text{ для четных } k.$$

Получается, что на любой отрезке (43) это есть корень $\psi(t)$. При этом, если корень общий для двух соседних отрезков, например,

$$\psi\left(\frac{k_0\pi}{n}\right) = 0,$$

то

$$\left|Q\left(x_0 + \frac{k_0\pi}{n}\right)\right| = M,$$

то есть

$$x_0 + \frac{k_0\pi}{n}$$

– экстремум для $Q(u)$. Отсюда получаем, что

$$Q'\left(x_0 + \frac{k_0\pi}{n}\right) = 0,$$

а так как

$$(\cos nx)'\Big|_{x-\frac{k_0\pi}{n}} = 0,$$

то $k_0\pi/n$ – кратный корень для $\psi(t)$.

С учетом кратности $\psi(t)$ имеет $2n - 1 + 2 = 2n + 1$ корней на $[0, 2\pi)$, откуда по лемме 12.1 получаем, что

$$\psi(t) \equiv 0,$$

откуда следует, что

$$Q(x_0 + t) = M \cos nt.$$

□

Теорема 12.2. *(Неравенство Бернштейна в $C\left(\overline{T}\right)$) Пусть $Q(x)$ – тригонометрический полином степени $\leq n$. Тогда*

$$\|Q'(t)\|_{C\left(\overline{T}\right)} \leq n \|Q(t)\|_{C\left(\overline{T}\right)}.$$

Доказательство. Считаем, что

$$Q(t) \not\equiv 0.$$

Пусть

$$\mu = \|Q'(T)\|_{C\left(\overline{T}\right)} = |Q'(x_0)|.$$

Для определенности считаем, что

$$Q'(x_0) = \mu \ (> 0).$$

Рассмотрим

$$Q\left(x_0+\frac{\pi}{2n}\right)-Q\left(x_0-\frac{\pi}{2n}\right)=\int\limits_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}}Q'(x_0+t)dt\overset{\text{Лемма 12.2}}{\geq}\int\limits_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}}\mu\cos ntdt=$$

$$=\frac{\mu}{n}\sin nt\Big|_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}}=\frac{2\mu}{n}.$$

Итак, получаем, что

$$\frac{2\mu}{n}\leq 2\|Q\|_{C(\overline{T})},$$

откуда

$$\mu\leq n\|Q(x)\|_{C(\overline{T})}.$$

□

Замечание 12.1. Если

$$Q(t)=\sin nt,$$

то

$$\|Q(t)\|_{C(\overline{T})}=1,$$

а

$$\|Q'(t)\|_{C(\overline{T})}=n,$$

причем константа n не может быть улучшена.

Замечание 12.2. Пусть

$$Q(t)=\sin nt$$

и $I=\left[0,\frac{1}{n^2}\right]$. Тогда

$$\|Q(t)|_{C(I)}=\sin n\frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{n}.$$

С другой стороны,

$$Q'(t)=n\cos nt$$

и

$$\|Q'(t)\|_{C(I)}=n\cos 0=n.$$

Абсолютная сходимость рядов Фурье

Теорема 12.3. *(Лоренца) Пусть* $p\in\left(\frac{2}{3},2\right]$,

$$1\geq\alpha>\frac{1}{p}-\frac{1}{2},$$

а 2π*-периодическая* $f(x)\in Lip(\alpha)$.

Тогда $\forall\ n$ *имеем*

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(|a_k(f)|^p+|b_k(f)|^p\right)\right)^{1/p}=\frac{C}{n^{\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}.$$

Доказательство будет приведено на следующей лекции.

Лекция 13. Абсолютная сходимость рядов Фурье

Теорема Лоренца

Теорема 12.1. *(Лоренца) Пусть* $p \in \left(\frac{2}{3}, 2\right]$,

$$1 \geq \alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{2},$$

а 2π*-периодическая* $f(x) \in Lip(\alpha)$.

Тогда $\forall\ n$ *имеем*

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(|a_k(f)|^p + |b_k(f)|^p\right)\right)^{1/p} = \frac{C}{n^{\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}.$$

Доказательство. Рассмотрим при фиксированом $t > 0$ функцию

$$g_t(x) = g(x) = f(x+t) - f(x-t)$$

– это 2π-периодическая функция.

При доказательстве теоремы 7.2 Плеснера – Ульянова было установлено, что

$$a_0(g) = 0, \quad a_n(g) = 2b_n(f)\sin nt, \quad n > 0,$$

$$b_n(g) = -2a_n(f)\sin nt, \quad n > 0.$$

Тогда $\forall\ n$

$$\|g(x)\|_{L_2(T)} = \sqrt{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n(g)|^2 + |b_n(g)|^2\right)\right)^{1/2} =$$

$$= 2\sqrt{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right)(\sin nt)^2\right)^{1/2}.$$

С другой стороны,

$$\|g(x)\|_{L_2(T)} = \left(\int\limits_T |f(x+t) - f(x-t)|^2\,dx\right)^{1/2} \leq Ct^{\alpha},$$

где $C > 0$ не зависит от n.

Для фиксированного натурального k положим $t = \frac{\pi}{4k}$. Тогда

$$C\left(\frac{\pi}{4k}\right)^{\alpha} \geq \|g_t(x)\|_{L_2(T)} \geq 2\sqrt{\pi}\left(\sum_{n=k}^{2k}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right)\left(\sin n\frac{\pi}{4k}\right)^2\right)^{1/2} \geq$$

$$\geq \sqrt{2\pi}\left(\sum_{n=k}^{2k}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right)\right)^{1/2},$$

откуда получаем, что $\forall\ k$

$$\left(\sum_{n=k}^{2k}\left(|a_n(f)|^2+|b_n(f)|^2\right)\right)^{1/2}\leq\frac{C}{k^\alpha}.$$

Отсюда $\forall\ n$

$$\sum_{l=n}^{\infty}\left(|a_k(f)|^p+|b_k(f)|^p\right)\leq\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{l=n2^r}^{n2^{r+1}}\left(|a_l(f)|^p+|b_l(f)|^p\right). \tag{44}$$

Применим к (44) неравенство Гельдера для $2/p\geq 1$. Получим

$$(44)\leq\sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{l=n2^r}^{n2^{r+1}}\left(|a_l(f)|^p+|b_l(f)|^p\right)^{2/p}\right)^{p/2}\left(\sum_{l=n2^r}^{n2^{r+1}}1\right)^{\frac{2-p}{2}}. \tag{45}$$

Заметим, что

$$(|a|+|b|)^\alpha\leq 2^\alpha\left(|a|^\alpha+|b|^\alpha\right),\quad \alpha\geq 1.$$

Тогда

$$(45)\leq C\sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{l=n2^r}^{n2^{r+1}}\left(|a_l(f)|^2+|b_l(f)|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}p}\left(n2^{r+1}\right)^{\frac{2-p}{2}}\leq$$

$$\leq C_1\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n2^r}\right)^{\alpha p}(n2^r)^{1-\frac{p}{2}}=\frac{C_1}{n^{\alpha p-1+\frac{p}{2}}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2^r)^{\alpha p-1+\frac{p}{2}}}=\frac{C_3}{n^{\alpha p-1+\frac{p}{2}}}.$$

Здесь последнее равенство верно в силу того, что

$$\alpha p-1+\frac{p}{2}>0,$$

а значит, ряд $\sum\limits_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2^r)^{\alpha p-1+\frac{p}{2}}}$ сходится.

Наконец,

$$\left(\sum_{l=n}^{\infty}\left(|a_l(f)|^p+|b_l(f)|^p\right)\right)^{1/p}\leq\frac{C_3^{1/p}}{n^{\alpha-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}}.$$

□

Следствие 13.1. (Теорема Бернштейна) Если $\alpha>1/2$ и $f(x)\in\mathrm{Lip}\alpha$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n(f)|+|b_n(f)|\right)<\infty.$$

Покажем неусиляемость теоремы 12.3 Лоуренса.

Теорема 13.1. *Пусть* $p \in (2/3, 2]$,

$$1 > \alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{2}.$$

Тогда $\exists\ f(x) \in Lip\alpha$ *такая, что для некоторого* $C > 0$ *и* $\forall\ n$ *имеем*

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^p + |b_k(f)|^p\right)^{1/p} \geq \frac{C}{n^{\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}.$$

Доказательство. Построим нечетную $f(x)$ с ... свойствами. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}} \varepsilon_n \sin nx,$$

где $\{\varepsilon_n\}$ – знаки Рудина – Шапиро. Если $N > 0$ и

$$P_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \sin nx,$$

то

$$\|P_N\|_{C(\overline{T})} \leq 5\sqrt{N+1}.$$

Для $\forall\ N$ рассмотрим

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\alpha+1/2}} \varepsilon_n \sin nx \overset{\text{Преобр. Абеля}}{=} \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{n^{\alpha+1/2}}\right) P_n(x) + \frac{1}{N^{\alpha+1/2}} P_N(x).$$

Заметим, что $\frac{1}{N^{\alpha+1/2}} P_N(x)$ равномерно стремится к 0 при $N \to \infty$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{\alpha+1/2}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1/2}}\right) P_n(x).$$

Проверим, что он сходится равномерно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^{\alpha+1/2}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1/2}}\right| |P_n(x)| \overset{\text{Т. Лагранжа}}{\leq} C(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1/2}} 5(n+2)^{1/2} \leq$$

$$\leq C_1(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} < \infty.$$

Но тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1/2}} \varepsilon_n \sin nx$ равномерно на $\overline{T}$ сходится к функции $s(x) \in C\left(\overline{T}\right)$ и

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{\alpha+1/2}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1/2}}\right) P_n(x).$$

Тогда

$$b_n(f) = \frac{\varepsilon_n}{n^{\alpha+1/2}} \ \forall\ n \geq 1.$$

Далее, пусть $t \in (0, 1/2)$. Рассмотрим при произвольном $x \in \overline{T}$ разность

$$f(x+t) - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{\alpha+1/2}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1/2}} \right) (P_n(x+t) - P_n(x)) =$$

$$= \sum_{n=1}^{[1/t]} \left(\frac{1}{n^{\alpha+1/2}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1/2}} \right) (P_n(x+t) - P_n(x)) +$$

$$+ \sum_{n=[1/t]+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{\alpha+1/2}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1/2}} \right) (P_n(x+t) - P_n(x)) \equiv S_1 + S_2.$$

Используя теорему Лагранжа, получим

$$|S_2| \leq C(\alpha) \sum_{n=[1/t]+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1/2}} n^{1/2} = C(\alpha) \sum_{n=[1/t]+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \leq$$

$$\leq C(\alpha) \int\limits_{[1/t]}^{\infty} \frac{du}{u^{\alpha+1}} \leq C_1(\alpha) \frac{1}{[1/t]^{\alpha}} \leq \frac{2C_1(\alpha)}{\left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha}} = 2C_1(\alpha) t^{\alpha}.$$

Далее, используя теорему Лагранжа и неравенство Бернштейна, получим

$$|S_1| \leq C(\alpha) \sum_{n=1}^{[1/t]} \frac{1}{n^{\alpha+1/2}} t \|P_n\|_{C(\overline{T})} \leq$$

$$\leq C(\alpha) t \sum_{n=1}^{[1/t]} \frac{1}{n^{\alpha+1/2}} \|P_n\|_{C(\overline{T})} \leq C_1(\alpha) t \sum_{n=1}^{[1/t]} \frac{1}{n^{\alpha}} \leq$$

$$\leq C_1(\alpha) t \int\limits_{0}^{[1/t]} \frac{du}{u^{\alpha}} = C_2(\alpha) t \left(\frac{1}{t}\right)^{1-\alpha} \leq C_2(\alpha) t^{\alpha}.$$

Таким образом, $f(x) \in \mathrm{Lip}\alpha$.
$\forall$ натурального $n \geq 1$ имеем

$$\sum_{k=n}^{\infty} |b_k(f)|^p = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^(\alpha+1/2)p} \geq \int\limits_{n}^{\infty} \frac{du}{u^{\alpha+1/2)p}} = C(\alpha, p) \frac{1}{n^{(\alpha+1/2)(p-1)}}.$$

Возводя левую и правую части неравенства выше в степень $1/p$, получаем

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} |b_n(f)|^p \right)^{1/p} \geq C_1(\alpha, p) \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}.$$

$\square$

Замечание 13.1. Заметим, что для $\alpha = 1/2$ можно записать просто

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} \sin nx$$

– это ряд Фурье функции из Lip1/2, но он абсолютно не сходится.

Тригонометрические ряды с монотонными коэффицентами

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числовая последовательность. Обозначим $\forall\ n$

$$\Delta a_n = a_n - a_{n-1}, \quad \Delta^2 a_n = (\Delta a_n) - (\Delta a_{n+1}) = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}.$$

Определение 13.1. Последовательность a_n называется *монотонной*, если все

$$\Delta a_n \geq 0.$$

Если же все

$$\Delta^2 a_n \geq 0,$$

то будем называть эту последовательность *выпуклой.*

Утверждение 13.1. *Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ выпукла и $a_n \to 0$, $n \to \infty$, то $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна.*

Доказательство. Для произвольного $n \geq 1$ и для $k > n$ рассмотрим

$$0 \leq \sum_{r=n}^{k} \Delta^2 a_r = (\Delta a_n - \Delta a_{n+1} + \Delta a_{n+1} - \Delta a_{n+2} + \ldots) = \Delta a_n - \underbrace{\Delta a_{k+1}}_{\to 0,\ \ k\to\infty},$$

откуда получаем, что $\Delta a_n \geq 0$. □

Лемма 13.1. *Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Тогда*

$$na_n \ \to\ 0, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Так как ряд сходится, $a_n \to 0$, $n \to \infty$. Отсюда вытекает, что a_n – неотрицательные числа. Рассмотрим $\forall\ n$

$$a_n \frac{n}{2} \leq \sum_{k=[n/2]}^{n} a_k \ \to\ 0, \quad k \to \infty.$$

□

Лемма 13.2. *Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ выпукла и $a_n \to 0$, $n \to \infty$. Тогда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, \Delta^2 a_n = a_0,$$

в частности,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \Delta^2 a_n < \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим при произвольном $N > 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\Delta^2 a_n = \sum_{n=1}^{N}(n+1-n)\sum_{r=n}^{N}\Delta^2 a_r + 1\cdot\sum_{r=0}^{N}\Delta^2 a_r = \sum_{n=0}^{N}\sum_{r=n}^{N}\Delta^2 a_r =$$

$$= \sum_{n=0}^{N}(\Delta a_n - \Delta a_{N+1}) = \sum_{n=0}^{N}\Delta a_n - (N+1)\Delta a_{N+1} =$$

$$= a_0 - \underbrace{a_{N+1}}_{\to 0} - (N+1)\underbrace{\Delta a_{N+1}}_{\to 0} \to a_0, \quad N\to\infty$$

по лемме 13.1, так как $\Delta^2 a_n \geq 0$, а значит, последовательность $\{\Delta a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна,

$$\sum_{N=0}^{\infty}\Delta a_N = a_0.$$

□

Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ – монотонная последовательность,

$$a_n \to 0, \quad n\to\infty.$$

Мы будем рассматривать ряды

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{46}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx. \tag{47}$$

Теорема 13.2. *Ряд (46) сходится*

$$\forall\, x \neq 0 \pmod{2\pi},$$

а ряд (47) сходится всюду. При этом суммы рядов (46) и (47) непрерывны на $(0, 2\pi)$.

Лекция 14. Тригонометрические ряды с монотонными коэффициентами. Часть 1

Тригонометрические ряды с монотонными коэффициентами

Напомним, в прошлый раз мы начали обсуждать ряды с монотонноми коэффицентами. Так как речь идет о монотонности, удобно рассматривать отдельно

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{48}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \tag{49}$$

$a_n \downarrow 0$, $n \to \infty$. Напомним обозначение

$$\Delta a_n = a_n - a_{n+1}, \quad n \geq 0,$$

$$\Delta^2 a_n = \Delta a_n + \Delta a_{n+1} = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}.$$

Напомним, монотонность $\iff$

$$\Delta a_n \geq 0 \ \forall \ n;$$

выпуклость $\iff$

$$\Delta^2 a_n \geq 0 \ \forall \ n.$$

Выпуклость и стремление

$$a_n \ \to \ 0, \quad n \to \infty,$$

в совокупности дает монотонность.

Докажем теорему, сформулированную в конце прошлой лекции.

Теорема 13.2. *Если $a_n \downarrow 0$, $n \to \infty$, то ряд (48) сходится*

$$\forall \ x \neq 0 \pmod{2\pi},$$

а ряд (49) сходится $\forall \ x$. Кроме того, $\forall \ \varepsilon \in (0,1)$ сходится равномерно на $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, а потому суммы рядов (48) и (49) непрерывны на этом отрезке.

Доказательство. Проведем доказательство для ряда (48). Пусть $1 \leq N < M$. Рассмотрим при $x \neq 0 \pmod{2\pi}$

$$\sum_{n=N}^{M} a_n \cos nx = \sum_{n=N}^{M-1} \Delta a_n \left(\cos N + \ldots + \cos nx\right) + a_M \left(\cos Nx + \ldots + \cos Mx\right) =$$

$$= \sum_{n=N}^{M-1} \Delta a_n \left(D_n(x) - D_{M-1}(x)\right) + a_m \left(D_M(x) - D_{N-1}(x)\right).$$

Как известно,

$$D_n(x) = \frac{\sin(n + 1/2)x}{2 \sin \frac{x}{2}},$$

откуда при $x \in (0, \pi]$ имеем

$$|D_n(x)| \leq \frac{1}{2\frac{2}{\pi}\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2x}.$$

Тогда

$$\left|\sum_{n=N}^{M} a_n \cos nx\right| \leq \frac{\pi}{x}\left(\sum_{n=N}^{M-1} \Delta a_n + a_M\right) = \frac{\pi a_N}{x}.$$

Применяя критерий Коши, получим, что ряд (48) сходится при $x \neq 0 \pmod{2\pi}$ и его сумма непрерывна на $[\varepsilon, \pi]$ $\forall\, \varepsilon \in (0, 1)$. Отсюда получаем, что его сумма непрерывна на $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$.

Для ряда (49) аналогично с учетом того, что

$$\widetilde{D_n}(x) = \sin x + \ldots + \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n + 1/2)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

□

Замечание 14.1. В дальнейшем будем обозначать через $f(x)$ сумму ряда (48) при $x \neq 0 \pmod{2\pi}$, а через $g(x)$ – сумму ряда (49).

Теорема о дифференцируемости внутри отрезка суммы тригонометрического ряда с выпуклыми коэффициентами

Теорема 14.1. *Пусть*

$$\Delta^2 a_n \geq 0 \;\forall\; n$$

и

$$a_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Тогда $f(x) \in C^1\left((0, 2\pi)\right)$.

Доказательство. Из доказательства теоремы 13.2 видно, что

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \Delta a_n D_n(x) + A_N D_N(x),$$

откуда следует, что при $x \neq 0 \pmod{2\pi}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n D_n(x). \tag{50}$$

Рассмотрим при $n \geq 0$

$$D_0(x) + \ldots + D_n(x) = \frac{\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{3}{2}x + \ldots + \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \in \frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1 - \cos x + \cos x - \cos 2x + \ldots + \cos nx - \cos(n+1)x}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1 - \cos(n+1)x}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}x}{2\sin^2\frac{x}{2}} \geq 0.$$

Тогда

$$(50) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\Delta a_n D_n(x) = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N-1}\Delta^2 a_n F_n(x) + \Delta a_N F_N(x)\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\Delta^2 a_n F_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\Delta^2 a_n F_n(x). \tag{51}$$

С учетом того, что $\forall\ x \in (0, \pi]$

$$0 = F_n(x) = \frac{2}{\left(2\frac{2}{\pi}\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\pi^2}{2x^2}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^2 a_n = \Delta a_0 = a_0 - a_1,$$

получаем, что ряд (51) сходится $\forall\ x \neq 0 \pmod{2\pi}$.

Заметим, что если $x \in (0, 2\pi)$, то существование $f(x)$ равносильно существованию

$$\left(f(x)\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2\right)'.$$

Но, если мы формально продифференцируем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^2 a_n\left(1 - \cos(n+1)x\right),$$

то получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\Delta^2 a_n \sin(n+1)x.$$

По лемме 13.2,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\Delta^2 a_n$$

сходится, откуда по теореме Вейерштрасса получаем, что $f(x)\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2$ непрерывно дифференцируема на $(0, 2\pi)$. $\square$

Теорема 14.2. *$\exists$ последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ такая, что*

$$a_n \downarrow 0, \quad n \to \infty,$$

но $f(x)$ не дифференцируема ни в одной точке $(0, 2\pi)$.

Доказательство. Определим числа

$$b_r = \begin{cases} 10^{-n}, & r = 100^n - 1, \quad n = 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

и пусть

$$a_k = \sum_{r=k}^{\infty} b_r.$$

Очевидно, что a_K существуют,

$$a_k \to 0, \quad k \to \infty,$$

и

$$\Delta a_k = b_k \ \forall \ k \geq 0.$$

Тогда, как следует из доказательства теоремы 13.2,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx = \sum_{r=0}^{\infty} b_r D_r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} \frac{\sin\left(100^n - \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Определим функцию

$$\varphi(x) = f(x) 2 \sin \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} \sin\left(100^n - \frac{1}{2}\right) x.$$

Заметим, что если $x \in (0, 2\pi)$, то $\exists \ f'(x) \iff \exists \ \varphi'(x)$.

Пусть $x_0 \in (0, \pi]$. Тогда $\forall$ фиксированного $n \geq 1$ $\exists$

$$h_n \in \left[-\frac{\pi}{100^n - \frac{1}{2}}, \frac{\pi}{100^n - \frac{1}{2}}\right]$$

такое, что

$$\left|\sin\left(100^n - \frac{1}{2}\right)(x_0 + h_n) - \sin\left(100^n - \frac{1}{2}\right) x_0\right| \geq 1.$$

Откуда имеем

$$|\varphi(x_0 + h_n) - \varphi(x_0)| \geq 10^{-n} \left|\sin\left(100^n - \frac{1}{2}\right)(x_0 + h_n) - \sin\left(100^n - \frac{1}{2}\right) x_0\right| -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} 10^{-k} \left|\sin\left(100^k - \frac{1}{2}\right)(x_0 + h_n) - \sin\left(100^k - \frac{1}{2}\right) x_0\right| -$$

$$- \sum_{k=n+1}^{\infty} 10^{-k} \left|\sin\left(100^k - \frac{1}{2}\right)(x_0 + h_n) - \sin\left(100^k - \frac{1}{2}\right) x_0\right| = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3.$$

По выбору h_n получаем, что

$$\sigma_1 \geq 10^{-n}.$$

Затем,

$$\sigma_3 \le 2\sum_{k=n+1}^{\infty} 10^{-k} = 2\frac{10^{-n-1}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{20}{9}10^{-n-1} = \frac{2}{9}10^{-n}.$$

По теореме Лагранжа,

$$\sigma_2 \le |h_n|\sum_{k=1}^{n-1} 10^{-k}\left(100^k - \frac{1}{2}\right) \le |h_n|\sum_{k=1}^{n-1} 10^k \le 10^{n-1}|h_n|\left(1+\frac{1}{10}+\ldots\right) =$$

$$= 10^n\frac{1}{9}|h_n| \le \frac{\pi}{9}10^n\frac{1}{100^n-\frac{1}{2}} \le 10^{-n}\frac{\pi}{9}\frac{100}{99} < \frac{1}{2}10^{-n}.$$

Тогда

$$|\varphi(x_0+h_n)-\varphi(x_0)| \ge \frac{1}{9}10^{-n}.$$

Отсюда

$$\frac{|\varphi(x_0+h_n)-\varphi(x_0)|}{|h_n|} \ge \frac{1}{9\pi}\frac{100^n-\frac{1}{2}}{10^n} \to \infty, \quad n\to\infty.$$

Итак, получаем, что φ не дифференцируема в точке x_0. □

Тригонометрические ряды с монотонными коэффициентами из пространств L_p, $1 < p < \infty$

Пусть $a_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$. Введем функцию

$$s(x) = \sum_{n=0}^{[\pi/x]} a_n, \quad x \in (0,\pi]$$

– она постоянна на промежутке $\left(\frac{\pi}{n+1}, \frac{\pi}{n}\right]$.

Лемма 14.1. *Пусть $1 < p < \infty$, последовательность*

$$a_n \downarrow 0, \quad n\to\infty,$$

и

$$J_p(a) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-2}a_n^p < \infty.$$

Тогда $s(x) \in L_p([0,\pi])$ и

$$\|s(x)\| \le C(p)\left(J_p(a)\right)^{1/p}.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\int\limits_{[0,\pi]}(s(x))^p\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}(s(x))^p\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\right)^p\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}dx \le$$

$$\leq 2\pi \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{-2}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k(k+1)^{1-\gamma}(k+1)^{-1+\gamma}\right)^p \leq$$

$$\leq 2\pi \sum_{n=1}^{\infty}(k+1)^{-2}\sum_{k=0}^{n} a_k^p(k+1)^{p-\gamma p}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\frac{-p+\gamma p}{p-1}}\right)^{p-1}. \tag{52}$$

Здесь полагаем

$$\gamma \in \left(\frac{1}{p}, \frac{2}{p}\right),$$

например, можно взять

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{2}{p}\right) = \frac{3}{2p},$$

последний переход верен в силу неравенства Гельдера с p и $p' = \frac{p}{p-1}$ соответственно. Заметим, что

$$\frac{-p+\gamma p}{p-1} > -1.$$

Тогда

$$(52) \leq 2\pi \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{-2}\sum_{k=0}^{n} a_k^p(k+1)^{p-\gamma p}C_1(p)\left((n+1)^{\frac{-p+\gamma p+p-1}{p-1}}\right)^{p-1} =$$

$$= C_2(p)\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{-2}\sum_{k=0}^{n} a_k^p(k+1)^{p-\gamma_p}(n+1)^{\gamma p-1} =$$

$$= C_2(p)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k^p(k+1)^{p-\gamma p}\right)(n+1)^{\gamma p-3} =$$

$$= C_2(p)\left(a_0^p\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{\gamma p-3} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^p(k+1)^{p-\gamma p}\sum_{n=k}^{\infty}(n+1)^{\gamma p-3}\right) \leq$$

$$\leq C_3(p)\left(a_0^p + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^p(k+1)^{p-\gamma p}(k+1)^{\gamma p-2}\right) \leq C_4(p)\sum_{k=0}^{\infty} a_k^p(k+1)^{p-2}.$$

□

Лекция 15. Тригонометрические ряды с монотонными коэффициентами. Часть 2

Теорема Харди – Литтльвуда для тригонометрических рядов с монотонными коэффициентамиа

Лемма 15.1. *Пусть* $a_n \downarrow 0$, $n \to \infty$. *Тогда* $\forall\ N$ *и* $\forall\ x \in (0, \pi]$

$$|S_N(x)| \equiv \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx \right| \leq 2s(x).$$

Доказательство. Возможны два случая:

1. $N \leq \left[\frac{\pi}{x}\right]$. Тогда
$$|S_N(x)| \leq \sum_{k=0}^{N} a_k \leq s(x).$$

2. $N > \left[\frac{\pi}{x}\right]$. Тогда
$$|S_N(x)| \leq \left|S_{[\pi/x]}(x)\right| + \left| \sum_{k=[\pi/x]+1}^{N} a_k \cos kx \right| \leq$$
$$\leq s(x) + \left| \sum_{k=[\pi/x]+1}^{N-1} \Delta a_k \left(D_k(x) - D_{[\pi/x]}(x)\right) + a_N \left(D_n(x) - D_{[\pi/x]}(x)\right) \right|. \qquad (53)$$

Оценим
$$|D_n(x)| \leq \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \leq \frac{1}{2\frac{2}{\pi}\frac{x}{2}} = \frac{\pi}{2x}.$$

Тогда
$$(53) \leq s(x) + \sum_{k=[\pi/x]+1}^{N-1} \Delta a_k \frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x} a_N = s(x) + a_{[\pi/x]+1}\frac{\pi}{x} \leq 2s(x).$$

□

Следствие 15.1. $\forall\ x \in (0, \pi]$
$$|f(x)| \leq 2s(x).$$

Теорема 15.1. *(Харди – Литтльвуд) Пусть* $1 < p < \infty$,
$$a_n \downarrow 0, \quad n \to \infty,$$
и
$$J_p(a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{p-2} a_n^p < \infty.$$

Тогда $f(x) \in L_p([0,\pi])$, *ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{54}$$

является ее рядом Фурье и

$$|f|_{L_p([0,p])} \leq C(p)\left(J_p(a)\right)^{1/p}.$$

Доказательство. По следствию 15.1,

$$\|f\|_{L_p([0,p])} \leq C\,\|s\|_{L_p([0,p])} \leq C(p)\left(J_p(a)\right)^{1/p}.$$

Отсюда вытекает, что $f(x) \in L_p([0,\pi])$ и оценка для нормы, то есть два из трех утверждений теоремы.

Имеем $\forall\ N$

$$|f(x) - S_N(x)|^p \leq 2^p\left(|f(x)|^p + |S_N(x)|^p\right) \leq 2^p\left(2^p\,|s(x)|^p + 2^p\,|s(x)|^p\right) \leq$$

$$\leq 2^{2p-1}\,|s(x)|^p \in L([0,\pi]).$$

$$|f(x) - S_N(x)|^p \ \to\ 0, \quad n \to \infty\ \forall\ x \in (0,\pi].$$

Отсюда

$$\int\limits_{[0,\pi]} |S_N'(x) - f(x)|^p\,dx \to 0, \quad N \to \infty,$$

то есть

$$S_N(x) \overset{L_p([0,\pi])}{\to} f(x).$$

Итак, показали, что (54) – ряд Фурье для $f(x)$. □

Лемма 15.2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $f(x) \in L_p([0,\pi])$ *и*

$$\phi(x) = \int\limits_0^x |f(t)|\,dt.$$

Тогда $\frac{phi(x)}{x} \in L_p([0,\pi])$ *и*

$$\left\|\frac{\phi(x)}{x}\right\|_{L_p([0,\pi])} \leq C(p)\,\|f(x)\|_{L_p([0,\pi])}.$$

Доказательство. Будем считать, что $f \neq 0$ в L_p, то есть

$$\int\limits_{[0,\pi]} |f(x)|\,dx > 0.$$

Рассмотрим для $\varepsilon \in (0,1)$ величину

$$I_\varepsilon = \int\limits_{[\varepsilon,\pi]} \frac{(\phi(x))^p}{x^p}dx = \frac{1}{1-p}\int\limits_{[\varepsilon,\pi]} (\phi(x))^p\,dx^{1-p} =$$

$$= \frac{1}{1-p}\left(\phi(x)\right)^p x^{1-p}\Big|_{\varepsilon}^{\pi} + \frac{1}{1-p}\int\limits_{[\varepsilon,\pi]} x^{1-p}\left(\left(\phi(x)\right)^p\right)' dx =$$

$$= \frac{1}{p-1}\left(\phi(\varepsilon)\right)^p \varepsilon^{1-p} - \frac{1}{p-1}\left(\phi(\pi)\right)^p \pi^{1-p} + \frac{p}{p-1}\int\limits_{[\varepsilon,\pi]} \frac{1}{x^{p-1}}\left(\phi(x)\right)^{p-1}|f(x)|\,dx. \quad (55)$$

Заметим, что

$$\left(\phi(\varepsilon)\right)^p = \left(\int\limits_0^{\varepsilon}|f(t)|\,dt\right)^p \le \int\limits_0^{\varepsilon}|f(t)|^p\,dt\varepsilon^{p-1} = \overline{\overline{o}}(1)\varepsilon^{p-1}, \quad \varepsilon \to +0.$$

Тогда

$$(55) \le \overline{\overline{o}}\varepsilon^{p-1}\varepsilon^{1-p} + \frac{p}{p-1}\int\limits_{[\varepsilon,\pi]}\left(\frac{\phi(x)}{x}\right)^{p-1}|f(x)|\,dx \le$$

$$\le \overline{\overline{o}}(1) + \frac{p}{p-1}\|f\|_{L_p([0,\pi])}\left(\int\limits_{[\varepsilon,\pi]}\left(\frac{\phi(x)}{x}\right)^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} =$$

$$= \overline{\overline{o}}(1) + \frac{p}{p-1}\|f\|_{L_p([0,\pi])} < I_{\varepsilon}^{1-\frac{1}{p}}, \quad \varepsilon \to +0.$$

Так как $f \ne 0$, $\exists\ \varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$I_{\varepsilon_0} > 0,$$

а при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$_{\varepsilon} \ge I_{\varepsilon_0}.$$

Отсюда для достаточно малых ε получим, что

$$I_{\varepsilon}^{1/p} \le \overline{\overline{o}}(1) + \frac{p}{p-1}\|f\|_{L_p([0,\pi])}.$$

Устремляя в выражении выше $\varepsilon \to +0$, получим утверждение леммы. □

Лемма 15.3. *Пусть $a_n \downarrow 0$, $1 < p < \infty$, $f(x) \in L_p([0,\pi])$ и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \quad (56)$$

является рядом Фурье для $f(x)$.

Тогда, если $k \ge 1$, то

$$a_k \le 2\phi\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

(для синус-ряда ситуация аналогичная).

Доказательство. Как мы знаем, ряды Фурье можно интегрировать почленно. Поэтому, если

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt,$$

то

$$F(x) \sim c_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cos kx}{k}.$$

При этом $F(0) = 0$. Учитывая, что ϕ – абсолютно непрерывная функция, получаем, что ряд Фурье сходится в $\forall$ точке. Отсюда

$$c_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = 0,$$

то есть

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k\,(1 - \cos kx)}{k}.$$

Отсюда $\forall\ n$ получаем, что

$$F\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq \sum_{k=[n/2]+1}^{n} \frac{a_k}{k}\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n}\right) \geq \sum_{k=[n/2]+1}^{n} \frac{a_k}{k} \geq \frac{a_n}{n}\frac{n}{2} = a_n\frac{1}{2},$$

откуда

$$a_n \leq 2F\left(\frac{\pi}{n}\right) \leq 2\phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

□

Теорема 15.2. *(Харди – Литтльвуд) Пусть $1 < p < \infty$, $f(x) \in L_p([0,\pi])$ и (59) – ее ряд Фурье.*

Тогда

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2}\right)^{1/p} \leq C(p)\|f\|_{L_p([0,\pi])}$$

(для косинус-ряда аналогично).

Доказательство. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2} \leq 2^p \sum_{n=1}^{\infty}\left(\phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^p n^{p-2} \leq 2^p\left((\phi(\pi))^p + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\phi\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^p (n+1)^{p-2}\right). \tag{57}$$

Рассмотрим при $n \geq 1$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} \left(\frac{\phi(x)}{x}\right)^p dx \geq \left(\phi\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^p \left(\frac{\pi}{n+1}\right)^{-p} \frac{\pi}{n(n+1)} =$$

$$= \pi^{1-p}\left(\phi\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^p (n+1)^{p-1}\frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n} \geq \pi^{1-p}\left(\phi\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^p (n+1)^{p-2}.$$

Тогда

$$(57) \leq 2^p\left((\phi(\pi))^p + \sum_{n=1}^{\infty}\pi^{p-1}\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}\left(\frac{\phi(x)}{x}\right)^p dx\right) \overset{\text{Лемма 15.2}}{\leq}$$

$$\leq C_1(p)\|f\|^p_{L_p([0,\pi])} + 2^p\left(\int\limits_0^{\pi}|f(t)|\,dt\right)^p \leq C_2(p)\|f\|^p_{L_p([0,\pi])}.$$

□

Ряды Фурье с монотонными коэффициентами и классы Lipα, $0 < \alpha < 1$

Определение 15.1. 2π-периодическая $f(x) \in \mathrm{Lip}\alpha \iff \exists\, C > 0$ такое, что $\forall\, x, y$

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha.$$

Пусть, как и ранее, даны ряды

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{58}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx. \tag{59}$$

Напомним, ранее было доказано, что если $0 < \alpha < 1$ и

$$|a_n| \leq \frac{C}{n^{1+\alpha}}\ \forall\, n,$$

то ряды (58), (59) равномерно сходятся к $f(x)$, $g(x) \in \mathrm{Lip}\alpha$.

Теорема 15.3. *(Лоренца) Если $a_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$, $0 < \alpha < 1$ и ряд (58) является рядом Фурье функции $f(x) \in Lip\alpha$, то $\exists\, C > 0$ такое, что $\forall\, n$*

$$a_n \leq \frac{C}{n^{1+\alpha}}$$

(для ряда (59) аналогично).

Доказательство. По признаку Дини – Липшица ряд (58) равномерно сходится к $f(x)$. Рассмотрим для произвольного $n \geq 1$

$$C_1\left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha \geq f(0) - f\left(\frac{\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n}\right) \geq$$

$$\geq \sum_{k=[n/2]+1}^{n} a_k \left(1 - \cos\frac{k\pi}{n}\right) \geq \sum_{k=[n/2]+1}^{n} a_k \geq a_n \frac{n}{2},$$

откуда получаем, что

$$a_n \leq 2C_1\pi^\alpha \frac{1}{n^{\alpha+1}}.$$

□

Заметим, что если бы мы рассматривали $f \in C([0, 2\pi])$, то полученная оценка имела бы вид

$$a_n \leq C\frac{1}{n}\omega_C\left(f, \frac{\pi}{n}\right).$$

Асимптотика вблизи нуля сумм рядов с монотонными коэффициентами

Пусть $a_n \downarrow 0$, $n \to \infty$, и даны ряды

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{60}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx. \tag{61}$$

Рассмотрим сначала ряд (61). По коэффицентам ряда (61) хотим построить функцию $\alpha(x)$ такую, что

$$C_1\alpha(x) \leq |g(x)| \leq C_2\alpha(x), \quad x \in (-\delta, \delta), \quad C_1, C_2 > 0.$$

Теорема 15.4. *Пусть $a_n \downarrow 0$, $n \to \infty$, и*

$$\alpha(x) = x\sum_{k=1}^{[\pi/x]} ka_k.$$

Тогда[12] $\forall\ x \in (0, \pi]$

$$|g(x)| \leq 7\alpha(x).$$

Доказательство. Пусть $x \in (0, \pi]$ и $N \geq 1$. Тогда возможны два случая:

1. $N \leq \left[\frac{\pi}{x}\right]$. Тогда

$$|S_N(x)| \leq \sum_{k=1}^{N} a_k |\sin kx| \leq x\sum_{k=1}^{[\pi/x]} ka_k = \alpha(x).$$

[12]Заметим, что на самом деле справедлива оценка с 5 вместо 7 в правой части неравенства. Поскольку в доказательстве мы немного загрубим оценку, нам удобнее оценивать для $7\alpha(x)$.

2. $N > \left[\frac{\pi}{x}\right]$. Тогда

$$|S_N(x)| \leq \left|\sum_{k=1}^{[\pi/x]} a_k \sin kx\right| + \left|\sum_{k=[\pi/x]+1}^{N} a_k \sin kx\right| \leq$$

$$\leq \alpha(x) + \sum_{k=[\pi/x]+1}^{N-1} \Delta a_k \left|\widetilde{D_k}(x) - \widetilde{D_{[\pi/x]}}(x)\right| + a_N \left|\widetilde{D_N}(x) - \widetilde{D_{[\pi/x]}}(x)\right|. \qquad (62)$$

Напомним,

$$\widetilde{D_k}(x) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

$$\left|\widetilde{D_k}(x)\right| \leq \frac{2}{2\frac{2}{\pi}\frac{x}{2}} = \frac{\pi}{x}.$$

Тогда

$$(62) \leq \alpha(x) + \frac{2\pi}{x}\left(\sum_{k=[\pi/x]+1}^{N-1} \Delta a_k + a_N\right) \leq \alpha(x) + 2\frac{\pi}{x} a_{[\pi/x]+1}. \qquad (63)$$

Оценим

$$\alpha(x) = x\sum_{k=1}^{[\pi/x]} k a_k \geq a_{[\pi/x]} x \frac{\left(\left[\frac{\pi}{x}\right]\right)^2}{2} \geq a_{[\pi/x]}\frac{1}{2}x\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{x}\right)^2 \geq a_{[\pi/x]}\frac{\pi}{x}\frac{\pi}{8}.$$

Тогда

$$(63) \leq \alpha(x) + 2\frac{8}{\pi}\alpha(x) = \left(1 + \frac{16}{\pi}\right)\alpha(x) \leq 7\alpha(x).$$

□

Лекция 16. Асимптотика вблизи нуля сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами

Оценка снизу вблизи нуля суммы синус-ряда с выпуклыми коэффициентами

Напомним, в конце прошлой лекции мы начали говорить об асимптотике вблизи нуля сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффицентами.

Пусть дана последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$a_n \downarrow 0, \quad n \to \infty,$$

и два ряда:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad x \neq 0 \pmod{2\pi},$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \ \forall\ x.$$

Напомним, в прошлый раз доказали следующую теорему.

Теорема 16.4. *При $x \in [0,1]$ имеем*

$$|g(x)| \leq 7x \underbrace{\sum_{k=1}^{[\pi/x]} a_k k}_{\alpha(x)}.$$

Теорема 16.1. *$\exists\ C > 0$ такая, что $\forall$ последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ с*

$$\Delta^2 a_n \geq 0\ \forall n,$$

$$a_n \to 0, \quad n \to \infty,$$

при $x \in [0,1]$ выполнено неравенство

$$g(x) \geq C\alpha(x).$$

Доказательство. У нас

$$\widetilde{D_n}(x) = \sin x + \ldots + \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Положим

$$\widetilde{F_n}(x) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{D_k}(x) = \frac{n\cos\frac{x}{2} - \left(\cos\frac{3}{2}x + \ldots + \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{(n+1)\cos\frac{x}{2} - \left(\cos\frac{x}{2} + \ dpts + \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{(n+1)\sin x - (\sin x + \sin 2x - \sin x + \ldots - \sin(n+1)x)}{4\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{(n+1)\sin x - \sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}, \quad x \neq 0 \pmod{2\pi}.$$

Выпишем некоторые свойства $\widetilde{F_n}(x)$:

1. Так как при $x \neq 0 \pmod{2\pi}$ $\exists\ C(x)$ такая, что

$$\left|\widetilde{D_n}(x)\right| \leq C(x),$$

то

$$\left|\widetilde{F_n}(x)\right| \leq nC(x).$$

2. Если $n \geq 2$ и $0 < x \leq \frac{\pi}{n}$, то

$$\sin kx \geq 0\ \forall\ k \in [1, n].$$

Поэтому

$$\widetilde{F_n}(x) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sin rx \geq \sum_{k=1}^{[n/2]}\sum_{r=1}^{k}\sin rx \geq \frac{2}{\pi}x\sum_{k=1}^{[n/2]}\sum_{r=1}^{k} r =$$

$$= \frac{2}{\pi}x\sum_{k=1}^{[n/2]}\frac{k(k+1)}{2} \geq \frac{1}{\pi}x\sum_{k=1}^{[n/2]}k^2 - \frac{1}{\pi}x\frac{[n/2]\left([n/2]+1\right)\left(2[n/2]+1\right)}{6} >$$

$$> \frac{x}{6\pi}\frac{n}{4}\frac{n}{2}n \geq \frac{xn^3}{1000}$$

при $x \in (0, 1]$, $\forall\ n \geq 1$.

3. Если $n \geq 2$ и $x \in \left[\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{2}\right]$, то

$$(n+1)\sin x - \sin(n+1)x \geq \frac{2}{\pi}x(n+1) - 1 = \frac{1}{\pi}x(n+1) + \frac{1}{\pi}x(n+1) - 1 \geq$$

$$\geq \frac{1}{\pi}x(n+1) + \frac{n+1}{n} - 1 > \frac{x(n+1)}{\pi},$$

откуда получаем, что

$$\widetilde{F_n}(x) \geq \frac{\frac{x(n+1)}{\pi}}{x^2} = \frac{(n+1)}{\pi x}.$$

Теперь отметим, что

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta a_n \widetilde{D_n}(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \Delta a_n \widetilde{D_n}(x) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta^2 a_n \widetilde{F_n}(x) + \Delta a_N \widetilde{F_N}(x) \right). \tag{64}$$

Так как

$$\Delta^2 a_n > 0$$

и

$$a_n \ \to \ 0, \quad n \to \infty,$$

то

$$\Delta a_n \downarrow 0, \quad n \to \infty,$$

но

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta a_n = a_1 < \infty.$$

Отсюда

$$\Delta a_n = \overline{\overline{O}}\left(\frac{1}{N}\right), \quad N \to \infty.$$

Тогда $\forall\ x \neq 0 \pmod{2\pi}$

$$\Delta a_N \widetilde{F_N}(x) \ \to \ 0, \quad N \to \infty.$$

Продолжим

$$(64) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta^2 a_n \widetilde{F_n}(x) = \sum_{n=1}^{[\pi/x]} \Delta^2 a_n \widetilde{F_n}(x) + \sum_{n=[\pi/x]+1}^{\infty} \Delta^2 a_n \widetilde{F_n}(x) = S_1 + S_2.$$

Из свойств 2 и 3 имеем $\forall\ n$, $\forall\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\widetilde{F_n}(x) \geq 0,$$

откуда

$$S_1 \geq 0, \quad S_2 \geq 0.$$

Обозначим $l = [\pi/x]$. В S_1

$$n \leq \frac{\pi}{x},$$

откуда

$$x \leq \frac{\pi}{n}.$$

Далее, по свойству 2,

$$S_1 \geq \frac{x}{1000} \sum_{n=1}^{l} \Delta^2 a_n n^3 = Cx \sum_{n=1}^{l} \left(n^3 - (n-1)^3\right) \sum_{k=n}^{l} \Delta^2 a_k \geq$$

$$\geq Cx\sum_{n=1}^{l}\left(n^3-(n-1)^3\right)(\Delta a_n-\Delta a_{n+1})=cx\sum_{n=1}^{l}\left(n^3-(n-1)^3\right)\Delta a_n-$$

$$-Cx\Delta a_{l+1}\sum_{n=1}^{l}\left(n^3-(n-1)^3\right)\geq$$

$$\geq Cx\sum_{n=1}^{l}n^2\Delta a_n=cxl^3\Delta a_{l+1}=cx\sum_{n=1}^{l}\left(n^2-(n-1)^2\right)\sum_{k=n}^{l}\Delta a_k-Cxl^3\Delta_{l+1}=$$

$$=Cx\sum_{n=1}^{l}\left(n^2-(n-1)^2\right)a_n-Cxa_{l+1}\sum_{n=1}^{l}\left(n^2-(n-1)^2\right)-Cxl^3\Delta a_{l+1}\leq$$

$$\leq Cx\sum_{n=1}^{l}na_n-Cxl^2a_{l+1}-Cxl^3\Delta a_{l+1}.$$

Наконец, в S_2

$$n\geq\frac{\pi}{x},$$

откуда

$$x\geq\frac{\pi}{n}.$$

Тогда

$$S_2\geq\frac{1}{\pi x}\sum_{n=l+1}^{\infty}\Delta^2a_n(n+1)\geq\frac{l}{\pi x}\Delta a_{l+1}>\frac{l^2}{\pi^2}\Delta a_{l+1}.$$

С другой стороны,

$$S_2\geq\frac{1}{\pi x}\sum_{n=l+1}^{\infty}\Delta^2a_n(n+1)\geq\frac{1}{\pi x}\sum_{n=l+1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\Delta^2a_k=\frac{1}{\pi x}a_{l+1}.$$

Возможны 2 случая:

1. Одновременно верны оба неравенства

$$xl^2a_{l+1}<\frac{1}{4}\alpha(x),\quad xl^3\Delta a_{l+1}<\frac{1}{4}\alpha(x). \tag{65}$$

   Тогда

$$g(x)\geq S_1\geq C\left(\alpha(x)-xl^2\Delta a_{l+1}-xl^3\Delta a_{l+1}\right)>\frac{C}{2}\alpha(x).$$

2. Хотя бы одно из неравенств (65) противоположно. Пусть

$$xl^2a_{l+1}\geq\frac{1}{4}\alpha(x).$$

   Тогда

$$g(x)\geq S_2\geq\frac{1}{\pi x}a_{l+1}=\frac{1}{\pi}\frac{xl^2a_{l+1}}{x^2l^2}>\frac{1}{4\pi}\alpha(x)\frac{1}{(xl)^2}\geq\frac{1}{4\pi^3}\alpha(x).$$

□

Оценки вблизи нуля суммы косинус-ряда с выпуклыми коэффициентами

Пусть дана $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \downarrow 0$, $n \to \infty$.
Пусть дан косинус-ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad x \neq 0 \pmod{2\pi}.$$

Определим

$$\beta(x) = \sum_{n=0}^{[\pi/x]} (n+1)\Delta a_n, \quad x \in (0,1].$$

Теорема 16.2. *Если $\Delta^2 a_n > 0$ при $n \geq 0$ и $a_0 \to 0$, $n \to \infty$, то*

$$|f(x)| \leq 5\beta(x), \quad x \in (0,\pi].$$

Доказательство. Как известно,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n D_n(x) = \sum_{n=0}^{[\pi/x]} \Delta a_n D_n(x) + \sum_{n=[\pi/x]+1}^{\infty} \Delta a_n D_n(x) \equiv S_1 + S_2.$$

Так как

$$|D_n(x)| = \left| \frac{1}{2} + \ldots + \cos nx \right| \leq n + \frac{1}{2},$$

то

$$|S_1| \leq \beta(x).$$

Далее,

$$S_2 = \sum_{n=[\pi/x]+1}^{\infty} \Delta^2 a_n \left(D_{[\pi/x]+1}(x) + \ldots + D_n(x) \right) =$$

$$= \sum_{n=[\pi/x]+1}^{\infty} \Delta^2 a_n \left((D_0(x) + \ldots + D_n(x)) - \left(S_0(x) + \ldots + D_{[\pi/x]}(x) \right) \right).$$

Пусть

$$K_l(x) = D_0(x) + \ldots + D_l(x) = \frac{\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{3}{2}x + \ldots + \sin(n+1/2)x}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1 - \cos x + \cos x - \ldots - \cos(n+1)x}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1 - \cos(n+1)x}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2}.$$

Тогда

$$|S_2| \leq \sum_{n=[\pi/x]+1}^{\infty} \Delta^2 a_n \left| \underbrace{\frac{1 - \cos(n+1)x - (1 - \cos([\pi/x]+1)x)}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2}}_{\leq 2} \right| \leq$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\leq 2\frac{1}{4}\left(\frac{\pi\cdot 2}{2x}\right)^2 \sum_{k=[\pi/x]+1}^{\infty} \Delta^2 a_n = \frac{\pi^2}{2x^2}\Delta a_{[\pi/x]+1}.$$

Так как $\Delta a_n \downarrow 0$, $n\to\infty$, получаем, что

$$\beta(x) = \Delta a_{[\pi/x]}\frac{([\pi/x]+1)\,([\pi/x]+2)}{2} \geq \frac{1}{2}\Delta a_{[\pi/x]}\frac{\pi^2}{x^2} \geq \frac{\pi^2}{2x^2}\Delta a_{[\pi/x]+1} \geq |S_2|\,,$$

откуда получаем, что

$$|f(x)| \leq 2\beta(x).$$

□

Следующая теорема приводится без доказательства.

Теорема 16.3. *$\exists$ постоянная $C>0$ такая, что $\forall$ последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ с условиями*

1. $\Delta^3 a_n > 0\ \forall\ n$;
2. $a_n \to 0,\quad n\to\infty$;

если

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

то при $x\in(0,1]$ имеем

$$f(x) \geq C\beta(x).$$

Примеры

Приведем примеры, показывающие, в чем разница в приведении косинус- и синус-ряда.

Пример 16.1. Пусть

$$a_n = n^{-\alpha},\quad 0<\alpha<2.$$

Тогда

$$\alpha(x) = x\sum_{k=1}^{[\pi/x]} kk^{-\alpha} = x\sum_{k=1}^{[\pi/n]} k^{1-\alpha} \asymp x\frac{1}{x^{2-\alpha}} = x^{\alpha-1}.$$

Пусть

$$a_n = n^{-\alpha},\quad 0<\alpha<1.$$

Тогда

$$\Delta a_n \asymp n^{-\alpha-1},$$

$$\beta(x) = \sum_{k=0}^{[\pi/n]} (n+1)n^{-\alpha-1} \asymp x^{\alpha-1}.$$

Заметим, что если здесь взять $\alpha>1$, ряд для $\beta(x)$ сойдется и $\beta(x)$ будет оценено через константу.

Пример 16.2. Пусть
$$a_n = \frac{1}{\ln(n+2)}.$$
Тогда
$$\alpha(x) = x\sum_{n=1}^{[\pi/x]} \frac{n}{\ln(n+2)} = x\frac{x^2\ln\frac{1}{x}}{=}\frac{1}{x\ln\frac{1}{x}} \notin L(0,1/2).$$
Так как
$$\frac{1}{\ln(n+2)} - \frac{1}{\ln(n+3)} \sim \frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)},$$
то
$$\beta(x) = \sum_{n=0}^{[\pi/x]}(n+1)\frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)} \asymp \frac{1}{x\ln^2\frac{1}{x}} \in L(0,1/2).$$

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ