МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ЧАСТЬ 2

КАРАПЕТЯН
АЛЕКСАНДР ВЛАДИЛЕНОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
МАТОЧКИНУ СОФИЮ ДМИТРИЕВНУ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 1

Обобщенные координаты

1.1 Переменные Лагранжа (обобщенные координаты и скорости). Обобщенные силы

Пусть задана механическая система, которая состоит из N материальных точек, массами m_ν, трехмерные радиус-векторы этих точек $\vec{r_\nu}$, скорости $\dot{\vec{r_\nu}}$, силы $\vec{F_\nu}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$ ($\vec{r} = \{\vec{r_1},\dots,\vec{r_N}\} \in \mathbb{R}^{3N}, \nu = 1,\dots,N$).

Пусть на систему наложены голономные связи (их можно всегда привести к геометрическому виду):

(1) $f(\vec{r},t) = 0; f: \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^l (l < 3N)$;

(2) $rank\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\right)_{f=0} = l$;

Соотношения (1) и (2) определяют конфигурационное пространство размерности n: $\vec{r} = \sum_t^n,\ n = 3N - l$. При условиях 1 и 2 всегда можно разрешить систему из 1 в виде:

(3) $\vec{r} = \vec{r}(q,t); q = (q^1,\dots,q^n)$

$q^i (i = 1,\dots,n)$ – обобщенные координаты (локальные координаты на Σ_t^n), q – вектор обобщенных координаты.

Примеры:

1) Математический маятник: $z = 0, x^2 + y^2 = a^2$ $(N = 1, l = 2)$; $\Sigma = S^1, q = q^1 = \varphi; x = acos\varphi, y = asin\varphi, z = 0$.

2) Сферический маятник: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(N = 1; l = 1)$; $\psi,\theta: x = asin\theta sin\psi, y = asin\theta cos\psi, z = -acos\theta \;\Leftrightarrow x^2 + y^2 \neq 0$. $\psi \in [0,2\pi]|_{mod 2\pi}, \theta \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]|_{mod\pi}$. (рис.1.1)

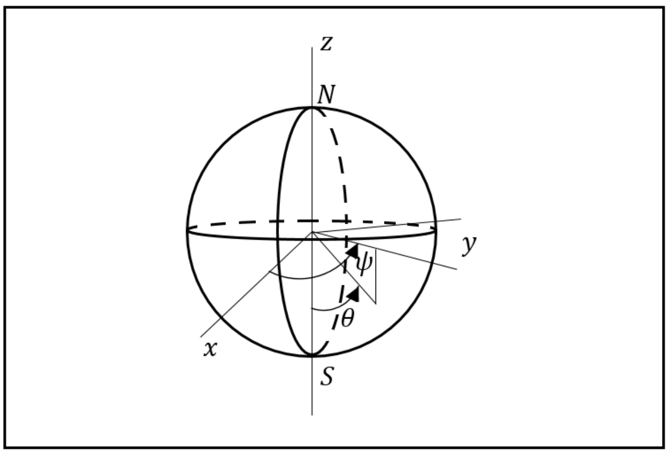

Рис.1.1 Пояснение к примеру 2

3) Двойной математический маятник: $N = 2;\ l = 4,;z_1 = 0,;\ z_2 = 0;\ x_1^2 + y_1^2 = a_1^2;\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = a_2^2;\ \Sigma = \mathrm{T}^2; x_1 = a_1 sin\varphi_1;\ y_1 = -a_1 cos\varphi_1;\ x_2 = a_1 sin\varphi_1 + a_2 sin\varphi_2;\ y_2 = -a_1 cos\varphi_1 - a_2 cos\varphi_2.$ (рис.1.2)

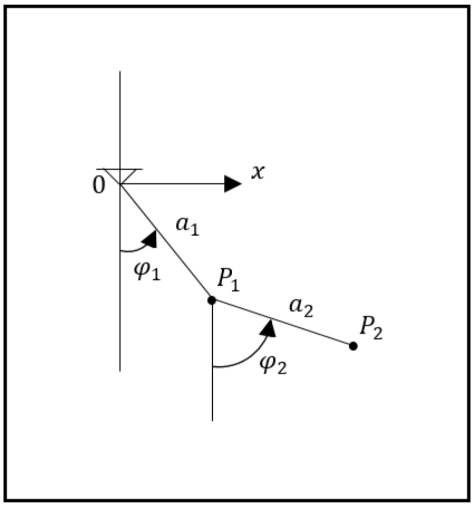

Рис.1.2 Пояснение к примеру 3

(3*) $\overrightarrow{r_\nu} = \overrightarrow{r_\nu}(q^1, \ldots, q^n, t)$.

(4) $\dot{\overrightarrow{r_\nu}} = \frac{\partial \overrightarrow{r_\nu}}{\partial q^i}\dot{q}^\iota + \frac{\partial \overrightarrow{r_\nu}}{\partial t}$.

Здесь и далее $\alpha_i \beta^i = \sum_i \alpha_i \beta^i$.

(5) $\delta\overrightarrow{r_\nu} = \frac{\partial \overrightarrow{r_\nu}}{\partial q^i}\delta q^i$, δq^i – произвольные (независимые).

(6) $\frac{\partial \dot{\overrightarrow{r_\nu}}}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial \overrightarrow{r_\nu}}{\partial q^i}$; $\left(\frac{\partial \overrightarrow{r_\nu}}{\partial q^i}\right)^{\cdot} = \frac{\partial \dot{\overrightarrow{r_\nu}}}{\partial q^i}$.

$$\frac{\partial \dot{\overrightarrow{r_\nu}}}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\partial \overrightarrow{r_\nu}}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial \overrightarrow{r_\nu}}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 \overrightarrow{r_\nu}}{\partial q^i \partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial^2 \overrightarrow{r_\nu}}{\partial q^i \partial t}$$

$$\left(\frac{\partial \overrightarrow{r_\nu}}{\partial q^i}\right)^{\cdot} = \frac{\partial^2 \overrightarrow{r_\nu}}{\partial q^j \partial q^i}\dot{q}^j + \frac{\partial^2 \overrightarrow{r_\nu}}{\partial t \partial q^i}$$

Вычислим работу заданных сил на виртуальных перемещениях:

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} (\vec{F}_\nu, \delta\overrightarrow{r_\nu}) = \sum_{\nu=1}^{N} (\vec{F}_\nu, \frac{\partial \overrightarrow{r_\nu}}{\partial q^i})\delta q^i = Q_i \delta q^i$$

$Q_i \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{N} (\vec{F}_\nu, \frac{\partial \overrightarrow{r_\nu}}{\partial q^i})$ – обобщенные силы, $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$ – ковектор обобщенных координат. $Q = Q(q, \dot{q}, t)$.

Пример: $N=1, l=1, z=\frac{x^2+y^2}{2c}, c>0$ – пост. И на точку действует сила $\vec{F}=X\vec{e}_x+Y\vec{e}_y+Z\vec{e}_z$, $\vec{F}=(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)$, $q^1=x, q^2=y$. Найти Q_1, Q_2.

$$\delta z=\frac{1}{c}(x\delta x+y\delta y)$$

$$\delta A=X\delta x+Y\delta y+Z\frac{1}{c}(x\delta x+y\delta y)$$

$$Q_1=X+\frac{x}{c}Z, Q_2=Y+\frac{y}{c}Z$$

1.2 Кинетическая энергия в переменных Лагранжа и ее свойства

По определению:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu(\dot{\vec{r_\nu}},\dot{\vec{r_\nu}})=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\left(\left(\frac{\partial\vec{r_\nu}}{\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{\partial\vec{r_\nu}}{\partial t}\right),\left(\frac{\partial\vec{r_\nu}}{\partial q^j}\dot{q}^j+\frac{\partial\vec{r_\nu}}{\partial t}\right)\right)=T_2+T_1+T_0$$

где $T_2=\frac{1}{2}a_{ij}(q,t)\dot{q}^i\dot{q}^j$– квадратичная форма обобщенных скоростей, $T_1=a_i(q,t)\dot{q}^i$ – линейная форма обобщенных скоростей, $T_0=\frac{1}{2}a_0(q,t)$ не зависит от обобщенных скоростей, $a_{ij}=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\left(\frac{\partial\vec{r_\nu}}{\partial q^i},\frac{\partial\vec{r_\nu}}{\partial q^j}\right)$, $T_1=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\left(\frac{\partial\vec{r_\nu}}{\partial q^i},\frac{\partial\vec{r_\nu}}{\partial t}\right)$, $T_0=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\left(\frac{\partial\vec{r_\nu}}{\partial t},\frac{\partial\vec{r_\nu}}{\partial t}\right)$.

Теорема (основное свойство кинетической энергии):

$$T_2>0\ \forall\dot{q}\neq 0$$

Доказательство: Рассмотрим функцию S:

$$S=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu(\delta\vec{r}_\nu,\delta\vec{r}_\nu)>0\quad\forall\delta\vec{r}\neq 0$$

$$\Rightarrow S=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\left(\frac{\partial\vec{r_\nu}}{\partial q^i},\frac{\partial\vec{r_\nu}}{\partial q^j}\right)\delta q^i\delta q^j$$

$$\delta\vec{r}_\nu=\frac{\partial\vec{r_\nu}}{\partial q^i}\delta q^i\Rightarrow\delta\vec{r}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^i}\delta q^i$$

$\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^i}(i=1,\dots,n)$ – n $3N$-мерных векторов в $\mathbb{R}^{3N}$ все они линейно независимы, так как $q^1,\dots,q^n$ – независимы. Значит, $\forall\lambda^1,\dots,\lambda^n(\sum(\lambda^i)^2\neq 0)$ $\delta\vec{r}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^i}\lambda^i\neq 0$.

$$\Rightarrow a_{ij}\delta q^i\delta q^j>0\quad\forall\delta q\neq 0$$

$$\Rightarrow T_2=\frac{1}{2}a_{ij}(q,t)\dot{q}^i\dot{q}^j>0\ \forall\dot{q}\neq 0$$

Теорема доказана.

1.3 Принцип Даламбера-Лагранжа в обобщенных координатах. Уравнения Лагранжа второго рода

Принцип Даламбера-Лагранжа:

$$\sum_{\nu=1}^{N}((m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu - \vec{F}_\nu), \delta \vec{r}_\nu) = 0 \tag{1}$$

Для голономных систем с идеальными связями.

$$\sum_{\nu=1}^{N}((m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu - \vec{F}_\nu), \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^i})\delta q^i = 0 \tag{1'}$$

По определению:

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\vec{F}_\nu, \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^i}) = Q_i$$

Посчитаем сумму: $\sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu , \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^i}) = \sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu , \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^i})^{\cdot} - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\dot{\vec{r}}_\nu , \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^i}\right)^{\cdot}) = \sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu , \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}{\partial \dot{q}^i}) - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\dot{\vec{r}}_\nu , \left(\frac{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}{\partial q^i}\right)) = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^I}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q^i}$. Если расписать подробнее: $m_\nu \left(\dot{\vec{r}}_\nu, \left(\frac{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}{\partial \dot{q}^i}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{1}{2} m_\nu (\dot{\vec{r}}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu)\right)$. Аналогично: $m_\nu \left(\dot{\vec{r}}_\nu, \left(\frac{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}{\partial q^i}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{1}{2} m_\nu (\dot{\vec{r}}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu)\right)$. В итоге, в обобщенных координатах принцип Даламбера-Лагранжа принимает вид:

$$\left(\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q^i} - Q_i\right)\delta q^i = 0 \tag{2}$$

$$\left(\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q^i} - Q_i\right) = 0 \,, i = 1, \dots n \tag{3}$$

Если заданные силы потенциальны:

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial W(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}}, Q(q, t) = -\frac{\partial V(q, t)}{\partial q}$$

то обобщенные силы тоже потенциальны ($V(q, t) = W(\vec{r}(q, t), t)$).

Вводим функцию Лагранжа $L(q, \dot{q}, t) = T - V$. Тогда:

$$\left(\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right) = 0 \tag{4}$$

Т.е. для голономных систем с идеальными связями и потенциальными силами уравнение движения всегда можно представить в виде (4), при этом:

$$L = L_2 + L_1 + L_0, \qquad \text{где } L_2 = T_2, L_1 = T_1, L_0 = T_0 - V$$

Основные свойства уравнения Лагранжа:

1) Уравнения Лагранжа разрешимы относительно вторых производных:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = a_{ij}(q,t)\dot{q}^j \Rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)^{\cdot} = a_{ij}\ddot{q}^j + \cdots$$

Значит, уравнение (4) можно представить в виде:

$$a_{ij}\ddot{q}^j = \cdots \ \Rightarrow \ddot{q}^j = \Phi^j(q, \dot{q}, t)$$

$$\exists\ (a^{ij}) = (a_{ij})^{-1}$$

2) Лагранжева форма уравнений (4) не изменяется при замене переменных $q \to \tilde{q}; q = q(\tilde{q}, t)$:

$$\vec{r} = \vec{r}(q,t) \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}(q(\tilde{q},t),t) = \tilde{r}(\tilde{q},t) \Rightarrow \tilde{L}$$

Пример (плоская задача Кеплера):

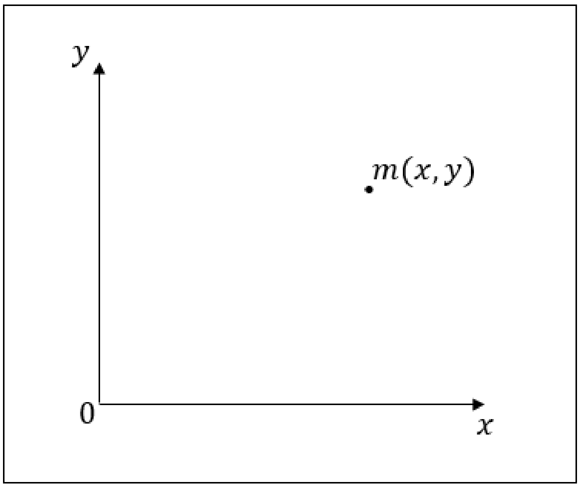

Рис.1.3 Иллюстрация к данному примеру

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2);\ V = -\mu\frac{m}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Уравнение Лагранжа:

$$m\ddot{x} = -\mu\frac{mx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}\ ;\ m\ddot{y} = -\mu\frac{my}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Если точка задана в полярных координатах:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2);\ V = -\mu\frac{m}{r}$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \mu\frac{m}{r^2} = 0;\ mr^2\ddot{\varphi} + 2m\dot{r}\dot{\varphi} = 0$$

3) Уравнения Лагранжа инвариантны относительно замены функции L на а) cL $(c \neq 0)$, б) $L + f(t)$, в) $L + \Lambda, \Lambda = \frac{\partial f(q)}{\partial q^i}\dot{q}^i$.

$$\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial\Lambda}{\partial q^i} = \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\partial f}{\partial q^j}\dot{q}^j\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial q^j\partial q^i}\dot{q}^j - \frac{\partial^2 f}{\partial q^j\partial q^i}\dot{q}^j \equiv 0$$

Лекция 2

Консервативные голономные системы

2.1 Консервативные голономные системы. Интеграл энергии, явный вид уравнений движения по инерции.

Определение: Голономная система называется консервативной, если связи идеальные и не зависят от времени, а заданные силы потенциальны и не зависят от времени.

$q = (q^1, \dots, q^n)$ – вектор обобщенных координат.

Так как связи не зависят от времени, кинетическая энергия – это квадратичная форма обобщенных скоростей с коэффициентами, независящими от времени:

$$T = \frac{1}{2} a_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j$$

Поскольку потенциальные связи не зависят от времени, то обобщенные силы зависят только от обобщенных координат (V-потенциальная энергия):

$$Q_i = Q_i(q) = -\frac{\partial V(1)}{\partial q^i}$$

Уравнение движения консервативной системы в переменных Лагранжа:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q^i} + \frac{\partial V}{\partial q^i} = 0 \ (i = 1, \dots, n) \qquad (1)$$

Домножим i-тое уравнение системы (1) на $\dot{q}^i$ и просуммируем по i:

$$0 = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right)^{\cdot} \dot{q}^i - \frac{\partial T}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial V}{\partial q^i}\dot{q}^i = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i - \frac{\partial T}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial V}{\partial q^i}\dot{q}^i = 2\dot{T} - \dot{T} + \dot{V} = (T+V)^{\cdot}$$
$\Rightarrow T + V = const.$

Распишем систему уравнений (1) в явном виде:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = a_{ij}(q)\dot{q}^j \ \Rightarrow \ \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right)^{\cdot} = a_{ij}(q)\ddot{q}^j + \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^h}\dot{q}^h\dot{q}^j = a_{ij}(q)\ddot{q}^j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^h} + \frac{\partial a_{ih}}{\partial q^j}\right)\dot{q}^h\dot{q}^j$$

$$\frac{\partial T}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{1}{2}a_{jh}(q)\dot{q}^j\dot{q}^h\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jh}}{\partial q^i}\dot{q}^j\dot{q}^h \Rightarrow$$

$$a_{ij}\ddot{q}^j + \delta_{ijh}\dot{q}^j\dot{q}^h + \frac{\partial V}{\partial q^i} = 0 \qquad (2)$$

$$\delta_{ijh} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^h} + \frac{\partial a_{ih}}{\partial q^j} - \frac{\partial a_{jh}}{\partial q^i}\right) \ (i, j, h = 1, \dots, n)$$

Пусть система движется по инерции ($Q_i = 0, V = const$). Тогда уравнение (2) можно представить в виде:

$$\ddot{q}^s + \gamma^s_{jh}\dot{q}^j\dot{q}^h = 0 \tag{3}$$

где

$$\gamma^s_{jh} = a^{si}\delta_{ijh} \tag{4}$$

где $a^{si} = (a_{ij})^{-1}, (s = 1, \dots, n)$. γ^s_{jh} – символы Кристоффеля Кинетической (Римановой) метрики, которая определяется следующим образом:

$$(ds)^2 = a_{ij}(q)dq^i dq^j \tag{5}$$

Утверждение: Консервативная голономная система движется по инерции по геодезическим кинетической метрики, порожденной ее кинетической энергией.

2.2 Уравнения малых колебаний в окрестности равновесия консервативной голономной системы

Положение равновесия механической системы – это положение, в котором механическая система может находиться вечно. Если мы выбрали обобщенные координаты, положению равновесия соответствует частное решение уравнения Лагранжа $q \equiv q_0$, q_0 – положение равновесия. $(q_0; 0)$ – состояние равновесия в фазовом пространстве $(q; \dot{q})$. q_0 определяется из уравнения:

$$\frac{\partial V}{\partial q} = 0 \tag{6}$$

Т.е. положение равновесия – критическая точка потенциальной энергии.

Введем отклонение обобщенных координат от положения равновесия. Пусть $x = q - q_0$ $\Rightarrow \dot{x} = \dot{q}$. Тогда уравнения (2) принимают вид:

$$a_{ij}(q_0 + x)\ddot{x}^j + \delta_{ijh}(q_0 + x)\dot{x}^j\dot{x}^h + \frac{\partial V(q_0 + x)}{\partial x^i} = 0 \tag{7}$$

Если левую часть разложить в ряд по степеням $x, \dot{x}, \ddot{x}$:

$$a_{ij}(q_0)\ddot{x}^j + c_{ij}(q_0)x^j = O_2 \tag{8}$$

где $c_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q^i \partial q^j}$, $O_2 = o(||x|| + ||\dot{x}||)$.

$$a_{ij}(q_0)\ddot{x}^j + c_{ij}(q_0)x^j = 0 \tag{9}$$

Это линейная система n уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. В матричном виде:

$$A\ddot{x} + Cx = 0 \tag{10}$$

где $A = (\, a_{ij}(q_0))$, $C = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^i \partial q^j}\right)_{q=q_0}$. $\exists x = By; |B| \neq 0$ $(B^T AB = E, B^T CB = K)$:

$$\ddot{y} + Ky = 0 \tag{11}$$

где $K = diag(k_1, \dots, k_n)$. $k_i (i = 1, \dots, n)$ удовлетворяют вековому уравнению:

$$|Ak - C| = 0 \tag{12}$$

Все корни уравнения (12) в силу свойств матриц A и C действительны. Координаты y называются нормальными координатами. В нормальных координатах уравнения движения имеют вид:

$$\ddot{y}^i + k_{(i)} y^i = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \tag{13}$$

$\alpha_{(i)}\beta^i$ – суммирования нет. Если все $k_i > 0$, то все y_i имеют вид:

$$y_i(t) = \alpha_i \cos(\omega_i t) + \beta_i \sin(\omega_i t) \quad (\omega_i^2 = k_i)$$

Если $\exists k_i < 0$, то $y_i = \alpha_i e^{\lambda_i t} + \beta_i e^{-\lambda_i t}$ $(\lambda_i^2 = -k_i)$.

Если $\exists k_i = 0$, то $y_i = \alpha_i t + \beta_i t$.

2.3 Двойной математический маятник

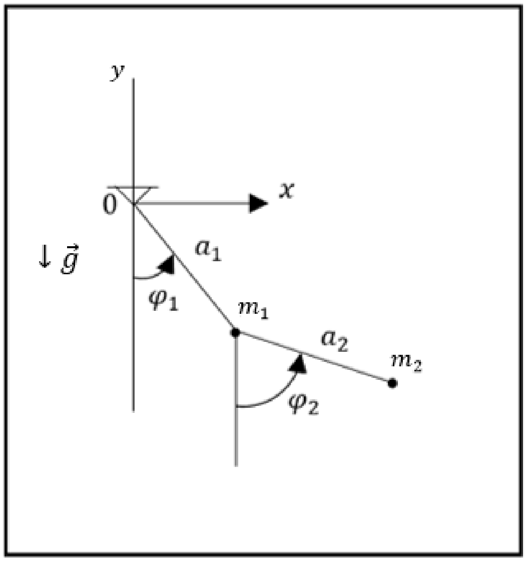

Рис.2.1 Двойной математический маятник

$$q^1 = \varphi_1, q^2 = \varphi_2$$

Пусть $m_1 + m_2 = 1$, $m_1 = \mu$, $m_2 = 1 - \mu$ $(0 < \mu < 1)$, $a_1 + a_2 = 1$, $a_1 = \lambda$, $a_2 = 1 - \lambda$ $(0 < \lambda < 1)$, $g = 1$.

$$x_1 = \lambda sin\varphi_1$$

$$y_1 = -\lambda cos\varphi_1$$

$$x_2 = \lambda sin\varphi_1 + (1 - \lambda) sin\varphi_2$$

$$y_2 = -\lambda cos\varphi_1 - (1-\lambda)cos\varphi_2$$

$$z_1 = 0, z_2 = 0$$

Откуда:

$$\dot{x}_1 = \lambda\dot{\varphi}_1 cos\varphi_1$$

$$\dot{y}_1 = \lambda\dot{\varphi}_1 sin\varphi_1$$

$$\dot{x}_2 = \lambda\dot{\varphi}_1 cos\varphi_1 + (1-\lambda)\dot{\varphi}_2 cos\varphi_2$$

$$\dot{y}_2 = \lambda\dot{\varphi}_1 sin\varphi_1 + (1-\lambda)\dot{\varphi}_2 sin\varphi_2$$

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{1}{2}\mu\lambda^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}(1-\mu)[\lambda^2\dot{\varphi}_1^2 + (1-\lambda)^2\dot{\varphi}_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)\dot{\varphi}_1^2\dot{\varphi}_2^2\cos(\varphi_2-\varphi_1)]$$

$$T = \frac{1}{2}\lambda^2\dot{\varphi}_1^2 + +\frac{1}{2}(1-\mu)(1-\lambda)^2\dot{\varphi}_2^2 + (1-\mu)\lambda(1-\lambda)\dot{\varphi}_1^2\dot{\varphi}_2^2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$$

Потенциальная энергия:

$$V = -\mu\lambda cos\varphi_1 - (1-\mu)\lambda cos\varphi_1 - (1-\mu)(1-\lambda)cos\varphi_2$$

$$V = -\lambda cos\varphi_1 - (1-\mu)(1-\lambda)cos\varphi_2$$

Ищем равновесие:

$$V_1' = \frac{\partial V}{\partial\varphi_1} = \lambda sin\varphi_1 = 0$$

$$V_2' = \frac{\partial V}{\partial\varphi_2} = (1-\mu)(1-\lambda)sin\varphi_2 = 0$$

Есть четыре равновесия:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0;\ \varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi;\ \varphi_1 = \pi, \varphi_2 = 0;\ \varphi_1 = \varphi_2 = \pi$$

Рассмотрим уравнение малых колебаний в окрестности $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

$$(V_{11}'')_{0,0} = \lambda\,, (V_{22}'')_{0,0} = (1-\mu)(1-\lambda), (V_{12}'')_{0,0} \equiv 0$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & (1-\mu)(1-\lambda) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda(1-\lambda)(1-\mu) \\ \lambda(1-\lambda)(1-\mu) & (1-\mu)(1-\lambda)^2 \end{pmatrix}$$

Составляем вековое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 k - \lambda & \lambda(1-\lambda)(1-\mu)k \\ \lambda(1-\lambda)(1-\mu)k & (1-\mu)(1-\lambda)^2 k - (1-\mu)(1-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \lambda(1-\lambda)(1-\mu)\begin{vmatrix} \lambda k - 1 & (1-\lambda)(1-\mu)k \\ \lambda k & (1-\lambda)k - 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 0 \ \Leftrightarrow f(k) = 0. f(k) = \mu\lambda(1-\lambda)k^2 - k + 1 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda(1-\lambda)\mu}}{2\lambda(1-\lambda)\mu}$$

$k_1 > 0, k_2 > 0$, т.к. $1 > 4\lambda(1-\lambda)\mu$ (доказательство этого неравенства: можем взять $\lambda = sin^2\alpha, \mu = sin^2\beta$, тогда $4\lambda(1-\lambda)\mu = sin^2 2\alpha sin^2\beta$).

2.4 Обобщенно консервативные системы. Обобщенный интеграл энергии

Рассмотрим лагранжевую систему (лагранжевая система – это голономная механическая система с идеальными связями, находящаяся под действием потенциальных сил):

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, L = L_2 + L_1 + L_0 \tag{1}$$

Лемма:

$$\frac{d}{dt}(L_2 - L_0) = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{2}$$

Доказательство: Из (1) следует, что $0 = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)^{\cdot} \dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i}\dot{q}^i = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i}\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial t} = (2L_2 + L_1) - (L_2 + L_1 + L_0)^{\cdot} + \frac{\partial L}{\partial t} \Rightarrow (2)$.

Следствие: Если $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, то уравнения (1) имеют первый интеграл

$$L_2 - L_0 = const \tag{3}$$

(этот интеграл называется обобщенным интегралом энергии).

Определение: Обобщенно консервативный лагранжевой системой называется система, функция Лагранжа которой не зависит от времени.

$$L = \frac{1}{2}a_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j + a_i(q)\dot{q}^i + \frac{1}{2}a_0(q) - V(q)$$

$W(q) = V(q) - \frac{1}{2}a_0(q)$ – измененная потенциальная энергия.

$$\left(\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L_2}{\partial q^i} + \left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L_1}{\partial q^i} + \frac{\partial W}{\partial q^i} = 0 \tag{4}$$

$\frac{\partial L_1}{\partial \dot q^i} = a_i(q), \left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot q^i}\right)^{\cdot} = \frac{\partial a_i}{\partial q^j}\dot q^j;\ \ \frac{\partial L_1}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i}\left(a_j(q)\dot q^j\right) = \frac{\partial a_j}{\partial q^i}\dot q^j.\ \ \left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot q^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L_1}{\partial q^i} = g_{ij}(q)\dot q^j,\ \ g_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial q^j} - \frac{\partial a_j}{\partial q^i} = -g_{ji}.$

Положение равновесия обобщенно консервативной системы $q = q_0$ определяется из условия стационарности функции W: $\frac{\partial W}{\partial q} = 0$.

2.5 Уравнения малых колебаний

$$a_{ij}(q_0)\ddot x^j + g_{ij}(q_0)\dot x^j + c_{ij}(q_0)x^j = 0 \tag{6}$$

$$A\ddot x + G\dot x + Cx = 0, G^T = -G \tag{7}$$

где $c_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial q^i \partial q^j}$.

$x \to y = Bx; |B| \neq 0$. В нормальных координатах уравнение движения имеет вид:

$$\ddot y + \Gamma\dot x + Kx = 0 \tag{7}$$

где $\Gamma = B^T G B \Rightarrow \Gamma^T = -\Gamma$.

Лекция 3

Уравнения Рауса

3.1 Уравнения Лагранжа для относительных движений

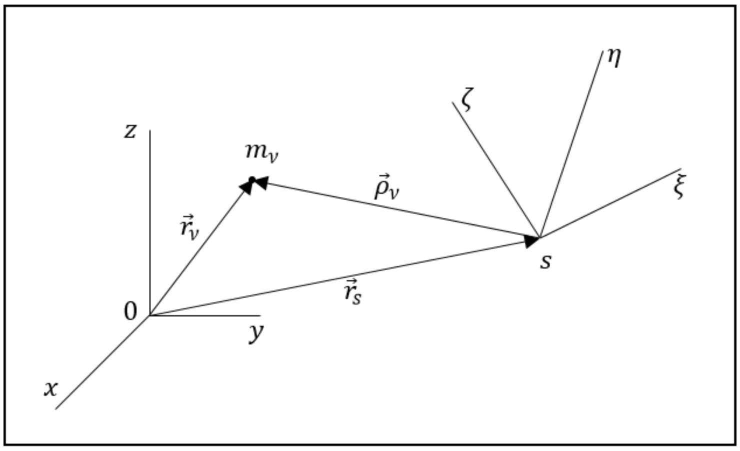

Рис.3.1

$$\vec{r}_s = \vec{r}_s(t);\ \ \vec{e}_{\xi,\eta,\zeta} = \vec{e}_{\xi,\eta,\zeta}(t);\ \ \vec{v}_s = \frac{d\vec{r}_s}{dt} = \vec{v}_s(t);\ \ \vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$$

Абсолютная производная по времени: $\frac{d\vec{b}}{dt}$. Скорость изменения в подвижной системе отсчета: $\dot{\vec{b}}$. Их связь: $\frac{d\vec{b}}{dt} = \dot{\vec{b}} + [\vec{\omega}, \vec{b}]$.

Будем изучать движение системы в подвижной системе отсчета. Связи:

$$f(\vec{\rho}, t) = 0; f\colon \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^K\ (\vec{\rho} \in \mathbb{R}^{3N}, \vec{\rho} = (\vec{\rho}_N, \dots, \vec{\rho}_N)) \qquad (1)$$

$$rank(\frac{\partial f}{\partial \vec{\rho}})_{f=0} = k < 3N$$

Силы, действующие в системе:

$$\vec{F}_\nu = \vec{F}_\nu(\vec{\rho}, \dot{\vec{\rho}}, t)$$

(1) $\Rightarrow\ \vec{\rho} = \vec{\rho}(q, t); q = (q^1, \dots, q^n); n = 3N - k$. Относительная скорость:

$$\dot{\vec{\rho}}_\nu = \frac{\partial \vec{\rho}_\nu}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial \vec{\rho}_\nu}{\partial t}$$

$\vec{v}_\nu^{\text{абс}} = \vec{v}_\nu^{\text{пер}} + \vec{v}_\nu^{\text{отн}} = \vec{v}_s + [\vec{\omega} + \vec{\rho}_\nu] + \frac{\partial \vec{\rho}_\nu}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial \vec{\rho}_\nu}{\partial t} = \frac{\partial \vec{\rho}_\nu}{\partial q^i}\dot{q}^i + \vec{w}_\nu$; $\vec{w}_\nu = \vec{v}_s + [\vec{\omega} + \vec{\rho}_\nu] + \frac{\partial \vec{\rho}_\nu}{\partial t} = \vec{w}_\nu(q, t)$.

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\left(\vec{v}_\nu^{\text{абс}}, \vec{v}_\nu^{\text{абс}}\right) = T_2 + T_1 + T_0$$

$$T_2 = \frac{1}{2}a_{ij}(q,t)\dot{q}^i\dot{q}^j; T_1 = a_i(q,t)\dot{q}^i;\ T_0 = \frac{1}{2}a_0(q,t)$$

где $a_{ij} = \sum_\nu\ m_\nu\left(\frac{\partial\vec{\rho}_\nu}{\partial q^i}, \frac{\partial\vec{\rho}_\nu}{\partial q^j}\right);\ a_i = \sum_\nu\ m_\nu\left(\frac{\partial\vec{\rho}_\nu}{\partial q^i}, \vec{w}_\nu\right);\ a_0 = m_\nu(\vec{w}_\nu, \vec{w}_\nu)$.

Виртуальные перемещения в абсолютной системе совпадают с виртуальными перемещениями в подвижной системе:

$$\delta\vec{r}_\nu \equiv \delta\vec{\rho}_\nu = \frac{\partial\vec{\rho}_\nu}{\partial q^i}\delta q^i$$

Отсюда следует, что $Q_i = \sum_{\nu=1}^{N}\left(\vec{F}_\nu, \frac{\partial\vec{\rho}_\nu}{\partial q^i}\right) = Q_i(q,\dot{q},t)$.

Запишем уравнения Лагранжа для движения системы относительно подвижной системы отсчета:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q^i} - Q_i = 0\ (i = 1, \dots, n) \tag{2}$$

<u>Замечание 1:</u> Если заданные силы потенциальны, то обобщенные силы тоже потенциальны, можно ввести функцию Лагранжа и записать уравнения движения в более компактном виде $(\exists V = V(q,t)\colon Q_i = \frac{\partial V}{\partial q^i}, L = T - V = L_2 + L_1 + L_0, L_2 = T_2, L_1 = T_1, L_0 = T_0 - V)$.

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \tag{3}$$

<u>Замечание 2:</u> Пусть выполнены две группы условий:

1) связи не зависят от времени, а силы – консервативны:

$$f(\vec{\rho}) = 0, \frac{\partial V}{\partial t} = 0\ \Rightarrow\ \vec{\rho} = \vec{\rho}(q)$$

2) $\vec{v}_s = \overrightarrow{const};\ \vec{\omega} = \overrightarrow{const}$.

Тогда $\vec{w}_\nu = \vec{w}_\nu(q) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

Таким образом, наша система – обобщенно консервативная.

<u>Замечание 3:</u> В абсолютной системе отсчета связи зависят от времени: $f(\vec{\rho}) = 0, \vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}_s(t)$. Если записать в абсолютной системе отсчета: $f(\vec{r} - \vec{r}_s(t)) = 0$.

3.2 Плоская круговая ограниченная задача трех тел

Рассматривается система трех тел: Солнце(m_S), Юпитер(m_J), астероид(m). ($m_S > m_J \gg m$) Тела взаимодействуют по закону Ньютона. Поскольку масса астероида много меньше массы Солнца и массы Юпитера, можно пренебречь влиянием астероида на движение Солнца и Юпитера.

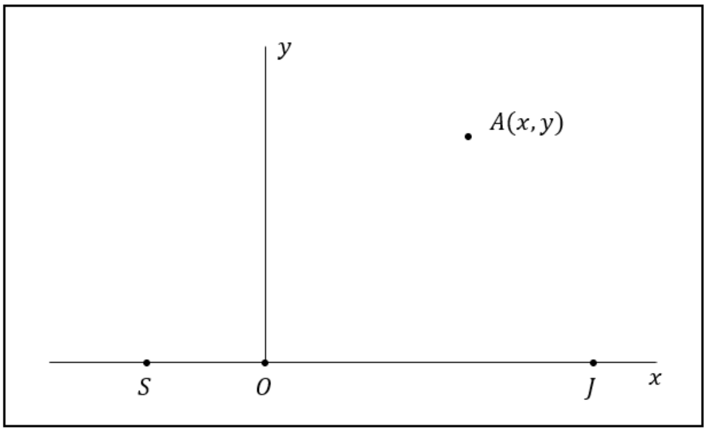

Рис.3.2 0-центр масс системы Солнце-Юпитер

В данном случае задача двух тел – Солнце и Юпитер движутся по окружностям вокруг общего центра масс. Единицы измерения выбираем так, что:

$$m_S = 1 - \mu;\ m_J = \mu$$

Выбираем, чтобы на этом частном решении задачи двух тел расстояние между Солнцем и Юпитером было постоянным и равным единице ($S(-\mu; 0); J(1-\mu; 0)$). Выбираем единицы измерения, чтобы универсальная всемирная постоянная равнялась 1. Тогда угловая скорость вращения Солнца и Юпитера вокруг их общего центра масс равна по модулю единице ($\vec{\omega} = 1 \times \vec{e}_z$).

Пусть OXYZ – неподвижная система координат. При этом $Oz \equiv OZ$.

Будем изучать движение астероида в подвижной системе отсчета, которая связана с Солнцем и Юпитером. В качестве лагранжевых координат выберем $q^1 = x, q^2 = y$. Связь $z = 0$.

$$V = -\frac{m(1-\mu)}{r_S} - \frac{m\mu}{r_J};\ r_S = [(x+\mu)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}};\ r_J = [(x-1+\mu)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$T = \frac{1}{2} m v_{\text{абс}}^2; \vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{пер}} + \vec{v}_{\text{отн}}$$

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$$

$$\vec{v}_{\text{пер}} = \vec{v}_O + [\vec{\omega}, \vec{\rho}] = 1 \times \left[\vec{e}_z, x\vec{e}_x + y\vec{e}_y\right] = x\vec{e}_y - y\vec{e}_x$$

$$\vec{v}_{\text{абс}} = (\dot{x} - y)\vec{e}_x + (\dot{y} + x)\vec{e}_y$$

$$T = \frac{1}{2}m[(\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2] = T_2 + T_1 + T_0$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2);\ T_1 = m(x\dot{y} - \dot{x}y);\ T_0 = \frac{1}{2}m(x^2 + y^2)$$

$$L = T - V \Rightarrow \frac{L}{m}, L = T_2 + T_1 + T_0 - V = T_2 + T_1 - W$$

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} + \dfrac{\partial W}{\partial x} = 0 \\ \ddot{y} + 2\dot{x} + \dfrac{\partial W}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$W = V - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Обобщенно консервативная система может обладать равновесиями. В данном случае – относительными равновесиями астероида в подвижной системе отсчета. Эти относительные равновесия – это критические точки измененной потенциальной энергии. Уравнения, из которых определяются критические точки:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = x\left(-1 + \frac{(1-\mu)}{r_S^3} + \frac{\mu}{r_J^3}\right) + (1-\mu)\mu\left(\frac{1}{r_S^3} - \frac{1}{r_J^3}\right)$$

Пусть $y \neq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} - \mu, y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (*). Астероид, Солнце, Юпитер лежат в вершинах равностороннего треугольника. Составим уравнение малых колебаний в окрестности треугольных точек вибрации.

$$\left(W''_{x^2}\right)_* = -\frac{3}{4}; \left(W''_{y^2}\right)_* = -\frac{9}{4}; \left(W''_{xy}\right)_* = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)$$

$$A\ddot{u} + G\dot{u} + Cu = 0;\ u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

$$A = E; G = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{4} & \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) \\ \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & -\dfrac{9}{4} \end{pmatrix}$$

Найдем нормальные координаты:

$$2k_{1,2} = \pm 3\sqrt{9 - 27\mu(1-\mu)} = -3[1 \pm \sqrt{1 - 3\mu(1-\mu)}]$$

$k_{1,2}$ отрицательные.

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} + k_1\xi = 0$$

$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} + k_2\eta = 0$$

При определенных ограничениях эти уравнения будут описывать действительные колебания.

Характеристическое уравнение для этой системы:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + k_1 & -2\lambda \\ 2\lambda & \lambda^2 + k_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0 \Rightarrow 2\lambda_{1,2}^2 = -1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}$$

Если $\mu(1-\mu) < \frac{1}{27} \Rightarrow \lambda_{1,2,3,4}$ – чисто мнимые.

3.3 Уравнения Рауса

Рассматриваем лагранжевую систему: $q^1, \dots, q^n$ – обобщенные координаты; $L = L(\dot{q}, q, t) = \frac{1}{2}a_{rs}(q,t)\dot{q}^r\dot{q}^s + a_r(q,t)\dot{q}^r + \frac{1}{2}a_0(q,t);\ r, s = 1, \dots, n.$

Введем вектор $\bar{q} = (q^1, \dots, q^k)$ и $\tilde{q} = (q^{k+1}, \dots, q^n)$; $\dot{\bar{q}}, \dot{\tilde{q}}; i, j = 1, .., k;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta = k + 1, \dots, n.$

Переменные Рауса: $q, \dot{\bar{q}}, \tilde{p} = \left(p_{k+j?}, \dots, p_n\right)$. Где $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = a_{\alpha i}\dot{q}^i + a_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta + a_\alpha \ \Rightarrow$

$$\dot{q}^\alpha = a^{\alpha\beta}\left(p_\beta - a_{\beta i}\dot{q}^i - a_\beta\right); \left(a^{\alpha\beta}\right) = (a_{\alpha\beta})^{-1} \tag{1}$$

Функция Рауса:

$$R = (L - \dot{q}^\alpha p_\alpha)_{(1)} = R(q, \dot{\bar{q}}, \tilde{p})$$

$$\frac{\partial R}{\partial q^r} = \frac{\partial L}{\partial q^r};\ \frac{\partial R}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}; p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}$$

Уравнения Лагранжа в переменных Рауса (это и есть уравнения Рауса):

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial R}{\partial q^i} = 0 \ (i = 1, \dots, n) \tag{2}$$

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial R}{\partial q^\alpha}; \dot{q}^\alpha = -\frac{\partial R}{\partial p_\alpha} \ (\alpha = k + 1 \dots n) \tag{3}$$

Здесь k уравнений второго порядка, $2(n-k)$ уравнений первого порядка. $R = R_2 + R_1 + R_0$.

3.4 Циклические координаты и интегралы. Метод Рауса игнорирования циклических переменных

Определение: Координата q^α называется циклической, если $\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0$.

Если q^α – циклическая, то $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right)^{\cdot} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = c_\alpha = const.$

Пусть $q^{k+1}, \dots, q^n$ – циклические. Тогда из (3.1) следует, что $p_\alpha = c_\alpha = const$. При этом $R = R(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, c)$, а уравнения (2) имеют вид

$$\left(\frac{\partial R_{\text{c}}}{\partial \dot{q}^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial R_{\text{c}}}{\partial q^i} = 0\ (i = 1, .., k); R_{\text{c}} = R(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, c) \tag{4}$$

Это систему можно рассматривать независимо.

Если $\bar{q} = \bar{q}_c(t)$ – решение системы (4), то $q^\alpha(t) = q^\alpha(0) - \int_0^t (\frac{\partial R_c(t)}{\partial c_\alpha}) dt.$ $R_c(t) = R(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), c)$.

Пример (Плоская задача Кеплера):

$$m = 1, \mu = 1$$

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2); V = -\frac{1}{r}$$

(полярные координаты). φ – циклическая координата $\Rightarrow$ $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\dot{\varphi}^2 = c = const \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}$ $(*)$. Функция Рауса:

$$R = (T - V - \dot{\varphi}c)_{(*)} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2} + \frac{\mu}{r} = R_c(r, \dot{r})$$

$$\frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2} + \frac{\mu}{r} = -V_c(r)$$

Уравнение приведенной по Раусу системы:

$$\ddot{r} + \frac{dV_c}{dr} = 0$$

Лекция 4

Консервативные голономные системы с циклическими координатами

4.1 Явный вид уравнений Рауса. Обобщенный интеграл движения

Обобщенные координаты $q=(q^1,\dots,q^n)$. n-мерный вектор обобщенных координат разобьем на два подвектора $q=(\bar{q},\tilde{q})$, $\bar{q}=(q^1,\dots,q^k)$, $\tilde{q}=(q^{k+1},\dots,q^n)$. $r,s=1,,,n$; $i,j,h=1,.,.,k$; $\alpha,\beta,\gamma,\delta=k+1,\dots,n$. Предположим, что наша голономная система консервативная. Тогда

$$T=\frac{1}{2}a_{rs}\dot{q}^r\dot{q}^s;\ V=V(\bar{q}\ )$$

Пусть $\tilde{q}$ – циклические координаты. $\bar{q}$ – позиционные координаты. $a_{rs}=a_{rs}(\bar{q})$.

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^\alpha}=p_\alpha=const;\ p_\alpha=a_{\alpha i}\dot{q}^i+a_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta\Rightarrow$$

$$\dot{q}^\alpha=a^{\alpha\beta}\left(p_\beta-a_{\beta i}\dot{q}^i\right);\left(a^{\alpha\beta}\right)=(a_{\alpha\beta})^{-1}\tag{1}$$

$R=(T-V-p_\alpha\dot{q}^\alpha)_{(1)}=\frac{1}{2}a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j+a_{ij}\dot{q}^i\left(a^{\alpha\beta}\left(p_\beta-a_{\beta j}\dot{q}^j\right)\right)+\frac{1}{2}a_{\alpha\beta}a^{\alpha\gamma}\left(p_\gamma-a_{\gamma i}\dot{q}^i\right)a^{\beta\delta}\left(p_\delta-a_{\delta j}\dot{q}^j\right)-V-p_\alpha a^{\alpha\beta}\left(p_\beta-a_{\beta i}\dot{q}^i\right)=R_2+R_1+R_0$; $\quad R_2=\frac{1}{2}b_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j;R_1=b_i\dot{q}^i;R_0=-W;b_{ij}=a_{ij}-a^{\alpha\beta}a_{\alpha i}a_{\beta j}=b_{ij}(\bar{q});\ b_i=a^{\alpha\beta}p_\alpha a_{\beta i}=b_i(\bar{q},p)$.

$$W=V+\frac{1}{2}a^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta=W(\bar{q},p)$$

Общий вид уравнений Рауса:

$$\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial R_2}{\partial\dot{q}^i}\right)^{\cdot}-\frac{\partial R_2}{\partial q^i}+\left(\frac{\partial R_1}{\partial\dot{q}^i}\right)^{\cdot}-\frac{\partial R_1}{\partial q^i}+\frac{\partial W}{\partial q^i}=0\ (i=1,\dots,k)\\&\dot{p}_\alpha=0;\dot{q}^\alpha=-\frac{\partial R}{\partial p_\alpha};(\alpha=k+1,\dots,n)\end{aligned}\right.\tag{2}$$

Система уравнений (2) допускает интеграл (обобщенный интеграл движения) (3):

$$R_2+W=const\tag{3}$$

$$(2_i)\dot{q}^i:\frac{\partial W}{\partial q^i}\dot{q}^i\equiv\frac{\partial W}{\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{\partial W}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha=\dot{W}$$

$$\left(\frac{\partial R_2}{\partial\dot{q}^i}\right)^{\cdot}-\frac{\partial R_2}{\partial q^i}+\left(\frac{\partial R_1}{\partial\dot{q}^i}\right)^{\cdot}-\frac{\partial R_1}{\partial q^i}+\frac{\partial W}{\partial q^i}=0\ (i=1,\dots,k)$$

$$\left(\frac{\partial R_2}{\partial\dot{q}^i}\right)^{\cdot}-\frac{\partial R_2}{\partial q^i}=b_{ij}\ddot{q}^j+\delta_{ijh}\dot{q}^j\dot{q}^h;\ \delta_{ijh}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial q^h}+\frac{\partial b_{ih}}{\partial q^j}-\frac{\partial b_{jh}}{\partial q^i}\right)$$

$$\left(\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial R_1}{\partial q^i} = (b_i)^{\cdot} - \frac{\partial}{\partial q^i}\left(b_j \dot{q}^j\right) = \left(\frac{\partial b_i}{\partial q^j} - \frac{\partial b_j}{\partial q^i}\right)\dot{q}^j + \frac{\partial b_i}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha = g_{ij}\dot{q}^j$$

$\frac{\partial b_i}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha = 0.\ \frac{\partial R}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial R_1}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial W}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial b_i}{\partial p_\alpha}\dot{q}^i - \frac{\partial W}{\partial p_\alpha}.$

Таким образом, явный вид уравнений Рауса для консервативных голономных систем с циклическими координатами можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} b_{ij}\ddot{q}^j + \delta_{ijh}\dot{q}^j\dot{q}^h + g_{ij}\dot{q}^j + \dfrac{\partial W}{\partial q^i} = 0\ (i = 1, \dots, k) \\ \dot{p}_\alpha = 0; \dot{q}^\alpha = -\dfrac{\partial b_i}{\partial p_\alpha}\dot{q}^i + \dfrac{\partial W}{\partial p_\alpha} \quad (\alpha = k+1, \dots, n) \end{cases} \tag{4}$$

4.2 Стационарные движения. Уравнения малых колебаний в окрестности стационарных движений

Определение: Стационарными движениями консервативной голономной системы с циклическими координатами называются движения, на которых постоянны все позиционные координаты и скорости циклических координат (при этом циклические координаты линейно меняются со временем).

Это означает, что стационарные движения соответствуют решениям уравнений Рауса (4) вида:

$$\bar{q} = \bar{q}(p) = const;\ \dot{\bar{q}} \equiv 0; \tilde{q} = \tilde{q}_0 + \dot{\tilde{q}}(p)t;\ \dot{\tilde{q}} \equiv \dot{\tilde{q}}(p) = const\ (t_0 = 0) \tag{5}$$

При этом постоянные $\tilde{q}_0$ – произвольны; $\bar{q}(p)$ – решение системы (6).

$$\frac{\partial W(\bar{q}, p)}{\partial \bar{q}} = 0\ \Rightarrow \bar{q} = \bar{q}(p) \tag{6}$$

$\dot{\tilde{q}}(p) = \left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)_{\bar{q}=\bar{q}(p)} \Rightarrow \dot{\tilde{q}}(p)$ – зависит от p.

Получаем, что стационарные движения вида (5) для системы с циклическими координатами (4) являются частными решениями. При этом стационарные движения не изолированы, они образуют семейства, поскольку постоянные p произвольны. $\bar{q}(p)$ – положения равновесия приведенной по Раусу системы. (рис.4.1)

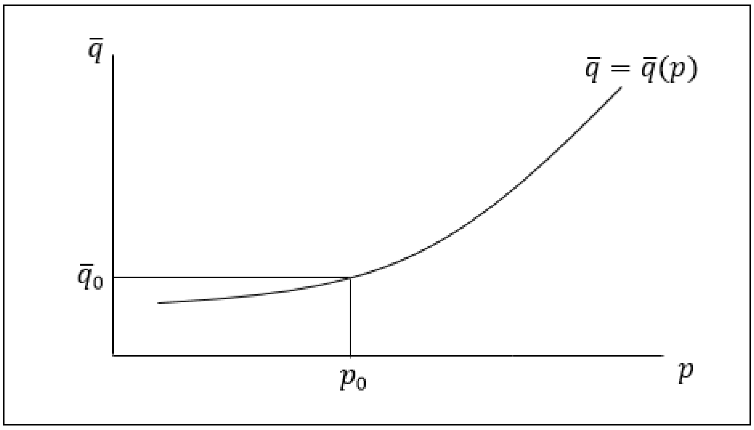

Рис.4.1

Пусть $p = p_0$ – фиксировано $\Rightarrow \bar{q} = \bar{q}(p_0) = \bar{q}_0$. Вводим отклонения фазовых переменных от их значений в исходном стационарном движении:

$$x = \bar{q} - \bar{q}_0;\ \dot{x} = \dot{\bar{q}};\ y = p - p_0; z = \tilde{q} - \tilde{q}_0 - \dot{\tilde{q}}_0 t$$

$\tilde{q}(p_0) = \tilde{q}_0$.

$$\frac{\partial W}{\partial q^i} = \left(\frac{\partial W}{\partial q^i}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q^i \partial q^j}\right)_0 x^j + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial p_\alpha \partial q^i}\right)_0 y_\alpha + O_2$$

Пояснение: $(\dots)_0 = (\dots)_{\substack{p=p_0 \\ \bar{q}=\bar{q}_0}}$.

$$\frac{\partial W}{\partial p_\alpha} = \left(\frac{\partial W}{\partial p_\alpha}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\right)_0 y_\beta + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q^i \partial p_\alpha}\right)_0 x^i + O_2$$

$$\begin{cases} b_{ij}(\bar{q}_0)\ddot{x}^j + g_{ij}(\bar{q}_0, p_0)\dot{x}^j + c_{ij}(\bar{q}_0, p_0)\dot{x}^j + f_i^\alpha(\bar{q}_0, p_0) y_\alpha = 0 \\ \dot{y}_\alpha = 0; \dot{z}^\alpha = -g_i^\alpha(\bar{q}_0, p_0)\dot{x}^i + f_i^\alpha(\bar{q}_0, p_0) x^i + a^{\alpha\beta}(\bar{q}_0) y_\beta \end{cases} \quad (7)$$

где $c_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial q^i \partial q^j}$; $f_i^\alpha = \frac{\partial^2 W}{\partial q^i \partial p_\alpha}$; $g_i^\alpha = \frac{\partial b_i}{\partial p_\alpha}$. Эта система – уравнения малых колебаний в окрестности стационарного движения (отброшены нелинейные члены).

Пример (плоская задача Кеплера):

Выбираем единицы измерения так, что $m = 1$; $\mu = \gamma M = 1$.

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2); V = -\frac{1}{r}$$

Есть циклический интеграл $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\dot{\varphi} = p \Rightarrow \left(\dot{\varphi} = \frac{p}{r^2}\right)(*) \Rightarrow$

$$R = (T - V - p\dot{\varphi})_{(*)} = \frac{1}{2}\,\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\,\dot{r}^2\frac{p^2}{r^4} + \frac{1}{r} - \frac{p^2}{r^2} = R_2 - W$$

$$R_2 = \frac{1}{2}\,\dot{r}^2; W = V + \frac{1}{2}\frac{p^2}{r^2}$$

В задаче Кеплера есть стационарные движения, на которых $r = const$; $\dot{\varphi} = const$.

$$\frac{dW}{dr} = \frac{1}{r^2} - \frac{p^2}{r^3} = \frac{1}{r^3}(r - p^2) \Rightarrow r = r(p) = p^2$$

$$\dot{\varphi} = \left(\frac{p}{r^2}\right) = \frac{p}{p^4} = \frac{1}{p^3} \Rightarrow \dot{\varphi}(p) = \frac{1}{p^3}$$

Фиксируем p: $p = p_0$. Вводим $x = r - p_0^2$ – отклонение r от его значения на стационарном движении. $\dot{x} = \dot{r}; y = p - p_0; z = \varphi - \varphi_0 - \frac{1}{p^3}t$.

Уравнение Рауса:

$$\ddot{r} + \frac{dW}{dr} = 0; \dot{p} = 0;\ \dot{\varphi} = \frac{p}{r^2}$$

Уравнение малых колебаний:

$$\frac{dW}{dr} = \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)_0 + \left(\frac{d^2W}{dr^2}\right)_0 x + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial p}\right)_0 y$$

$$\ddot{x} - \frac{1}{p_0^6}x - \frac{2}{p_0^5}y = 0; \dot{y} = 0; \dot{z} = \frac{1}{p_0^6}y - \frac{2}{p_0^3}x$$

В общем случае уравнения малых колебаний в окрестности стационарного движения описывают по позиционным переменным колебания в окрестности не исходного стационарного движения, а близкого к нему.

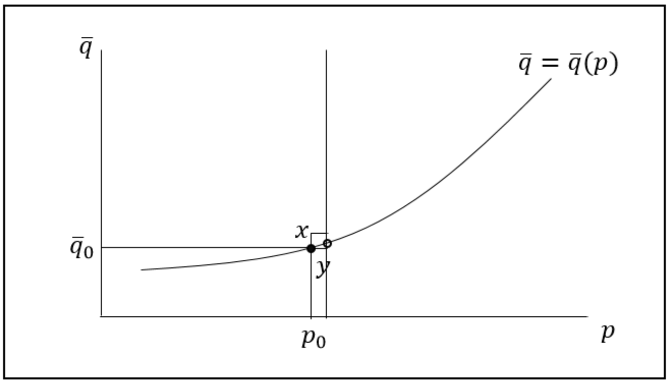

Рис.4.2

<u>Пояснение к высказыванию:</u>

$$\ddot{x} + \omega^2 x - by = 0$$

Здесь $\omega^2 = \frac{1}{p_0^6}$; $b = -\frac{2}{p_0^5}$. Уравнение малых колебаний по позиционным переменным (по радиусу). Если $y = 0 \Rightarrow x = A\cos(\omega t + \theta)$. Если $y \neq 0 \Rightarrow y = c \Rightarrow \left(x - \frac{bc}{\omega^2}\right)^{\cdot\cdot} + \omega^2\left(x - \frac{bc}{\omega^2}\right) \equiv 0$. Значит, что $x - \frac{bc}{\omega^2} = A\cos(\omega t + \theta)$, $x = \frac{bc}{\omega^2} + A\cos(\omega t + \theta)$. Получаем, что колебания не около нуля, а около какой-то другой точки.

Гантель Белецкого

y – притягивающий центр. Рассматривается двухмассовая гантеля (рис.4.3). Плоскопараллельное движение. φ – полярный угол, θ – угол отклонения гантели от направления на радиус-вектор, длина гантели $2a$.

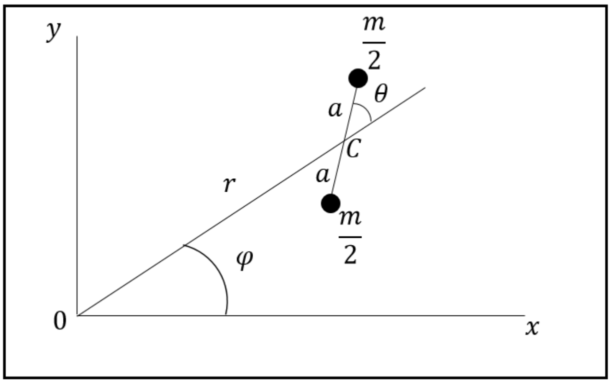

Рис.4.3 Гантель Белецкого

$$T = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) + \frac{1}{2}ma^2(\dot\theta + \dot\varphi)^2$$

Лекция 5

Неголономные системы

5.1 Уравнения движения неголономных систем в переменных Лагранжа с неопределенными множителями

Рассматриваем систему материальных точек $m_\nu, \vec{r}_\nu, \vec{F}_\nu(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t); \vec{r} = \{\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N\}$. Предположим, что на систему наложены голономные и неголономные связи.

$$f(\vec{r}, t) = 0; f: \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{l_1}; rank\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\right)\bigg|_{f=0} = l_1 \ (0 \le l_1 \le 3N) \quad (1)$$

$$A_1(\vec{r}, t)\dot{\vec{r}} + a_1(\vec{r}, t) = 0; A_1: l_1 \times 3N;\ a_1: l_1 \times 1; rank A_1 = l_1 \quad (1')$$

$$A_2(\vec{r}, t)\dot{\vec{r}} + a_2(\vec{r}, t) = 0; A_2: l_2 \times 3N;\ a_2: l_2 \times 1; rank A_2 = l_2 \ (0 < l_1 < 3N) \quad (2)$$

$$\begin{cases} \vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q, t); q = (q^1, \dots, q^n)\ (n = 3N - l_1) \quad \Leftarrow (1) \\ \dot{\vec{r}}_\nu = \dfrac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^s}\dot{q}^s + \dfrac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t};\ s = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3)$$

(3) подставим в (2), тогда мы получим, что мы можем неголономные связи представить в виде соотношения:

$$D(q, t)\dot{q} + d(q, t) = 0; D: l_2 \times n;\ d: l_2 \times 1 \quad (4)$$

Виртуальные перемещение обобщенных координат:

$$D(q, t)\delta q = 0 \ \Rightarrow\ \delta q \in \Pi^{n - l_2} \quad (5)$$

Кинетическая энергия исходной системы в обобщенных координатах:

$$T = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu(\dot{\vec{r}}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu) = T(\dot{q}, q, t)$$

Обобщенные силы:

$$Q_s = \sum_{\nu=1}^{N}\left(F_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^s}\right) = Q_s(\dot{q}, q, t)$$

Принцип Даламбера-Лагранжа в Лагранжевых переменных:

$$\left(\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q} - Q\right)\delta q = 0 \quad (6)$$

Из соотношений (6) вычитаем соотношения (5), умноженные на $\lambda\ (\lambda \in \mathbb{R}^{l_2})$. $D = (d_s^\alpha)_{\substack{\alpha=1,\dots,l_2 \\ s=1,\dots,n}}$. Тогда:

$$\left(\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^s}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q^s} - Q_s - \lambda_\alpha d_s^\alpha\right)\delta q^s = 0 \qquad (7)$$

Среди $\delta q^1, \dots, \delta q^n$ согласно (5) есть $n - l_2$ независимых, а l_2 зависимых. Выбирая $\lambda_1, \dots, \lambda_{l_2}$ так, что скобки () в (7) при зависимых δq^s обратились в нуль. Тогда и все остальные скобки равны нулю. Таким образом, получаем уравнения движения неголономной системы в переменных Лагранжа с неопределенными множителями:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^s}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q^s} - Q_s = \lambda_\alpha d_s^\alpha \ (s = 1, \dots, n) & (8) \\ d_s^\alpha \dot{q}^s + d^\alpha = 0 \ (\alpha = 1, \dots, l_2)\ (rank(d_s^\alpha) = l_2) & (9) \end{cases}$$

(8), (9) – замкнутая система относительно $n + l_2$ неизвестных q, λ.

5.2 Уравнения движения неголономных систем, не содержащие неопределенных множителей (идея и ее реализация для систем Чаплыгина)

Из (9) ⇒ (10):

$$\dot{q}^\alpha = b_i^\alpha(q,t)\dot{q}^i + b^\alpha(q,t)\ (\alpha = k+1, \dots, n)\ (i = 1, .., k; k = n - l_2 = 3N - l_1 - l_2) \qquad (10)$$

где n – размерность пространства конфигураций; $k < n$ – число степеней свободы.

$$i, j, h = 1, .., k;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta = k+1, \dots, n$$

Распишем уравнения (8) в виде системы:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q^i} - Q_i = \lambda_\alpha b_i^\alpha \ (i = 1, \dots, k) & (11) \\ \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} - Q_\alpha = -\lambda_\alpha \ (\alpha = k+1, \dots, n) & (12) \end{cases}$$

λ_α из системы (12) подставим в (11), тогда получим:

$$\left[\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q^i} - Q_i\right] + \left[\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} - Q_\alpha\right] b_i^\alpha = 0\ (i = 1, \dots, k) \qquad (13)$$

Продифференцируем неголономные связи (10):

$$\ddot{q}^\alpha = b_i^\alpha \ddot{q}^i + \frac{\partial b_i^\alpha}{\partial t}\dot{q}^i + \frac{\partial b_i^\alpha}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial b_i^\alpha}{\partial q^\beta}\left(b_j^\beta \dot{q}^j + b^\beta\right) + \frac{\partial b^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial b^\alpha}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial b^\alpha}{\partial q^\beta}\left(b_i^\beta \dot{q}^i + b^\beta\right) \quad (10')$$

(10) в совокупности с $(10')$ позволяют выразить $\dot{q}^\alpha$ и $\ddot{q}^\alpha$ $(\alpha = k+1, \dots, n)$ через q^i, q^α и $\dot{q}^i$ $(i = 1, \dots, k)$. Подставим (10) и $(10')$ в уравнение (13), получим:

$$\Phi_i(\ddot{q}^1, \dots, \ddot{q}^k, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^k, q^1, \dots, q^n, t) = 0 \ (i = 1, \dots, k) \tag{14}$$

(14)+(10) – замкнутая система уравнений.

Определение: Если неголономные связи записаны в виде (10) и однородны ($b^\alpha = 0$), а b_i^α зависят от $q^1, \dots, q^k$, причем T и Q не зависят от времени и $q^{k+1}, \dots, q^n$, то система называется системой Чаплыгина.

Обозначим $\bar{q} = (q^1, \dots, q^k)$.

$$\dot{q}^\alpha = b_i^\alpha \bar{q} \dot{q}^i \ (\alpha = k+1, \dots, n; i = 1, \dots, k) \tag{15}$$

$$T = \frac{1}{2} a_{ij}(\bar{q}) \dot{q}^i \dot{q}^j + a_{i\alpha}(\bar{q}) \dot{q}^i \dot{q}^\alpha + \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}(\bar{q}) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta$$

$$Q_s = Q_s(\bar{q}, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \ (s = 1, \dots, n)$$

Введем обозначения: $T_*(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = (T)_{(15)} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} + 2a_{i\alpha} b_i^\alpha + a_{\alpha\beta} b_i^\alpha b_j^\beta\right) \dot{q}^i \dot{q}^j$; $\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\right)_{(15)} = a_{\alpha i} \dot{q}^i + a_{\alpha\beta} b_i^\beta \dot{q}^i = \left(a_{\alpha i} + a_{\alpha\beta} b_i^\beta\right) \dot{q}^i = \tau_{\alpha i} \dot{q}^i$; $Q_i^* = (Q_i)_{(15)} + (b_i^\alpha Q_\alpha)_{(15)} = Q_i^*(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$; $\nu_{ij}^\alpha = \frac{\partial b_i^\alpha}{\partial q^j} - \frac{\partial b_j^\alpha}{\partial q^i} = -\nu_{ji}^\alpha$; $N_{ijh} = \tau_{\alpha h} \nu_{ij}^\alpha \equiv -N_{jih}$. Получаем уравнение Чаплыгина:

$$\left(\frac{\partial T_*}{\partial \dot{q}^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T_*}{\partial q^i} - Q_i^* = N_{ijh} \dot{q}^j \dot{q}^h \ (i = 1, \dots, k) \tag{16}$$

Система (16) замкнута относительно $q^1, \dots, q^k$. Правые части уравнений (16) тождественно обращаются в ноль, если связи (15) интегрируемы.

Если $q^i = q^i(t) \ (i = 1, .., k)$ – решения системы (16), то $q^\alpha(t) = q^\alpha(0) + \int_0^t b_i^\alpha(\bar{q}(t)) \dot{q}^i(t) dt$.

Пример (Сани (конек) Чаплыгина на горизонтальной плоскости):

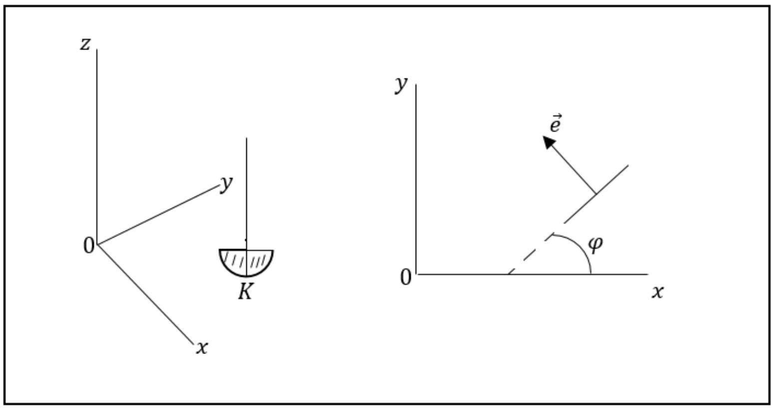

Рис.5.1

φ, x, y – обобщенные координаты. Угловая скорость $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_z$. Скорость центра масс $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$. Введем вектор $\vec{e} = -sin\varphi\vec{e}_x + cos\varphi\vec{e}_y$, ортогональный лезвию. Имеем связь $(\vec{v}, \vec{e}) = 0$ (конек не может скользить ортогонально плоскости своего лезвия).

$$-\dot{x}sin\varphi + \dot{y}cos\varphi = 0\ (n = 3, k = 2, l_2 = 1) \qquad (1)$$

Связь (1) не интегрируема. Выбираем единицу измерения массы так, чтобы $m = 1$, а единицу длины выбираем так, чтобы центральный момент инерции относительно вертикали (рис.5.1 (а)) $J_{sz} = 1$.

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2); Q = 0$$

Составляем уравнение движения:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = 0 \\ \ddot{x} = -\lambda sin\varphi \\ \ddot{y} = \lambda cos\varphi \\ (1) \end{cases}$$

$$(1)\ \Rightarrow \dot{y} = \dot{x}tg\varphi \Rightarrow \ddot{y} = \ddot{x}tg\varphi + \frac{\dot{x}\dot{\varphi}}{cos^2\varphi}$$

Тогда $\ddot{x} = -\lambda sin\varphi$; умножаем на $cos\varphi$, а $\ddot{x}tg\varphi + \frac{\dot{x}\dot{\varphi}}{cos^2\varphi} = \lambda cos\varphi$ умножаем на $sin\varphi$ и складываем:

$$\begin{cases} \frac{\ddot{x}}{cos\varphi} + \frac{\dot{x}\dot{\varphi}}{cos^2\varphi}sin\varphi = 0 \\ \ddot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

$$\dot{\varphi} = \omega = const \neq 0$$

$$\varphi = \omega t + \varphi_0\ (\varphi_0 = 0)\ \text{(без уменьшения общности)}$$

Получаем:

$$\ddot{x} + \omega\dot{x}\frac{sin\omega t}{cos\omega t} = 0$$

$$\frac{d(\dot{x})}{\dot{x}} = \frac{d(cos\omega t)}{cos\omega t}$$

$$\dot{x} = Ccos\omega t \Rightarrow x = \frac{C}{\omega}sin\omega t + a$$

$$\dot{y} = Csin\omega t \Rightarrow y = -\frac{C}{\omega}cos\omega t + b$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \frac{C^2}{\omega^2}$$

Если $Q_i = -\frac{\partial V(\bar{q})}{\partial q^i}; Q_\alpha = 0 \Rightarrow Q_i^* = Q_i \Rightarrow$

$$\left(\frac{\partial T_*}{\partial \dot{q}^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T_*}{\partial q^i} + \frac{\partial V(\bar{q})}{\partial q^i} = N_{ijh}\dot{q}^j\dot{q}^h \ (i = 1, \dots, k)$$

$$T_* + V = const$$

Лекция 6

Уравнения Аппеля

6.1 Принцип Гаусса

Рассматриваем систему материальных точек с массами m_ν, положения этих точек в трехмерном пространстве определяется $\vec{r}_\nu$, заданные силы $\vec{F}_\nu(\vec{r},\dot{\vec{r}},t), \vec{r}=\{\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N\}\in \mathbb{R}^{3N}, \vec{F}=\{\vec{F}_1,\dots,\vec{F}_N\}$. Введем диагональную матрицу $M=(m_1,m_1,m_1,m_2,\dots,m_N)_{3N\times 3N}$. Пусть на систему наложены геометрические связи

$$f(\vec{r},t)=0; f\colon \mathbb{R}^{3N}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{l_1}; rank\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\right)\Big|_{f=0}=l_1; 0\le l_1<3N \qquad (1)$$

Продифференцировав по времени геометрические связи, представляем их в виде линейных дифференциальных связей:

$$A_1(\vec{r},t)\dot{\vec{r}}+a_1(\vec{r},t)=0; A_1=\frac{\partial f}{\partial \vec{r}};\ a_1=\frac{\partial f}{\partial t} \qquad (1')$$

Положим, что на систему наложены линейные дифференциальные связи:

$$A_2(\vec{r},t)\dot{\vec{r}}+a_2(\vec{r},t)=0; A_2\colon l_2\times 3N;\ a_2\colon l_2\times l_1;\ rankA_2=l_2; 0\le l_2<3N-l_1 \qquad (2)$$

где $(0<l_1+l_2<3N)$.

В совокупности продифференцированные геометрические связи и линейные дифференциальные связи можно представить в виде:

$$A\dot{\vec{r}}+a=0; A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix};\ a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}; rankA=l=l_1+l_2 \qquad (3)$$

Если продифференцировать соотношение (3) по времени, то получим:

$$A(\vec{r},t)\ddot{\vec{r}}+\alpha(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)=0 \qquad (4)$$

$$\Rightarrow\ \ddot{\vec{r}}\in\Pi^{3N-l}=\Pi$$

Принуждение по Гауссу:

$$G(\ddot{\vec{r}})=\sum_{\nu=1}^{N}\left(m_\nu\left(\ddot{\vec{r}}_\nu-\frac{\vec{F}_\nu}{m_\nu}\right),\left(\ddot{\vec{r}}_\nu-\frac{\vec{F}_\nu}{m_\nu}\right)\right)=\left(M(\ddot{\vec{r}}-M^{-1}\vec{F}),(\ddot{\vec{r}}-M^{-1}\vec{F})\right) \qquad (5)$$

<u>Теорема:</u> $\ddot{\vec{r}}_0$ – действительные ускорения системы с заданными силами и связями, если и только если $G(\ddot{\vec{r}}_0)=\min\limits_{\ddot{\vec{r}}\in\Pi}G(\ddot{\vec{r}})$.

<u>Доказательство:</u> Рассмотрим функцию $W(\ddot{\vec{r}},\lambda)=\frac{1}{2}G(\ddot{\vec{r}})-\left(\lambda,(A\ddot{\vec{r}}+\alpha)\right)$, где $\lambda\in\mathbb{R}^l$. Ищем безусловный экстремум этой функции по переменным $\ddot{\vec{r}}$ и λ:

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = 0 \;\Leftrightarrow\; \ddot{\vec{r}} \in \Pi$$

$\frac{\partial W}{\partial \ddot{\vec{r}}} = M\ddot{\vec{r}} - \vec{F} - A^T\lambda = 0$ – уравнение Лагранжа первого рода, решение которых совместно с уравнением связи дает действительное ускорение. Теорема доказана.

6.2 Уравнения Аппеля

Рассматриваем систему N материальных точек (обозначения масс, радиус-векторов и сил те же самые, что и в 6.1). Предполагаем, что на систему наложены голономные и/или линейные неголономные связи ((1) и/или (2)). Если есть голономные связи, то можно ввести обобщенные координаты $(1) \Rightarrow$:

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q,t);\; q = (q^1, .., q^n); n = 3N - l_1 \tag{6}$$

Дифференцируя эти координаты по времени, находим скорости точек:

$$\dot{\vec{r}}_\nu = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^s}\dot{q}^s + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}\;(s = 1, \dots, n) \tag{7}$$

Подставляя соотношения (6) и (7) в (2):

$$b_s^\alpha(q,t)\dot{q}^s + b^\alpha(q,t) = 0\;(\alpha = 1, \dots, l_2);\; rank(b_s^\alpha) = l_2 \tag{8}$$

Система (8) – линейная неоднородная система l_2 уравнений относительно $n > l_2$ переменных $\dot{q} \Rightarrow$ общее решение этой системы имеет вид:

$$\dot{q}^s = c_i^s(q,t)\omega^i + c^S(q,t) = 0\;(i = 1, \dots, k = n - l_2) \tag{9}$$

$\omega = (\omega^1, \dots, \omega^k)$ – вектор псевдоскоростей (квазискоростей). В общем случае каждая омега не может быть представлена в виде производной по времени от какой-то функции от координат.

Пояснение: Третья компонента угловой скорости $r = \dot{\varphi} + \dot{\psi}cos\theta$ – это линейная комбинация истинных обобщенных скоростей, но она не может быть представлена в виде производной от какой-то функции: не $\exists\Phi(\varphi,\psi,\theta)\colon r = \dot{\Phi}$.

Подставим (9) в (7):

$$\dot{\vec{r}}_\nu = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^s}\left(c_i^s\omega^i + c^S\right) + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \Rightarrow \tag{10}$$

$$\ddot{\vec{r}}_\nu = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^s}c_i^s\dot{\omega}^i + \vec{\rho}_\nu(\omega,q,t) \tag{11}$$

Введем функцию $G_*(\dot{\omega}) = \left\{\sum_{\nu=1}^N\left(m_\nu\left(\ddot{\vec{r}}_\nu - \frac{\vec{F}_\nu}{m_\nu}\right), \left(\ddot{\vec{r}}_\nu - \frac{\vec{F}_\nu}{m_\nu}\right)\right)\right\}_{(9)-(11)} =$ $\sum_{\nu=1}^N\left(m_\nu\ddot{\vec{r}}_\nu, \ddot{\vec{r}}_\nu\right)_{(11)} - 2\left\{\sum_{\nu=1}^N\left(\ddot{\vec{r}}_\nu, \vec{F}_\nu\right)\right\}_{(11)} + \left\{\sum_{\nu=1}^N\frac{(\vec{F}_\nu,\vec{F}_\nu)}{m_\nu}\right\} = 2S - 2\sum_{\nu=1}^N\left(\vec{F}_\nu, \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^s}\right)c_i^s\dot{\omega}^i -$

$2\sum_{\nu=1}^{N}\left(\vec{F}_\nu, \vec{\rho}_\nu\right) + \sum_{\nu=1}^{N}\frac{(\vec{F}_\nu,\vec{F}_\nu)}{m_\nu}$. $S = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}\left(m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu, \ddot{\vec{r}}_\nu\right)_{(11)}$ – энергия ускорений. $S = S(\dot{\omega}, \omega, q, t)$. $\sum_{\nu=1}^{N}\left(\vec{F}_\nu, \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^s}\right) c_i^s \dot{\omega}^i = Q_s c_i^s \dot{\omega}^i = \Pi_i \dot{\omega}^i$; $\Pi_i = Q_s c_i^s$. Значит, что

$$G_*(\dot{\omega}) = 2S(\dot{\omega}, \omega, q, t) - 2\Pi_i(\omega, q, t)\dot{\omega}^i + g(\omega, q, t)$$

Мы получили принуждение по Гауссу, выраженное через скорости псевдоскоростей или через псевдоускорения.

Факт: $G(\ddot{\vec{r}})$ имеет min по $\ddot{\vec{r}} \in \Pi \Leftrightarrow G_*(\dot{\omega})$ имеет минимум по $\dot{\omega} \Leftrightarrow$

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\omega}^i}\Pi_i \ (i = 1, \dots, k) \tag{12}$$

Уравнение (12) – уравнение Аппеля.

У нас в системе n штук независимых координат q, k штук независимых ω. Система (12)+(9) – это система $k+n$ уравнений относительно $k+n$ переменных.

6.3 Конек Чаплыгина на наклонной плоскости

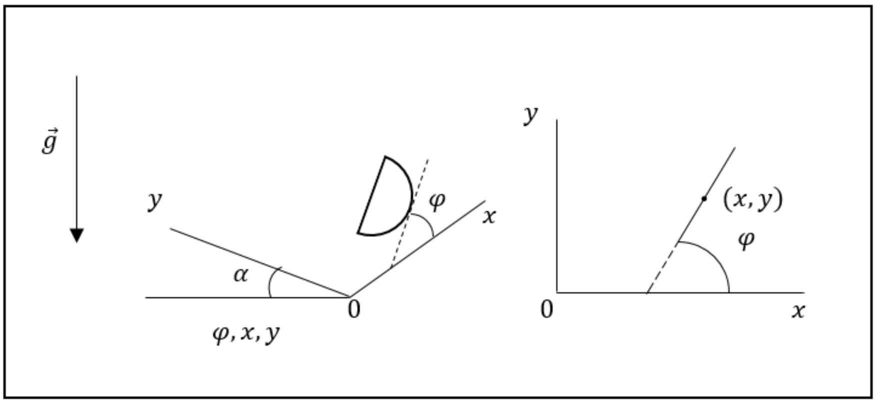

Рис.6.1 Конек Чаплыгина на наклонной плоскости

Выбираем $m = 1, J_{sz} = 1, g = 1$. Обобщенные координаты: φ, x, y. Обобщенные силы: $Q_\varphi = 0, Q_x = 0, Q_y = -sin\alpha$

$$-\dot{x}sin\varphi + \dot{y}cos\varphi = 0, n = 3, l_2 = 1, k = 2$$

$$\dot{\varphi} = \omega; \dot{x} = vcos\varphi; \dot{y} = vsin\varphi$$

$$c_\omega^\varphi = 1;\ c_v^x = cos\varphi;\ c_v^y = sin\varphi$$

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2 + y^2); S = \frac{1}{2}(\ddot{\varphi}^2 + \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2)_{(*)}$$

$$\ddot{\varphi} = \dot{\omega};\ \ddot{x} = \dot{v}cos\varphi - (vsin\varphi)\omega;\ \ddot{y} = \dot{v}sin\varphi + (vcos\varphi)\omega$$

Получаем энергию ускорений:

$$S=\frac{1}{2}(\dot{\omega}^2+\dot{v}^2+v^2\omega^2)$$

Считаем квазисилы по омеге:

$$\Pi_\omega=c_\omega^\varphi Q_\varphi+c_\omega^x Q_x+c_\omega^y Q_y=0$$

Квазисилы для квазискорости v:

$$\Pi_v=c_v^\varphi Q_\varphi+c_v^x Q_x+c_v^y Q_y=-sin\alpha sin\varphi$$

Уравнения Аппеля:

$$\dot{\omega}=0;\ \dot{v}=-sin\alpha sin\varphi$$

$$\omega=\omega_0=const;\ \varphi=\omega_0 t+\varphi_0$$

$$\dot{v}=-sin\alpha sin(\omega_0 t+\varphi_0)\Rightarrow v=\frac{sin\alpha}{\omega_0}cos(\omega_0 t+\varphi_0)+c$$

$$c|_{t=0}=v_0-\frac{sin\alpha}{\omega_0}cos\varphi_0$$

$$\dot{x}=\frac{sin\alpha}{\omega_0}cos^2(\omega_0 t+\varphi_0)+ccos(\omega_0 t+\varphi_0)$$

$$\dot{y}=\frac{sin\alpha}{\omega_0}sin(\omega_0 t+\varphi_0)cos(\omega_0 t+\varphi_0)+csin(\omega_0 t+\varphi_0)$$

$$x=\frac{sin\alpha}{2\omega_0}t+\frac{sin\alpha}{4\omega_0^2}(2\omega_0 t+2\varphi_0)+\frac{c}{\omega_0}sin(\omega_0 t+\varphi_0)+a$$

$$y=-\frac{sin\alpha}{4\omega_0^2}cos(2\omega_0 t+2\varphi_0)-\frac{c}{\omega_0}cos(\omega_0 t+\varphi_0)+b$$

где a,b – произвольные постоянные.

Следовательно, конек на наклонной плоскости едет в бок.

6.4 Конек Каратеодори на наклонной плоскости

Координаты φ,x,y – независимы. $\dot{\varphi},\dot{x},\dot{y}$ – независимы. Обобщенные силы:

$$Q_y=-sin\alpha+Q_y^T;Q_x=Q_x^T;Q_\varphi=0$$

Q_y^T – с индексом трения.

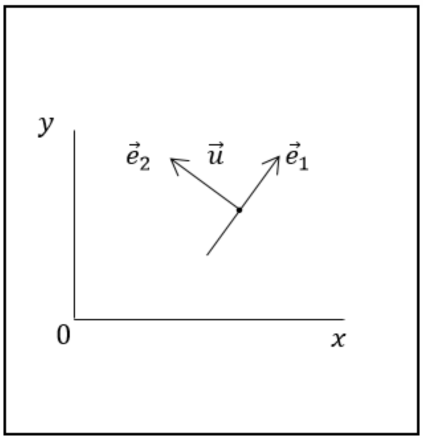

Рис.6.2

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -k\vec{u}$$

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_x cos\varphi + \vec{e}_y sin\varphi$$

$$\vec{e}_2 = -\vec{e}_x sin\varphi + \vec{e}_y cos\varphi$$

Скорость точки контакта (центра масс):

$$\vec{v}_k = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y = v\vec{e}_1 + u\vec{e}_2 = v\big(\vec{e}_x cos\varphi + \vec{e}_y sin\varphi\big) + u\big(-\vec{e}_x sin\varphi + \vec{e}_y cos\varphi\big) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x} = vcos\varphi - usin\varphi \\ \dot{y} = vsin\varphi - ucos\varphi \\ \dot{\varphi} = \omega \end{cases}$$

Эта система голономная.

$$c_\omega^\varphi = 1;\ c_v^x = cos\varphi; c_u^x = -sin\varphi;\ c_v^y = sin\varphi; c_u^y = cos\varphi$$

$$\Pi_\omega = 0;\ \Pi_v = -sin\alpha sin\varphi;\ \Pi_u = -sin\alpha cos\varphi - ku$$

Кинематические уравнения конька Каратеодори:

$$\ddot{\varphi} = \dot{\omega};$$

$$\ddot{x} = \dot{v}cos\varphi - \dot{u}sin\varphi - \omega(vsin\varphi + ucos\varphi);$$

$$\ddot{y} = \dot{v}sin\varphi + \dot{u}cos\varphi + \omega(vcos\varphi - usin\varphi)$$

Считаем энергию ускорений:

$$S = \frac{1}{2}\dot{\omega}^2 + \frac{1}{2}(\dot{v}^2 + \dot{u}^2 + \omega^2(u^2 + v^2) - 2\omega u\dot{v} + 2\omega v\dot{u})$$

Динамические уравнения конька Каратеодори:

$$\dot{\omega} = 0; \dot{v} - \omega u = -sin\alpha sin\varphi; \dot{u} + \omega v = -ku - sin\alpha cos\varphi$$

Лекция 7

Теорема Нетер. Принцип Остроградского

7.1 Теорема Нетер

Рассмотрим лагранжеву систему (механическую систему, на которую наложены идеальные голономные связи и на которую действуют потенциальные силы). Вектор обобщенных координат – $q = (q^1, \dots, q^n) \in \Sigma^n$ (Σ^n – конфигурационное пространство). Для таких систем можно ввести функцию Лагранжа $L(\dot{q}, q, t) = L_2 + L_1 + L_0$. $L_2 = \frac{1}{2} a_{ij}(q,t)\dot{q}^i\dot{q}^j; L_1 = a_i(q,t)\dot{q}^i; L_0 = a_0(q,t)$. Уравнение системы записывается в форме уравнения Лагранжа:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \; (i = 1, \dots, n) \tag{1}$$

Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований конфигурационного пространства. g^s – однопараметрическая группа, которая задает отображение Σ^n на Σ^n: $q \to g^s(q)$ $\big(q \to q(s)\big)$; s – параметр группы. $s \in I \subseteq \mathbb{R}, 0 \in I$. Это действительно группа, так как:

1) $e = g^0$: $q(0) = 0$;

2) $g^{s_2} \circ g^{s_1} = g^{s_1+s_1}$;

3) Если $q \overset{g^s}{\to} q(s)$, то $q(s) \xrightarrow{(g^s)^{-1}} q$.

<u>Определение:</u> Группа g^s называется группой симметрий лагранжевой системы, если $L(\dot{q}(s), q(s), t) \equiv L(\dot{q}, q, t)$.

<u>Замечание:</u> Если $q(t)$, то $g^s\big(q(t)\big): q(t) \to q(t,s)$ синхронно. Отсюда следует, что $\big(q(t,s)\big)^{\cdot} = \dot{q}(s,t)$.

<u>Определение:</u> Векторное поле $v(q)$ называется векторным полем группы симметрий, если $v(q) = \left(\frac{\partial q(s)}{\partial s}\right)_{s=0}$. (Если подробнее: $v\big(q(t)\big) = \left(\frac{\partial q(s,t)}{\partial s}\right)_{s=0}$)

Из синхронности следует, что $\dot{v}\big(q(t)\big) = v\big(\dot{q}(t)\big)$.

<u>Теорема Нетер:</u> Если g^s – группа симметрий лагранжевой системы, то уравнения Лагранжа допускают первый интеграл

$$P = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, v\right) = const \tag{2}$$

<u>Доказательство:</u> Поскольку g^s – группа симметрий:

$$\frac{d}{ds} L(\dot{q}(s), q(s), t) \equiv 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \frac{\partial \dot{q}}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial q}, \frac{\partial q}{\partial s}\right) \equiv 0$$

Пусть $s = 0$. Тогда:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{v}\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial q}, v\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{v}\right) = -\left(\frac{\partial L}{\partial q}, v\right)$$

$$(\dot{p})_{(1)} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, v\right)^{\cdot} = \left(\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)^{\cdot}, v\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{v}\right)_{(1)} = \left(\left(\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)^{\cdot}, \frac{\partial L}{\partial q}\right), v\right)_{(1)} \equiv 0$$

Теорема доказана.

Пример 1:

Пусть q^n – циклическая координата. Тогда $g^s\colon q^j \to q^j;\ q^n \to q^n + s.\ v = (0, \dots, 0, 1)$ $(n-1$ нулей). $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \times 1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} = const.$

Пример 2. Плоская задача Кеплера в декартовых координатах:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), V = -\frac{\mu m}{\sqrt{x^2 + y^2}}, L = T - V$$

$$x \to x\cos s + y\sin s$$

$$y \to -x\sin s + y\cos s, s \in S^1$$

$$\dot{x} \to \dot{x}\cos s + \dot{y}\sin s$$

$$\dot{y} \to -\dot{x}\sin s + \dot{y}\cos s$$

$$(\dot{x}\cos s + \dot{y}\sin s)^2 + (-\dot{x}\sin s + \dot{y}\cos s)^2 = x^2 + y^2$$

Значит, это, действительно, группа симметрий. Посчитаем векторное поле группы симметрий:

$$v = \begin{pmatrix} -x\sin s + y\cos s \\ -x\cos s - y\sin s \end{pmatrix}_{s=0} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

Значит, наша система допускает интеграл площадей в декартовых координатах:

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} y + \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} x = m(\dot{x}y - x\dot{y}) = const$$

Замечание: Интегралы Нетер линейны по скоростям.

$$p = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, v\right) = \left(a_{ij}(q,t)\dot{q}^j + a_i(q,t)\right) v^i$$

Справедлива обратная теорема: если система допускает однопараметрическую группу симметрии, значит, допускает линейный по скоростям интеграл Нетер, то тогда обязательно найдется система координат, в которой этот интеграл будет соответствовать циклической координате.

В плоской задаче Кеплера при переходе от декартовых координат к полярным появляется циклическая координата φ.

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2), V = -\frac{\mu m}{r}$$

Интеграл площадей:

$$mr^2\dot{\varphi} = c$$

7.2 Принцип Гамильтона-Остроградского

Рассматриваем лагранжеву систему. Есть обобщенные координаты q, функция Лагранжа $L(\dot{q}, q, t)$, уравнение Лагранжа:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad (1)$$

Зафиксируем начальный, конечный моменты времени и начальную и конечную точки в пространстве положений:

$$t_0, t_1, q_0, q_1 \qquad (2)$$

$q \in \Sigma^n$.

Рассмотрим множество гладких кривых $\Omega = \{\gamma(t): [t_0, t_1] \to \Sigma^n, \gamma(t_0) = q_0,\ \gamma(t_1) = q_1\}$

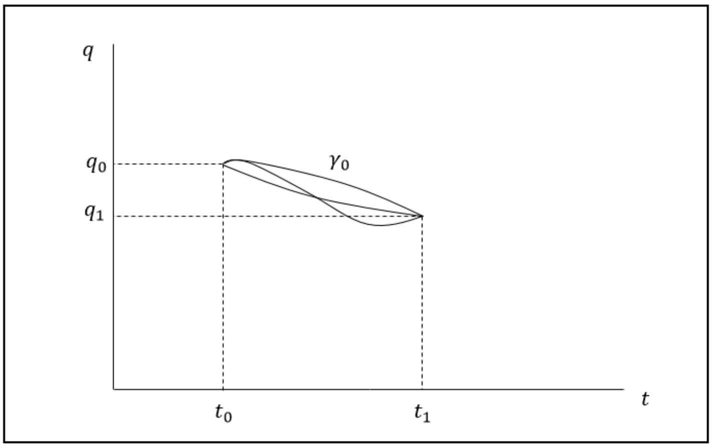

Рис.7.1 Кривые $\gamma(t)$

На множестве Ω зададим функционал

$$I(\gamma(t)) = \int\limits_{\substack{t_0\\ \gamma(t)}}^{t_1} L(\dot{q}, q, t)tdt \tag{3}$$

Этот функционал называется действием по Гамильтону. Его можно переписать в виде:

$$I(\gamma(t)) = \int\limits_{\substack{t_0\\ \gamma(t)}}^{t_1} L(\dot{q}, q, t)tdt = \int\limits_{\substack{t_0\\ \gamma(t)}}^{t_1} L(\dot{\gamma}(t), \gamma(t), t)tdt$$

Зафиксируем одну кривую $\gamma_0(t) \subset \Omega$. Вариацией $\gamma_0(t)$ называется однопараметрическое семейство кривых $\gamma_\alpha(t) \in \Omega$ (α – параметр семейства; $|\alpha| < \alpha_0$).

Вариация изохронная (берется вдоль $t = const$). Можем менять местами варьирование по α и дифференцирование по времени. (рис.7.2)

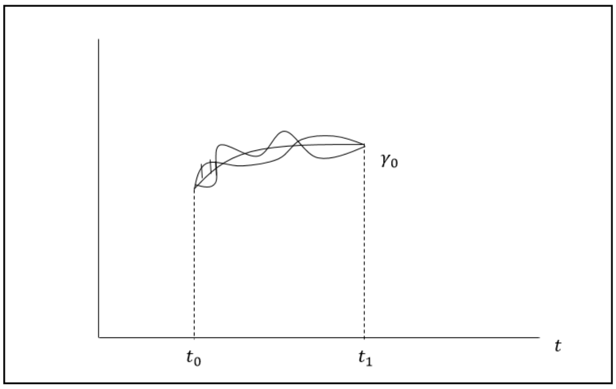

Рис.7.2

$I(\gamma_\alpha(t)) = \Phi(\alpha)$, $I(\gamma_0(t))$ – число.

<u>Определение:</u> Кривая $\gamma_0(t) \in \Omega$ называется экстремалью действия по Гамильтону, если $I'(\gamma_0) = \left(\frac{dI(\gamma_\alpha)}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = 0 \Leftrightarrow \delta I(\gamma_0) = I'(\gamma_0)\delta_\alpha$.

<u>Определение:</u> Векторным полем вариации называется векторное поле $x(t) = \left(\frac{d\gamma_\alpha(t)}{d\alpha}\right)_{\alpha=0}$. Очевидно, что $x(t_{0,1}) = 0$.

<u>Теорема:</u> Кривая $\gamma_0(t)$ – экстремаль действия (3), если и только если $q = \gamma_0(t)$ – решение краевой задачи (1), (2).

<u>Доказательство:</u>

$\left(\frac{dI(\gamma_\alpha)}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = \left\{\frac{d}{d\alpha}\int_{t_0}^{t_1} L(\dot{\gamma}_\alpha(t), \gamma_\alpha(t), t)dt\right\}_{\alpha=0} = \left\{\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{d}{d\alpha}L(\dot{\gamma}_\alpha(t), \gamma_\alpha(t), t)\right]dt\right\}_{\alpha=0} = \int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \frac{d\dot{\gamma}_\alpha}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} + \left(\frac{\partial L}{\partial q}, \frac{d\gamma_\alpha}{d\alpha}\right)_{\alpha=0}\right]dt = \int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{x}\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial q}, x\right)\right]dt = \int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, x\right)^{\cdot} - \left(\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)^{\cdot}, x\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial q}, x\right)\right]dt = \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, x\right)^{\cdot}dt - \int_{t_0}^{t_1}\left(\left(\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial q}\right), x\right)dt = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, x\right)\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}(f_0, x)dt$, где $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, x\right)\Big|_{t_0}^{t_1} = 0$, $f_0 = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial q}$.

Если $q = \gamma_0(t)$ – решения задачи (1,2), тогда $I'(\gamma_0) = 0$. Пусть $I'(\gamma_0) = 0$, тогда $\int_{t_0}^{t_1}(f_0, x)dt = 0$.

Возьмем вариацию $\gamma_\alpha = \gamma_0 + \alpha f_0(t - t_0)(t_1 - t)$. Векторное поле этой вариации $x = \left(\frac{d\gamma_\alpha}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = f_0(t - t_0)(t_1 - t)$. Получаем:

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0^2(t - t_0)(t_1 - t)dt = 0$$

Так как $(t - t_0) > 0, (t_1 - t) > 0$ внутри интервала, значит, что внутри интервала $f_0 = 0$. Следовательно, γ_0 – решение задачи (1), (2).

<u>Замечание:</u> Гамильтон: $L = T - V; T = \frac{1}{2}(A(q)\dot{q}, \dot{q}); V = V(q). I(\gamma_0) = min$, если $t_1 - t_0 < \tau, \left|\left|q_1 - q_0\right|\right| < \rho$.

Лекция 8

Принцип Мопертюи-Лагранжа-Якоби

8.1 Принцип Мопертюи-Лагранжа-Якоби (принцип наименьшего действия в форме Якоби)

Рассмотрим КОНСЕРВАТИВНУЮ лагранжувую систему. Обобщенные координаты $q = (q^1, \dots, q^n) \in \Sigma^n, L = T - V, T = \frac{1}{2} a_{rs}(q)\dot{q}^r \dot{q}^s, V = V(q)$.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = 0;\ T + V = h = const \tag{1}$$

Зафиксируем h, тогда область возможности движения на заданном уровне энергии это $\{q \in \Sigma^n; V(q) \le h\}$. Рассмотрим множество $D_h = \{q: V(q) < h\}$. Зафиксируем $q_0 \in D_h, q_1 \in D_h$. Рассмотрим множество глсадких кривых Ω_h. Кривые это $\gamma(\tau): [\tau_0, \tau_1] \to D_h, \gamma(\tau_0) = q_0, \gamma(\tau_1) = q_1$ (τ_0, τ_1 – произвольны, не фиксированны).

<u>Определение 1:</u> Действием по Якоби называется функционал

$$J_h\big(\gamma(\tau)\big) = \int\limits_{\substack{\tau_0 \\ (\gamma(\tau))}}^{\tau_1} 2\sqrt{h - V}\sqrt{T} d\tau \equiv \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} 2\sqrt{h - V\big(\gamma(\tau)\big)}\sqrt{T\big(\gamma'(\tau), \gamma(\tau)\big)} d\tau \tag{2}$$

$$\gamma'(\tau) = \frac{d\gamma}{d\tau}$$

<u>Замечание:</u> Если кривая γ параметризована $\gamma(t)$, так, что

$$T\big(\dot{\gamma}(t), \gamma(t)\big) + V\big(\gamma(t)\big) = h \tag{3}$$

то $J_h = \int_{t_0}^{t_1}\limits_{\gamma(t)} 2T dt$.-Лагранж

Зафиксируем $\gamma_0(\tau) \subset \Omega_h$. Вариацией кривой $\gamma_0(\tau)$ называем гладкое семейство кривых $\gamma_\alpha(\tau) \in \Omega_h$ ($|\alpha| < \alpha_0$). $\tau_0 = \tau_0(\alpha), \tau_1 = \tau_1(\alpha)$. Вариация не изохронная.

<u>Определение:</u> Пусть $q = f(t)$ – решение уравнения Лагранжа, тогда траекторей этого решения называется геометрическая кривая $\varphi \subset D_h$.

Запишем действие по Якоби в виде

$$J_h(\gamma) = \int\limits_{\substack{q_0 \\ (\gamma)}}^{q_1} \sqrt{2\big(h - V(q)\big)}\sqrt{a_{rs}(q) dq^r dq^s} = \int\limits_{\substack{q_0 \\ (\gamma)}}^{q_1} ds \tag{4}$$

где $ds = \sqrt{2\big(h - V(q)\big) a_{rs}(q) dq^r dq^s}$ – метрика Якоби.

Таким образом $J_h(\gamma)$ – длина кривой γ в метрике Якоби. Длина кривой не зависит от ее параметризации. Поэтому функционал действия по Якоби можно рассматривать на множестве геометрических кривых $\gamma \in D_h$ с закрепленными концами q_0 и q_1. ($\gamma(\tau) \in D_h \times \mathbb{R}, \gamma \in D_h$)

Теорема: Кривая $\gamma_0 \in D_h$ является экстремалью действия по Якоби (4), если и только если γ_0 – траектория решения уравнений Лагранжа (1) с заданными q_0, q_1, h.

Замечание: Если $q = \gamma_0(t)$ – решение уравнений (1) с заданными $q_0, q_1, h \Rightarrow \gamma_0$ – экстремаль действия (4). Если γ_0 – экстремаль действия (4), то $\exists$ параметризация $\gamma_0(t)$: $q = \gamma_0(t)$ – решение уравнений (1) с заданными q_0, q_1, h.

Лемма 1: Любую гладкую кривую $\gamma(\tau)$ можно параметризовать так, что будет выполнено соотношение (3).

Доказательство: Ищем строго возрастающую функцию $\tau(t)$: $T\left(\left(\gamma\big(\tau(t)\big)\right)^{\cdot}, \gamma\big(\tau(t)\big)\right) + V\left(\gamma\big(\tau(t)\big)\right) = h$.

$$T\big(\gamma'(\tau), \gamma(\tau)\big)\dot{\tau}^2 + V\big(\gamma(\tau)\big) = h \Rightarrow$$

$$\dot{\tau} = \sqrt{\frac{h - V\big(\gamma(\tau)\big)}{T\big(\gamma'(\tau), \gamma(\tau)\big)}} \Rightarrow \frac{d\tau}{\sqrt{\dfrac{h - V\big(\gamma(\tau)\big)}{T\big(\gamma'(\tau), \gamma(\tau)\big)}}} = dt \Rightarrow t - t_0 = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\dfrac{h - V\big(\gamma(\tau)\big)}{T\big(\gamma'(\tau), \gamma(\tau)\big)}}} \Rightarrow$$

$t = t(\tau)$ – строго возрастающая $\Rightarrow \exists \tau(t) \uparrow$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2: Пусть I – действие по Гамильтону. Тогда

$$J_h(\gamma) \le I + h(t_1 - t_0) \tag{5}$$

$$J_h(\gamma) = I + h(t_1 - t_0) \Leftrightarrow (3) \tag{6}$$

Доказательство: Рассмотрим $L + h = T - V + h = \left(\sqrt{T} - \sqrt{h - V}\right)^2 + 2\sqrt{(h - V)T} \Rightarrow$

$$\int_{t_0}^{t_1} (L + h)dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sqrt{T} - \sqrt{h - V}\right)^2 dt + \int_{t_0}^{t_1} 2\sqrt{(h - V)T}dt$$

$$I + h(t_1 - t_0) = J_h + \int_{t_0}^{t_1} (\quad)^2 dt \Rightarrow (5)$$

$$\left(\sqrt{T} - \sqrt{h - V}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow (3) \Rightarrow (6)$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы:

1) Пусть $q = \gamma_0(t)$ – решение уравнений $(1) \Rightarrow (3), \delta I\big(\gamma_0(t)\big) = 0$. $(3) \Rightarrow (6) \Rightarrow \delta I\big(\gamma_0(t)\big) = 0 = \delta J_h(\gamma_0) \Rightarrow \gamma_0$ – экстремаль.

2) Дано, что $\delta J_h(\gamma_0) = 0$. Тогда, согласно Лемме 1, $\exists$ параметризация $\gamma_0(t)$: (3) выполнено $\Rightarrow (6) \Rightarrow \delta I\big(\gamma_0(t)\big) = 0 \Rightarrow q = \gamma_0(t)$ – решение.

Теорема доказана.

(чтобы лучше разобраться см. учебник по теоретической механике П. Аппель т.II)

8.2 Уравнения Якоби

$$J_h\big(\gamma(\tau)\big) = \int\limits_{\substack{\tau_0 \\ (\bar{q}_0, \bar{q}_1)}}^{\tau_1} \sqrt{2\big(h - V(\bar{q}, \tau)\big)} \sqrt{a_{ij}(\bar{q}, \tau)\frac{dq^i}{d\tau}\frac{dq^j}{d\tau} + a_{in}(\bar{q}, \tau)\frac{dq^i}{d\tau} + a_{nn}(\bar{q}, \tau) d\tau}$$

где $\bar{q} = (q^1, \dots, q^{n-1})$; $\tau = q^n, i, j = 1, \dots, n-1$. Если записать это по-другому:

$$I(\bar{\gamma}(\tau)) \int\limits_{\substack{\tau_0 \\ (\bar{q}_0, \bar{q}_1)}}^{\tau_1} \Lambda(\bar{q}', \bar{q}, \tau) d\tau\,; \; \bar{q}' = \frac{d\bar{q}}{d\tau}$$

$$\delta J_h = 0 \Leftrightarrow \delta I\big(\bar{\gamma}(\tau)\big) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \bar{q}'}\right)' - \frac{\partial \Lambda}{\partial \bar{q}} = 0 \tag{7}$$

Уравнения Якоби $\equiv$ уравнения Лагранжа (1), редуцированные уровень энергии h.

8.3 Пример (в экзамен не входит)

$n = 2, T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), T + V = h.$

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = 0 \\ \ddot{y} + y = 0 \end{cases}$$

Зададим $x_0 = 1, y_0 = 0, x_1 = 0, y_1 = 1, h = 1.$

$$\begin{cases} x = Acost + Bsint \\ y = Csint + Dcost \end{cases}$$

$$B = 0, D = 0, A = 1, C = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = cost \\ y = sint \end{cases}$$

$$\Lambda = \sqrt{2 - (x^2 + y^2)}\sqrt{y'^2 + 1}; y' = \frac{dy}{dx}$$

$$y'' = (1 + y'^2)\frac{y(1 + 2y') + xy'}{\sqrt{2 - (x^2 + y^2)}}$$

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

Лекция 9

Введение в математическую теорию устойчивости. Часть 1

Теория устойчивости как наука была создана А.М. Ляпуновым (1857-1918) в 1892 году.

9.1 Основные понятия

$$\dot{z} = Z(z,t); z \in \mathbb{R}^n; t \in \mathbb{R}_+ = [0,+\infty) \tag{1}$$

Рассмотрим некоторое частное решение (1):

$$z_0(t): z(t_0) = z_0 \tag{2}$$

Такие решения называются невозмущенными решениями. Также будем рассматривать возмущенные решения:

$$\tilde{z}(t): \tilde{z}(t_0) = \tilde{z} \tag{3}$$

Определение (А.М. Ляпунова, 1892): Невозмущенное движение называется устойчивым, если $\forall\varepsilon > 0$ и $\forall t_0 \in \mathbb{R}_+$ существует $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$: $\left|\left|\tilde{z}(t) - z_0(t)\right|\right| < \varepsilon$ $\forall t \geq t_0$ и $\forall \tilde{z}$: $\left|\left|\tilde{z} - z_0\right|\right| < \delta$, иначе – неустойчивым. Невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и $\lim\limits_{t\to+\infty} ||\tilde{z}(t) - z_0(t)|| = 0$.

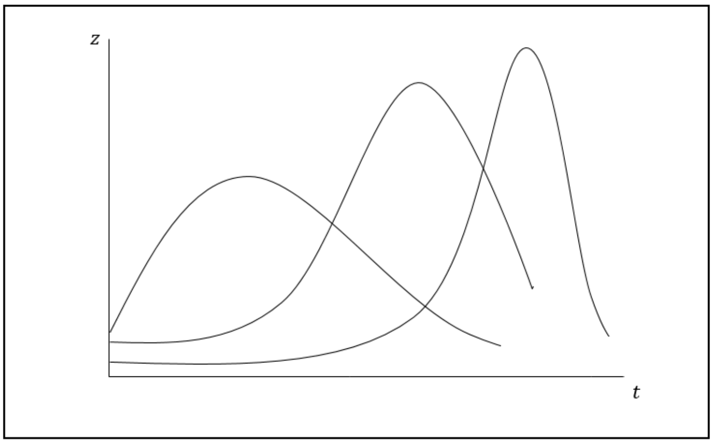

Рис.9.1

Положим $x = z - z_0(t)$: $z = z_0(t) + x$. Запишем уравнение в новых переменных:

$$\dot{x} + \dot{z}_0(t) = Z(z_0(t) + x, t) \Rightarrow \dot{x} = Z(z_0(t) + x, t) - Z\big(z_0(t)\big) = X(x,t)$$

$$\dot{x} = X(x,t) \tag{4}$$

(4) – уравнения возмущенного движения.

$$x \equiv 0 \ (X(0,t) \equiv 0) \tag{5}$$

Уравнения возмущенного движения рассматриваются в некоторой окрестности нуля:

$$x = S_\rho = \left\{x: \left|\left|x\right|\right| < \rho\right\}$$

Определение: Возмущенное движение называется устойчивым, если $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall t_0 \in \mathbb{R}_+$ существует $\delta(\varepsilon, t_0) > 0 : \tilde{x}(t) \in S_\varepsilon \ \forall t \geq t_0$ и $\forall \tilde{x} \in S_\delta$, иначе – неустойчивым. Возмущенное движение называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и $\lim\limits_{t\to+\infty} \tilde{x}(t) = 0$.

Начальные условия для уравнений возмущенного движения берутся в виде $\tilde{x} = \mu y;\ y \sim 1;\ \mu < \mu_0$.

Определение: Будем называть функцию $V(x,t): S_\rho \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ функцией Ляпунова ($V(x,t) \in \mathcal{L}$), если $V(x,t) \in C^1, V(0,t) \equiv 0$.

$\dot{V}(x,t) \overset{\text{def}}{=} \left.\frac{dV(x,t)}{dt}\right|_{(4)} = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}, X\right)$ – полная производная функции V по t в силу уравнений возмущенного движения. $\dot{V}(0,t) \equiv 0$.

Определение: Функция $a(r)$ называется функцией Хана $(a(r) \in \mathcal{K})$, если

1) $a(r) \in C: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$;

2) $a(0) = 0$;

3) $a(r_2) > a(r_1) \geq 0 \ \forall r_2 > r_1 \geq 0$.

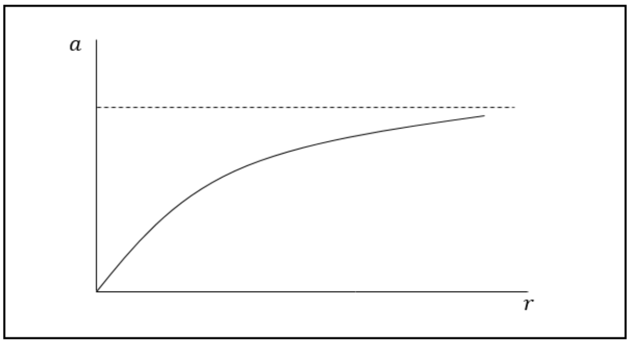

Рис.9.2 Вид функции Хана

9.2 Основные теоремы прямого (второго) метода Ляпунова

Теорема 1 (А.М.Л. 1892): Если $\exists V(x,t) \in \mathcal{L}$ и $a(r) \in \mathcal{K}$:

1) $V(x,t) \geq a(||x||)$;

2) $\dot{V}(x,t) \leq 0$;

то невозмущенное движение устойчиво.

Доказательство: Берем $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall t_0 \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow a(\varepsilon) > 0 \Rightarrow \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0): V(x, t_0) < a(\varepsilon) \ \forall x \in S_\delta$.

Берем $x_0 \in S_\delta \overset{(4)}{\Rightarrow} x_0(t)(x_0(t_0) = x_0) \Rightarrow\ a\big(\big||x_0(t)|\big|\big) \leq \big(\text{в силу } (1)\big) V(x_0(t), t) \leq \big(\text{в силу } (2)\big) \leq V(x_0, t_0) < a(\varepsilon)\ \forall x_0 \in S_\delta, \forall t \geq t_0$. Функция a – это функция Хана. Следовательно, $\big||x_0(t)|\big| < \varepsilon \Rightarrow x_0(t) \in S_\varepsilon$. Теорема доказана.

<u>Теорема 2:</u> Если $\exists V(x,t) \in \mathcal{L}$ и $a, b, c \in \mathcal{K}$:

1) $b(||x||) \geq V(x,t) \geq a(||x||)$;

2) $\dot{V}(x,t) \leq -c(||x||)$;

то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

<u>Доказательство:</u> Из теоремы 1 следует, что невозмущенное движение устойчиво. То есть $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall t_0 \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0 : x(t) \in S_\delta\ \forall t \geq t_0$ и $\forall x(t_0) \in S_\delta$.

Рассмотрим $V(x(t), t)$: она ограничена (1) теоремы и $x(t) \in S_\varepsilon$) и монотонно убывает (2) теоремы). Значит, что $\exists \lim\limits_{t \to +\infty} V(x(t), t) = v \geq 0$.

1) Если $v = 0 \Rightarrow 0 \leq a\big(\big||x(t)|\big|\big) \leq V(x(t), t) \Rightarrow a\big(\big||x(t)|\big|\big) \to 0 \Rightarrow x(t) \to 0$.

2) Если $v > 0 \Rightarrow b\big(\big||x(t)|\big|\big) \geq V(x(t), t) \geq v > 0 \Rightarrow \exists \sigma > 0 : \big||x(t)|\big| \geq \sigma \Rightarrow c\big(\big||x(t)|\big|\big) \geq c(\sigma) > 0$. $V(x(t), t) - V(x(t_0), t_0) = \int_{t_0}^t \dot{V}\,(x(t), t) dt \leq -\int_{t_0}^t c\, x(t) dt \leq -c(\sigma)(t - t_0)$, что невозможно, так как правая часть стремится к $-\infty$ при $t \to +\infty$, а левая – ограничена. Теорема доказана.

<u>Теорема 3 (Н. Г. Четаева, 1938):</u> Если $\exists \varepsilon > 0$, $\exists t_0 \in \mathbb{R}_+$, $\exists$ открытая область Ω $(0 \in \partial\Omega)$, функция $V(x,t) \in \mathcal{L}$, постоянная $k > 0$ и функция $a(r) \in \mathcal{K}$:

1) $k \geq V(x,t) > 0\ \forall x \in \Omega \cap S_\varepsilon, t \geq t_0$;

2) $\dot{V}(x,t) \geq a(V)\ \forall x \in \Omega \cap S_\varepsilon, t \geq t_0$;

3) $V(x,t) = 0\ \forall x \in \partial\Omega \cap S_\varepsilon, t \geq t_0$;

то невозмущенное движение неустойчиво.

<u>Доказательство:</u> Допустим, что невозмущенное движение устойчиво. То есть по $\varepsilon > 0$ и по t_0 $\exists \delta(\varepsilon, t_0 > 0) : x(t) \in S_\varepsilon\ \forall t \geq t_0, \forall x(t_0) \in S_\delta$.

Возьмем $x_0 = x(t_0) \in S_\delta \cap \Omega$ и рассмотрим решение $x_0(t)$. Тогда

$$V(x_0, t_0) > 0 \Rightarrow V(x_0(t), t) > 0\ \ \forall t \geq t_0 \Rightarrow \dot{V}(x_0(t), t) \geq a(V) \geq a\big(V(x_0, t_0)\big) > 0$$

$$V - V_0 = \int\limits_{t_0}^{t} \dot{V} dt \geq \int\limits_{t_0}^{t} a(V_0) dt = a(V_0)(t - t_0)$$

что невозможно, так как левая часть ограничена, а правая стремится к плюс бесконечности при $t \to t_0$. Теорема доказана.

Теорема 3$'$: $2'$) $\dot{V}(x,t) \geq b\big(||x||\big), b \in \mathcal{K}$.

Теорема 3$''$: $2''$) $\dot{V}(x,t) \geq \alpha V \ (\alpha > 0)$.

Лекция 10

Введение в математическую теорию устойчивости. Часть 2

10.1 Основные теоремы прямого метода Ляпунова для стационарных систем

Будем рассматривать уравнения возмущенного движения

$$\dot{x} = X(x), x \in S_\rho; X: S_\rho \to \mathbb{R}^n; X(0) = 0 \quad (1)$$

То есть у нас есть невозмущенное движение

$$x = 0 \quad (2)$$

Теорема $1'$: Если существует функция $V(x) \in \mathcal{L}$:

1) $V(x) > 0\ \forall x \in S_\rho \backslash (0)$;

2) $\dot{V}(x) \leq 0\ \forall x \in S_\rho$,

то невозмущенное движение устойчиво.

Теорема $2'$: Если существует функция $V(x) \in \mathcal{L}$:

1) $V(x) > 0\ \forall x \in S_\rho \backslash (0)$;

2) $\dot{V}(x) < 0\ \forall x \in S_\rho$,

то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Теорема $3'$: Если $\exists \varepsilon > 0$ $(\varepsilon \leq \rho)$, открытая область $\Omega (0 \in \partial\Omega)$ и $V(x) \in \mathcal{L}$:

1) $V(x) > 0\ \forall x \in \Omega \cap S_\varepsilon$;

2) $V(x) = 0\ \forall x \in \partial\Omega \cap S_\varepsilon$;

3) $\dot{V}(x) > 0\ \forall x \in \Omega \cap S_\varepsilon$,

то невозмущенное движение неустойчиво.

Лемма 1: Если $V(x) \in \mathcal{L}$ и $V(x) > 0\ \forall x \in S_\rho \backslash (0)$, то $\exists\ a \in \mathcal{K}$ и $b \in \mathcal{K}$: $a\left(||x||\right) \leq V(x) \leq b(||x||)$.

Следствие: Если $W(x) \in \mathcal{L}$ и $W(x) < 0\ \forall x \in S_\rho \backslash (0)$, то $\exists\ c \in \mathcal{K}$: $W(x) \leq -c(||x||)$.

Лемма 2: Если $V(x) \in \mathcal{L}, V(x) > 0\ \forall x \in \Omega \cap S_\varepsilon, V(x) = 0\ \forall x \in \partial\Omega \cap S_\varepsilon, W(x) \in \mathcal{L}, W(x) > 0\ \forall x \in \Omega \cap S_\varepsilon$, то $\exists\ a \in \mathcal{K}$: $W(x) \geq a(V)\ \forall x \in \Omega \cap S_\varepsilon$.

Доказательство Леммы 1:

I) $a-$? Рассмотрим $\forall \sigma \in [0, \rho]$ и функцию $\alpha(\sigma) = \min\limits_{||x||=\sigma} V(x)$. Возможны два случая:

1) $\alpha(\sigma)$ – строго возрастающая функция. Тогда

$$a(r) = \begin{cases} \alpha(r), r \in [0, \rho] \\ \alpha(\rho) + r - \rho, r > \rho \end{cases} \qquad (3)$$

2) $\alpha(\sigma)$ – невозрастающая функция. Тогда возьмем функцию $\beta(s) = \min\limits_{\sigma \in [s,\rho]} \alpha(\sigma)$. Очевидно, $\beta(s)$ – не строго возвращающая функция. $\gamma(s) = \beta(s)\delta(s); \delta \in \mathcal{K}: \delta < 1$. Тогда Тогда

$$a(r) = \begin{cases} \gamma(r), r \in [0, \rho] \\ \gamma(\rho) + r - \rho, r > \rho \end{cases} \qquad (4)$$

Первая часть леммы доказана.

II) $b-$? Рассмотрим $\sigma \in [0, \rho]$ и функцию $\alpha(\sigma) = \max\limits_{||x||=\sigma} V(x)$. Случаи:

1) $\alpha(\sigma)$ – строго возрастающая функция, тогда $(3')$. $((3') = (3)_{a \to b})$

2) $\alpha(\sigma)$ – не строго возрастающая, тогда $\beta(s) = \max\limits_{\sigma \in [0;s]} \alpha(\sigma)$. $\gamma(s) = \beta(s) + \delta(s), \delta \in \mathcal{K} \Rightarrow$ $(4')$. $((4') = (4)_{a \to b})$

<u>Доказательство Леммы 2:</u> Берем $\forall \sigma \in [0, \varepsilon]$ и функцию $\alpha(\sigma) = \min\limits_{\substack{V(x)=\sigma \\ \forall x \in \Omega \cap S_\varepsilon}} W(x) \Rightarrow$ см. доказательство Леммы 1 $\Rightarrow$ 1) $\alpha(\sigma) \uparrow \rightarrow (3)$; 2)$\alpha(\sigma)$ не $\uparrow \rightarrow (4)$. Лемма доказана.

Доказательства теорем $1', 2', 3'$ следуют из теорем 1, 2, 3 прошлой лекции и Лемм 1, 2.

10.2 Устойчивость перманентных вращений волчка Эйлера

Уравнение волчка Эйлера в форме Эйлера: $\begin{cases} \dot{p} + (C - B)qr = 0 \\ B\dot{q} + (A - C)rp = 0 \\ C\dot{r} + (B - A)pq = 0 \end{cases}$. Считаем, что все моменты инерции различны $A \neq B \neq C \neq F$. Эти уравнения допускают решения $p = q = 0; r = \omega = const$.

$$I_1 = A^2p^2 + C^2r = const$$

$$I_2 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = const$$

$$p = x; q = y; r = \omega + z$$

Тогда уравнения (1) примут вид:

$$\begin{cases} A\dot{x} + (C - B)(\omega + z)y = 0 \\ B\dot{y} + (A - C)(\omega + z)x = 0 \\ C\dot{z} + (B - A)xy = 0 \end{cases}$$

Первые интегралы будут иметь вид:

$$\begin{cases} J_1 = A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 + 2C^2\omega z = const \\ J_2 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2C\omega z = const \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $U = J_1 - CJ_2 + \lambda J_2^2 = A(A-C)x^2 + B(B-C)y^2 + 4\lambda C^2\omega^2 z^2 + O_3$. $\dot{U} \equiv 0$.

Если $A > C, B > C, \lambda > 0 \Rightarrow U > 0\ \forall x, y, z > 0; x^2 + y^2 + z^2 < \rho^2$. Если $A < C, B < C, \lambda < 0 \Rightarrow V = -U, V > 0\ \forall x, y, z > 0; x^2 + y^2 + z^2 < \rho^2$. Значит, равномерные вращения вокруг оси наименьшего момента инерции или наибольшего момента инерции устойчивы согласно теореме $1'$.

Если $(A-C)(B-C) < 0$, то U всегда знакопеременная.

Построим функцию Ляпунова, удовлетворяющую теореме $3'$. $V = xy$. Пусть $\omega > 0$ ($\omega < 0$ – аналогично). $\dot{V}_{(3)} = (\omega + z)\left[\frac{B-C}{A}y^2 + \frac{C-A}{B}x^2\right]$. Если $\exists t_*: z(t_*) = -\frac{\omega}{2} \Rightarrow$ неустойчивость. Пусть $\omega + z \geq \frac{\omega}{2}\ \forall t \geq 0$ (иначе – неустойчивость).

Если $B > C > A \Rightarrow \dot{V} > 0$ при $V > 0$. Если $B < C < A \Rightarrow V = -xy \Rightarrow \dot{V} > 0$ при $V > 0$.

<u>Замечание:</u> Если есть $J_1, \dots, J_k$, то $V = \sum_{i=1}^k \lambda_i J_i + \sum_{i=1}^k \mu_i J_i^2$.

10.3 Теоремы Барбашина-Красовского и Красовского

<u>Теорема 4 (частный случай теоремы Барбашина-Красовского):</u> Если существует функция $V(x) \in \mathcal{L}$:

1) $V(x) > 0\ \forall x \in S_\rho \backslash (0)$;

2) $\dot{V}(x) \leq 0\ \forall x \in S_\rho \backslash (0)$;

3) Множество $\dot{V}(x) = 0$ не содержит целых движений системы (1), кроме тривиального,

то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

<u>Теорема 5 (Красовского):</u> Если $\exists \varepsilon > 0$ ($\varepsilon \leq \rho$), открытая область $\Omega (0 \in \partial\Omega)$ и $V(x) \in \mathcal{L}$:

1) $V(x) < 0\ \forall x \in \Omega \cap S_\varepsilon$;

2) $V(x) = 0\ \forall x \in \partial\Omega \cap S_\varepsilon$;

3) $\dot{V}(x) \leq 0\ \forall x \in \Omega \cap S_\varepsilon$;

4) Множество $\dot{V}(x) = 0$ не содержит целых движений системы (1), отличных от тривиального,

то невозмущенное движение неустойчиво.

Условия 3(т.4) и 4(т.5) означают, что $\dot{V}\big(x(t)\big) \not\equiv 0\ \forall x(t) \not\equiv 0$.

<u>Доказательство теоремы 4:</u> Невозмущенные движения устойчивы, то есть $\forall \varepsilon (\varepsilon \leq \rho)\ \exists \delta(\varepsilon) > 0: x(t) \in S_\varepsilon\ \forall t \geq 0$ и $\forall x(0) \in S_\delta (t_0 = 0)$.

Допустим, $\exists x(t) \nrightarrow 0$ при $t \to +\infty \Rightarrow \exists\{x_i\} = x(t_i);\ t_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} +\infty;\ t_i \uparrow: \left||x_i|\right| \geq \gamma > 0;$ $\left||x_i|\right| < \varepsilon$.

Существует сходящаяся подпоследовательность $x_{i_k} \to x_*$. $\exists \lim\limits_{t\to+\infty} V\big(x(t)\big) = v_0$. $V\big(x(t)\big) \geq v_0\ \forall t \geq 0$. $V(x_*) = v_0$.

Рассмотрим решения системы (1) $x_k(t)$: $x_k(0) = x_{i_k}$ и $x_*(t)$: $x_*(0) = x_*$.

$$\dot V\big(x_*(t)\big) \not\equiv 0 \Rightarrow \exists t_*: V\big(x_*(t)\big) = v_* < v_0$$

$\forall \alpha > 0\ \exists \beta > 0: |V(y_1) - V(y_2)| < \alpha$ при $\forall y_1, y_2: \left||y_1 - y_2|\right| < \beta$.

$\forall \beta > 0\ \exists k_0 \in N: ||x_k(t_*) - x_*(t_*)|| < \beta$ при $\forall k > k_0$. (по непрерывной зависимости решений на конечном интервале времени от начальных условий)

Таким образом, $\forall \alpha > 0\ \exists k_0 \in N: \left|V\big(x_k(t_*)\big) - V\big(x_*(t_*)\big)\right| < \alpha\ \forall k > k_0$.

Возьмем $\alpha < v_0 - v_* \Rightarrow \left|V\left(x\big(t_* + t_{i_k}\big)\right) - v_*\right| < v_0 - v_*\ \forall k > k_0$. $x_k(t_*) = x(t_* + t_{i_k})$ по групповому свойству стационарных ОДУ.

$$\Rightarrow V\left(x\big(t_* + t_{i_k}\big)\right) < v_0\ \forall k > k_0$$

Получаем противоречие. Теорема доказана.

<u>Доказательство теоремы 5:</u> Допустим $x = 0$ устойчиво, тогда $\forall \varepsilon (\varepsilon \leq \rho)\ \exists \delta(\varepsilon) > 0: x(t) \in S_\varepsilon\ \forall t \geq 0$ и $\forall x(0) \in S_\delta (t_0 = 0)$.

Возьмем $x(0) \in S_\delta: V\big(x(0)\big) = V_0 < 0 \Rightarrow V\big(x(t)\big) \leq V_0 < 0 \Rightarrow \exists \gamma > 0: \left||x(t)|\right| \geq \gamma > 0\ \forall t \geq 0$.

Берем произвольную последовательность $x_i = x(t_i), t_i \to +\infty$.

Существует сходящаяся подпоследовательность $x_{i_k} \to x_*$. $\exists \lim\limits_{t\to+\infty} V\big(x(t)\big) = v_0$. $V\big(x(t)\big) \geq v_0\ \forall t \geq 0$. $V(x_*) = v_0$.

Рассмотрим решения системы (1) $x_k(t)$: $x_k(0) = x_{i_k}$ и $x_*(t)$: $x_*(0) = x_*$.

$$\dot V\big(x_*(t)\big) \not\equiv 0 \Rightarrow \exists t_*: V\big(x_*(t)\big) = v_* < v_0$$

$\forall \alpha > 0\ \exists \beta > 0: |V(y_1) - V(y_2)| < \alpha$ при $\forall y_1, y_2: \left||y_1 - y_2|\right| < \beta$.

$\forall \beta > 0\ \exists k_0 \in N: ||x_k(t_*) - x_*(t_*)|| < \beta$ при $\forall k > k_0$. (по непрерывной зависимости решений на конечном интервале времени от начальных условий)

Таким образом, $\forall \alpha > 0\ \exists k_0 \in N: \left|V\big(x_k(t_*)\big) - V\big(x_*(t_*)\big)\right| < \alpha\ \forall k > k_0$.

Возьмем $\alpha < v_0 - v_* \Rightarrow \left|V\left(x\left(t_* + t_{i_k}\right)\right) - v_*\right| < v_0 - v_*\ \forall k > k_0$. $x_k(t_*) = x(t_* + t_{i_k})$ по групповому свойству стационарных ОДУ.

$$\Rightarrow V\left(x\left(t_* + t_{i_k}\right)\right) < v_0\ \forall k > k_0$$

Получаем противоречие. Теорема доказана.

Лекция 11

Введение в математическую теорию устойчивости. Часть 3

11.1 Теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости и о неустойчивости по первому приближению

Рассматриваем стационарные уравнения возмущенного движения

$$\dot{x} = X(x) = Ax + o(||x||);\ A = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{x=0} \tag{1}$$

Системе (1) поставим в соответствие систему первого приближения

$$\dot{y} = Ay \tag{2}$$

Линейной системе в соответствие ставим характеристическое уравнение

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = 0; E = diag(1, \dots, 1) \tag{3}$$

где E – единичная матрица размером $n \times n$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1 (А.М.Л, 1892): Если все корни уравнения (3) лежат в левой полуплоскости, то невозмущенное решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Теорема 2 (А.М.Л, 1892): Если среди корней уравнения (3) есть корни в правой полуплоскости, то невозмущенное решение системы (1) неустойчиво.

Лемма 1: Если все корни уравнения (3) имеют отрицательные вещественные части, то существует симметричная матрица B:

1) $(Bx, x) < 0\ \forall x \neq 0;$

2) $A^T B + BA = E.$

Лемма 2: Если уравнение (3) имеет корень с положительной вещественной частью, то существует симметричная матрица B и положительное число α, такие, что:

1) Область $\Omega: \{x: (Bx, x) > 0\} \neq \emptyset\ (0 \in \partial\Omega);$

2) $A^T B + BA = \alpha B + E.$

Доказательство теоремы 1: Рассмотрим функцию Ляпунова $V = (Bx, x) = x^T Bx.$

$$\dot{V}_{(1)} = (\dot{x}^T Bx + x^T B\dot{x})_{(1)} = x^T A^T Bx + x^T BAx + \left(\frac{\partial V}{\partial x}, o\big(||x||\big)\right)$$

Так как $\left(\frac{\partial V}{\partial x}, o\big(||x||\big)\right) = o\left(||x||^2\right)$, значит

$$\dot{V}_{(1)} = x^2 + o(||x||^2) > 0\ \forall x: 0 \leq ||x|| < \sigma (\sigma > 0)$$

$$V < 0 \ \forall x \neq 0$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2: Рассмотрим функцию Ляпунова $V = (Bx, x) = x^T Bx$.

$$\dot{V}_{(1)} = (\dot{x}^T Bx + x^T B\dot{x})_{(1)} = x^T A^T Bx + x^T BAx + \left(\frac{\partial V}{\partial x}, o(||x||)\right)$$

В силу Леммы 2:

$$x^T A^T Bx + x^T BAx + \left(\frac{\partial V}{\partial x}, o(||x||)\right) = \alpha(Bx, x) + x^2 + o(||x||^2) \geq \alpha V \ \forall x \in S_\sigma$$

Получаем, что $\dot{V} \geq \alpha V$, а $V > 0$. Значит, что соответствующее невозмущенное движение неустойчиво согласно теореме Ляпунова о неустойчивости. Теорема доказана.

Замечание: Если уравнение (3) не имеет корней с положительной вещественной частью, но имеет нулевые и/или чисто мнимые корни, то все зависит от нелинейных членов.

Пример:

$$x \in \mathbb{R}; \ddot{x} + x = a\dot{x}^3; \ddot{y} + y = 0; \lambda^2 + 1 = 0; \lambda = \pm i$$

$$V = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + x^2); \dot{V} = a\dot{x}^4$$

Случай 1: $a = 0$. $\dot{V} \equiv 0 \Rightarrow$ устойчивость.

Случай 2: $a < 0$. $\dot{V} \leq 0$; $\dot{V} = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ асимптотическая устойчивость (теорема Барбашина-Красовского).

Случай 2: $a > 0$. Неустойчивость согласно теореме Красовского.

11.2 Критерий Рауса-Гурвица

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0; a_0 > 0; a_n \neq 0 \tag{1}$$

Определитель Гурвица:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots\dots & \dots\dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots\dots & \dots\dots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix} \tag{2}$$

$$\Delta_1 = a_1$$

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3$$

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$$

Теорема Рауса-Гурвица: Все корни уравнения (1) имеют отрицательные вещественные части, если и только если все главные диагональные миноры определителя Гурвица (2) положительны.

Замечание: Рассмотрим уравнение

$$f(\lambda) = a_0\lambda^{2n} + a_2\lambda^{2n-2} + \dots + a_{2n}; a_0 > 0; a_{2n} \neq 0$$

Очевидно, что $f(-\lambda) = f(\lambda)$. Необходимо (для устойчивости), чтобы все корни уравнения (3) были бы чисто мнимыми.

Критерий Романова (1959): Все корни уравнения (3) – чисто мнимые и различные, если и только если все корни уравнения (4) $F(\lambda) = f(\lambda) + \frac{1}{2}\frac{df}{d\lambda} = 0$ имеют отрицательные вещественные части.

$$F(\lambda) = a_0\lambda^{2n} + na_0\lambda^{2n-1} + a_2\lambda^{2n-2} + (n-1)a_2\lambda^{2n-3} + \cdots$$

Пример:

$$f(\lambda) = \lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0$$

$$F(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + a\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ a & a & 2 & 1 \\ 0 & b & a & a \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = 2 > 0;\ \Delta_2 = a > 0;\ \Delta_3 = a^2 - 4b > 0;\ \Delta_4 = b\Delta_3 > 0 \sim b > 0$$

$$\Rightarrow b > 0; a > 2\sqrt{b}$$

11.3 Теорема Лагранжа об устойчивости равновесия консервативной голономной системы

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = 0; q = (q^1, \dots, q^n); T = \frac{1}{2}(A(q)\dot q, \dot q); V = V(q) \qquad (1)$$

Эта система допускает состояние равновесия:

$$q = q_0, \dot q = 0;\ q_0: \frac{\partial V}{\partial q} = 0 \qquad (2)$$

Теорема 1: Состояние равновесия (2) устойчиво, если потенциальная энергия имеет в точке q_0 строгий локальный минимум.

Введем $x = q - q_0$. Уравнение малых колебаний в окрестности состояния равновесия:

$$A\ddot x + Cx = 0; A = A(q_0); C = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\right)_{q=q_0} \qquad (3)$$

Доказательство теоремы 1: Без уменьшения общности считаем, что $q_0 = 0, V(q_0) = 0 \Rightarrow$ (1) – уравнение возмущенного движения. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$H = T(\dot{q}, q) + V(q) > 0 \ \forall q, \dot{q}: 0 < ||q|| + ||\dot{q}|| < \sigma \ (\sigma > 0)$$

$$\dot{H} \equiv 0$$

По теореме Ляпунова состояние равновесия устойчиво.

Теорема 2: Если $V(q) = V^m + \cdots (m \geq 2)$ [$V^{(k)}$ – форма k-ой степени по q] и V^m не имеет даже нестрогого минимума в точке $q = 0$, то состояние равновесия системы (1) неустойчиво.

Рассмотрим $n = 1$:

$$V = \begin{cases} e^{-\frac{1}{q^3}} cos\frac{1}{q}, \ \ q \neq 0; \\ 0, \ \ q = 0 \end{cases} \in C^\infty$$

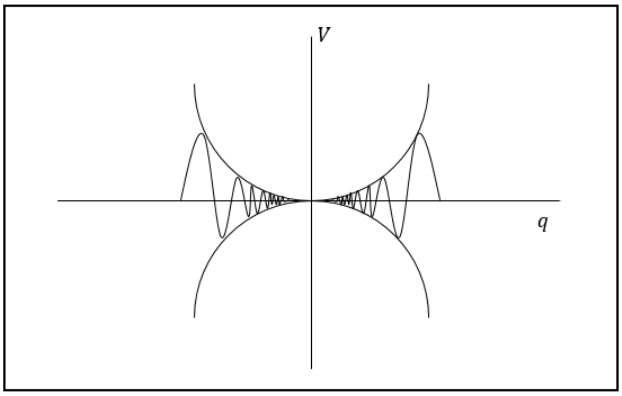

Рис.11.1 График функции $V(q)$. Данная функция является четной, в нуле равна нулю, а в окрестности нуля может принимать как положительные, так и отрицательные значения

В сколь угодно малой окрестности нуля всегда существует замкнутые фазовые траектории. $T + V = h$.

Пример: $n = 1; x; y; T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$;

$$V(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} cos\frac{1}{x} - e^{-\frac{1}{y^2}}\left(y^2 cos\frac{1}{y}\right); x \neq 0, y \neq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} cos\frac{1}{x}; y = 0 \\ -e^{-\frac{1}{y^2}}\left(y^2 cos\frac{1}{y}\right); x = 0 \\ 0; \ x = y = 0 \end{cases}$$

На прямой $x = y$ функция отрицательная $V = -e^{-\frac{1}{y^2}}y^2$, только в нуле ноль. Значит, есть целая область, где функция отрицательна. Но есть устойчивость по $x, y, \dot{x}, \dot{y}$.

Лекция 12

Теоремы Кельвина-Четаева

12.1 Влияние диссипативных и/или гироскопических сил на устойчивость равновесий консервативных систем

Если есть консервативная система, то ее уравнение движения в форме Лагранжа имеют вид

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = 0;\ T = \frac{1}{2}(A(q)\dot{q}, \dot{q});\ V = V(q) \tag{1}$$

Эта система допускает состояние равновесия

$$q = q_0, \dot{q} = 0;\ q_0 : \left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q=q_0} = 0 \tag{2}$$

Без уменьшения общности: $q_0 = 0; V(0) = 0$.

<u>Теорема 1 (из прошлой лекции):</u> Состояние равновесия (2) системы (1) устойчиво, если потенциальная энергия имеет в положении равновесия строгий локальный минимум.

<u>Теорема 2 (из прошлой лекции):</u> Состояние равновесия (2) системы (1) неустойчиво, если среди собственных значений матрицы $C = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\right)_0$ есть отрицательные.

<u>Доказательство теоремы 2:</u> c_i – собственные значения матрицы C, они определяются из уравнения

$$|cE - C| = 0 \tag{3}$$

Характеристическое уравнение $f(\lambda) = |A\lambda^2 + C| = 0; A = A(0)$. В нормальных координатах характеристическое уравнение имеет вид $f(\lambda) = \prod_1^n (\lambda^2 + k_s)$, k_s – корни векового уравнения

$$|Ak - C| = 0 \tag{4}$$

<u>Лемма:</u> Число положительных (нулевых, отрицательных) корней уравнения (3) равно числу положительных (нулевых, отрицательных) корней уравнения (4) $\Rightarrow \exists\, k_s < 0 \Rightarrow \exists\, \lambda = \sqrt{-k_s} > 0$.

Теорема 2 <u>(из прошлой лекции)</u> доказана.

<u>Определение:</u> Число отрицательных собственных значений матрицы C называется степенью неустойчивости (по Пуанкаре).

Добавим к системе (1) диссипативные силы:

$$Q_{\text{дисс}} = -D(q)\dot{q}; D^T = D; (D\dot{q}, \dot{q}) \geq 0 (\not\equiv 0)$$

Говорят, что диссипативные силы обладают полной диссипацией, если $(D\dot{q},\dot{q}) = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0$.

Добавляем гироскопические силы:

$$Q_{\text{гир}} = -G(q)\dot{q}; G^T = -G; (G\dot{q},\dot{q}) \equiv 0$$

Таким образом, уравнения движения системы примут вид:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} + D\dot{q} + G\dot{q} = 0 \tag{5}$$

<u>Теорема 1:</u> Если потенциальная энергия имеет в положении равновесия строгий локальный минимум, то состояние равновесия остается устойчивым при добавлении диссипативных и/или гироскопических сил.

<u>Теорема 2:</u> Если потенциальная энергия имеет в положении равновесия строгий локальный минимум, положение равновесия изолированное, а диссипативные силы обладают полной диссипацией, то состояние равновесия становится асимптотически устойчивым.

<u>Теорема 3:</u> Если потенциальная энергия не имеет в положении равновесия даже нестрогого минимума, положение равновесия изолированное, а диссипативные силы обладают полной диссипацией, то состояние равновесия неустойчиво.

<u>Пояснение:</u> «Положение равновесия изолированное» означает, что $\frac{\partial V}{\partial q} = 0 \Leftrightarrow q = 0$ (при $||q|| < \sigma$). $V(0) = 0$ «Не имеет в положении равновесия даже нестрогого минимума» – $\exists \Omega(0 \in \partial\Omega)\colon V(q) < 0\ \forall q \in \Omega \cap S_\sigma$.

<u>Доказательство Теорем 1-3:</u> Рассмотрим функцию Ляпунова $H = T + V$. Тогда $\dot{H}_{(5)} = -(D\dot{q},\dot{q}) \leq 0 \Rightarrow$ Теорема 1 ($H > 0\ \forall q,\dot{q}\colon 0 < \|q\| + \|\dot{q}\| < \sigma$) (из теоремы Ляпунова).

Теорема 2: (*) $\dot{H} = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0 \Leftrightarrow q = const \Leftrightarrow q = 0$ ($\|q\| < \sigma$) $\Rightarrow$ асимптотическая устойчивость (по теореме Барбашина-Красовского).

Теорема 3: $\exists$ область, где $H < 0$. Далее смотри (*) $\Rightarrow$ неустойчивость (по теореме Красовского).

Теоремы доказаны.

Уравнения (5) имеют вид

$$A\ddot{q} + D\dot{q} + G\dot{q} + Cq = o(\|q\| + \|\dot{q}\|) \tag{6}$$

$$A = A(0), D = D(0), G = G(0), C = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\right)_{q=0}$$

Теорема 4: Если определитель матрицы C меньше нуля ($|C| < 0$), то состояние равновесия системы (5) неустойчиво (при $\forall Q_{дисс}$ и $\forall Q_{гир}$).

Доказательство: Рассмотрим характеристическое уравнение для системы (6):

$$f(\lambda) = |A\lambda^2 + D\lambda + G\lambda + C| = 0 \qquad (7)$$

$$f(+\infty) = +\infty; f(0) = |C| < 0 \Rightarrow \exists\lambda_f > 0$$

Теорема доказана.

Замечание: Если потенциальная энергия не имеет минимума в положении равновесия, но $|C| > 0$, то при отсутствии диссипативных сил с полной диссипацией надлежащим выбором гироскопических сил положение равновесия можно сделать устойчивым. (имеет место гироскопическая стабилизация)

Пример: $(n = 2)$

$$\begin{cases} \ddot{x} + g\dot{y} - ax = 0 \\ \ddot{y} - g\dot{x} - by = 0 \end{cases}, \quad a > 0, b > 0$$

Составим характеристическое уравнение:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 - a & g\lambda \\ -g\lambda & \lambda^2 - b \end{vmatrix} = \lambda^4 + (g^2 - a - b)\lambda^2 + ab = 0$$

По правилу Романова:

$$F = f + \frac{df}{d\lambda}$$

$$F(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + (g^2 - a - b)\lambda^2 + (g^2 - a - b)\lambda + ab$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ g^2 - a - b & g^2 - a - b & 2 & 1 \\ 0 & ab & g^2 - a - b & g^2 - a - b \\ 0 & 0 & 0 & ab \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = 2 > 0;\ \Delta_2 = g^2 - a - b > 0;\ \Delta_3 = (g^2 - a - b)^2 - 4ab > 0;\ \Delta_4 = ab\Delta_3 > 0$$

$$g^2 - a - b > 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow |g| > \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

12.2 Устойчивость (относительных) равновесий обобщенно-консервативной систем

$$L = L_2 + L_1 + L_0;\ L_2 = \frac{1}{2}(A(q)\dot{q}, \dot{q});\ L_1 = (a(q), \dot{q});\ L_0 = W(q)$$

Уравнения движения такой системы имеют вид:

$$\left(\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L_2}{\partial q} + G(q)\dot{q} + \frac{\partial W}{\partial q} = 0 \qquad (1)$$

$$G\dot{q} = \left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L_1}{\partial q} \Rightarrow G = \frac{\partial a}{\partial q} - \left(\frac{\partial a}{\partial q}\right)^T \Rightarrow G^T = -G$$

Теорема 1: Состояние (относительного) равновесия обобщенно-консервативной системы устойчиво, если измененная потенциальная энергия имеет в положении равновесия строгий локальный минимум.

Теорема 2: Состояние равновесия обобщенно-консервативной системы неустойчиво, если $\left|\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q^2}\right)_0\right| < 0$.

Замечание: Если W не имеет минимума, но $\left|\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q^2}\right)_0\right| > 0$, то возможна гироскопическая стабилизация.

Исследуем устойчивость треугольных точек либрации в плоской круговой ограниченной задаче трех тел в линейном приближении.

Пример:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} + \dfrac{\partial W}{\partial x} = 0 \\ \ddot{y} - 2\dot{x} + \dfrac{\partial W}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$W = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1-\mu}{r_S} - \frac{\mu}{r_J}$$

$r_S = [(x+\mu)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}$ – расстояние до Солнца; $r_J = [(x+1-\mu)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}$ – расстояние от астероида до Юпитера ; $1-\mu$ – масса Солнца; μ – масса Юпитера.

Ищем критические точки измененной потенциальной энергии:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0; \ \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$\exists$ относительное равновесие типа

$$x = \frac{1}{2} - \mu; y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q^2}\right) = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{4} & \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) \\ \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & -\dfrac{9}{4} \end{pmatrix} = C$$

$\Delta = \frac{27}{4}\mu(1-\mu) > 0 \Rightarrow$ степень неустойчивости треугольных точек либрации равна 2.

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=o(\|x\|+\|y\|)$$

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}\lambda^2-\frac{3}{4} & -2\lambda\pm\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)\\ 2\lambda\pm\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & \lambda^2-\frac{9}{4}\end{vmatrix}=\lambda^4+\lambda^2+\frac{27}{4}\mu(1-\mu)=0$$

Если $\mu(1-\mu)<\frac{1}{27}\Rightarrow\lambda_1=\pm\omega_1 i;\ \lambda_2=\pm\omega_2 i;\ \omega_1\neq\omega_2.$ $\mu(1-\mu)<\frac{1}{27}$ – условие устойчивости в линейном приближении.

Если $\mu(1-\mu)>\frac{1}{27}$ – условие неустойчивости по линейному приближению (по теореме Ляпунова).

Если $\mu(1-\mu)=\frac{1}{27}\ \Rightarrow\ \omega_1=\omega_2\Rightarrow$ в линейном приближении – неустойчивость.

Лекция 13

Теорема Рауса-Ляпунова-Сальвадори

13.1 Бифуркации положений равновесия

Пример:

Имеем угловой вертикальный обруч, который вращается с угловой постоянной скоростью. На обруч насажена бусинка массой m. Система находится в однородном поле тяжести.(рис.13.1)

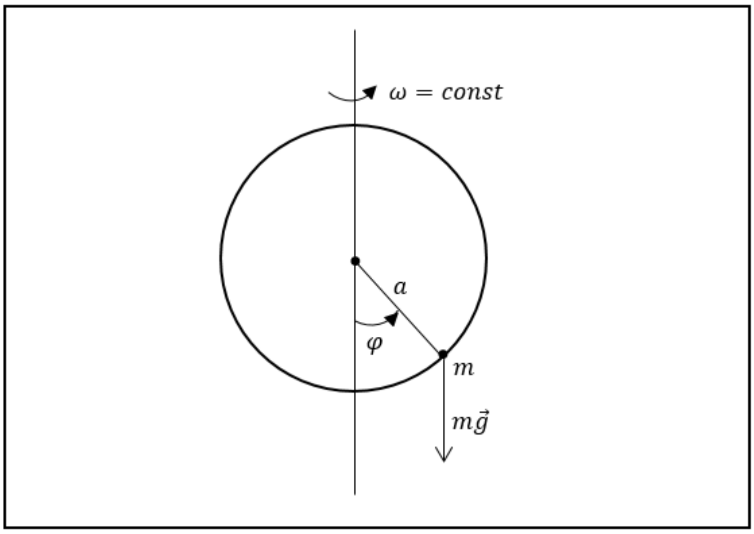

Рис.13.1

Есть измененная потенциальная энергия:

$$V_\omega = -mgacos\varphi - \frac{1}{2}ma^2\omega^2sin^2\varphi = mgaf(\varphi)$$

$$f(\varphi) = -cos\varphi - \frac{1}{2}p^2sin^2\varphi$$

$$p^2 = \frac{a\omega^2}{g}$$

Выбираем единица измерения так, что $m = 1; a = 1; g = 1$. Равновесия определяются из уравнения $f'(\varphi) = 0 \Leftrightarrow sin\varphi[1 - p^2cos\varphi] = 0$:

1) $\varphi = 0$;

2) $\varphi = \pi$

Эти равновесия существуют при $\forall p \in \mathbb{R}$. Также есть еще равновесия:

3,4) $\varphi = \pm arccos\frac{1}{p^2}\ \forall|p| > 1$.

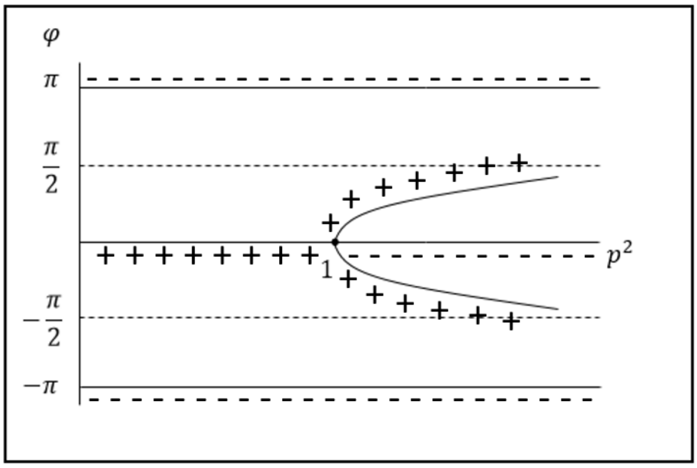

Рис.13.2 Бифуркационная диаграмма Пуанкаре-Четаева (Множество равновесий. «+» выделены устойчивые области, «-» – неустойчивые)

Проверим равновесия на устойчивость. $f''(0) = (1 - p^2) \gtrless 0$ при $p^2 \lessgtr 1$. $f''(\pi) = -(1 + p^2) < 0\ \forall p \in \mathbb{R}$. $f''\left(\varphi_{3,4}\right) = p^2 sin^2\varphi_{3,4} > 0\ \forall |p| > 1$.

Обобщенный интеграл энергии для этой системы:

$$T_2 + V_\omega = h = const$$

$$V_\omega \le h$$

$$h = h_i(p^2) = V_\omega(\varphi_i)(i = 1,2,3,4)$$

$h_1(p^2) = 1, h_2(p^2) = 1, h_{3,4}(p^2) = -cos\varphi_{3,4} - \frac{1}{2}p^2\left(1 - cos^2\varphi_{3,4}\right) = -\frac{1}{p^2} - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{p^2} = -\frac{1}{2}\left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)$. Эти кривые на плоскости $h(p^2)$ – рис.13.3.

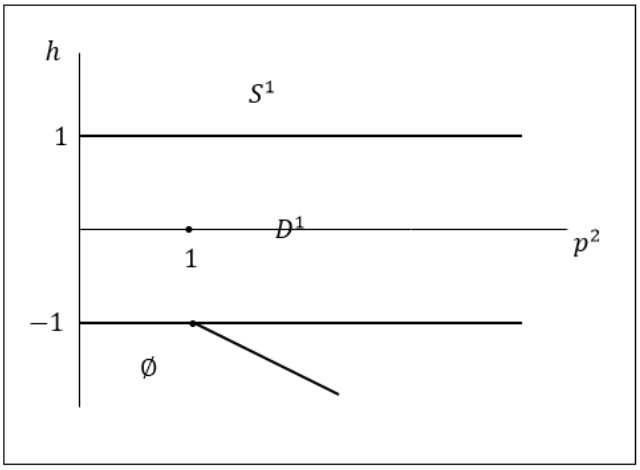

Рис.13.3 Бифуркационная диаграмма Смейла

13.2 Устойчивость стационарных движений консервативных голономных систем с циклическими координатами

Обобщенные координаты $q = (q^1; \dots; q^n) = (r; s);\ r = (q^1; \dots; q^k); s = (q^{k+1}; \dots; q^n)$. Функция Лагранжа $L = T - V;\ \frac{\partial L}{\partial s} = 0$ (s – циклические координаты).

$$T = \frac{1}{2}(M(r)\dot{q}, \dot{q}); V = V(r);\ M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$$

$$A = k \times k; B\colon k \times (n-k); C = (n-k) \times (n-k)$$

$$T = \frac{1}{2}(A(r)\dot{r}, \dot{r}) + (B(r)\dot{r}, \dot{s}) + \frac{1}{2}(C(r)\dot{s}, \dot{s})$$

В силу того, что координаты s – циклические:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = B\dot{r} + C\dot{s} = p = const \Rightarrow \dot{s} = C^{-1}(p - B\dot{r}) \quad (*)$$

Введем функцию Рауса: $R = \big(T - V - (p, \dot{s})\big)_{(*)} = R_2(r, \dot{r}) + R_1(r, \dot{r}, p) + R_0(r, p)$. Приведенная потенциальная энергия: $V_p = -R_0 = V(r) + \frac{1}{2}(C^{-1}(r)p, p)$. Уравнения Рауса можно записать в виде:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{r}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial R}{\partial r} = 0 \\ \dot{p} = 0; \dot{s} = -\frac{\partial R}{\partial p} \end{cases} \quad (1)$$

Эти уравнения допускают стационарные уравнения вида:

$$r = r_p = const; \dot{r} = 0; p = const; s = \dot{s}_p t + s_0\ (t_0 = 0) \quad (2)$$

$$\dot{s}_p = -\left(\frac{\partial R}{\partial p}\right)_{\substack{r = r_p \\ \dot{r} = 0}}$$

$$r_p : \frac{\partial V_p}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

r_p – критические точки приведенного потенциала.

<u>Замечание:</u> r_p – зависят от p (см.(3)). При этом $\dot{s}_p$ – тоже зависят от p (см. (2), (3)). То есть стационарные движения консервативных голономных систем с циклическими координатами всегда образуют семейство, параметризованное константами циклических интегралов. (см. рис.13.4)

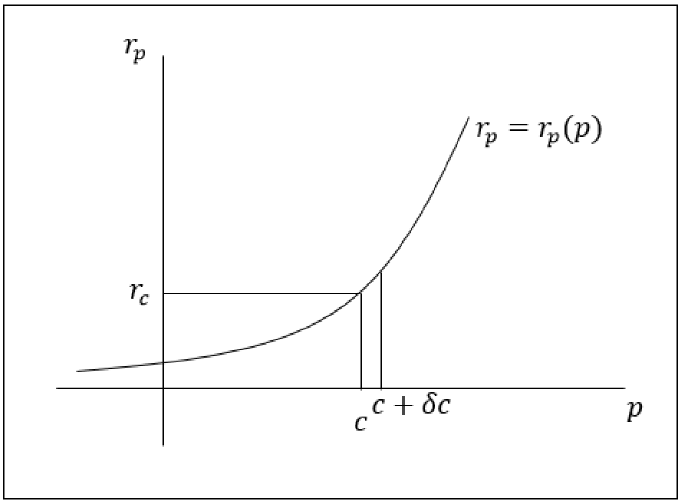

Рис.13.4

Комментарий к рис.13.4:

Фиксируем $p = c \Rightarrow r_p = r_c$. Т.е. рассматриваем стационарное движение:

$$r = r_c; \dot{r} = 0; p = c; s = \dot{s}_c t + s_0 \tag{4}$$

Для исследования устойчивости, даем другие начальные условия для фазовых переменных. Меняется скорость изменения циклических координат.

Замечание: По $\dot{s}$ стационарные движения заведомо неустойчивы (т.к. $\dot{s}_c + \delta\dot{s}_c \neq 0$). Следовательно, имеет смысл задача об устойчивости стационарных движений только по $r, \dot{r}$ и p(или $\dot{s}$).

Замечание: Система уравнений

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial R}{\partial \dot{r}}\right)^{\cdot} - \dfrac{\partial R}{\partial r} = 0 \\ \dot{p} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

замкнута относительно r и p. Фазовые переменные этой системы $r, \dot{r}$ и p.

Мы изучаем устойчивость стационарного решения

$$r = r_c; \dot{r} = 0; p = c \tag{6}$$

системы (5).

Теорема 1 (Раус, 1878, Ляпунов, 1884, Сальвадори, 1953): Если приведенная потенциальная энергия $V_c(r)$ имеет строгий локальный минимум в точке r_c, то стационарное движение (4) устойчиво по $r, \dot{r}$ и p (или $\dot{q}$). [стационарное движение (6) системы (5) устойчиво]

Доказательство: Система (5) имеет первые интегралы

$$\begin{cases} R_2 - V_p(r) = const \\ p = const \end{cases}$$

В качестве функции Ляпунова возьмем функцию $W(r, \dot{r}, p) = \left[R_2(r, \dot{r}) + V_p(r) - V_c(r_c)\right]^2 + (p - c)^2 \geq 0$. На стационарном движении эта функция равна нулю. Докажем, что $W > 0$ в окрестности решения (6):

1) если $p \neq c \Rightarrow W > 0$;

2) если $p = c \Rightarrow W = \left[R_2(r, \dot{r}) + V_p(r) - V_c(r_c)\right]^2 > 0\ \forall r, \dot{r}\colon 0 < \|\dot{r}\| + \|r - r_c\| < \sigma$, кроме того, $\dot{W} \equiv 0 \Rightarrow$ утверждение теоремы следует из теоремы Ляпунова об устойчивости.

Теорема доказана.

<u>Теорема 2:</u> Если $V_c(r)$ не имеет минимума при $r = r_c$ и определитель матрицы вторых производных в этой критической точке меньше нуля

$$\left|\left(\frac{\partial^2 V_c(r)}{\partial r^2}\right)_{r=r_c}\right| < 0,$$

то стационарное движение неустойчиво.

<u>Замечание:</u> Если (r) не имеет минимума при $r = r_c$, но $\left|\left(\frac{\partial^2 V_c(r)}{\partial r^2}\right)_{r=r_c}\right| > 0$, то стационарное движение может быть устойчивым.

<u>Пример 1 (плоская задача Кеплера):</u>

$$m = 1, \gamma M = \mu = 1$$

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2); V = -\frac{1}{r}$$

$$L = T - V;\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = r\dot{\varphi} = c = const$$

$$V_c = -\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2};\ V_c' = \frac{1}{r^3}(r - c^2) = 0 \Rightarrow r = c^2$$

$$V_c''(c^2) = \frac{1}{c^6} > 0$$

$$r = c^2;\ \dot{r} = 0;\ \dot{\varphi} = \frac{1}{c^3};\ \varphi = \frac{t}{c^3} + \varphi_0$$

По $r, \dot{r}$ и $\dot{\varphi}$ – устойчивость, по φ – неустойчивость.

<u>Пример 2 (Волчок Лагранжа в углах Крылова):</u>

Комментарий (углы Крылова):

Система координат жестко связана с твердым телом. Три поворота (рис.13.5):

1) $xyz \xrightarrow{\alpha} xy_1z_1$; $\vec{\omega}_1 = \dot{\alpha}\vec{e}_x$;

2) $xy_1z_1 \xrightarrow{\beta} x_2y_1\zeta$; $\vec{\omega}_2 = \dot{\beta}\vec{e}_{y_1}$;

3) $x_2y_1\zeta \xrightarrow{\gamma} \xi\eta\zeta$; $\vec{\omega}_3 = \dot{\gamma}\vec{e}_\zeta$.

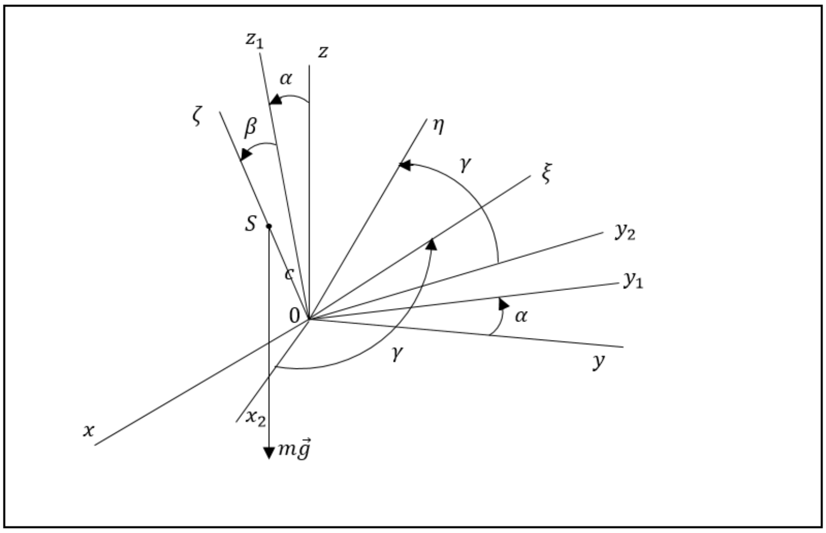

Рис.13.5

$$\vec{\omega} = p\vec{e}_\xi + q\vec{e}_\eta + r\vec{e}_\zeta$$

Кинематические формулы в углах Крылова:

$$p = \dot{\alpha}cos\beta cos\gamma + \dot{\beta}sin\gamma$$

$$q = -\dot{\alpha}cos\beta sin\gamma + \dot{\beta}cos\gamma$$

$$r = \dot{\gamma} + \dot{\alpha}sin\beta$$

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{1}{2}A(p^2 + q^2) + \frac{1}{2}Cr^2 = \frac{1}{2}A\left(\dot{\alpha}^2cos^2\beta + \dot{\beta}^2\right) + \frac{1}{2}C(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}sin\beta)^2$$

Потенциальная энергия:

$$V = mgccos\alpha cos\beta$$

c – координата центра масс волчка на оси его динамической симметрии.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}} = C(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}sin\beta) = C\omega = const$$

$$\dot{\gamma} = \omega - \dot{\alpha} sin\beta \qquad (*)$$

Введем функцию Рауса:

$$R = (T - V - C\omega\dot{\gamma})_{(*)} = R_2 + R_1 + R_0$$

$$R_2 = \frac{1}{2}A\left(\dot{\alpha}^2 cos^2\beta + \dot{\beta}^2\right);\ R_0 = -V + const;\ R_1 = C\omega\dot{\alpha} sin\beta$$

$$V'_\alpha = -mgc sin\alpha cos\beta$$

$$V'_\beta = -mgc cos\alpha sin\beta \ \Rightarrow$$

$$\alpha = \beta = 0$$

Стационарное движение: $\alpha \equiv 0;\ \beta \equiv 0;\ \dot{\gamma} = \omega$.

$$V''_{\alpha^2} = -mgc;\ V''_{\beta^2} = -mgc;\ V''_{\alpha\beta} = 0$$

Определитель матрицы вторых производных больше нуля. Значит, теорема Рауса не работает. Но стационарное движение может быть устойчивым. Попробуем это увидеть в линейном приближении. Выпишем линеаризованные уравнения возмущенного движения приведенной системы.

$$R = R^{(2)} + O_3;\ R^{(2)} = \frac{1}{2}A\left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2\right) + C\omega\dot{\alpha}\beta + \frac{1}{2}mgc(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$A\ddot{\alpha} + C\omega\dot{\beta} - mgc\alpha = 0$$

$$A\ddot{\beta} - C\omega\dot{\alpha} - mgc\beta = 0$$

Введем $w = \alpha + i\beta\ (i^2 = -1)$. Умножаем уравнение $A\ddot{\beta} - C\omega\dot{\alpha} - mgc\beta = 0$ на i, складываем с $A\ddot{\alpha} + C\omega\dot{\beta} - mgc\alpha = 0$:

$$A\ddot{w} - Ci\omega\dot{w} - mgcw = 0$$

$$A\lambda^2 - Ci\omega\lambda - mgc = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2A}\left[Ci\omega \pm \sqrt{-C^2\omega^2 + 4Amgc}\right]$$

Если $C^2\omega^2 > 4Amgc \Rightarrow$ все λ – чисто мнимые $\Rightarrow$ по крайней мере в линейном приближении есть устойчивость.

Из прошлого семестра знаем, что при $C^2\omega^2 \geq 4Amgc$ есть устойчивость по Ляпунову.

Этот пример показывает, что дополнительное условие Ляпунова в теореме Рауса лишнее.

Критическое значение $\omega_0^2 = \frac{4Amgc}{C^2}$.

Лекция 14

Физический маятник с вращающейся осью подвеса (две постановки)

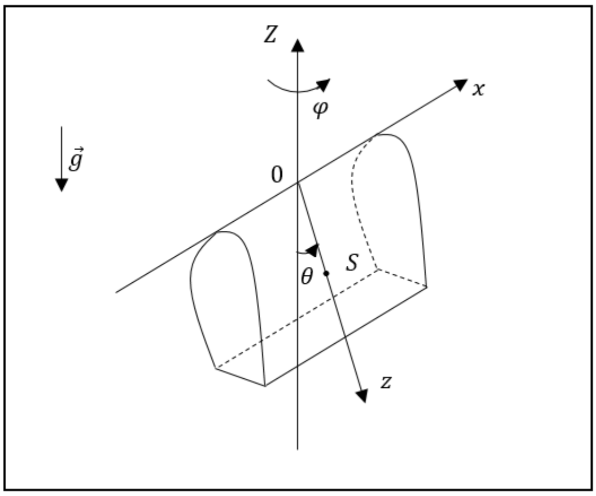

Рис.14.1 Есть горизонтальная ось, на которой подвешено твердое тело. S – центр масс тела. Система находится в однородном поле тяжести

Масса маятника m, расстояние $|\overrightarrow{OS}| = c > 0$, считаем, что $Oxyz$ – главные оси инерции тела для точки O ($Oy \perp Oxz$). Ось x может поворачиваться вокруг вертикали.

Тензор инерции в главных осях $J_0 = diag(A, B, C)$.

Угловая скорость тела $\vec{\omega} = -\dot{\theta}\vec{e}_x + \dot{\varphi}(sin\theta\vec{e}_y - cos\theta\vec{e}_z)$.

Кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}\left(A\dot{\theta}^2 + (Bsin^2\theta + Ccos^2\theta)\dot{\varphi}^2\right)$.

Потенциальная энергия $V = -mgccos\theta$.

I. Считаем, что на систему действует управляющий момент, направленный по оси Z, такой, что он поддерживает $\dot{\varphi}$ все время постоянным. Есть обобщенная сила $Q_\varphi = Q(\theta, \dot{\theta}, \omega)$: $\dot{\varphi} \equiv \omega = const$. В этом случае измененная потенциальная энергия $V_\omega = V - T_0 = -mgccos\theta - \frac{\omega^2}{2}(Bsin^2\theta + Ccos^2\theta)$. Положение равновесия этой системы определяется из условия стационарности функции V_ω по θ: $V'_\omega = \frac{dV_\omega}{d\theta} = mgcsin\theta\left[1 - \frac{\omega^2(B-C)}{mgc}cos\theta\right]$. Получаем относительные равновесия:

$$\left.\begin{aligned}(\mathrm{I}.1)\ \theta = 0\\ (\mathrm{I}.2)\ \theta = \pi\end{aligned}\right\}\forall\omega^2$$

$$(\mathrm{I}.3{,}4)\ \theta = \pm\arccos\left(\frac{mgc}{\omega^2(B-C)}\right)\ \forall\omega^2 > \frac{mgc}{|B-C|} = \omega_0^2$$

Возможны два случая:

а) $B > C \Rightarrow \theta_{3,4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $B < C \Rightarrow \theta_{3,4} \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \cup \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$.

Исследуем устойчивость этих равновесий:

$(V_\omega'')(0) = mgc - (B-C)\omega^2 \Rightarrow (V_\omega'')(0) > 0\ \forall\omega$, если $B \leq C$. $(V_\omega'')(0) \gtrless 0$, если $B > C$ при $\omega^2 \lessgtr \omega_0^2$. В этом случае можно изобразить бифуркационные диаграммы (рис.14.2).

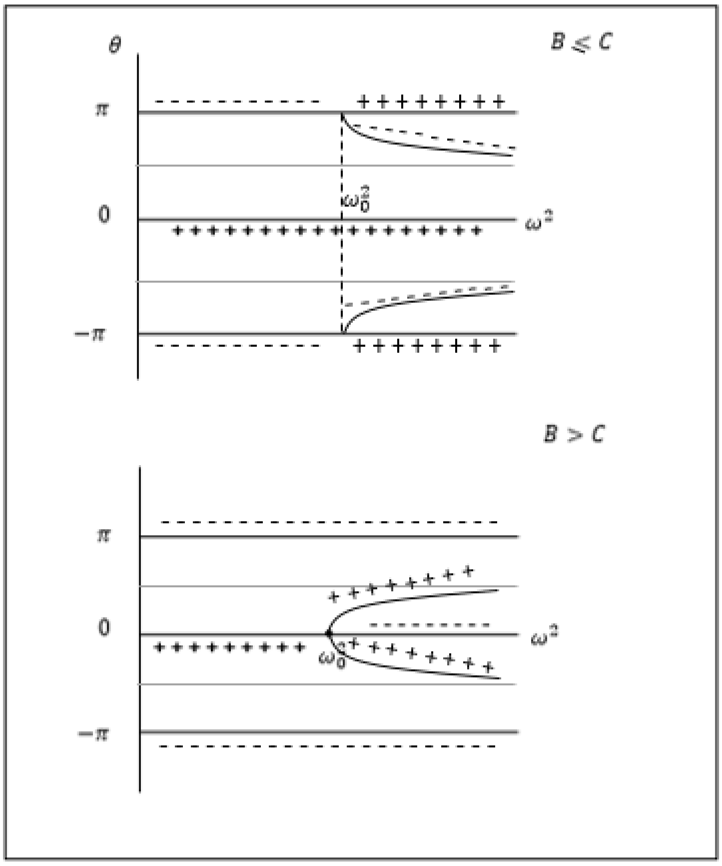

Рис.14.2 Бифуркационные диаграммы

$(V_\omega'')(\pi) = -mgc - (B-C)\omega^2 \Rightarrow (V_\omega'')(\pi) < 0\ \forall\omega$, если $B > C$. $(V_\omega'')(\pi) \lesseqgtr 0$, если $B \leq C$ при $\omega^2 \lessgtr \omega_0^2$. В этом случае можно изобразить бифуркационные диаграммы (14.3).

II. Нет дополнительных сил. Есть лагранжева система с двумя степенями свободы.

$$L = T - V = L(\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \theta)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = (Bsin^2\theta + Ccos^2\theta)\dot{\varphi} = p = const$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p}{Bsin^2\theta + Ccos^2\theta}$$

$$V_p = -mgccos\theta + \frac{1}{2}\frac{p}{(Bsin^2\theta + Ccos^2\theta)}$$

Допускаются стационарные решения вида:

$$\theta = const\ (V_p' = 0), \dot{\theta} \equiv 0, \dot{\varphi} = \frac{p}{Bsin^2\theta + Ccos^2\theta} = const$$

$$V_p' = mgcsin\theta\left[1 - \frac{p^2(B-C)cos\theta}{mgc(Bsin^2\theta + Ccos^2\theta)^2}\right] = 0$$

Решения этой задачи:

$$\left.\begin{matrix}(\mathrm{II}.1)\ \theta = 0\\(\mathrm{II}.2)\ \theta = \pi\end{matrix}\right\}\forall p$$

$$(\mathrm{II}.3-6)\ \left[1 - \frac{p^2(B-C)cos\theta}{mgc(Bsin^2\theta + Ccos^2\theta)^2}\right] = 0$$

$$\left[1 - \frac{p^2(B-C)cos\theta}{mgc(Bsin^2\theta + Ccos^2\theta)^2}\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{p^2}{mgc} = \frac{(Bsin^2\theta + Ccos^2\theta)^2}{(B-C)cos\theta} = f(u)$$

$$u = cos\theta \in (-1; 1)$$

$$f(u) = \frac{[B + (C-B)u^2]^2}{(B-C)u} = \frac{p^2}{mgc}$$

а) $B > C \Rightarrow u \in (0,1)$;

б) $B < C \Rightarrow u \in (-1,0)$.

Исследуем поведение $f(u)$. Пусть $B < C$. $f(u) \to +\infty$ при $u \to -0$.

$$f' = \frac{[B + (C-B)u^2]}{(B-C)u^2}\left[4(C-B)u^2 - [B + (C-B)u^2]\right]$$

$$f' = 0 \Leftrightarrow u^2 = \frac{B}{3(C-B)}$$

$$u^2 < 1 \Leftrightarrow B < 3(C-B) \Leftrightarrow C > \frac{4}{3}B$$

Если $C > \frac{4}{3}B \Rightarrow \exists u_* \in (-1,0): f'(u_*) = 0$. Если $B < C < \frac{4}{3}B \Rightarrow$ не $\exists u_* \in (-1,0): f'(u_*) = 0$. Т.е. функция монотонна.

$$\theta_* = arccosu_*$$

$$p_*^2 = mgcf(u_*)$$

Замечание: В случае $C < B$ картинка аналогична случаю $\dot{\varphi} \equiv \omega$.

Лекция 15

Перманентные вращения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой: существование, устойчивость и ветвление

15.1 Введение

Рассмотрим консервативную механическую систему с симметрией.

$$H = \frac{1}{2}(A(r)v, \vec{v}) + V(r) = h \tag{1}$$

где v – квазискорости (в частности, обобщенные скорости), r – координаты, не обязательно независимые. Интеграл Нетер:

$$K = (b(r), v) = k \tag{2}$$

Применим обобщенную теорему Рауса в два этапа.

I. Находим минимум функции $H(v, r)$ по переменной v, при условии, что $K(v, r) = k$. Вводим функцию $W = W(v, \lambda) = H - \lambda(K - k)$. Выписываем условие стационарности W по λ:

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow (2)$$

Условие минимума по v от W:

$$\frac{\partial W}{\partial v} = A(r)v - \lambda b = 0 \Rightarrow v = \lambda A^{-1}b \Rightarrow (2)$$

$$\lambda(A^{-1}b, b) = k \Rightarrow \lambda = \frac{k}{(A^{-1}b, b)} \Rightarrow$$

$$v = \frac{k}{(A^{-1}b, b)} A^{-1}b = v_k(r) \tag{3}$$

Вводим приведенный потенциал. $V_k = H(v_k(r), r) = V(r) + \frac{1}{2}\frac{k^2}{(A^{-1}b, b)}$ – эффективный потенциал.

II. Находим критические точки $V_k(r)$:

$$\delta V_k = 0 \Rightarrow$$

$$r = r(k) \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), получаем

$$r = r(k);\ v = v_k\big(r(k)\big) = v(k) \tag{5}$$

Вот этим критическим точкам энергии на фиксированном уровне интеграла Нетер соответствуют стационарные движения. Устойчивость соответствует точкам минимума приведенного потенциала.

Соответственно, если $V_k\big(r(k)\big) = min$, тогда (5) устойчиво.

15.2 Перманентные вращения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой

Рассматриваем твердое тело с неподвижной точкой (рис.15.1). Вводим главные оси инерции тела для неподвижной точки (x_1, x_2, x_3). Центр масс S. Система находится в однородном поле тяжести. Единичный вектор восходящей вертикали $\vec{\gamma}$. Угловая скорость в главных осях инерции $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ (в главных осях инерции). Радиус-вектор центра масс в главных осях $\overrightarrow{OS} = (S_1, S_2, S_3)$. Тензор инерции для неподвижной точки O: $J_O = diag(J_1, J_2, J_3)$.

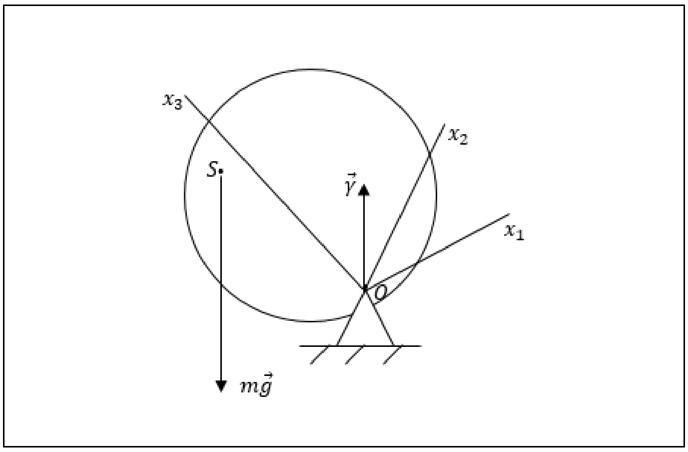

Рис.15.1 Твердое тело с неподвижной точкой O

Интеграл энергии:

$$H = \frac{1}{2}(J_O\vec{\omega}, \vec{\omega}) + mg\big(\overrightarrow{OS}, \vec{\gamma}\big) = h$$

Интеграл площадей:

$$K = (J_O\vec{\omega}, \vec{\gamma}) = k$$

Геометрический интеграл:

$$\Gamma = (\vec{\gamma}, \vec{\gamma}) = 1$$

Следуя общей теории, ищем эффективный потенциал:

$$V_k(\vec{\gamma}) = \min_{\vec{\omega}} H(\vec{\omega}, \vec{\gamma})\,|_{K(\vec{\omega},\vec{\gamma})=k}$$

$$W = H - \lambda(K - k)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow K = k$$

$$\frac{\partial W}{\partial \vec{\omega}} = J_O(\vec{\omega} - \lambda\vec{\gamma})$$

$$\vec{\omega} = \lambda\vec{\gamma} \Rightarrow \lambda = \frac{k}{J(\vec{\gamma})}$$

$$J(\vec{\gamma}) = (J_O\vec{\gamma}, \vec{\gamma})$$

Таким образом, энергия имеет минимум на фиксированном уровне интеграла площадей по угловым скоростям если $\vec{\omega} = \frac{k}{J(\vec{\gamma})}\vec{\gamma}$. Подставляя это значение в интеграл энергии, находим:

$$V_k(\vec{\gamma}) = mg\left(\overrightarrow{OS}, \vec{\gamma}\right) + \frac{1}{2}\frac{k^2}{J(\vec{\gamma})}$$

Ищем критические точки эффективного потенциала на сфере:

$$\delta V_k(\vec{\gamma})|_{\vec{\gamma}\in S^2} = 0 \Rightarrow \ \vec{\gamma} = \vec{\gamma}(k) \Rightarrow \vec{\omega} = \frac{k}{J\left(\vec{\gamma}(k)\right)}\vec{\gamma}(k)$$

Эти стационарные движения соответствуют перманентным вращениям.

Рассмотрим частный случай:

$$s_1 = s_2 = 0; s_3 = s > 0$$

$$J_1 < J_2 < J_3$$

$$V_k(\vec{\gamma}) = mgs\gamma_3 + \frac{1}{2}\frac{k^2}{J_1\gamma_1^2 + J_2\gamma_2^2 + J_3\gamma_3^2}$$

$$W(\vec{\gamma}, \nu) = V_k(\vec{\gamma}) + \frac{1}{2}\nu[(\vec{\gamma}, \vec{\gamma}) - 1]$$

Выпишем условия стационарности W по ν и $\vec{\gamma}$.

$$\frac{\partial W}{\partial \nu} = 0 \Leftrightarrow \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_i} = \left(\nu - \frac{k^2 J_i}{J^2(\gamma)}\right)\gamma_i = 0 \ (i = 1,2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_3} = mgs + \left(\nu - \frac{k^2 J_3}{J^2(\gamma)}\right)\gamma_3 = 0$$

Очевидно, что есть решение вида I: $\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1, \nu = \frac{k^2}{J_3} - mgs$. И решение вида II: $\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = -1, \nu = \frac{k^2}{J_3} + mgs$. Устойчивость при любом k.

Если ввести возмущение $\gamma_1 = \alpha_1, \gamma_2 = \alpha_2, \gamma_3 = 1 + \alpha_3$, тогда $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha_3 = 0$. В первом приближении $\alpha_3 = 0$.

$$V_k(\vec{\gamma} + \vec{\alpha}) = V(\vec{\gamma}) + \delta V(\gamma) + \frac{1}{2}\delta^2 V(\vec{\gamma}); \;\; (\delta V(\gamma) = 0)$$

$$\delta^2 V_k(\gamma) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_1^2}\right)_0 \alpha_1^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_2^2}\right)_0 \alpha_2^2 + 2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2}\right)_0 \delta\alpha_1 \delta\alpha_2\right]$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_i^2}\right)_{(\mathrm{I})} = \frac{k^2}{J_3} - mgs - \frac{k^2 J_i}{J_3^2} = \frac{k^2}{J_3^2}(J_3 - J_i) - mgs \; (i = 1,2); \; \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j}\right)_{(\mathrm{I})} = 0$$

$$\delta^2 V_k = \frac{1}{2}[\varkappa_1 (\delta\gamma_1)^2 + \varkappa_2 (\delta\gamma_2)^2]; \; \varkappa_i = \frac{k^2}{J_3^2}(J_3 - J_i) - mgs$$

Если $\varkappa_1 > 0, \varkappa_2 > 0 \Rightarrow min \Rightarrow$ устойчивость.

Если $\varkappa_1 \varkappa_2 < 0 \Rightarrow$ седло $\Rightarrow$ неустойчивость со степенью 1.

Если $\varkappa_1 < 0, \varkappa_2 < 0 \Rightarrow max \Rightarrow$ степень неустойчивости равна 2 $\Rightarrow$ ничего заранее сказать не можем.

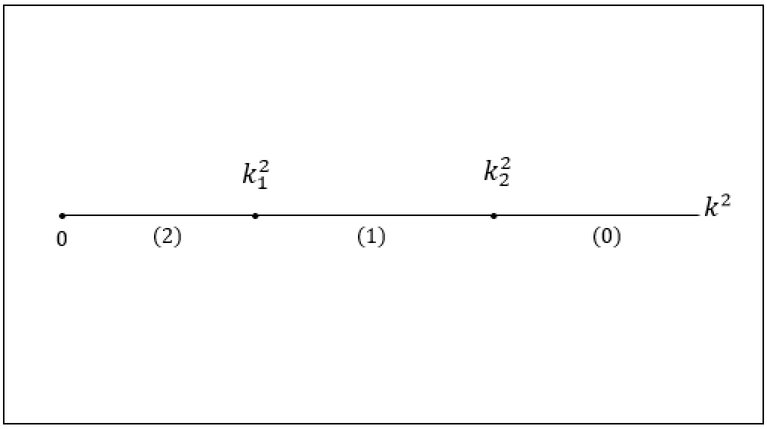

Рис.15.2 Степени неустойчивости

$$k_i^2 = \frac{mgsJ_3^2}{J_3 - J_i}$$

Существуют решения вида III: $\gamma_1 = sin\theta_1;\; \gamma_2 = 0;\; \gamma_3 = cos\theta_1 \;\big(\theta_1 = \theta_1(k^2)\big)$, и вида IV: $\gamma_1 = 0;\; \gamma_2 = sin\theta_2;\; \gamma_3 = cos\theta_2 \;\big(\theta_2 = \theta_2(k^2)\big)$.

Найдем решения III.

$$\nu = \frac{k^2 J_1}{(J_1^2 sin^2\theta_1 + J_3^2 cos^2\theta_1)^2}$$

$$\frac{k^2}{J^2(\theta_1)}(J_1 - J_3)cos\theta_1 + mgs = 0$$

Аналогично, для решения IV получаем:

$$\frac{k^2}{J^2(\theta_2)}(J_2 - J_3)cos\theta_2 + mgs = 0$$

15.3 Диаграммы Пуанкаре-Четаева полученных решений

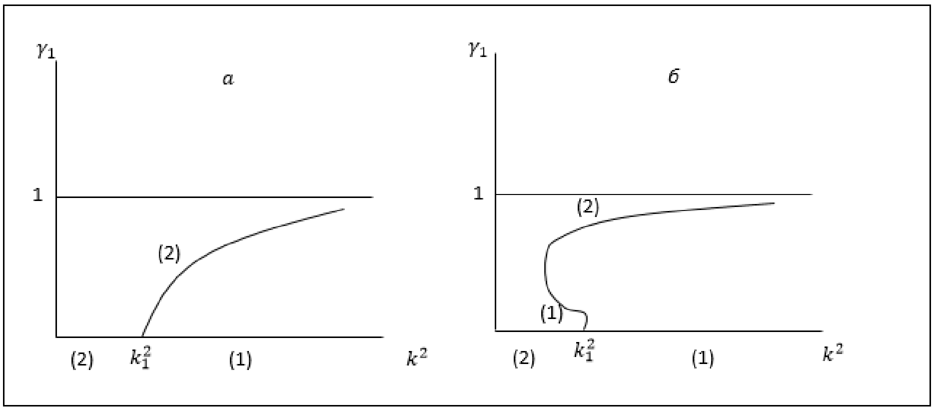

Рис.15.3 Два случая, возможные для решения III. *а)*$J_3 < \frac{4}{3}J_1$*;б)*$J_3 > \frac{4}{3}J_1$

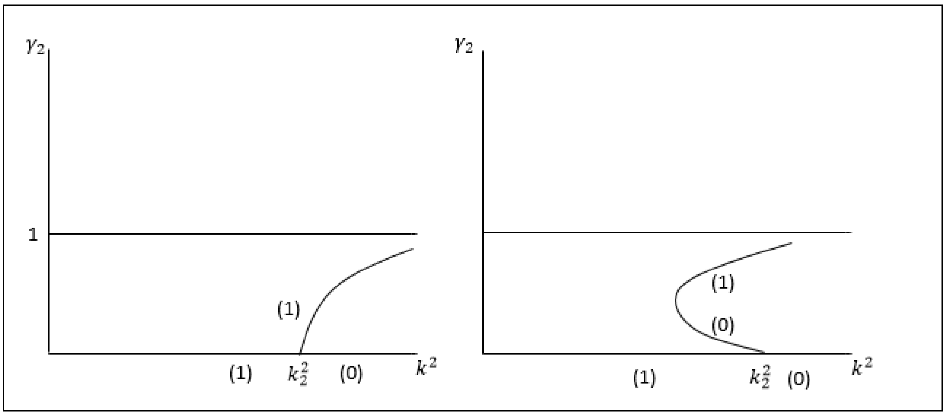

Рис.15.4 Два случая, возможные для решения IV. *Левый график соответствует)*$J_3 < \frac{4}{3}J_2$

<u>Проекция на трехмерное пространство:</u>

Так как $J_1 < J_2$, рассматриваем три случая.

А) $J_3 < \frac{4}{3}J_1 < \frac{4}{3}J_2$

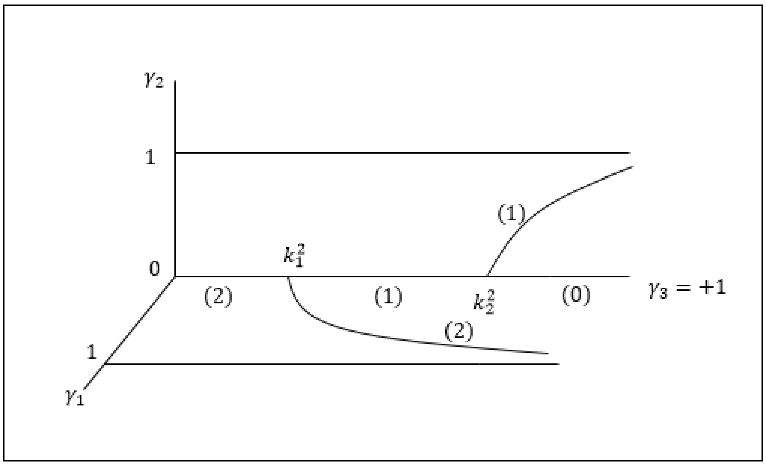

Рис.15.5 Случай А

B) $\frac{4}{3}J_2 > J_3 > \frac{4}{3}J_1$

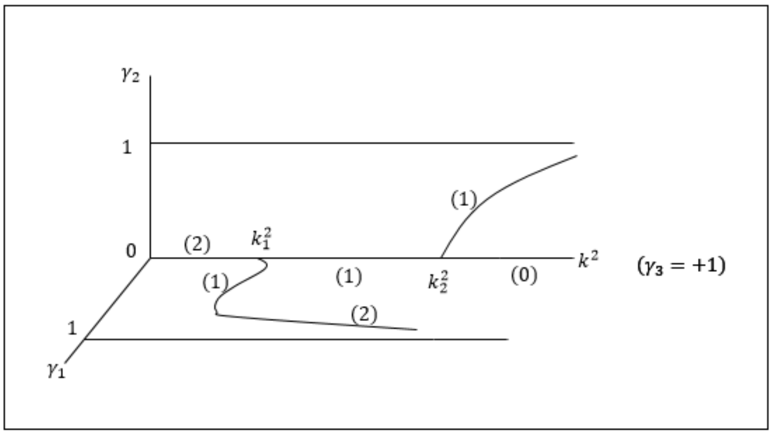

Рис.15.6 Случай В

C) $J_3 > \frac{4}{3}J_2 > \frac{4}{3}J_1$

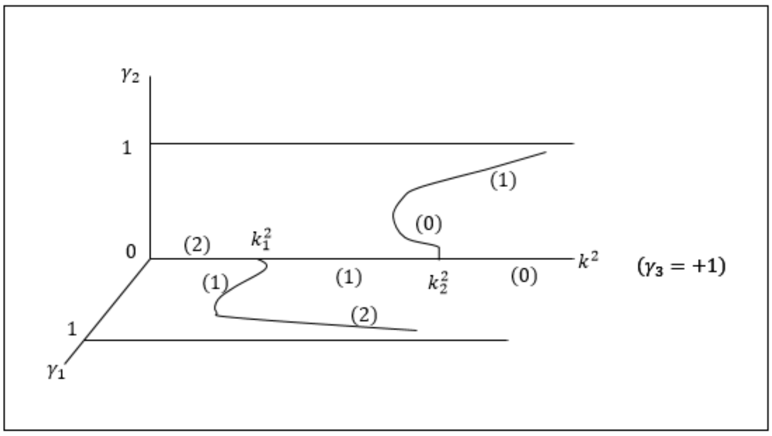

Рис.15.7 Случай С

Все предыдущие диаграммы – исследование решения I и его ответвлений.

Теперь исследование решения II:

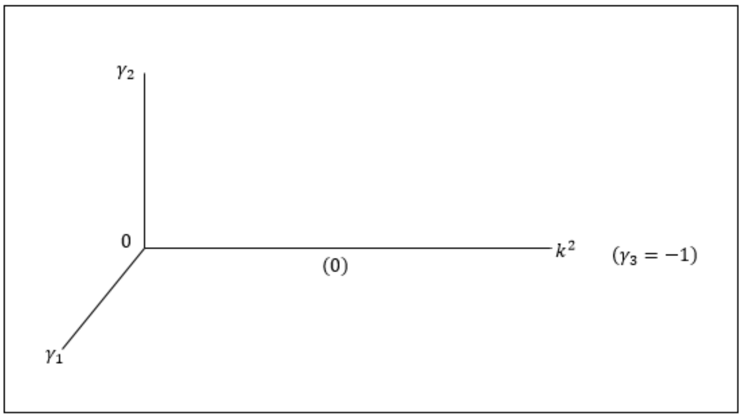

Рис.15.8 Решение II

15.4 Диаграммы Смейла полученных решений

Изобразим диаграммы Смейла для случая A (рис.15.9).

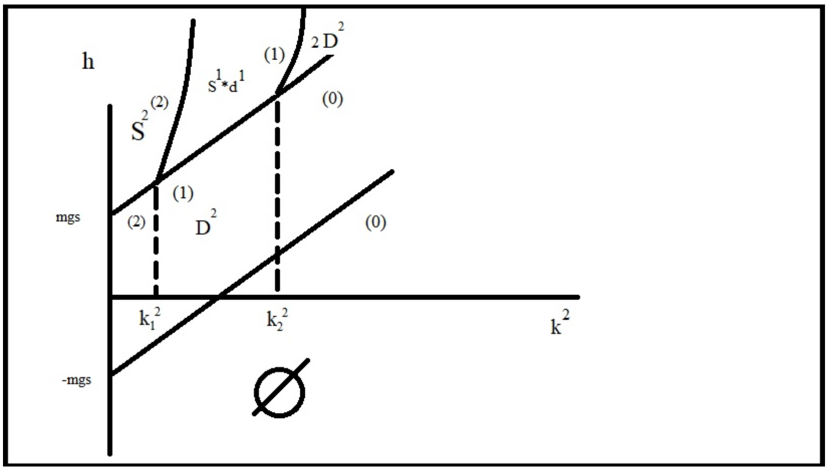

Рис.15.9 Диаграмма Смейла для случая А

Что изображено на диаграмме:

$$h = h_1(k^2) = V_k(\mathrm{I})$$

$$h = h_2(k^2) = V_k(\mathrm{II})$$

$$h = h_3(k^2) = V_k(\mathrm{III})$$

$$h = h_4(k^2) = V_k(\mathrm{IV})$$

$$h_1(k^2) = V_k|_{\gamma_1=\gamma_2=0;\gamma_3=1} = mgs + \frac{1}{2}\frac{k^2}{J_3}$$

$$h_2(k^2) = V_k|_{\gamma_1=\gamma_2=0;\gamma_3=-1} = -mgs + \frac{1}{2}\frac{k^2}{J_3}$$

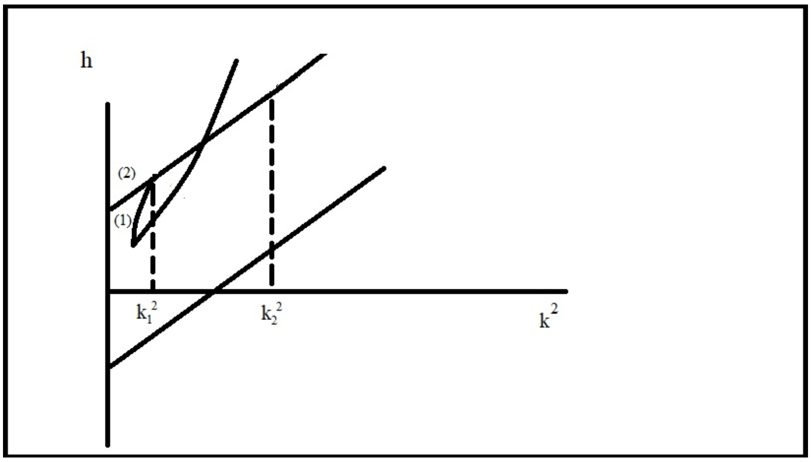

Рис.15.10 Диаграмма Смейла для случая В

Лекция 16

Введение в динамику кельтского камня

Введем неподвижную систему координат (рис.16.1). На плоскость Oxy помещено твердое тело, которое ограничено поверхностью Σ, которая дифференцируемыми преобразованиями приводится к сфере (диффеоморфна сфере $\Sigma \sim S^2$). Центр масс твердого тела S. $Sx_1x_2x_3$ – главные центральные оси инерции. Масса тела m, центральный тензор инерции $J_s = (J_1, J_2, J_3)$. K – точка контакта тела с плоскостью. $\vec{r} = \overrightarrow{SK} = \vec{x}_k$.

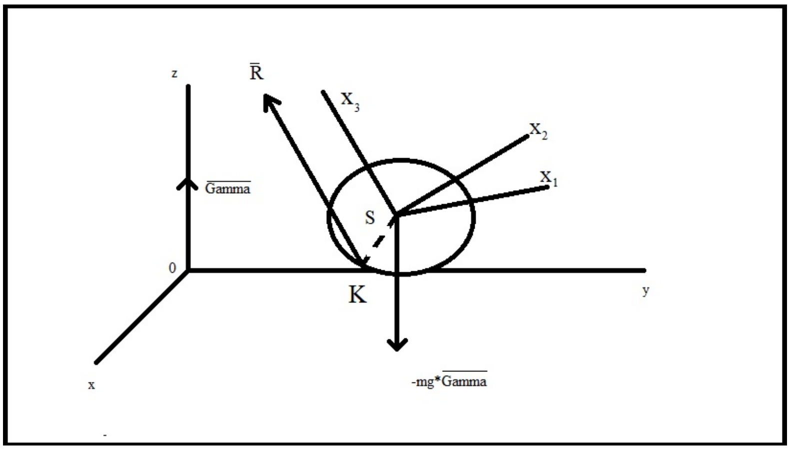

Рис.16.1

Уравнение поверхности тела:

$$\Sigma = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : f(\vec{x}) = 0\}$$

где $\vec{x} = \sum_i x_i \vec{e}_i$. $f(\vec{x}) < 0$ – внутренность тела, $f(\vec{x}) > 0$ – внешность.

$$\vec{\gamma} = -\frac{grad\big(f(\vec{x}_k)\big)}{\big\|grad\big(f(\vec{x}_k)\big)\big\|}$$

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{\gamma})$$

Вводим скорость центра масс $\vec{v} = \vec{v}_S$ и угловую скорость тела $\vec{\omega}$. Будем считать, что тело не может скользить по плоскости. На движение тела наложены неголономные связи.

$$\vec{v} + [\vec{\omega}, \vec{r}] = 0 \qquad (1)$$

Следовательно, высота центра масс $z_S = -(\vec{r}(\vec{\gamma}), \vec{\gamma})$.

На тело действует вес $-mg\vec{\gamma}$ и реакция $\vec{R}$. Уравнения движения тела:

Теорема об изменении импульса:

$$m\dot{\vec{v}} + [\vec{\omega}, m\vec{v}] = -mg\vec{\gamma} + \vec{R} \qquad (2)$$

Уравнение Эйлера:

$$J_s\dot{\vec{\omega}} + [\vec{\omega}, J_s\vec{\omega}] = [\vec{r}, \vec{R}] \tag{3}$$

Уравнение Пуассона:

$$\dot{\vec{\gamma}} + [\vec{\omega}, \vec{\gamma}] = 0 \tag{4}$$

Интеграл энергии:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(J_s\vec{\omega}, \vec{\omega}) - mg(\vec{r}, \vec{\gamma}) = h \tag{5}$$

Геометрический интеграл:

$$\Gamma = (\vec{\gamma}, \vec{\gamma}) = 1 \tag{6}$$

$$(1) \Rightarrow \vec{v} = [\vec{r}, \vec{\omega}] \Rightarrow \dot{\vec{v}} = [\dot{\vec{r}}, \vec{\omega}] + [\vec{r}, \dot{\vec{\omega}}] = \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{\gamma}}[\vec{\gamma}, \vec{\omega}], \vec{\omega}\right] + [\vec{r}, \dot{\vec{\omega}}] \tag{7}$$

$$\vec{R} = mg\vec{\gamma} + m[\vec{r}, \dot{\vec{\omega}}] + m\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{\gamma}}[\vec{\gamma}, \vec{\omega}], \vec{\omega}\right] + m[\vec{\omega}, [\vec{r}, \vec{\omega}]] = \vec{R}_*(\vec{\omega}, \vec{\gamma}, \dot{\vec{\omega}}) \tag{8}$$

Подставляя (8) в (3), получаем:

$$J_s\dot{\vec{\omega}} + [\vec{\omega}, J_s\vec{\omega}] = [\vec{r}, \vec{R}_*] \tag{3*}$$

Из (3^*) можно получить $\dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}}(\vec{\omega}, \vec{\gamma})$. Тогда $\vec{R} = \vec{R}_*\left(\vec{\omega}, \vec{\gamma}, \dot{\vec{\omega}}(\vec{\omega}, \vec{\gamma})\right) = \vec{R}(\vec{\omega}, \vec{\gamma})$.

Система (3^*), (4) допускает первые интегралы

$$H_* = \frac{1}{2}m[\vec{\omega}, \vec{r}]^2 + \frac{1}{2}(J_s\vec{\omega}, \vec{\omega}) - mg(\vec{r}, \vec{\gamma}) = h \tag{5*}$$

и (6).

Попробуем найти перманентные вращения. Будем искать решения такие, что

$$\vec{\gamma} = const, \vec{\omega} = \omega\vec{\gamma}, \omega = const \tag{9}$$

Подставим (9) в (3^*):

$$\omega^2[\vec{\gamma}, J_s\vec{\gamma}] = [\vec{r}, mg\vec{\gamma}] + m\omega^2\left[\vec{r}, [\vec{\gamma}[\vec{r}, \vec{\gamma}]]\right] \tag{10}$$

(10) скалярно умножим на $\vec{r}$, получим:

$$\omega^2([\vec{\gamma}, J_s\vec{\gamma}], \vec{r}) = 0 \tag{11}$$

$$(\vec{r}, [\vec{\gamma}, J_s\vec{\gamma}]) = 0 \tag{12}$$

<u>У нас будет два предположения.</u>

I. Пусть одна из главных осей инерции (Sx_3) в одном из противоположных направлений (в отрицательном) ортогональна поверхности тела. Тогда тело, поставленное на плоскость так, что $Sx_3 \uparrow\uparrow \vec{\gamma}$, может вращаться вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью. Система уравнений (3^*), (4) допускает стационарные решения вида (13):

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1;\ \omega_1 = \omega_2 = 0, \omega_3 = \omega \in \mathbb{R} \tag{13}$$

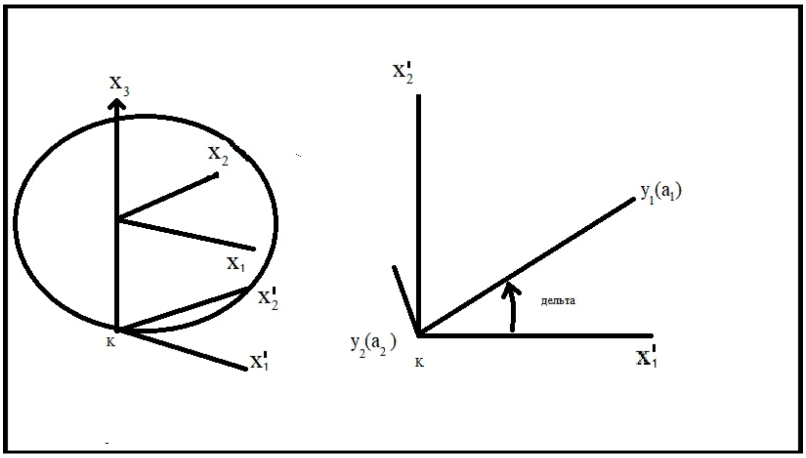

Рис.16.2

Ky_1 и Ky_2 – направления главных кривизн. a_1 и a_2 – главные радиусы кривизны. дельта $= \delta = \widehat{Kx_1'\ Ky_1}$.

II.

$$(J_2 - J_1)(a_2 - a_1) sin\delta cos\delta \neq 0$$

I и II определяют кельтский камень.

Исследуем устойчивость решения (13) (при предположениях I и II) системы (3^*), (4). Обозначения

$$\gamma_1, \gamma_2, \omega_1, \omega_2, \gamma_3 = 1 + \xi, \omega_3 = \omega + \eta \tag{14}$$

(14) подставляем в (3^*), (4) и отбрасываем все нелинейные члены. Получим:

$$\begin{cases} A\dot{\zeta} = B\zeta\ (\zeta = (\gamma_1, \gamma_2, \omega_1, \omega_2); A, B: 4 \times 4) \\ \dot{\xi} = 0, \dot{\eta} = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Характеристическое уравнение этой системы:

$$F(\lambda) = \lambda^2 G(\lambda)$$

где $G(\lambda) = b_0\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4$. $G(\lambda) = |A\lambda - B|$.

$$b_0 = (J_1 + ma_3^2)(J_2 + ma_3^2) > 0$$

$$b_1 = [(J_2 - J_1)(a_2 - a_1) sin\delta cos\delta] ma_3\omega$$

$$b_2 = b_2(\omega^2, \dots)$$

$$b_3 = b_1\omega^2$$

$$b_4 = b_4(\omega^2, \dots)$$

где a_3 – высота центра масс на перманентном вращении.

Запишем критерий Рауса-Гурвица, чтобы понять, когда все корни $G(\lambda) = 0$ лежат в левой полуплоскости. Определитель Гурвица:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\ 0 & b_4 & b_3 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = b_1 > 0;\ \Delta_2 > 0;\ \Delta_3 > 0;\ \Delta_4 = b_4\Delta_3 > 0$$

В итоге: $b_1 > 0; (b_2 - b_0\omega^2)\omega^2 - b_4 > 0;\ b_4 > 0.$

Предположим, что выполнено следующие условия:

$$J_3 > J_1; J_2 \ \ (J_3 > J_2 > J_1)$$

$$a_3 < a_1, a_2 \ (a_3 < a_2 < a_1)$$

$$\delta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

При этих условиях $b_4 > 0$ всегда. $b_1 > 0 \sim \omega < 0$. $\Delta_3 > 0 \sim J\omega^2 > \frac{mg}{a_3}(a_1 - a_3)(a_2 - a_3) > 0$. $J = (J_1 + J_2 - J_3)\left(\frac{a_1}{a_3} + \frac{a_2}{a_3} - 2\right) - m[4a_3^2 - 3a_3(a_1 + a_2) + 2a_1a_2]$. $J > 0$ – необходимо. $\omega^2 > \omega_*^2 = \frac{mg}{Ja_3}(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)$ – достаточно.

Лекция 17

Гантель Белецкого

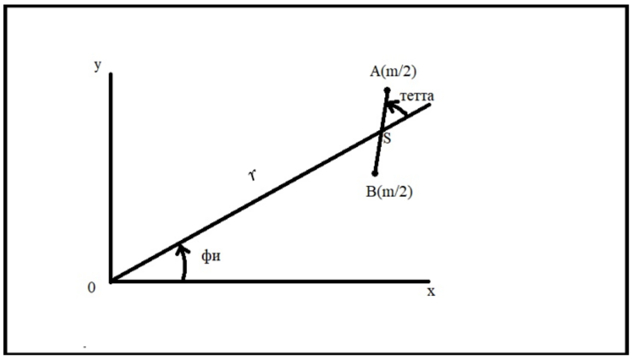

Рис.17.1

Комментарий к рисунку: Неподвижная плоскость Oxy, O – притягивающий центр. В этой плоскости движется симметричная гантель (две точечные массы A, B, массы которых $\frac{m}{2}, \frac{m}{2}$, стержень, соединяющий эти массы, безмассовый). Центр масс – S (середина гантели). Получаем: масса гантели - m; длина гантели - $2a$ $(AS = SB = a)$; обобщенные координаты - r, φ, θ.

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}ma^2\big(\dot{\theta} + \dot{\varphi}\big)^2$$

Потенциальная энергия:

$$V = -\frac{\mu m}{2}\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right)$$

где $r_+ = \left|\overrightarrow{AO}\right| = (r^2 + 2racos\theta + a^2)^{\frac{1}{2}}$; $r_- = \left|\overrightarrow{BO}\right| = (r^2 - 2racos\theta + a^2)^{\frac{1}{2}}$.

Единицу измерения массы выбираем так, что $m = 1$. Единицу измерения длины выбираем так, что $a = 1$. Единицу измерения времени выбираем так, что $\mu = 1$.

$$\frac{\partial(T - V)}{\partial\varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = (r^2 + 1)\dot{\varphi} + \dot{\theta} = c = const$$

Приведенный потенциал:

$$V_c = \min_{\dot{r},\dot{\varphi},\dot{\theta}}(T + V)|_{\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = c} = V + \frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2 + 1}$$

Так как у нас есть циклическая координата, значит, наша система допускает стационарные движения вида:

$$\theta = \theta_0 = const;\ r = r_0 = const;\ \dot{\theta} = \dot{r} = 0;\ \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = \frac{c^2}{r_0^2 + 1};\ \varphi = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0 (t_0 = 0)$$

θ_0, r_0 определяются из системы уравнений: $\frac{\partial V_c}{\partial \theta} = 0;\ \frac{\partial V_c}{\partial r} = 0.$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_c}{\partial \theta} = \dfrac{r}{2} sin\theta \left(\dfrac{1}{r_-^3} - \dfrac{1}{r_+^3} \right) = 0 \\ \dfrac{\partial V_c}{\partial r} = \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{r_+ cos\theta}{r_+^3} + \dfrac{r_- cos\theta}{r_-^3} \right) - \dfrac{c^2 r}{(r^2+1)^2} = 0 \end{cases}$$

Первое уравнение системы тождественно по r удовлетворяется только в двух случаях:

1) $\theta = 0\ (mod\ \pi)$;

2) $\theta = \frac{\pi}{2}\ (mod\ \pi)$.

Для второго уравнения:

1) $\left(\frac{\partial V_c}{\partial r}\right)_{\theta=0} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(r+1)^2} + \frac{1}{(r-1)^2}\right) - \frac{c^2 r}{(r^2+1)^2} = -\frac{r}{(r^2+1)^2}[c^2 - f_1(r)]$, где $f_1 = \frac{(r^2+1)^3}{(r^2-1)^2 r}$.

Нужно решить уравнение $f_1(r) = c^2$.

$f_1(r): (0; +\infty) \to (0; +\infty); r = 1$ – вертикальная асимптота; r – наклонная асимптота.

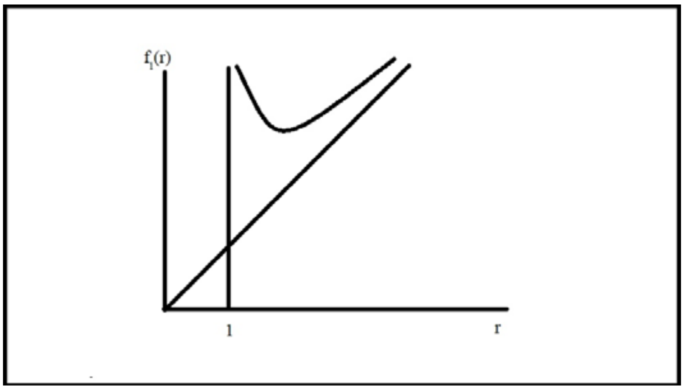

Рис.17.2 График функции $f_1(r)$

$$f_1' = \frac{df_1}{dr} = \frac{6(r^2+1)^2 r^2 (r^2-1)^2 - 4(r^2-1) r^2 (r^2+1)^3 - (r^2+1)^3 (r^2-1)^2}{(r^2-1)^4 r^2}$$
$$= \frac{(r^2+1)^2}{(r^2-1)^3 r^2}[6r^2(r^2-1) - 4r^2(r^2+1) - (r^2+1)(r^2-1)]$$

$$[6r^2(r^2-1) - 4r^2(r^2+1) - (r^2+1)(r^2-1)] = r^4 - 10r^2 + 1 = 0$$

$$r^2 = 5 \pm \sqrt{24}$$

$$r > 1 \Rightarrow r^2 = 5 + \sqrt{24} = r_*(\text{критическое}) = \sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

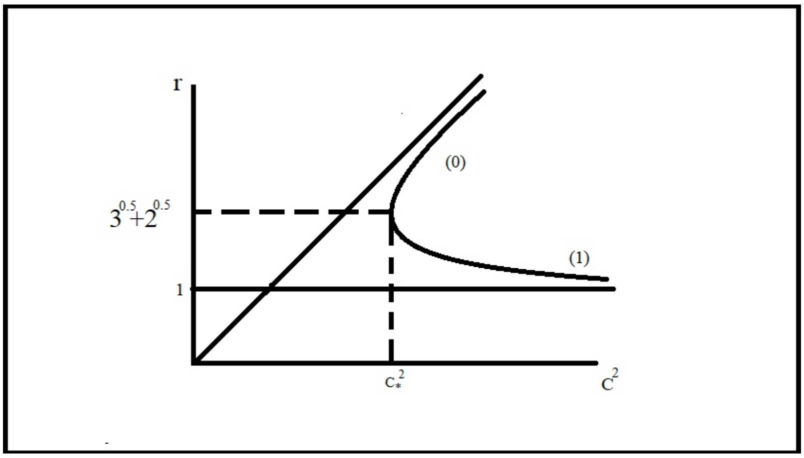

Рис.17.3 Биф. диаграмма для $\theta = 0$. *(0)-min, (1)-седло*

$$c_*^2 = f_1(r_*)$$

$$\left(\frac{\partial^2 V_c}{\partial \theta^2}\right)_{\substack{\theta=0 \\ r=r_1(c^2)}} = \frac{r_1}{2}\left(\frac{1}{(r_1-1)^3} - \frac{1}{(r_1+1)^3}\right) > 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 V_c}{\partial \theta \partial r}\right)_{\substack{\theta=0 \\ r=r_1(c^2)}} = 0$$

$\left(\frac{\partial^2 V_c}{\partial r^2}\right)_{\substack{\theta=0 \\ r=r_1(c^2)}} = -\frac{r_1}{(r_1^2+1)^2} f_1'(r_1) \gtrless 0$ при $r_1 \gtrless \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

2) $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r_+ = r_- = \sqrt{r^2+1}$.

$$\left(\frac{\partial V_c}{\partial r}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{r}{(r^2+1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{c^2 r}{(r^2+1)^2} = -\frac{r}{(r^2+1)^2}\left[c^2 - f_2(r)\right]$$

$$f_2(r) = \sqrt{r^2+1}$$

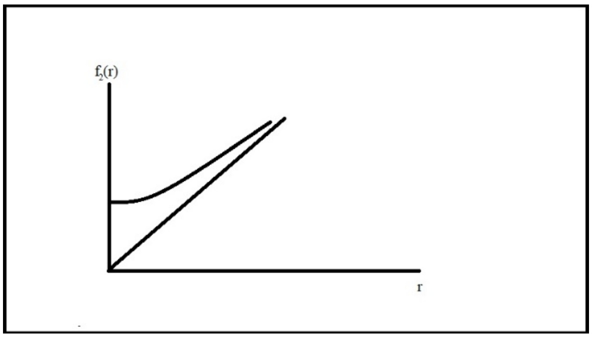

Рис.17.4 График функции $f_2(r)$

$$r = r_2(c^2) = \sqrt{c^4 - 1}$$

$$\left(\frac{\partial^2 V_c}{\partial r^2}\right)_{\substack{\theta=\frac{\pi}{2}\\ r=r_2}} = \frac{r_2}{(r_2^2+1)^2} f_2'(r_2) > 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 V_c}{\partial \theta^2}\right)_{\substack{\theta=\frac{\pi}{2}\\ r=r_2}} = \frac{r_2}{2} \times 1 \left(-\frac{3}{r_-^5} - \frac{3}{r_+^5}\right) = -\frac{3r_2}{(r_2^2+1)^5} < 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 V_c}{\partial \theta \partial r}\right)_{\substack{\theta=\frac{\pi}{2}\\ r=r_2}} = \frac{r}{2} \times 1 \left[-\frac{3r}{r_-^5} + \frac{3r}{r_+^5}\right] = 0$$

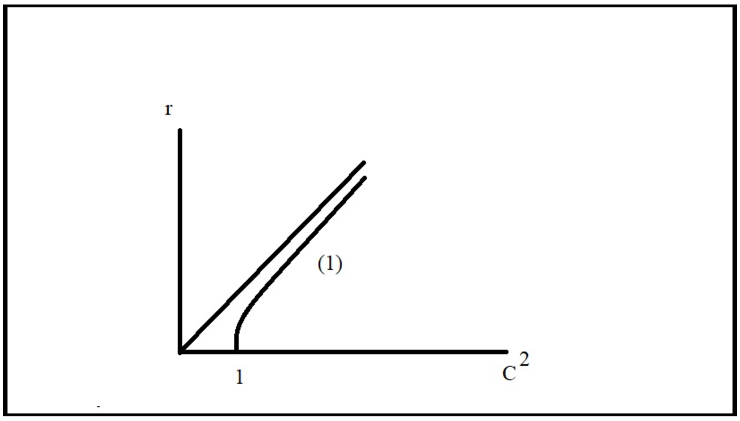

Рис.17.5 Биф. диаграмма для $\theta = \frac{\pi}{2}$. (1)-седло

(1) – неустойчивость, (2) – устойчивость.

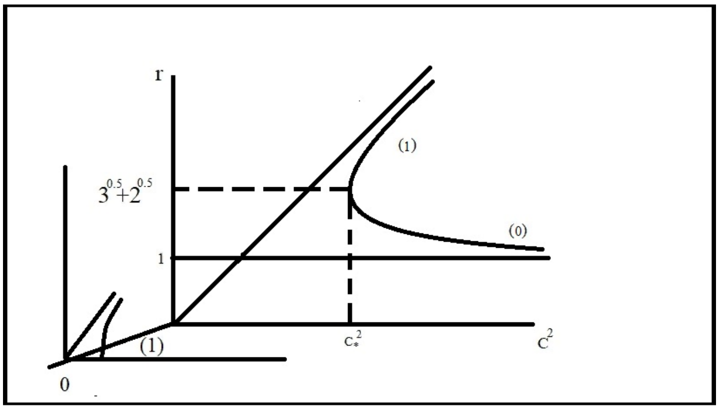

Рис.17.6 Диаграмма Пуанкаре-Четаева

$$r \in (0; +\infty);\ \theta \neq 0$$

$$r \in (1; +\infty);\ \theta = 0$$

Лекция 18

Твердое тело в центральном гравитационном поле

18.1 Неограниченная постановка задачи (поступательно-вращательное движение тела)

Введем неподвижную систему координат $OXYZ$. O – притягивающий центр. В этом пространстве движется тело с центром масс S. Введем главные центральные оси инерции $Sx_1x_2x_3$ (соответствующие моменты инерции J_1, J_2, J_3). Пространство положений $R^3 \times SO(3)$. r, σ, δ – сферические координаты центра масс S. $S\xi\eta\zeta$ – орбитальная система координат. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – орты системы координат $Sx_1x_2x_3$, $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ – орты орбитальной системы координат. При этом $\vec{r} = r\vec{\gamma}$; $(\vec{\alpha}, \vec{e}_Z) = 0$; $(\vec{\alpha}, \vec{v}_S) > 0$ ($\vec{v}_S$ – скорость центра масс). $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ – правая тройка. m – масса тела.(рис.18.1)

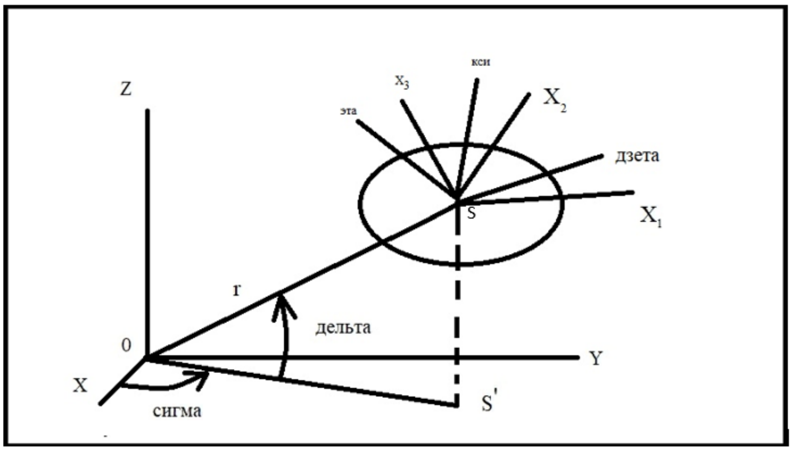

Рис.18.1 Иллюстрация к задаче

$$SO(3): \psi, \theta, \varphi$$

$$\vec{v}_S = r\dot{\sigma}cos\delta\vec{\alpha} + r\dot{\delta}\vec{\beta} + \dot{r}\vec{\gamma}$$

Абсолютная угловая скорость твердого тела:

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega} + \vec{\omega}_{\text{пер}}$$

где $\vec{\omega}$ – относительная угловая скорость (относительно орбитальной системы координат), $\vec{\omega}_{\text{пер}}$ – абсолютная угловая скорость системы $S\xi\eta\zeta$.

$$\vec{\omega}_{\text{пер}} = -\dot{\delta}\vec{\alpha} + \dot{\sigma}\left(cos\delta\vec{\beta} + sin\delta\vec{\gamma}\right)$$

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i\vec{e}_i\,;\ \omega_1 = \dot{\theta}cos\varphi + \dot{\psi}sin\theta sin\varphi;\ \omega_2 = -\dot{\theta}sin\varphi + \dot{\psi}sin\theta cos\varphi;\ \omega_3 = \dot{\varphi} + \dot{\psi}cos\theta$$

$$\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \vec{e}_i\,;\ \vec{\beta} = \sum_{i=1}^{3} \beta_i \vec{e}_i\,;\ \vec{\gamma} = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i \vec{e}_i$$

$$\vec{\Omega} = \sum_{i=1}^{3} \Omega_i \vec{e}_i\,;\ \Omega_1 = \omega_1 - \dot{\delta}\alpha_1 + \dot{\sigma}(cos\delta\beta_1 + sin\delta\gamma_1)\ (1{,}2{,}3)$$

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{1}{2} m v_S^2 + \left(\frac{1}{2} J_S \vec{\Omega}, \vec{\Omega}\right)$$

τ – объем, занимаемый телом; $dm(\vec{x})$ – элементарная масса в точке с радиус-вектором $\vec{x}$.
Потенциальная энергия:

$$V = -\mu \int_\tau \frac{dm}{|\vec{r} + \vec{x}|} = -\mu \int_\tau (r^2 + 2(\vec{r}, \vec{x}) + x^2)^{-\frac{1}{2}} dm = -\frac{\mu}{r} \int_\tau \left[1 + 2\left(\vec{\gamma}, \frac{\vec{x}}{r}\right) + \frac{x^2}{r^2}\right]^{-\frac{1}{2}} dm$$

Будем считать, что $x = |\vec{x}| \le l$, где l – характерный размер тела, $\frac{l}{r} = \varepsilon \ll 1 \Rightarrow \frac{x}{r} = \varepsilon \ll 1.$

Получается, что

$$\left[1 + 2\left(\vec{\gamma}, \frac{\vec{x}}{r}\right) + \frac{x^2}{r^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\vec{\gamma}, \frac{\vec{x}}{r}\right) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{3}{2}\frac{(\vec{\gamma}, \vec{x})^2}{r^2} + o(\varepsilon^2)$$

$$\begin{aligned}(\vec{\gamma}, \vec{x})^2 &= (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3)^2 \\ &= \gamma_1^2 x_1^2 + \gamma_2^2 x_2^2 + \gamma_3^2 x_3^2 + 2\gamma_1 x_1 \gamma_2 x_2 + 2\gamma_1 x_1 \gamma_3 x_3 + 2\gamma_2 x_2 \gamma_3 x_3 \\ &= x_1^2(1 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2) + x_2^2(1 - \gamma_3^2 - \gamma_1^2) + x_3^2(1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2) + 2(\dots) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \gamma_1^2(x_2^2 + x_3^2) - \gamma_2^2(x_3^2 + x_1^2) - \gamma_3^2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

Считаем интеграл $\int_\tau \left[1 + 2\left(\vec{\gamma}, \frac{\vec{x}}{r}\right) + \frac{x^2}{r^2}\right]^{-\frac{1}{2}} dm$ по частям.

$$\int_\tau dm = m;\ \int_\tau \vec{x} dm = 0$$

$$\begin{aligned}\int_\tau \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) dm &= \frac{1}{2}\int_\tau [(x_1^2 + x_2^2) + (x_2^2 + x_3^2) + (x_1^2 + x_3^2)] dm \\ &= \frac{1}{2}(J_3 + J_1 + J_2)\end{aligned}$$

$$\int_\tau x_1 x_2 dm = 0\ (x_2 x_3;\ x_3 x_1 - \text{аналогично})$$

$$-\gamma_1^2 \int\limits_\tau (x_2^2 + x_3^2) dm = -J_1 \gamma_1^2 \; (\dots)$$

$$V = -\frac{\mu m}{r} - \frac{\mu}{2r^3}(J_3 + J_1 + J_2) + \frac{3\mu}{2r^3}(J_1\gamma_1^2 + J_2\gamma_2^2 + J_3\gamma_3^2) + o\left(\frac{\mu m}{r}\varepsilon^2\right)$$
$$= V^*(\vec{r}, \vec{\gamma}) + o\left(\frac{\mu m}{r}\varepsilon^2\right)$$

V^* – потенциал спутникового приближения.

Уравнения движения:

Уравнения для центра масс:

$$m\frac{d\vec{v}_s}{dt} = \vec{F} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \qquad (1)$$

Теорема об изменении кинетического момента относительно центра масс:

$$\frac{d}{dt}\left(J_S\vec{\Omega}\right) = \vec{M}_S = \left[\vec{x}, \vec{F}\right] = -\mu \int\limits_\tau \frac{[\vec{x}, \vec{r} + \vec{x}]}{|\vec{r} + \vec{x}|^3} dm = \left[\vec{\gamma}, \frac{\partial V}{\partial \vec{\gamma}}\right] \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(J_S\vec{\Omega}\right) = J_S\dot{\vec{\Omega}} + \left[\vec{\Omega}, J_S\vec{\Omega}\right]$$

Имеем первые интегралы:

$$H = T + V = const; \vec{K}_0 = [\vec{r}, m\vec{v}_S] + J_S\vec{\Omega} = \vec{k} = const$$

18.2 Ограниченная постановка задачи

$$m\frac{d\vec{v}_s}{dt} = -\mu\frac{m}{r^3}\vec{r} \qquad (1^*)$$

$$\frac{d}{dt}\left(J_S\vec{\Omega}\right) = \left[\vec{\gamma}, \frac{\partial V}{\partial \vec{\gamma}}\right] \qquad (2^*)$$

Пренебрегаем влиянием ориентации тела на движение цента масс $\Rightarrow$ центр масс движется как в задаче Кеплера; движение плоское $\Rightarrow$ считаем, что центр масс движется в плоскости OXY, т.е. $\delta \equiv 0$. Если движение круговое, то $r = r_0 = const;\ \dot{\sigma} = \sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}} = \omega_0$.

При этом $S\zeta$ – по радиус-вектору, $S\xi$ – по касательной к орбите, $S\eta$ – по нормали к плоскости орбиты. При этом $\vec{\omega}_{\text{пер}} = \dot{\sigma}\vec{\beta} = \omega_0\vec{\beta}$.

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega} + \omega_0\vec{\beta}$$

$$J_S\dot{\vec{\omega}} + [\vec{\omega}, J_S\vec{\omega}] - \omega_0 J_S\left[\vec{\omega}, \vec{\beta}\right] = 3\omega_0^2[\vec{\gamma}, J_S\vec{\gamma}] - \omega_0^2\left[\vec{\beta}, J_S\vec{\beta}\right] \qquad (3)$$

Уравнения (3) описывают вращательные движения спутника или движения спутника вокруг центра масс.

$$\dot{\vec{\beta}} + [\vec{\omega}, \vec{\beta}] = 0 \tag{4}$$

$$\dot{\vec{\gamma}} + [\vec{\omega}, \vec{\gamma}] = 0 \tag{5}$$

Эти уравнения допускают интегралы:

Обобщенный интеграл энергии:

$$\frac{1}{2}(J_S\vec{\omega}, \vec{\omega}) + W(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = h_*;\ W = \frac{3}{2}\omega_0^2(J_S\vec{\gamma}, \vec{\gamma}) - \frac{\omega_0^2}{2}(J_S\vec{\beta}, \vec{\beta}) \tag{6}$$

$$(\vec{\beta}, \vec{\beta}) = 1 \tag{7}$$

$$(\vec{\gamma}, \vec{\gamma}) = 1 \tag{8}$$

$$(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = 0 \tag{9}$$

18.3 Относительные равновесия спутника на круговой орбите в рамках ограниченной задачи

$$\Phi = \frac{1}{\omega_0^2}W + \frac{1}{2}\lambda_1[(\vec{\beta}, \vec{\beta}) - 1] + \frac{1}{2}\lambda_2[(\vec{\gamma}, \vec{\gamma}) - 1] + \lambda_3(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \Phi(\vec{\beta}, \vec{\gamma}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

Ищем безусловный экстремум функции Φ.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i} = 0\ (i = 1,2,3) \Rightarrow (7), (8), (9)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{\beta}} = -J_S\vec{\beta} + \lambda_1\vec{\beta} + \lambda_3\vec{\gamma} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{\gamma}} = 3J_S\vec{\gamma} + \lambda_2\vec{\gamma} + \lambda_3\vec{\beta} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = 0 \Rightarrow$$

$J_S\vec{\beta} = \lambda_1\vec{\beta};\ J_S\vec{\gamma} = -\frac{\lambda_2\vec{\gamma}}{3}$ – условие того, что $\vec{\beta}$ и $\vec{\gamma}$ – собственные вектора матрицы, соответствующей тензору инерции J_S. Получается, что $\vec{e}_i = \vec{\gamma};\ \vec{e}_j = \vec{\alpha}$(касательная к орбите); $\vec{e}_k = \vec{\beta}\ (i, j, k = 1,2,3; i \neq j \neq k \neq i)$.

Вдоль радиус-вектора – самая длинная ось эллипсоида инерции (т.е. ось наименьшего момента инерции). Вдоль нормали – самая короткая ось эллипсоида инерции (т.е. ось наибольшего момента инерции). По касательной – ось среднего момента инерции.

Лекция 19

Разбор некоторых вопросов

19.1 Система Чаплыгина

Принцип Даламбера-Лагранжа. Система описывается $n+k$ обобщенными координатами.

$$\sum_{i=1}^{n+k}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)\delta q_i=0$$

На систему также наложены неголономные связи:

$$\dot{q}_{n+\mu}=\sum_{i=1}^{n} b_{\mu i}\dot{q}_i \quad (\mu=1,\dots,k) \qquad (1)$$

Отличают систему Чаплыгина следующие обстоятельства:

1) $\frac{\partial T}{\partial q_{n+\mu}}=0$; $\frac{\partial V}{\partial q_{n+\mu}}=0$;

$$b_{\mu i}(q_1,\dots,q_n)$$

Заметим, что $\delta q_{n+\mu}=\sum_{i=1}^{n} b_{\mu i}\delta q_i$. Значит:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)\delta q_i+\sum_{\mu=1}^{k}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+\mu}}\right)\sum_{i=1}^{n} b_{\mu i}\delta q_i=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}+\sum_{\mu=1}^{k}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+\mu}}\right)b_{\mu i}=0$$

Обозначим θ – кинетическая энергия, вычисленная с учетом неголономных связей:

$$\theta=T|_{(1)}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}+\sum_{\mu=1}^{k}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+\mu}}b_{\mu i}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \theta}{\partial \dot{q}_i}\right)-\sum_{\mu=1}^{k}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+\mu}}\right)b_{\mu i}-\sum_{\mu=1}^{k}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+\mu}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b_{\mu i}}{\partial q_j}\dot{q}_j$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial q_i}=\frac{\partial T}{\partial q_i}+\sum_{\mu=1}^{k}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+\mu}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b_{\mu j}}{\partial q_i}\dot{q}_j$$

$$-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial \theta}{\partial q_i}+\sum_{\mu=1}^{k}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+\mu}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b_{\mu j}}{\partial q_i}\dot{q}_j$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\dot{q}_i}\right)-\sum_{\mu=1}^{k}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{n+\mu}}\right)b_{\mu i}-\sum_{\mu=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{n+\mu}}\frac{\partial b_{\mu i}}{\partial q_j}\dot{q}_j-\frac{\partial\theta}{\partial q_i}+\sum_{\mu=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{n+\mu}}\frac{\partial b_{\mu j}}{\partial q_i}\dot{q}_j+\frac{\partial V}{\partial q_i}+\sum_{\mu=1}^{k}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{n+\mu}}\right)b_{\mu i}=0$$

Таким образом, уравнения Чаплыгина:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial\theta}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}+\sum_{\mu=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{n+\mu}}\left(\frac{\partial b_{\mu j}}{\partial q_i}-\frac{\partial b_{\mu i}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_j=0$$

Данная система замкнула относительно переменных $q_1,\dots,q_n$.

19.2 О теореме Рауса-Ляпунова-Сальвадори

Пример на применение теоремы:

Рассмотрим качение шара по абсолютно шероховатой плоскости (рис.19.1). Предполагаем, что шар устроен так, что его центр масс не совпадает с геометрическим центром. Радиус шара R, расстояние от центра масс (C) до геометрического центра (G) – a. Будем считать, что в главных осях тензор инерции шара:

$$J_G=(A_1,A_2,A_3)$$

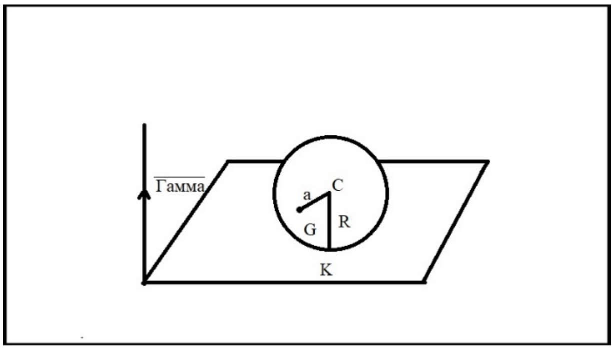

Рис.19.1 Иллюстрация к примеру

Шар динамически симметричен. Компоненты угловой скорости в главных центральных осях инерции:

$$\omega_1,\omega_2,\omega_3$$

Компоненты вектора восходящей вертикали:

$$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$$

Связь между скоростью и угловой скоростью:

$$\vec{v}_G+\left[\vec{\omega}\times\overrightarrow{GK}\right]=0$$

Уравнения движения такого шара допускают четыре первых интеграла:

$H = \frac{m}{2}\vec{v}_G^2 + \frac{A_1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{A_3}{2}\omega_3^2 + mg(R - a\gamma_3) = c_0.$

$J = A_1(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + A_3\omega_3\left(\gamma_3 - \frac{a}{R}\right) = j$ – интеграл Джеллетта. (2)

$C = \omega_3\sqrt{A_1A_3 + A_1mR^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + A_3mR^2\left(\gamma_3 - \frac{a}{R}\right)^2} = c$ – интеграл Чаплыгина. (3)

$\Gamma = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ – геометрический интеграл.

Переход к углам Эйлера:

$$\gamma_1 = sin\theta cos\varphi$$

$$\gamma_2 = sin\theta sin\varphi$$

$$\gamma_3 = cos\theta$$

После подстановки в интеграл энергии предыдущих выражений:

$$H|_{(2),(3)} = W(\theta, c, j)$$

Ее критические точки соответствуют стационарным движениям рассматриваемой системы

$$\frac{dW}{d\theta} = 0$$

Точки минимума соответствуют устойчивым стационарным движениям.

$$\frac{d^2W}{d\theta^2} > 0$$

19.3 Уравнения Лагранжа с множителями

Предположим, есть дифференциальные связи, наложенные на обобщенные координаты:

$$x_1, \dots, x_{n+k}$$

$$G_j(\dot{\vec{x}}, \vec{x}) = 0 \ (j = 1, \dots, k)$$

Тогда можно ввести множители Лагранжа:

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k$$

Функция Лагранжа:

$$L = L(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{n+k}, x_1, \dots, x_{n+k})$$

Тогда:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial G_j}{\partial \dot{x}_i}$$

Это и есть уравнение Лагранжа с множителями.

Пример (конек Чаплыгина на горизонтальной плоскости):

Тело движется параллельно плоскости таким образом, что скорость некоторой точки тела направлена вдоль фиксированного в теле направления.

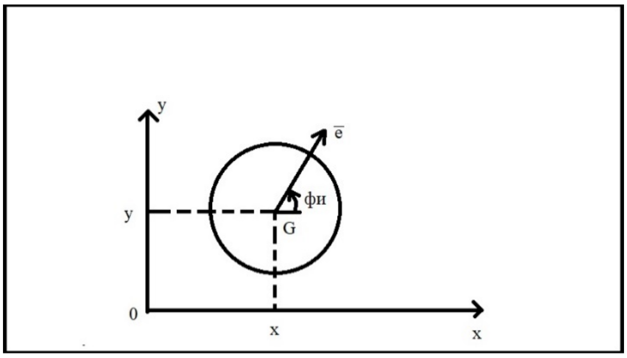

Рис.19.2 Вид на горизонтальную плоскость сверху

$$\vec{e} = (cos\varphi, sin\varphi, 0)$$

$$\vec{v}_G = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$$

$$[\vec{v}_G \times \vec{e}] = 0$$

$\dot{x}sin\varphi - \dot{y}cos\varphi = 0$ - $G(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}, x, y, \varphi)$.

Пусть момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости движения, проходящей через центр масс, равен J. Тогда функция Лагранжа:

$$L = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{J}{2}\dot{\varphi}^2$$

λ – неопределенный множитель Лагранжа.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \lambda \frac{\partial G}{\partial \dot{x}}$$

Если записать в явном виде, то получается: $M\ddot{x} = \lambda sin\varphi$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = \lambda \frac{\partial G}{\partial \dot{y}}$$

$$M\ddot{y} = -\lambda cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \lambda \frac{\partial G}{\partial \dot{\varphi}}$$

$$J\ddot{\varphi} = 0$$

19.4 Пример задачи, где не обойтись без уравнений Лагранжа с неопределенными множителями

Два бревна, расположенные перпендикулярно друг другу. Могут катиться без проскальзывания по плоскости. На этих бревнах лежит еще одно бревно, которое может катиться тоже без проскальзывания. φ_1, φ_2 – углы поворота нижних бревен. x, y – координаты центра масс верхнего бревна. θ – угол поворота верхнего бревна относительно вертикальной оси. φ – угол собственного вращения верхнего бревна. (рис.19.3)

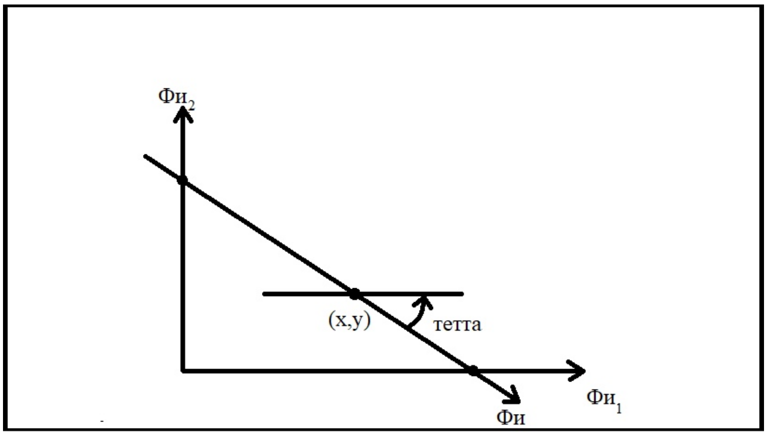

Рис.19.3 Иллюстрация к задаче (бревна обозначены стрелками)

У системы две степени свободы, но не найдутся две переменные, чтобы все записать через них.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ